ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 5ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$\Omega = \{$όλες οι δυνατές 4-άδες που επιλέγονται από 10 παπούτσια χωρίς επανατοποθέτηση & χωρίς ενδιαφέρον για τη διάταξη$\}$

Άρα $|\Omega| = \binom{10}{4}$, όπου κάθε 4-άδα έχει την ίδια πιθανότητα $p = \frac{1}{\binom{10}{4}}$

$E = \{$τουλάχιστον 1 ζευγάρι στην 4-άδα$\}$, δηλ. $E \subset \Omega$

$P(E) = 1 - P(E^c)$, όπου $E^c = \{$κανένα ζευγάρι στην 4άδα$\}$

Θεωρούμε τη διαμέριση των 10 παπουτσιών σε 5 κλάσεις (δηλ. στα 5 διαφορετικά ζευγάρια). Από τα 5 ζευγάρια μπορούμε να επιλέξουμε 4 με $\binom{5}{4}$ τρόπους, ενώ για κάθε τέτοια 4άδα μπορούμε να διαλέξουμε 1 παπούτσι από κάθε κλάση με $\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 2^4$ τρόπους. Άρα, συνολικά έχουμε $\binom{5}{4} \cdot 2^4 = 5 \cdot 2^4$ δυνατές 4-άδες χωρίς κανένα ζευγάρι. Δηλ. $|E^c| = 5 \cdot 2^4$

Επομένως, $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{|E^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5 \cdot 2^4}{\binom{10}{4}} \simeq 0.619$

<u>**2ος Τρόπος**</u>: Διαμέριση σε δεξιά και αριστερά. Κανένα ζευγάρι θα έχουμε εάν επιλέξουμε είτε κανένα δεξί και 4 αριστερά: $\binom{5}{0}\binom{5}{4}$ τρόποι, είτε 1 δεξί και 3 αριστερά από τα υπόλοιπα 4 ζευγάρια: $\binom{5}{1}\binom{4}{3}$ τρόποι, είτε 2 δεξιά και 2 αριστερά » » » 3 » : $\binom{5}{2}\binom{3}{2}$ τρόποι, κ.ο.κ.

Άρα $|E^c| = \binom{5}{0} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{1}\binom{4}{3} + \binom{5}{2}\binom{3}{2} + \binom{5}{3}\binom{2}{1} + \binom{5}{4}\binom{1}{0} = 5 \cdot 2^4$

και επομένως: $P(E) = 1 - \frac{|E^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5 \cdot 2^4}{\binom{10}{4}} \simeq 0.619$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θεωρούμε το σύνολο των στάσεων $S=\{1,2,\ldots,10\}$. Κάθε επιβάτης $1,2,\ldots,6$ αντιστοιχεί σε μια επιλογή ενός στοιχείου του S με επανατοποθέτηση (αφού, γενικά, κάθε δεδομένη στάση μπορεί να επιλεγεί από περισσότερους του ενός επιβάτες). Άρα, συνολικά υπάρχουν 10^6 δυνατοί τρόποι για την έξοδο των επιβατών στις 10 στάσεις. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλέξουμε μια εξάδα διαφορετικών στοιχείων του S. Υπάρχουν $(10)_6$ τέτοιες εξάδες. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $(10)_6/10^6$

__2ος Τρόπος:__ Επιλέγονται 6 διαφορετικές στάσεις από το S. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{10}{6}$ τρόπους. Κάθε τέτοια 6-άδα συνδυάζεται με τους 6 επιβάτες κατά $6!$ τρόπους. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{10}{6}6!}{10^6}=\frac{(10)_6}{10^6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\Omega=\{$δυνατοί τρόποι να μοιραστούν τα χαρτιά σε 4 παίχτες, έτσι ώστε καθένας να έχει 13$\}$

$$|\Omega|=\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}=\frac{52!}{(13!)^4}$$

