ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ $3^{ου}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$\boxed{\begin{matrix}10M\\5A\end{matrix}}$

$A_1 = \{$ο πρώτος βώλος είναι άσπρος$\}$

$A_2 = \{$ο δεύτερος » » »$\}$

$M_1 = \{$ο πρώτος βώλος είναι μαύρος$\} = A_1^c$

$M_2 = \{$ο δεύτερος » » »$\} = A_2^c$

Άρα, ζητούμε την πιθανότητα $P(M_1 \backslash A_2)$

Όμως: $$P(M_1 | A_2) = \frac{P(M_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \qquad (1)$$

$$P(M_1 \cap A_2) = P(A_2 | M_1) \cdot P(M_1) \qquad (2)$$

$$P(A_2) = P[(A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap M_1)] = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap M_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | M_1) \cdot P(M_1) \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2) και (3) στην (1), λαμβάνουμε:

$$P(M_1 | A_2) = \frac{P(A_2 | M_1) \cdot P(M_1)}{P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|M_1) \cdot P(M_1)}$$

(τύπος <u>Bayes</u>)

Έχουμε: $P(M_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $P(A_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$P(A_2 | A_1) = \frac{7}{17}$, $P(A_2 | M_1) = \frac{5}{17}$

άρα: $$P(M_1 | A_2) = \frac{\frac{5}{17} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{17} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{17} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{10}{7+10} = \frac{10}{17}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$N_1 = \{$διάλεξα το αμερόληπτο νόμισμα$\}$

$N_2 = \{$διάλεξα το νόμισμα που έχει και στις 2 πλευρές κεφάλι$\}$

$N_3 = \{$διάλεξα το κάλπικο νόμισμα$\}$

$K = \{$ήρθε κεφάλι όταν έριξα το νόμισμα που τράβηξα$\}$

Ζητούμε την $P(N_2 \setminus K)$

Τύπος Bayes: $P(N_2 \setminus K) = \dfrac{P(N_2 \cap K)}{P(K)} =$

$$= \frac{P(K \setminus N_2)\, P(N_2)}{P(K \setminus N_1)\cdot P(N_1) + P(K \setminus N_2)\cdot P(N_2) + P(K \setminus N_3)\cdot P(N_3)}$$

η οποία επειδή: $P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = 1/3$, και

$P(K \setminus N_1) = \frac{1}{2}$, $P(K \setminus N_2) = 1$, $P(K \setminus N_3) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, δίνει

$$P(N_2 \setminus K) = \frac{1 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + \frac{3}{4} \cdot 1/3} = \frac{4}{9}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) $A_i = \{$επιλογή άσπρου βώλου από το δοχείο $i\}$

όπου $i = 1,2,3$ για το δοχείο I, II, III αντίστοιχα

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$ [επειδή A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα]

$P(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $P(A_3) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Άρα: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$

β) $A = \{\text{επιλογή άσπρου βώλου}\}$

$\Delta_i = \{\text{επιλογή δοχείου } i\}$

$$P(A) = P\left[(A \cap \Delta_1) \cup (A \cap \Delta_2) \cup (A \cap \Delta_3)\right] = P(A \cap \Delta_1) + P(A \cap \Delta_2) + P(A \cap \Delta_3) =$$

$$= P(\Delta_1)\, P(A \setminus \Delta_1) + P(\Delta_2)\, P(A \setminus \Delta_2) + P(\Delta_3)\, P(A \setminus \Delta_3)$$

όπου $P(\Delta_1) = P(\Delta_2) = P(\Delta_3) = 1/3$

και $P(A \setminus \Delta_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \setminus \Delta_2) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \setminus \Delta_3) = \dfrac{2}{3}$

άρα: $P(A) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + 1\right) = \dfrac{1}{2}$

γ) $$P(\Delta_1 \setminus A) = \frac{P(\Delta_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\Delta_1)\, P(A \setminus \Delta_1)}{P(A)} = \frac{1/3 \;\, 1/2}{1/2} = \frac{1}{3}$$

δ) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 \setminus A_1)\, P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2)$ [πολλαπλ. κανόνας]

