

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009

Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

9^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (2x, y)$ είναι γραμμική απεικόνιση και βρείτε τον $\ker f$. Είναι η f “1-1”;

Άσκηση 2: Δείξτε ότι η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (2x, y^3)$ δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 3: Βρείτε πίνακα A στον οποίο αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (2x + y, 3y, x - y)$.

Άσκηση 4: Εξηγήστε γιατί μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ δεν μπορεί να είναι “επί”.

Άσκηση 5: Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $f: V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\dim V = \dim W$, τότε δείξτε ότι η f είναι “1-1” αν και μόνο αν η f είναι “επί”.

Άσκηση 6: Βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση η οποία απεικονίζει τα διανύσματα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ στα διανύσματα $(1, 5, 2, 9)$, $(2, 6, 4, 7)$, $(\sqrt{3}, 3, 7, 1)$, αντίστοιχα.

Άσκηση 7: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V . Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ με: $\vec{v}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3$, $\vec{v}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$. Να βρεθεί μια βάση του χώρου $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

Άσκηση 8: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V . Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ με: $\vec{v}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3$, $\vec{v}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, $\vec{v}_3 = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$. Δείξτε ότι το $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ αποτελεί βάση του V .

Άσκηση 9: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V . Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ με: $\vec{v}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3$, $\vec{v}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$. Έστω επίσης: $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 + \vec{v}_3$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_1$. Δείξτε ότι $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

Άσκηση 10: Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και οι διατεταγμένες βάσεις τους $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, $\mathbb{B}' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3, \vec{b}'_4\}$ αντίστοιχα. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow W$ με: $f(\vec{b}_1) = \vec{b}'_1 + \vec{b}'_2$, $f(\vec{b}_2) = 2\vec{b}'_1 + \vec{b}'_3$, $f(\vec{b}_3) = 3\vec{b}'_1 + \vec{b}'_2 + \vec{b}'_3$. Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\text{Im } f$.

Άσκηση 11: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{F}$ και $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V . Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow V$ με: $f(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $f(\vec{b}_2) = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3$, $f(\vec{b}_3) = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$.

α) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς τη $\mathbb{B}$ και δείξτε ότι υπάρχει η f^{-1} .

β) Βρείτε τον πίνακα της f^{-1} ως προς τη $\mathbb{B}$.

Άσκηση 12: Έστω η γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- α) Δείξτε ότι η απεικόνιση είναι “επί”.
- β) Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $L_A(\vec{v}) = (-2, 5)$
- γ) Βρείτε τον πυρήνα $\ker(L_A)$.

Άσκηση 13: Δίνεται ο υπόχωρος $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$ του $\mathbb{R}^2$.

- α) Βρείτε μια βάση του W και τη διάστασή του.
- β) Βρείτε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ έτσι ώστε $W = \mathcal{N}(A)$.
- γ) Βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ έτσι ώστε $W = \mathcal{N}(B)$.
- δ) Βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $W = \ker f$.

Άσκηση 14: Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος $\mathbb{F}$. Δείξτε ότι εάν $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k\}$ είναι μια βάση του V και $f : \mathbb{B} \rightarrow W$ μια απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : V \rightarrow W$ τέτοια ώστε $L(\vec{b}_i) = f(\vec{b}_i), \forall \vec{b}_i \in \mathbb{B}$.

Άσκηση 15: Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(1, 1, 1) = (1, 0, 1)$, $f(0, 1, -1) = (2, 1, 3)$, $f(1, 2, 1) = (1, 1, 2)$ και

- α) Βρείτε τον πίνακα A της απεικόνισης.
- β) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- γ) Βρείτε τον πυρήνα της f .
- δ) Βρείτε έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 τέτοιον ώστε $f(V) = \text{Im } f$.
- ε) Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(\vec{v}) = (6, -1, 5)$.
- στ) Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως 2 τέτοιον ώστε η εικόνα $f(W)$ να είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το διάνυσμα $(6, -1, 5)$.

