Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 11^{\text{ο}}}$ 12 Μαρτίου 2019.

<u>Παραδείγματα</u>

$\boxed{\Pi_1}$ $f(u,v,w)=u^2+v^2-w \qquad g(x,y,z)=(xy,\ x^2+y,\ e^{-xz})$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$h=f\circ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (η $g\circ f$ <u>ΔΕΝ</u> έχει νόημα)

Υπολογίζω την h και την Dh <u>απευθείας</u>:

$$h=f(g(x,y,z))=x^2y^2+(x^2+y)^2-e^{-xz}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=2xy^2+4x(x^2+y)+ze^{-xz}.$$

Υπολογίζω με <u>κανόνα αλυσίδας</u>:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=$$

$$=(2u)y+(2v)2x+(-1)(-ze^{-xz})$$

$$=(2xy)y+2(x^2+y)2x+ze^{-xz}=2xy^2+4x(x^2+y)+ze^{-xz}$$ (ίδιο με πριν)

$\boxed{\Pi_2}$ $h(x)=f(x,u(x))$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}u'(x)$$

<u>Συμβολισμός</u>: $\frac{dh}{dx}=\underbrace{D_1 f}_{\text{παραγ. της } f \text{ ως προς την } 1^{\eta} \text{ μεταβλ.}}+\underbrace{D_2 f}_{\text{παραγ. } f \text{ ως προς την } 2^{\eta} \text{ μεταβλητή.}}u'(x)$

$\boxed{\Pi_3}$ $h(x,y)=f(x,u(x),v(x,y))$.

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\boxed{\Pi_4}$ $h(x)=f(\underbrace{x^2}_{u},\underbrace{x^3}_{v})$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}2x+\frac{\partial f}{\partial v}3x^2$$

ή $\frac{dh}{dx}=D_1 f\cdot 2x+D_2 f\cdot 3x^2.$

Κλίση (grad) και παράγωγος κατά κατεύθυνση.

Ορισμός

$f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τότε $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

π.χ. $f(x,y,z) = \|\bar{x}\|$

$\bar{x} = (x,y,z)$ $\quad \nabla f = \nabla(\|\bar{x}\|) = \nabla\left((x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\|\bar{x}\|}$$

όμοια $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\|\bar{x}\|}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\|\bar{x}\|}$

άρα $\nabla f = \left(\frac{x}{\|\bar{x}\|}, \frac{y}{\|\bar{y}\|}, \frac{z}{\|\bar{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\bar{x}\|}(x,y,z) = \frac{1}{\|\bar{x}\|}\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ (μοναδιαίο διάν. κατευθ. ίδιας με το $\bar{x}$)

Ορισμός

Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο $\bar{x}$ κατά το διάνυσμα $\bar{v}$. δίδεται από τον τύπο:

$$\left.\frac{d}{dt} f(\bar{x}+t\bar{v})\right|_{t=0} \quad \text{αν υπάρχει.}$$

Θεώρημα

Έστω ότι η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Τότε όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν και η κατά κατεύθυνση παράγωγος στο $\bar{x}$ σε κατεύθυνση $\bar{v}$ δίδεται από:

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$
$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$Df(\bar{x}) \cdot \bar{v} = \text{grad} f(\bar{x}) \cdot \bar{v} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{x_2} v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} v_3.$$

Απόδειξη

$\bar{x} + t\bar{v}$ παριστάνει ευθεία που περνάει από το $\bar{x}$ και είναι παράλληλη στο $\bar{v}$.

$\bar{c}(t) = \bar{x} + t\bar{v} = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2, x_3 + tv_3)$.

$$\left.\frac{d}{dt} f(\bar{x}+t\bar{v})\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(\bar{c}(t))\right|_{t=0} = \left.\nabla f(\bar{c}(t)) \cdot c'(t)\right|_{t=0} = \nabla f(\bar{c}(0)) \cdot c'(0). = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}.$$

Όμως $\bar{c}(0) = \bar{x}$
$\bar{c}'(t) = \bar{v} = \bar{c}'(0)$

Παρατήρηση 1: Αν $\bar{v}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα δηλ. $\|\bar{v}\| = 1$ τότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο $\bar{x}$ κατά το διάνυσμα $\bar{v}$ δίνει τον ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο $\bar{x}$ στην κατεύθυνση $\bar{v}$.

