Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 14^o}$ 26 Μαρτίου 2019

Θεώρημα ή Ανάπτυγμα Taylor.

1 μεταβλητή: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^k$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\dots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+R_k(x,a)$$

Το υπόλοιπο R_k είναι μικρό δηλ.: $\dfrac{R_k(x,a)}{(x-a)^k}\xrightarrow[x\to a]{}0$

Πραγμ. συνάρτηση πολλών μεταβ.:

Μας ενδιαφέρει το αντίστοιχο ανάπτυγμα για $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (πραγμ. συν. n μεταβλητών). Έστω f παραγωγίσ. στο $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$.

Έστω $R_1(x-x_0,x_0)=f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+Df(x_0)(x-x_0)+R_1(x-x_0,x_0)$.

$\dfrac{R_1(x-x_0,x_0)}{\|x-x_0\|}\xrightarrow[x\to x_0]{?}0$ Το όριο αυτό υπάρχει και κάνει όντως μηδέν από τον ορισμό της παραγώγου. αφού η f είναι παραγωγ. στο $\bar{x}_0$.

Παρατήρηση: Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως συνάρτηση πολλών μεταβλητών έχει πάντα Ανάπτυγμα Taylor $1^{ης}$ τάξης.

Θεώρημα (Αν. Taylor $2^{ης}$ τάξης).

Έστω $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f\in C^3$ Τότε:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)+R_2(h,x_0)$$

όπου $\dfrac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$ όπου $\bar{h}=\bar{x}-\bar{x}_0$, $\bar{h}=(h_1,\dots,h_n)$

Απόδειξη

Απο κανόνα αλυσίδας έχω: για $t\in[0,1]$, $\bar{x}_0=(x_{0_1},x_{0_2},\dots,x_{0_n})$

$$\frac{d}{dt}f(x_0+th)=\frac{d}{dt}f(x_{0_1}+th_1,x_{0_2}+th_2,\dots,x_{0_n}+th_n)$$
$$=Df(x_0+h)\cdot\Big(\underbrace{\frac{d}{dt}(x_{0_1}+th_1)}_{h_1},\dots,\underbrace{\frac{d}{dt}(x_{0_n}+th_n)}_{h_n}\Big).$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)\cdot h_i$$

Ολοκληρώνω: $\displaystyle\int_0^1\frac{d}{dt}f(x_0+th)\,dt=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)\cdot h_i\,dt$ (1)

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i\,dt$$

και θα πάρω : (1) $\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) \overset{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+th) h_i h_j (1-t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$ (2).

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{ολοκλήρωση κατά μέρη:}} \\ \int_0^1 u v'\,dt = -\int_0^1 u' v\,dt + uv\Big]_{t=0}^{t=1}\end{array}}$$

$\left(u = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i,\ v = t-1\right)$ (i-σταθεροποιημένο)

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i}_{u} \cdot \underbrace{(t-1)'}_{v}\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i\right)(1-t)\,dt$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i(t-1)\Big]_{t=0}^{t=1} = \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+th)h_i h_j (1-t)\,dt$$

$+ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$ (*)

Στον όρο της (2): $\sum_{i,j}^{n} \int_0^1 \overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+th)}^{u} h_i h_j \overbrace{(1-t)}^{v'}\,dt = R_1$

θα κάνω ολοκλήρωση κατά μέρη με: $u = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+th)$, $v = -\frac{(t-1)^2}{2}$ $(v' = (1-t))$

$$R_1 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0+th) h_i h_j h_k \frac{(t-1)^2}{2}\,dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$$

Αν αντικαταστήσω στην (2) και δ.ο. αυτό το αθροισμα ολοκλ. είναι ίσο με το υπόλοιπο $R_2(h, x_0)$ δηλ. ότι πάει στο 0 αν το διαιρέσω με το $\|h\|^2$. Θα το δείξω.

Οι $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $t \in [0,1]$ άρα φραγμένες και

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right| \leq M$$

δηλαδή $|R_2(h, x_0)| \leq C h_i h_j h_k \leq C\|h\|^3$

συνεπώς $\frac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. και συνεπώς τελειώσα.

<u>Άλλες μορφές υπολοίπου:</u>

$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) h_i h_j$ όπου c ανήκει στο ευθ. τμήμα που συνδέει τα x_0 και x_0+h.