Άσκηση 16: Εξετάστε αν οι απεικονίσεις που ορίζουν οι παρακάτω πίνακες είναι “1-1” ή “επί”. Επίσης, υπολογίστε τον αριστερό ή δεξιό αντίστροφο τους στις περιπτώσεις που αυτοί υπάρχουν.

$$\alpha) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \beta) B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma) C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \delta) D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 9ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

✓ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ με $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} 1) f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = (2x_1, y_1) + (2x_2, y_2) = \\ &= (2x_1 + 2x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), y_1 + y_2) = f((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) \\ &= f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2), \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lambda f(\vec{v}_1) &= \lambda f(x_1, y_1) = \lambda (2x_1, y_1) = (2\lambda x_1, \lambda y_1) = f(2x_1, \lambda y_1) = \\ &= f(2\vec{v}_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \forall \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γραμ. απεικόνιση

$$\text{Έστω } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } f(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Άρα } \ker f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow f \text{ είναι 1-1,}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

✓ $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lambda f(\vec{v}) &= \lambda (2x, y^2) = (2\lambda x, \lambda y^2) \\ f(\lambda \vec{v}) &= f(2x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x, \lambda^3 y^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda f(\vec{v}) \neq f(\lambda \vec{v}) \text{ (για } \lambda \neq 1)$$

Άρα η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα, τότε:

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (2, 0, 1) = 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1) = (1, 3, -1) = \vec{e}'_1 + 3\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3$$

Άρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ως προς τις B και B'

Εvaluation: $\begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \\ x-y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν A ο πίνακας της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, τότε έχουμε:

$$\{ \eta \ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ είναι "ηπιί"} \} \Leftrightarrow \{ \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ τ.ω. } \vec{w} = f(\vec{v}) \} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{ \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ τ.ω. } \vec{w} = A\vec{v} \} \Leftrightarrow \{ \text{το σύστημα } A\vec{x} = \vec{w} \text{ έχει λύση} \}$$

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \} \Leftrightarrow R(A) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim R(A) = 3 \text{ που είναι } \underline{\underline{\alphaδύνατον}}$$

$$\text{αφού } A \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ έχει 2 στήλες, οπότε } \dim R(A) \leq 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω $\dim V = \dim W$.

$$\begin{aligned} \{f: V \rightarrow W \text{ είναι "1-1"}\} &\Leftrightarrow \{\ker f = \{\vec{0}\}\} \Leftrightarrow \{\dim(\ker f) = 0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dim V = \dim(\operatorname{Im} f) \xLeftrightarrow[\dim W = \dim V] \dim W = \dim(\operatorname{Im} f) \xLeftrightarrow[\operatorname{Im} f \subseteq W] W = \operatorname{Im} f \\ &\Leftrightarrow \{\forall \vec{w} \in W, \exists \vec{v} \in V \text{ τ.ω. } f(\vec{v}) = \vec{w}\} \Leftrightarrow \{f: V \rightarrow W \text{ είναι "επι"}\} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η απεικόνιση είναι $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

Τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ αποτελούν την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα:

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= (1, 5, 2, 9) \\ f(\vec{e}_2) &= (2, 6, 4, 7) \\ f(\vec{e}_3) &= (\sqrt{3}, 3, 7, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ως προς τις κανονικές} \\ \text{βάσεις των } \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Τα διανύσματα συντεταγμένων των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ ως προς την $\mathcal{B}$ είναι $(1, 1, 2)$, $(1, 0, 1)$ και $(2, 1, 3)$ αντίστοιχα.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ με γραμμές αυτά τα διανύσματα συντεταγμένων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow (+)]{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\leftarrow (+)]{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα $\{\text{μια βάση του } \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle\} = \{\text{μια βάση του } R(A^T)\} = \{\text{μια βάση του } R(U^T)\} =$
 $= \{(1, 1, 2), (0, -1, -1)\}$ ως προς την $\mathcal{B}$

δηλ. $\{\text{μια βάση του } \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$
 με $\vec{w}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$ και $\vec{w}_2 = -\vec{b}_2 - \vec{b}_3$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Η $\mathbb{B}$ έχει 3 διανύσματα, άρα $\dim V = 3$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ως προς $\mathbb{B}$

Έχουμε: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$

Άρα, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και επειδή $\dim V = 3$ το $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι μια βάση του V

ΑΣΚΗΣΗ 9

Τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ προκύπτουν από γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.
(1)

Άρα $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle \subseteq \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\dim(\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle) = \dim(\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle)$
(βλ. Άσκηση 178(ii), φύλλο 50)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ο πίνακας με γραμμές τις συντ/γμένες των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ως προς $\mathbb{B}$, δηλ. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = R(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)(-2) \\ \downarrow (+) \\ \leftarrow (+)}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ \downarrow (+)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Άρα: $\dim(\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle) = \dim R(A^T) = r(A) = 2$

$$\text{Επίσης: } \vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3 - 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3 = -\vec{b}_1 - \vec{b}_3$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3 - \vec{b}_1 - \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3 + 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_3$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$$

$$\text{Έστω } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2 \downarrow (+) \\ \leftarrow (+)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\leftarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $\dim(\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle) = \dim R(B^T) = r(B) = 2$