πλήθος 13άδων που μπορούμε να επιλέξουμε από τα 52 για τον Α

πλήθος 13άδων που μπορούμε να επιλέξουμε από τα υπόλοιπα 39 για τον Β

$E=\{$ο Α δεν έχει άσο$\}$

$F=\{$ο Β δεν έχει άσο$\}$

Δηλαδή, ζητάμε την $P(E|F)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$$|F| = \underbrace{\binom{4}{0}\binom{48}{13}}_{\substack{\text{πλήθος 13άδων} \\ \text{με 0 άσους} \\ \text{για τον Β}}} \underbrace{\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}_{\substack{\text{δυνατοί τρόποι} \\ \text{που μοιράζονται} \\ \text{τα υπόλοιπα 39} \\ \text{χαρτιά στους} \\ \text{υπόλοιπους 3 παίκτες} \\ \text{Α, Γ, Δ}}} = \binom{48}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}$$

$E \cap F = \{$ο Α δεν έχει άσο και ο Β δεν έχει άσο$\}$

$$|E \cap F| = \underbrace{\binom{4}{0}\binom{48}{26}}_{\substack{\text{26άδες} \\ \text{χωρίς άσο} \\ \text{για τους} \\ \text{Α και Β μαζί}}} \underbrace{\binom{26}{13}}_{\substack{\text{Κάθε 26άδα} \\ \text{των Α και Β} \\ \text{μαζί, μπορεί} \\ \text{να διαιρεθεί} \\ \text{σε 13άδες με} \\ \binom{26}{13} \text{ τρόπους}}} \underbrace{\binom{26}{13}\binom{13}{13}}_{\substack{\text{δυνατοί τρόποι} \\ \text{που μοιράζονται} \\ \text{τα υπόλοιπα 26} \\ \text{χαρτιά στους Γ, Δ}}} = \binom{48}{26}\binom{26}{13}\binom{26}{13}$$

Άρα:
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{|E \cap F| / |\underline{\Omega}|}{|F| / |\underline{\Omega}|} = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{\binom{48}{26}\binom{26}{13}}{\binom{48}{13}\binom{39}{13}} =$$

$$= \frac{\binom{35}{13}}{\binom{39}{13}} \simeq 0.182$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρούμε το σύνολο των ενδείξεων ενός ζαριού : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Κάθε ζάρι από τα 3, αντιστοιχεί σε μια επιλογή ενός στοιχείου του S με επανατοποθέτηση. Άρα: $\underline{\Omega} = \{ (\underbrace{_\ _\ _}_{\text{6 επιλογές}}) \} = \{$σύνολο όλων των δυνατών 3άδων ενδείξεων$\}$. Επομένως: $|\underline{\Omega}| = 6^3$

$A = \{$Τουλάχιστον 1 εξάρι$\}$, $B = \{$και τα τρία διαφορετικά$\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (*)$$

Άρα: $B = \{$3άδες με διαφορετικά στοιχεία του $S\}$ $\Rightarrow |B| = (6)_3$

οπότε $P(B) = (6)_3 / 6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$

$A\cap B=\{3$ διαφορετικές ενδείξεις με ένα ακριβώς εξάρι$\}=$

$$=\Big\{\underbrace{\Big(\underline{6},\ \underset{\downarrow\ 5\text{ επιλογές}}{\underline{\text{όχι }6}},\ \underset{\downarrow\ 4\text{ επιλογές}}{\underline{\text{όχι }6}}\Big)}_{20\text{ τριάδες}},\ \underbrace{\Big(\underset{\downarrow\ 5\text{ επιλογές}}{\underline{\text{όχι }6}},\ \underline{6},\ \underset{\downarrow\ 4\text{ επιλογές}}{\underline{\text{όχι }6}}\Big)}_{20\text{ τριάδες}},\ \underbrace{\Big(\underset{\downarrow\ 5\text{ επιλογές}}{\underline{\text{όχι }6}},\ \underline{\text{όχι }6},\ \underset{\downarrow\ 4\text{ επιλογές}}{\underline{6}}\Big)}_{20\text{ τριάδες}}\Big\}$$