ή $f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + \frac{1}{6}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c) h_i h_j h_k$, c ανήκει στο ευθ. τμήμα που ενώνει τα x_0 και x_0+h.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης : $f(x,y)=e^{x+y}$ στο $(0,0)$

$$f(0,0)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}e^x\Big|_{x=0}=e^x\Big|_{x=0}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}e^x=e^x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dots=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

Άρα $f(x,y)=1+(1,1)\cdot(h_1,h_2)+\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2+2h_1h_2)+R_2(h,0)$

$$\Rightarrow f(x,y)=1+h_1+h_2+\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2+2h_1h_2)+\underbrace{R_2(h,0)}_{\text{υπόλοιπο.}}$$

και $\dfrac{R_2(h,0)}{h_1^2+h_2^2}\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0$

Απειροστικός Λογισμός II

$\boxed{\text{Μάθημα } 15^o}$ 28 Μαρτίου 2019

Ακρότατα Πραγματικών Συναρτήσεων

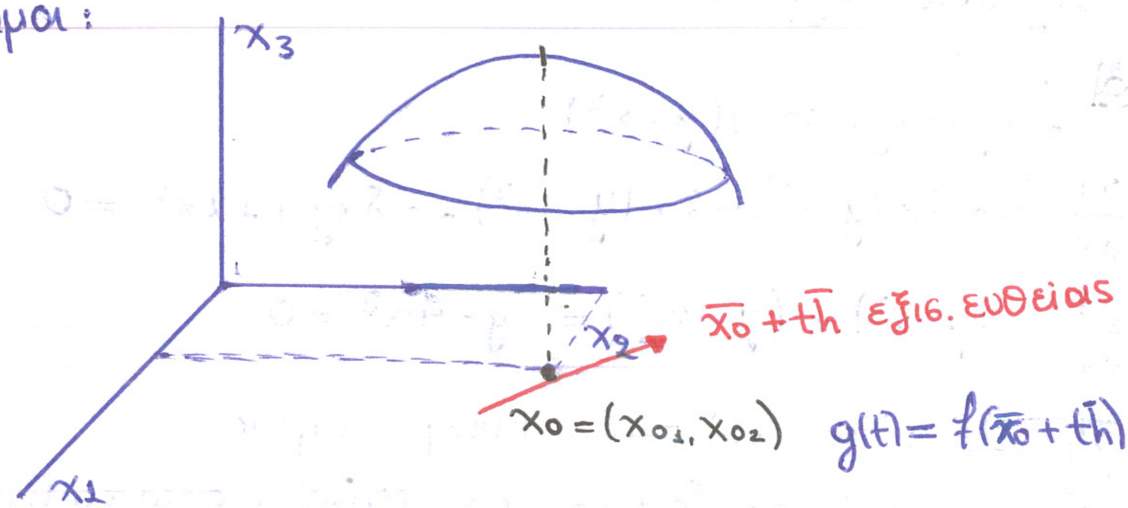
Ορισμός

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου αν υπάρχει περιοχή του x_0 τ.ω. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in V$ (V η περιοχή αυτή)

Αν αυτό συμβαίνει $\forall x \in U$ τότε x_0 ολικό ελάχιστο.

→ Εντελώς αντίστοιχος ο ορισμός τοπικού και ολικού μεγίστου.
(αντίστοιχα όμως $f(x) \leq f(x_0)$ στα μέγιστα)

Έστω το γράφημα:



Η μέγιστη τιμή της $g(t) = f(\bar{x}_0 + t\bar{h})$ στο $t=0$ άρα $g'(t) = 0$ (στο $t=0$)

Όμως $g'(t) = \frac{d}{dt} f(\bar{x}_0 + t\bar{h}) \underset{\text{καν. αλυσ.}}{=\!=\!=} Df(\bar{x}_0 + t\bar{h}) \cdot \bar{h}$

άρα $g'(0) = Df(\bar{x}_0) \cdot \bar{h} = 0$ $\forall \bar{h} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow Df(x_0) = 0$.

$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ δηλ $\frac{\partial f}{x_i}(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

Ορισμός

Τα σημεία στα οποία $Df(x_0) = 0$ λέγονται κρίσιμα σημεία.

Παραδείγματα

$\boxed{1}$. $f(x,y) = x^2 + y^2$, Αναζητώ κρίσιμα σημεία.