Δηλ. $\dim(\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle) = \dim(\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle)$, οπότε λόγω της (1)

16 ΧΥΕΙ ΟΤΙ $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ο πίνακας A της απεικόνισης ως προς τις βάσεις B, B' χαρακτηρίζεται χρησιμοποιώντας ως βήτες τις συντεταγμένες των $f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), f(\vec{b}_3)$ ως προς την B' . Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ (+)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1/2 \\ (+)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$\{\text{Βάση του } \text{Im } f\} = \{\text{Βάση του } R(A)\} = \{\text{βήτες } A \text{ που αντιστοιχούν στις βήτες του } U \text{ με τους οδηγούς}\} = \{1, 2, \text{βήτη του } A\} =$
 $= \{(1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0)\}$ ως προς την B' . Δηλαδή,

$$\{\text{μία Βάση του } \text{Im } f\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$$

$$\text{με } \vec{w}_1 = \vec{b}'_1 + \vec{b}'_2, \quad \vec{w}_2 = 2\vec{b}'_1 + \vec{b}'_3$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{\text{Βάση του } \text{ker } f\} = \{\text{Βάση του } N(A)\} = \{(-1, -1, 1)\}$ ως προς την B

δηλ. $\{\text{Βάση του } \text{ker } f\} = \{\vec{v}\}$ με $\vec{v} = -\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) Ο πίνακας της f ως προς τη βάση B σχηματίζεται χρησιμοποιώντας ως στήλες τις συντεταγμένες των $f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), f(\vec{b}_3)$ ως προς B .

Άρα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\{ \exists f^{-1} \text{ υπάρχει} \} \Leftrightarrow \{ \exists A^{-1} \} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Έχουμε: $\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 7 = 5 \neq 0$

Άρα $\exists f^{-1}$

β) Ο πίνακας της $f^{-1}: V \rightarrow V$ ως προς B είναι ο A^{-1} . Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αναλοισμής Gauss-Jordan έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} (-2) & (-1/2) \\ (+) & \\ (+) & \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} (-1/2) \\ (+) \end{matrix}} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} (+) \\ (+) & 8 \\ (-2) \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} (+) \\ 3/5 \end{matrix}} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6/5 & -4/5 & 14/5 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot (1/2) \\ \cdot (-1/5) \\ \cdot (-2) \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άρα $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ -2/5 & 3/5 & -8/5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

$$\alpha) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xleftarrow{\begin{smallmatrix} (-2) \\ (+) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$r(A) = 2 = m \Leftrightarrow L_A \text{ είναι "επί",}$$

$\beta)$ Έστω $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε:

$$L_A(\vec{v}) = (-2, 5) \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 - 2(-2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 9 \Leftrightarrow x_2 = 9 - x_3 \\ x_1 + x_3 = -2 \Leftrightarrow x_1 = -2 - x_3 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 - x_3 \\ 9 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mu\epsilon \quad x_3 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{π.χ. } \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{για } x_3 = 1)$$

$$\gamma) \ker(L_A) = N(A)$$

Από τη μορφή του $\vec{v}$ στην εξίσωση (1), όπου x_3 είναι ελεύθερη μεταβλητή, προκύπτει ότι η γενική λύση της ομογενούς $A\vec{x} = \vec{0}$ είναι η: $x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα $\ker(L_A) = N(A) = \langle (-1, -1, 1) \rangle$

ΑΣΚΗΣΗ 13

$\alpha)$ $\forall (x, y) \in W$ έχουμε $(x, y) = (2y, y) \Leftrightarrow (x, y) = y(2, 1)$ με $y \in \mathbb{R}$
 δηλ. $W = \langle (2, 1) \rangle$. Άρα $\dim W = 1$ και μια βάση του W είναι
 το διάνυσμα $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

β) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & b \end{bmatrix}$. Θα πρέπει $\dim N(A) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 2 - 1 \Leftrightarrow r(A) = 1$
 και επίσης $A\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\alpha + b = 0 \Leftrightarrow b = -2\alpha$

Επομένως: $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha \end{bmatrix}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (πρέπει $\alpha \neq 0$ έτσι ώστε $r(A) = 1$)
 π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$