Άρα: $|A\cap B|=3\cdot 20=60$, οπότε $P(A\cap B)=\dfrac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\dfrac{60}{6^3}$

Αντικαθιστώντας στην (*), λαμβάνουμε: $P(A\mid B)=\dfrac{60}{6\cdot 5\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$\underline{\Omega}=\{$διατεταγμένες 21άδες $(\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \cdots\ \underset{19}{\_}\ \underset{20}{\_}\ \underset{21}{\_})\}$

$|\Omega|=(52)_{21}$

α) $A=\{$διατεταγμένες 21άδες με 1ο άσο στην 20η θέση$\}$

$B=\{$διατεταγμένες 21άδες με άσο σπαθί στην 21η θέση$\}$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{|A\cap B|}{|A|}$$

Για το $|A|$ έχουμε: [$(48)_{19}$ διατεταγμένες 19άδες] × [4 επιλογές για τον άσο της 20ης θέσης] × [32 επιλογές για το 21ο χαρτί]. Δηλ. $|A|=(48)_{19}\cdot 4\cdot 32$

Για το $|A\cap B|$ έχουμε: [$(48)_{19}$ διατεταγμένες 19άδες] × [3 επιλογές για τον άσο της 20ης θέσης (εκτός άσο σπαθί)] × [1 επιλογή για το 21ο χαρτί].

Δηλ. $|A\cap B|=(48)_{19}\cdot 3\cdot 1$

Άρα: $P(B\mid A)=\dfrac{(48)_{19}\cdot 3\cdot 1}{(48)_{19}\cdot 4\cdot 32}=\dfrac{3}{128}$

β) $\Gamma=\{$διατεταγμένες 21άδες με 2 καρό στην 21η θέση$\}$

$$P(\Gamma\mid A)=\frac{P(A\cap\Gamma)}{P(A)}=\frac{|A\cap\Gamma|}{|A|}$$

Για το $|A\cap\Gamma|$ έχουμε: $[(47)_{19}$ διατεταγμένες 19άδες (εκτός άσων και 2 καρό)$]$ × $[4$ επιλογές για τον άσο της 20ης θέσης$]$ × $[1$ επιλογή για το 21ο χαρτί$]$.

Δηλ. $|A\cap\Gamma| = (47)_{19}\cdot 4\cdot 1$

Άρα $$P(\Gamma\setminus A) = \frac{(47)_{19}\cdot 4\cdot 1}{(48)_{19}\cdot 4\cdot 32} = \frac{29}{48\cdot 32} = \frac{29}{1536}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

$A = \{$άσος στην 1η επιλογή$\}$

$B = \{$άσος στη 2η επιλογή$\}$

$\Gamma_K = \{$ακριβώς K άσοι στην 1η ομάδα, αρχικά$\}$

$$P(B\setminus A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad (*)$$

όπου $$P(A) = P\left[\bigcup_{K=0}^{4}(A\cap\Gamma_K)\right] = \sum_{K=0}^{4} P(A\cap\Gamma_K) = \sum_{K=0}^{4}\left[P(\Gamma_K)\cdot P(A\setminus\Gamma_K)\right]$$

όμως $$P(\Gamma_K) = \frac{\binom{4}{K}\binom{48}{26-K}}{\binom{52}{26}} \quad \text{και} \quad P(A\setminus\Gamma_K) = \frac{K}{26}$$

άρα $$P(A) = \sum_{K=0}^{4}\left[\frac{\binom{4}{K}\binom{48}{26-K}}{\binom{52}{26}}\cdot\frac{K}{26}\right]$$

Αντίστοιχα, $$P(B\cap A) = P\left[\bigcup_{K=0}^{4}(B\cap A\cap\Gamma_K)\right] = \sum_{K=0}^{4}P(B\cap A\cap\Gamma_K) =$$
$$= \sum_{K=0}^{4}\left[P(\Gamma_K)\cdot P(A\setminus\Gamma_K)\cdot P(B\setminus A\cap\Gamma_K)\right]$$