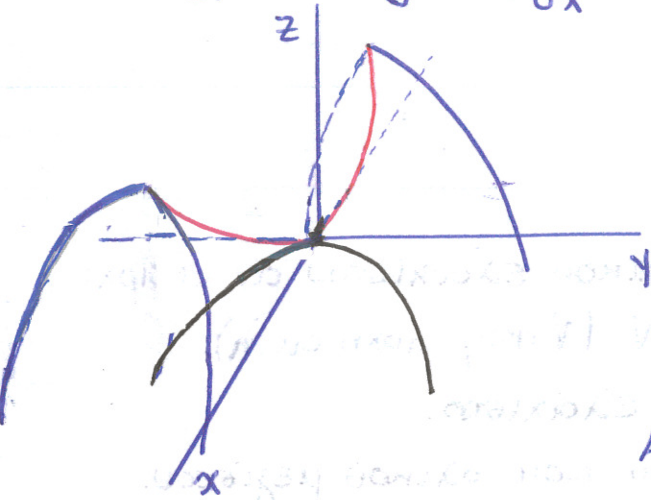
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$

άρα το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο

Εδώ είναι ελάχιστο $(x^2 + y^2 \geq 0)$ Άρα στο $(0,0)$ έχω ελάχιστο $0^2 + 0^2 = 0$.

2 $f(x,y)= x^2-y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ Άρα το (0,0) είναι κρίσιμο σημείο.



• Για $y=0$ έχω $f(x,0)=x^2$ και έχω ελάχιστο (στο $x=0$)

• Για $x=0$ έχω $f(0,y)=-y^2$ και έχω μέγιστο. (στο $y=0$)

Άρα τό (0,0) δεν είναι ακρότατο της συνάρτησης f.

Τα κρίσιμα σημεία που δεν είναι ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) λέγονται σαγματικά σημεία. (τέτοιο είναι το (0,0) στο Παρ.(2)).

3 $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x(y-x^2)-2x(y-3x^2) = -8xy+12x^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (y-x^2)+(y-3x^2) = 2y-4x^2 = 0$$

Προφανώς το (0,0) είναι κρίσιμο σημείο.

Έστω η ευθεία (at,bt) που περνάει από το (0,0)

Υπολογίζω $f(at,bt) = \dots = t^2 3a^4\left(t-\frac{b}{3a^2}\right)\left(t-\frac{b}{a^2}\right)$ (*)

$(*) \geq 0 \Longrightarrow |t| \leq \left|\frac{b}{3a^2}\right|$

για t μικρό παίρνει: $f(at,bt) \geq 0$

$(a,b \neq 0)$ και $f(0,0)=0$

Κατά μήκος ευθειών το (0,0) ελάχιστο άρα πιθανών να είναι ελάχιστο. Θα το εξετάσω. Έστω $y=2x^2$

υπολογίζω $f(x,y) = f(x,2x) = (-x^2)\cdot x^2 = -x^4 < 0 \quad \forall x \neq 0$

άρα τελικά το (0,0) δεν είναι ελάχιστο για όλες τις κατευθ. άρα δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. (και δηλ. είναι σαγματικό σημείο).

Έστω $f \in C^3$, από το Taylor έχω:

$$f(x_0+th) = f(x_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i}_{(1)} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{(2)}(x_0) h_i h_j + R_2(h, x_0)$$

Αν x_0 είναι κρίσιμο σημείο ο όρος (1) θα είναι ίσος με το 0.
άρα αφού το υπόλοιπο $R_2(h,x_0)$ ο όρος (2) φαίνεται να αποφασίζει αν το x_0 είναι μέγιστο, ελάχιστο ή τίποτα.
ανάλογα αν είναι αρνητικός, θετικός η τίποτα (να διαφοροποιείται το πρόσημο).

Ας δούμε πιο προσεκτικά τον όρο αυτόν.
Είναι της μορφής: $h=(h_1,\dots,h_n)$, $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \leftarrow$$ τετραγωνική συνάρτηση ή τετραγωνική μορφή

Αν $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ τότε $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$

Ο πίνακας A είναι συμμετρικός $(a_{ij} = a_{ji})$
Προφανής ιδιότητα της $Q(h)$: $Q(\lambda h) = \lambda^2 Q(h)$

Ορισμός

Η Εσσιανή της f στο σημείο x_0 είναι η τετραγωνική συνάρτηση

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

και ο πίνακας από τον οποίο φτιάχνεται η Εσιαννή της f είναι με στοιχεία τις $2^{ες}$ μερικές παραγώγους της f.

$$Hf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται Εσσιανός πίνακας

Ορισμός (Γραμμική Άλγεβρα)

Λέμε οτι μια τετραγωνική μορφή $Q = x^T A x$ είναι θετικά ορισμένη η ισοδύναμα ο συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος όταν $Q(x) = x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$.

(Αν $Q(x) = x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0$ αρνητικά ορισμένη - ορισμένος αντίστοιχα).

Ορισμός (Γραμμική Άλγεβρα).

Απο Γρ. Άλγεβρα ο A συμμετρικός είναι θετικά ορισμένος ανν όλες του οι ιδιοτ. είναι γν. θετικές.