γ) Ένας πίνακας $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με γραμμικά ανεξάρτητα του $\begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha \end{bmatrix}$
 (με $\alpha \neq 0$) έχει $N(B) = N(A)$ μιας και σε τέτοια περίπτωση οι
 2 εξισώσεις του συστήματος $B\vec{x} = \vec{0}$ έχουν τις ίδιες λύσεις, οπότε
 το σύνολο λύσεων της $A\vec{x} = \vec{0}$ ταυτίζεται με εκείνο του $B\vec{x} = \vec{0}$.
 Άρα, π.χ. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

δ) Η f αντιστοιχεί σε ένα πίνακα $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με $\ker f = N(C) = W$
 Άρα $C = A = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha \end{bmatrix}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και επομένως:
 $f(x, y) = C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha(x - 2y)$
 π.χ. $f(x, y) = x - 2y$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Αφού $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k\}$ είναι βάση του V , $\forall \vec{v} \in V$ υπάρχουν μοναδικά
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε: $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_k \vec{b}_k$ (1)

Ορίσαμε $L(\vec{v}) = \lambda_1 f(\vec{b}_1) + \lambda_2 f(\vec{b}_2) + \dots + \lambda_k f(\vec{b}_k)$. Από τη μοναδικότητα

του γραμμικού συνδυασμού στην (1), συνεπάγεται ότι $\forall \vec{v} \in V$, $\exists$ μοναδικό $L(\vec{v})$

και συνεπώς η L είναι απεικόνιση. Επίσης είναι γραμμική, αφού:

$$\begin{aligned} 1) L(\lambda \vec{v}) &= \lambda \lambda_1 f(\vec{b}_1) + \lambda \lambda_2 f(\vec{b}_2) + \dots + \lambda \lambda_k f(\vec{b}_k) = \\ &= \lambda (\lambda_1 f(\vec{b}_1) + \lambda_2 f(\vec{b}_2) + \dots + \lambda_k f(\vec{b}_k)) = \lambda L(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

2) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, $\exists c_1, c_2, \dots, c_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{F}$ τ.ω.

$$\vec{v}_1 = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_k \vec{b}_k, \quad \vec{v}_2 = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \dots + \mu_k \vec{b}_k$$

$$\begin{aligned} \text{και: } L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= (c_1 + \mu_1) f(\vec{b}_1) + (c_2 + \mu_2) f(\vec{b}_2) + \dots + (c_k + \mu_k) f(\vec{b}_k) = \\ &= c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \dots + c_k f(\vec{b}_k) + \\ &\quad + \mu_1 f(\vec{b}_1) + \mu_2 f(\vec{b}_2) + \dots + \mu_k f(\vec{b}_k) = L(\vec{v}_1) + L(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι η L είναι μοναδική, θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση $M: V \rightarrow W$ τ.ω. $M(b_i) = f(b_i) \quad \forall b_i \in B$ (με $i=1, 2, \dots, k$)

Τότε $\forall v \in V$ ισχύει η (1) και επομένως:

$$\begin{aligned} M(\vec{v}) &= M(\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_k \vec{b}_k) = \lambda_1 M(\vec{b}_1) + \lambda_2 M(\vec{b}_2) + \dots + \lambda_k M(\vec{b}_k) = \\ &= \lambda_1 f(\vec{b}_1) + \lambda_2 f(\vec{b}_2) + \dots + \lambda_k f(\vec{b}_k) = L(\vec{v}) \end{aligned}$$

Άρα $M=L$ και η L είναι μοναδική.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Έστω $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ο πίνακας με γραμμές τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$
 $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$ και $\vec{v}_3 = (1, 2, 1)$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Επομένως, τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γρ. ανεξάρτητα και (επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$) αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άρα, σύμφωνα με την άσκηση 14, $\exists$ μοναδική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τ.ω. $f(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, $f(\vec{v}_3) = \vec{w}_3$ όπου $\vec{w}_1 = (1, 0, 1)$
 $\vec{w}_2 = (2, 1, 3)$, $\vec{w}_3 = (1, 1, 2)$

α) Ξέρουμε ότι $f(\vec{v}_1) = (1, 0, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $f(\vec{v}_2) = (2, 1, 3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$,
 $f(\vec{v}_3) = (1, 1, 2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, όπου $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, και επιπλέον ότι $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ως προς την } B \text{ και την κανονική βάση } B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