όπου $P(B\setminus A\cap\Gamma_K) = \dfrac{4-(K-1)}{27}$, οπότε $$P(B\cap A) = \sum_{K=0}^{4}\left[\frac{\binom{4}{K}\binom{48}{26-K}}{\binom{52}{26}}\cdot\frac{K}{26}\cdot\frac{5-K}{27}\right]$$

Αντικαθιστώντας στην $(*)$, προκύπτει ότι

$$P(B\backslash A) = \frac{\sum_{k=0}^{4}\left[\binom{4}{k}\binom{48}{26-k} k (5-k)\right]}{27\cdot \sum_{k=0}^{4}\left[\binom{4}{k}\binom{48}{26-k} k\right]} = \frac{43}{459}$$

2ος τρόπος: (περιορισμός του δειγματικού χώρου)

$E = \{$άσος στη 2η επιλογή δεδομένου ότι άσος στην 1η επιλογή$\}$

$\Delta = \{$Το 2ο χαρτί είναι το ίδιο με αυτό που πήραμε κατά την πρώτη επιλογή και ήταν άσος$\}$

$$P(E) = P[(E\cap\Delta)\cup(E\cap\Delta^c)] = P(E\cap\Delta) + P(E\cap\Delta^c) =$$

$$= P(E\backslash\Delta)\, P(\Delta) + P(E\backslash\Delta^c)\cdot P(\Delta^c)$$

όπου $P(\Delta) = 1/27$, $P(\Delta^c) = 26/27$, $P(E\backslash\Delta) = 1$

Μένει να υπολογίσουμε την $P(E\backslash\Delta^c)$, δηλ. στη 2η επιλογή να τραβήξουμε έναν άσο εκ των 26 χαρτιών που υπήρχαν αρχικά στη 2η ομάδα, δεδομένου ότι στην 1η επιλογή τραβήξαμε άσο από την 1η ομάδα. Επομένως, $P(E\backslash\Delta^c) = 3/51$ (οι υπόλοιποι 3 άσοι στα υπόλοιπα 51 χαρτιά), ή πιο απλά $P(E\backslash\Delta^c) = 1/17$

Τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(E) = 1\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{17}\cdot\frac{26}{27} = \frac{17+26}{17\cdot 27} = \frac{43}{459}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$\Omega = \{$σύνολο δυνατών μη-διατεταγμένων 5άδων χωρίς επανατοποθέτηση$\}$

Άρα $|\Omega| = \binom{52}{5}$ και καθε τέτοια 5άδα έχει την ίδια πιθανότητα $q = \binom{52}{5}^{-1}$

α) $E = \{$χέρι με $(10, J, Q, K, A)$ από την ίδια οικογένεια$\} \Rightarrow |E| = 4$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = 4\cdot q$$

β) Σε κάθε οικογένεια υπάρχουν 10 δυνατές 5άδες διαδοχικών χαρτιών, δηλαδή εκείνες που έχουν ως μεγαλύτερο χαρτί 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9 ή 10 ή J ή Q ή K ή A. Επομένως, υπάρχουν $4 \cdot 10 = 40$ δυνατά Φλος και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $40 \cdot q$

γ) Υπάρχουν 13 διαφορετικές επιλογές για την τιμή του X. Για κάθε τέτοια επιλογή υπάρχουν 48 ακόμα χαρτιά από τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε το πέμπτο χαρτί. Επομένως, υπάρχουν συνολικά $13 \cdot 48 = 624$ δυνατά χέρια καρέ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $624 \cdot q$

