Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 13^{o}}$ 21 Μαρτίου 2019

Καμπύλες και ταχύτητα

$\vec{\sigma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, έστω $n=3$ $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$.

Αν $\vec{\sigma}(t)$ είναι C^1 λέμε ότι η καμπύλη είναι C^1 (ομαλή καμπύλη).

$\vec{\sigma}(\alpha)$ και $\vec{\sigma}(\beta)$ είναι τα άκρα της καμπύλης.

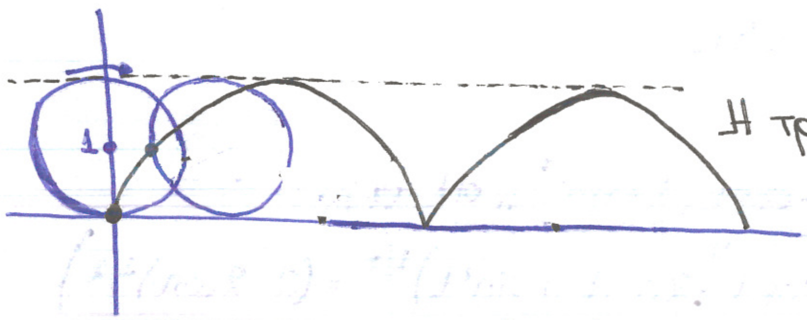
Παραδείγματα

(1) Ευθεία: $\vec{\sigma}(t) = \vec{x_0} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

(2) μον. κύκλος: $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$ (μία περιστροφή)

(3) παραβολή: $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$

(4) κυκλοειδής: $\vec{\sigma}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

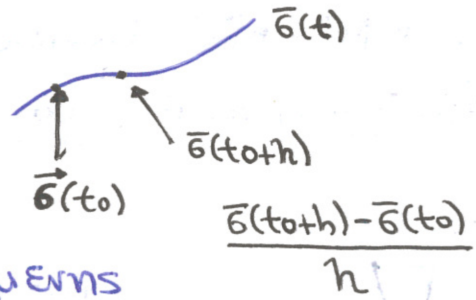


Η τροχιά αυτή είναι το κυκλοειδές.

• **Συμβολισμός**: $D\vec{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

→ Το $\vec{\sigma}(t)$ μπορεί να είναι διάνυσμα θέσης σημείου που κινείται σε καμπύλη και τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στην θέση $\vec{\sigma}(t)$.

$\vec{\sigma}'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{\sigma}(t_0+h) - \vec{\sigma}(t_0)}{h} = \vec{v}(t)$ είναι:



• η στιγμιαία ταχύτητα στο σημείο t_0.

και το μέτρο της είναι: $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$

Παράδειγμα Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της $\vec{\sigma}(t)$ στο σημείο t_0.

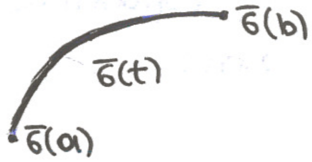
$\ell(s) = \underbrace{\vec{\sigma}(t_0)}_{= x_0} + s\, \underbrace{\vec{\sigma}'(t_0)}_{\vec{v}}$

Παράδειγμα Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας για την
$\bar\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$\bar\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\|\bar\sigma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

- Αν $\bar\sigma'(t)$ είναι ταχύτητα η $\bar\sigma''(t)$ δίνει επιτάχυνση.

→ Έστω $\bar\sigma(t)$:



Μήκος Τόξου

Ορισμός

Έστω $\vec\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, C^1 καμπύλη. Τότε το μήκος καμπύλης $\bar\sigma$ είναι:

$$\ell(\bar\sigma) = \int_\alpha^b \|\sigma'(t)\| dt$$

Παράδειγμα

$\bar\sigma(t) = (\underbrace{t - \sin t, 1 - \cos t}_{\text{κυκλοειδές}})$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\ell(\bar\sigma) = \int_0^{2\pi} \|\bar\sigma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|\underbrace{(1-\cos t, \sin t)}_{=}\| dt \quad (*)$$

$$\left((1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t)^{1/2} = (2 - 2\cos t)^{1/2} \right)$$

$(*) = \dots = 8.$

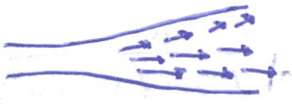
Γν. τύπος Τριγωνομετρίας → $\boxed{1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}}$
(χρειαζ. για αυτόν τον υπολογισμό)

Διανυσματικά Πεδία.

Ορισμός

Διανυσματικό πεδίο λέγεται στον $\mathbb{R}^n$ μία απεικόνιση από τον $\bar F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (συνήθως $n = 2$ ή 3).

Π1 Σωλήνας με νερό:



Πεδίο ταχυτήτων $\vec v(x,y,z)$.

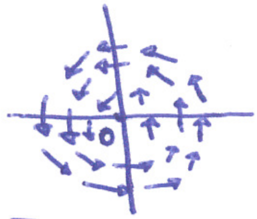
Π2

$F(\bar r) = -\dfrac{mMG}{r^3}\vec r$, $\bar r = (x,y,z)$ ← διάνυσμα θέσης.

Π3 $\vec{V}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$\|\vec{V}\| = \frac{1}{r}$ περιγράφει περιστροφή γύρω από το $(0,0)$.

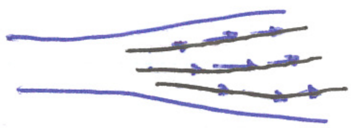
$r=(x^2+y^2)^{1/2}$



Ορισμός

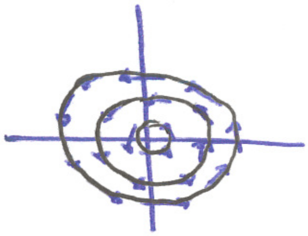
Αν $\bar{F}$ διανυσματικό πεδίο μια γραμμή ροής της $\bar{F}$ είναι μια καμπύλη $\bar{\sigma}(t)$ τ.ω. $\bar{\sigma}'(t) = \bar{F}(\bar{\sigma}(t))$.

Π.χ.



← γραμμές ροής.

Π.χ.



← γρ. ροής (ομόκεντροι κύκλοι).