Για να βρούμε τον πίνακα A της f ως προς την κανονική βάση B' εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(\vec{v}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \Rightarrow f(1, 1, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \Rightarrow f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad (1)$$

$$f(\vec{v}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \Rightarrow f(0, 1, -1) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \Rightarrow f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \quad (2)$$

$$f(\vec{v}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \Rightarrow f(1, 2, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \Rightarrow f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad (3)$$

$$A_{B' \leftarrow \{(1), (2), (3)\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας A της f ως προς την κανονική βάση είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \leftarrow (+) \\ \leftarrow (+) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1/3 & (-2/3) \end{smallmatrix}} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\downarrow (+)]{(-1)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$$\{\text{Βάση } \text{Im} f\} = \{\text{Βάση του } R(A)\} = \{\text{στήλες } A \text{ που αντιστοιχούν στις στήλες του } U \text{ με τους οδηγούς}\} = \{1\text{η}, 2\text{η στήλη του } A\} =$$

$$= \{(3, -1, 2), (0, 1, 1)\} \text{ ως προς την κανονική βάση του } \mathbb{R}^3.$$

Οπότε, η εικόνα της f είναι το επίπεδο των διανυσμάτων $(3, -1, 2)$ και $(0, 1, 1)$.

$$\gamma) \quad f(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{2}{3}x_3 \\ 3x_1 = 2x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

$\{\text{Βάση του } \text{Ker} f\} = \{\text{Βάση του } N(A)\} = \{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα, ο πυρήνας της f είναι η ευθεία του διανύσματος $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

5) Κάθε διάνυσμα $\vec{w}$ του $\text{Im} f$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του $\text{Im} f$ που υπολογίστηκαν στο ερώτημα β. Δηλαδή

$$\vec{w} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ με } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{w} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w} = A \left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \vec{w} = f(\vec{v})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{v}}$

Άρα $\forall \vec{w} \in \text{Im} f, \exists \vec{v} \in \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$

τέτοιο ώστε $\vec{w} = f(\vec{v})$

Επίσης $\dim(\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle) = 2$ αφού τα δύο αυτά διανύσματα είναι γραμ. ανεξάρτητα. Άρα, ο ζητούμενος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $V = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$

$$\varepsilon) f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{αναλοισιφή}} \cup \vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{2}{3}x_3 \\ 1 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

π.χ. για $x_3=1$, έχουμε $\vec{v} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$6\tau) \quad \forall \vec{w} \in W, \text{ θα υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \text{ τ.ω. } f(\vec{w}) = \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\vec{w} = \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow U\vec{w} = \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{w} = \begin{bmatrix} 2\lambda + \frac{2}{3}x_3 \\ \lambda + \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα: } \vec{w} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $(2, 1, 0)$ και $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $\vec{w} \in \langle (2, 1, 0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1) \rangle$, $\forall \vec{w} \in W$

Επομένως, $\dim \langle (2, 1, 0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1) \rangle = 2 = \dim W$

$$\text{Άρα: } W = \langle (2, 1, 0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1) \rangle$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Έστω $m = \text{ηλικός γραμμών}$
 $n = \text{ηλικός στύλων}$

α) $\det A = 0$, οπότε $r(A) < m = n$ και η αντεκόνιση δεν είναι ούτε "1-1", ούτε "επι". Επίσης, $\nexists$ αριστερός ή δεξιός αντίστροφος.

β) $\det B = -6 \neq 0$. Επομένως, $r(A) = m = n$ και η αντεκόνιση είναι "1-1" και "επι". Επίσης, υπάρχουν αριστερός και δεξιός αντίστροφος ίσοι μεταξύ τους και ίσοι με $A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\gamma) r(C) = 1 = m < 3 = n$$

Άρα, η απεικόνιση είναι "επι", αλλά όχι "1-1".

Επίσης, $\exists$ μόνο δεξιός αντίστροφος, ο οποίος ικανοποιείται με

$$C^T (C C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{14} = \begin{bmatrix} 3/14 \\ 1/7 \\ -1/14 \end{bmatrix}$$

$$\delta) D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(+)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } r(D) = 2 = m < 4 = n$$

και επομένως, η απεικόνιση είναι "επι", αλλά όχι "1-1".

Επίσης, $\exists$ μόνο δεξιός αντίστροφος, ο οποίος ικανοποιείται με

$$\begin{aligned} D^T (D D^T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7/38 & -4/19 \\ 0 & 0 \\ 4/19 & 9/19 \\ 1/38 & -6/19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Σημείωση: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο, τότε αυτός ικανοποιείται με $A^T (A A^T)^{-1}$, ενώ αν ο A έχει αριστερό αντίστροφο, τότε αυτός ικανοποιείται με $(A^T A)^{-1} A^T$.