Όμως: $P(A_1) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $P(A_2 \setminus A_1) = \dfrac{6}{16}$, $P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2) = \dfrac{11}{16}$

μιας και:

5A, 5M	6A, 10M	11A, 5M
δοχείο I πριν A_1	δοχείο II πριν A_2 και δεδομένου A_1	δοχείο III πριν A_3 και δεδομένου $A_1 \cap A_2$

άρα: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{16} \cdot \dfrac{11}{16} = \dfrac{33}{256}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$M = \{\text{μαραμένο φυτό}\}$, $\quad \Pi = \{\text{ο γείτονας ποτίζει το φυτό}\}$

α) $P(M^c) = P[(M^c \cap \Pi) \cup (M^c \cap \Pi^c)] = P(M^c \cap \Pi) + P(M^c \cap \Pi^c) =$

$$= P(\Pi)\,P(M^c \mid \Pi) + P(\Pi^c)\,P(M^c \mid \Pi^c)$$

όπου $P(\Pi) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$, $\quad P(\Pi^c) = 1 - P(\Pi) = \frac{1}{10}$

$$P(M^c \mid \Pi) = 1 - 0.15 = \frac{17}{20}, \quad P(M^c \mid \Pi^c) = 1 - 0.8 = 0.2 = 1/5$$

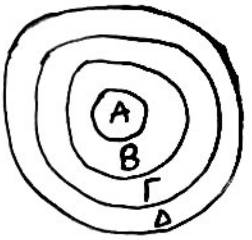
Άρα $P(M^c) = \frac{9}{10} \cdot \frac{17}{20} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{157}{200} = 0.785$

β) $P(\Pi^c \mid M) = \dfrac{P(\Pi^c \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(M \mid \Pi^c)\,P(\Pi^c)}{1 - P(M^c)}$

όπου $P(M \mid \Pi^c) = 0.8 = 4/5$

άρα: $P(\Pi^c \mid M) = \left(\dfrac{\frac{4}{5}\,\frac{1}{10}}{1 - \frac{157}{200}} \right) = \dfrac{16}{43}$

ΑΣΚΗΣΗ 5



$A = \{\text{Βολή στο δίσκο ακτίνας } 1/4\}$

$B = \{\text{Βολή στη ζώνη μεταξύ των ακτινών } 1/4 \text{ και } 1/2\}$

$\Gamma = \{$ >> >> >> >> >> >> $1/2$ και $3/4\}$

$\Delta = \{$ >> >> >> >> >> >> $3/4$ και $1\}$

$$P(A) = \frac{\text{επιφάνεια } A}{\text{επιφάνεια στόχου}} = \frac{\pi (1/4)^2}{\pi (1)^2} = (1/4)^2 = \frac{1}{16}$$

ομοίως: $P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = 3/16$

$P(\Gamma) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$, $\quad P(\Delta) = 1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

α) Ακολουθία $n=10$ δοκιμών Bernoulli με δυνατά αποτελέσματα: $\begin{cases} \text{"επιτυχία"} = \text{βολή εντός } \Gamma \text{ ή } \Delta \\ \text{"αποτυχία"} = \text{βολή εκτός } \Gamma \text{ και } \Delta \end{cases}$

και πιθανότητα "επιτυχίας" σε κάθε δοκιμή: $p = P(\Gamma \cup \Delta) =$

$= P(\Gamma) + P(\Delta)$ μιας και τα Γ, Δ είναι ξένα μεταξύ τους

άρα $p = \frac{5}{16} + \frac{7}{16} = \frac{3}{4}$

$Q_k = \{k$ ακριβώς "επιτυχίες" σε n δοκιμές$\}$

$$P(Q_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

$$P(\text{το πολύ 3 βολές "επιτυχημένες"}) = P\left(\bigcup_{k=0}^{3} Q_k\right) = \sum_{k=0}^{3} P(Q_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k} = \frac{919}{4^9}$$

β) Μειώνουμε το δειγματικό χώρο θεωρώντας ως δεδομένο ότι 5 βολές πετυχαίνουν την περιοχή $A \cup B$. Οπότε έχουμε μια ακολουθία $n=5$ δοκιμών Bernoulli με δυνατά αποτελέσματα:

$\begin{cases} \text{"επιτυχία"} = \text{βολή εντός } A \\ \text{"αποτυχία"} = \text{βολή εντός } B \end{cases}$

$A_k = \{k$ ακριβώς "επιτυχίες" σε $n=5$ δοκιμές$\}$

άρα: $P(A_k) = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$ με πιθανότητα "επιτυχίας" σε κάθε δοκιμή $p = \frac{\text{επιφάνεια } A}{\text{επιφάνεια } A \cup B} = \frac{\pi (1/4)^2}{\pi (1/2)^2} = \frac{1}{4}$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{5} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{5} A_k^c\right) = 1 - P(A_0) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 =$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Στην ουσία, ψάχνουμε το πλήθος των διαφορετικών δυάδων που μπορούμε να σχηματίσουμε από ένα σύνολο 20 ατόμων χωρίς επανατοποθέτηση (κάθε άτομο δεν χαιρετά τον εαυτό του) και χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξη των ατόμων [δηλαδή, η χειραψία που αντιπροσωπεύεται από ένα ζεύγος ατόμων (A,B) είναι ίδια με την (B,A)]. Άρα, θα έχουμε:

$$\binom{20}{2} = \frac{(20)_2}{2!} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190 \text{ χειραψίες}$$

2ος τρόπος

Ο πρώτος άνθρωπος χαιρετά 19 άλλους, ο δεύτερος 18 άλλους, ο τρίτος 17 κ.ο.κ. Επομένως, έχω συνολικά $19+18+17+\ldots+1$ (ο προτελευταίος μόνον τον τελευταίο). Το άθροισμα αυτό είναι άθροισμα όρων αριθμητικής σειράς με διαφορά 1, που ως γνωστόν δίδεται από την έκφραση: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, η οποία για $n=19$ δίνει $\frac{19\cdot 20}{2} = 190$ χειραψίες.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Οι λέξεις θα είναι είτε της μορφής ΣΦΣΦΣΦ...Σ είτε της μορφής ΦΣΦΣΦΣ...Φ. Για τα φωνήεντα έχουμε 7 επιλογές και για τα σύμφωνα (Σ) έχουμε 17 επιλογές. Άρα για την πρώτη μορφή, θα έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \Sigma & \Phi & \Sigma & \Phi & \Sigma & \Phi & \ldots & \Sigma \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 17 \text{ επιλογές} & 7 & 17 & 7 & 17 & 7 & & 17 \text{ επιλογές} \end{array}\right]$$

, δηλ. $17\cdot 7\cdot 17\cdot 7\cdot 17\cdot 7\cdot\ldots\cdot 17 = 17^9\cdot 7^8$

και αντίστοιχα για τη δεύτερη μορφή θα έχουμε: $17^8\cdot 7^9$ λέξεις

Επομένως, συνολικά είναι $17^9\cdot 7^8 + 17^8\cdot 7^9 = 24\cdot(17^8\cdot 7^8)$ λέξεις

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Έχουμε για 6 άτομα, συνολικά $6! = 720$ διαφορετικές διατάξεις (τρόπους που τα βάζουμε στη σειρά).

β) Είτε θα είναι πρώτα τα 3 κορίτσια, είτε πρώτα τα 3 αγόρια. Δηλαδή είτε ΚΚΚΑΑΑ είτε ΑΑΑΚΚΚ. Τα κορίτσια μπορούν να μπουν με 3! τρόπους και αντίστοιχα με 3! τρόπους τα αγόρια. Άρα, συνολικά $(3!)\cdot(3!)\cdot 2 = 72$ τρόπους.

γ) Θεωρούμε τα 3 κορίτσια και τη 1 τριάδα αγοριών ως 4 "αντικείμενα" τα οποία μπορούν να διαταχθούν με 4! τρόπους. Για κάθε τέτοια διάταξη, υπάρχουν 3! τρόποι να διαταχθούν τα 3 αγόρια. Άρα συνολικά έχουμε:

$4! \cdot 3!$ τρόπους