δ) Έστω $x = A$, $y = Q$. Τότε υπάρχουν $\binom{4}{3}$ δυνατές 3άδες με A και $\binom{4}{2}$ δυνατές 2-άδες με Q που ο συνδυασμός τους δίνει $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ δυνατά χέρια με 3A και 2Q. Γενικά, η επιλογή του ζεύγους (x, y) αντιστοιχεί στην επιλογή διατεταγμένων 2άδων (μιας και π.χ. το ζεύγος (A, Q) αναφέρεται σε 3A, 2Q ενώ το ζεύγος (Q, A) αναφέρεται σε 3Q, 2A) από το σύνολο των 13 τιμών όψης. Άρα, το πλήθος τέτοιων 2άδων (x, y) είναι $(13)_2 = 13 \cdot 12$ και κάθε τέτοια 2άδα δίνει $\binom{4}{3}\binom{4}{2}$ δυνατά χέρια. Επομένως, υπάρχουν $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2} = 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$ χέρια με φουλ, και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $3744 \cdot q$

ε) Διαμέριση του συνόλου στις 4 οικογένειες
Αν $A_1 = \{5 \text{ καρό}\}$, $A_2 = \{5 \text{ σπαθιά}\}$, $A_3 = \{5 \text{ μπαστούνια}\}$, $A_4 = \{5 \text{ κούπες}\}$, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right) = \sum_{k=1}^{4} P(A_k)$, όπου

$$P(A_k) = \frac{\binom{13}{5}\binom{13}{0}\binom{13}{0}\binom{13}{0}}{\binom{52}{5}} = \binom{13}{5} \cdot q \quad \text{για κάθε } k = 1, 2, 3 \text{ ή } 4$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $4 \cdot \binom{13}{5} \cdot q$

στ) Θεωρούμε τη διαμέριση της τράπουλας στις 13 κλάσεις των τιμών όψης. Η επιλογή μιας οποιασδήποτε 5άδας διαδοχικών χαρτιών, χωρίς να μας ενδιαφέρει η οικογένεια [π.χ. (3,4,5,6,7)], έχει πιθανότητα $\dfrac{\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{0}\cdots\binom{4}{0}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{\binom{4}{1}^5}{\binom{52}{5}} = 4^5\cdot q$

Υπάρχουν 10 τέτοιες διαφορετικές 5άδες που μπορούν να ταυτοποιηθούν με βάση το μεγαλύτερο χαρτί τους (5 ή 6 ή … ή A) και οι οποίες είναι ξένες μεταξύ τους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $10\cdot 4^5\cdot q$

ζ) Υπάρχουν 13 δυνατές τιμές όψης για το x και για κάθε τέτοια τιμή υπάρχουν $\binom{4}{3}$ δυνατές 3άδες. Άρα το σύνολο των δυνατών 3άδων (x,x,x) είναι $13\cdot\binom{4}{3}$. Η επιλογή των τιμών (y,z) από τις υπόλοιπες 12 όψεις μπορεί να γίνει με $\binom{12}{2}$ τρόπους (αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των y,z) και για κάθε τέτοιο ζεύγος (y,z) υπάρχουν $\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ δυνατές 2άδες. Άρα, το πλήθος των δυνατών ζευγών (y,z) είναι ίσο με $\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}$, το οποίο σε συνδυασμό με τις δυνατές 3άδες (x,x,x) δίνει $13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1} = 13\cdot\binom{12}{2}\cdot 4^3$ δυνατές 5άδες (x,x,x,y,z) με $x\neq y\neq z\neq x$. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $13\binom{12}{2}\cdot 4^3\cdot q$

η) Υπάρχουν $\binom{13}{2}$ τρόποι επιλογής των τιμών του ζεύγους (x,y) μιας και δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη [π.χ. το ζεύγος (A,Q) είναι ίδιο με (Q,A) αφού και τα δυο αναφέρονται σε 2A, 2Q. Συγκρίνετε με ερώτημα (δ)]. Για κάθε τέτοιο ζεύγος υπάρχουν $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}$ δυνατοί τρόποι για την επιλογή των οικογενειών των δυάδων (x,x) και (y,y), και 44 επιλογές (από τα υπόλοιπα χαρτιά) για το z. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 44\cdot q = \binom{13}{2}\cdot 36\cdot 44\cdot q$

θ) Υπάρχουν 13 δυνατές τιμές όψης για το w και για κάθε τέτοια τιμή υπάρχουν $\binom{4}{2}$ δυάδες (w,w). Οι τιμές όψεις των x, y, z μπορούν να επιλεγούν μεταξύ των υπολοίπων 12 χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους, οπότε αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{12}{3}$ τρόπους. Η οικογένεια κάθε τέτοιας όψης μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους. Επομένως, υπάρχουν $\binom{12}{3} \cdot 4^3$ δυνατές 3άδες (x,y,z) με $w \neq x \neq y \neq z \neq w \neq y$ που συνδυαζόμενες με τις $13 \cdot \binom{4}{2}$ 2άδες (w,w) δίνουν $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$ δυνατά χέρια (w,w,x,y,z) και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3 \cdot q$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$A_j = \{j$ ακριβώς χαρτιά στην 5άδα να είναι μικρότερα του 7$\}$

$B_k = \{k$ » » » » » » μεγαλύτερα του 10$\}$

Ζητάμε την πιθανότητα $P(A_0 \mid \bigcup_{k=1}^{5} B_k)$

Όμως $\bigcup_{k=1}^{5} B_k = \{$Τουλάχιστον ένα χαρτί στην 5άδα είναι μεγαλύτερο του 10$\} =$

$= \{$όχι 0 χαρτιά στην 5άδα είναι μεγαλύτερα του 10$\} =$

$= B_0^c$

Οπότε: $P(A_0 \mid \bigcup_{k=1}^{5} B_k) = P(A_0 \mid B_0^c) = \dfrac{P(A_0 \cap B_0^c)}{P(B_0^c)} = \dfrac{P(A_0) - P(A_0 \cap B_0)}{1 - P(B_0)}$

Διαμέριση της τράπουλας:
- Χαρτιά $\{2,3,4,5,6\}$, πλήθους 20
- Χαρτιά $\{7,8,9,10\}$, πλήθους 16
- Χαρτιά $\{J,Q,K,A\}$, πλήθους 16

$$P(A_0) = \frac{\binom{20}{0}\binom{32}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{32}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad P(B_0) = \frac{\binom{36}{5}\binom{16}{0}}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(A_0 \cap B_0) = \frac{\binom{20}{0}\binom{16}{5}\binom{16}{0}}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{52}{5}}$$

οπότε $P(A_0 | B_0^c) = \dfrac{\binom{32}{5} - \binom{16}{5}}{\binom{52}{5} - \binom{36}{5}}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 9}}$

α) Διαμέριση του πληθυσμού των r ατόμων στην ομάδα των κ ατόμων και σε αυτήν των υπολοίπων (r−κ) ατόμων.

Ζητούμενη πιθανότητα: $P = \dfrac{\binom{\kappa}{0}\binom{r-\kappa}{n}}{\binom{r}{n}} = \dfrac{\binom{r-\kappa}{n}}{\binom{r}{n}} = \dfrac{\frac{(r-\kappa)_n}{\cancel{n!}}}{\frac{(r)_n}{\cancel{n!}}} = \dfrac{(r-\kappa)_n}{(r)_n}$

β) Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με $\begin{cases} \text{"επιτυχία"} = \{\text{επιλογή ενός από τα κ άτομα}\} \\ \text{"αποτυχία"} = \{\text{επιλογή ενός από τα υπόλοιπα (r−κ) άτομα}\} \end{cases}$

Πιθανότητα "επιτυχίας" σε κάθε δοκιμή: $p = \kappa / r$

$B_i = \{i$ ακριβώς "επιτυχίες" στις n δοκιμές$\}$

$$P(B_i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \binom{n}{i}\left(\frac{\kappa}{r}\right)^i \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right)^{n-i}$$

$$\Rightarrow P(B_0) = \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right)^n$$

<u>2ος Τρόπος</u>: $A_i = \{$μη-επιλογή ενός εκ των κ βώλων στην i-οστή δοκιμή$\}$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \quad [A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ ανεξάρτητα}]$$

$$= \left(\frac{r-\kappa}{r}\right)^n = \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right)^n$$