Συμβολισμός: $\nabla f \cdot \bar{v} = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$ ($\bar{v}$ μοναδιαίο)

Παρατήρηση 2

Έστω $\bar{e}_1=(1,0,0)$ (μοναδιαίο κατά την κατευθ. του άξονα x).

$$\nabla f(\bar{x})\cdot\bar{e}_1=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\cdot(1,0,0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Παράδειγμα

$f(x,y,z)=x^2e^{xyz}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f στην κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$ στο σημείο $(1,1,0)$.

$$\nabla f(1,1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)=(2,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt3}(1,1,0)=\frac{3}{\sqrt3}=\sqrt3.$$

$$\nabla f=\left(2xe^{xyz}+x^2yze^{xyz},\ x^3ze^{xyz},\ x^3ye^{xyz}\right)$$

Θεώρημα

Έστω $\nabla f(\bar{x}_0)\neq 0$. Η κλίση $\operatorname{grad} f(\bar{x}_0)$ δείχνει την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει γρηγορότερα. $\theta=(\widehat{\nabla f,\vec{n}})$

Απόδειξη

Έστω $\vec{n}$ μοναδιαίο. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}=\|\nabla f\|\cdot\|\vec{n}\|\cos\theta=\|\nabla f\|\cos\theta\leq\|\nabla f\|$. άρα έχω μέγιστο για $\cos\theta=1\Rightarrow\theta=0$ άρα $\nabla f\parallel\vec{n}$ (άρα κινούμε στην κατεύθυνση του ∇f).

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 12ο 14 Μαρτίου 2019

$f(x,y,z)$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

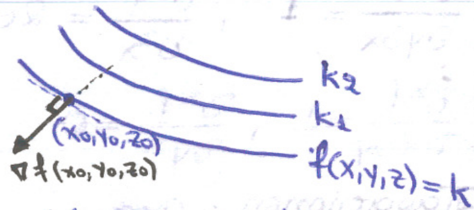
Το ∇f είναι διάνυσμα που μου δίνει την κατεύθυνση της μεγαλύτερης αύξησης της f.

Αν $\bar{v}$, μοναδιαίο διάνυσμα τότε: $\nabla f \cdot \bar{v} = \frac{\partial f}{\partial v}$ (κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στην κατεύθυνση $\bar{v}$.)

Θεώρημα

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ και (x_0,y_0,z_0) σημείο της επιφάνειας στάθμης $f(x,y,z)=k$ τότε $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στάθμης $f=k$.

Δηλαδή: Αν $\bar{v}$ εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\vec{c}(t)$ που περνάει από το σημείο $(x_0,y_0,z_0)=\vec{c}(0)$ τότε $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp \bar{v}$ (καμπύλη πάνω στην επιφ. στάθμης).



Απόδειξη

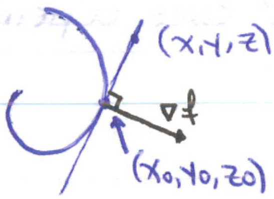
Εφόσον η $\vec{c}(t)$ ανήκει στην επιφάνεια στάθμης έχω: (οι επιφ. στάθμης είναι στο π.ο. της f. στο Θεωρ. στο $\mathbb{R}^3$)

$f(\vec{c}(t))=k$ άρα $\frac{d}{dt} f(\vec{c}(t)) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\vec{c}(t)) \cdot \vec{c}\,'(t) = 0$

άρα για $t=0$ $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \bar{v} = 0$.

→ Μπορώ να ορίσω εφαπτόμενο επίπεδο σε επιφάνεια που δεν είναι γράφημα συνάρτησης.

Έστω η επιφάνεια $f(x,y,z)=k$



Εξίσωση εφ. επιπέδου:

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \nabla f(x_0,y_0,z_0) = 0$ $(\nabla f \neq 0)$

Παράδειγμα 1 Βρείτε το εφ. επίπεδο στην επιφάνεια $3xy + z^2 = 4$ στο $(1,1,1)$: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (3y, 3x, 2z)$ $\quad \nabla f\big|_{(1,1,1)} = (3,3,2)$

άρα η εξ. εφ. επιπέδου είναι:

$(x-1, y-1, z-1) \cdot (3,3,2) = 0 \iff 3x+3y+2z-8=0$

Παράδειγμα 2 Βρείτε το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $z=f(x,y)$ στο σημείο $(x_0, y_0, z=f(x_0,y_0))$.

Α' τρόπος: Βρίσκω το εφαπτόμενο επίπεδο $z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=z_0} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) \iff \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) - (z-z_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}, -1\right)\cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

Άρα το κάθετο δίανυσμα είναι το $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}, -1\right)$.

Β' τρόπος: Θέτω $F = f(x,y) - z = F(x,y,z)$
άρα το γράφημα της $f(x,y) = z$ είναι η ισοσταθμική επιφάνεια της $F = c$ (σταθ) άρα το δίανυσμα που είναι κάθετο είναι το ∇F και $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ όμοια με πριν.

Πολλαπλές μεικτές παράγωγοι.

π.χ.: $f(x,y) = xy + e^{x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2xe^{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Ορισμός (Συμβολισμός)

Μια συνάρτηση λέμε ότι είναι C^2 αν έχει όλες τις $2^{ες}$ παραγώγους και είναι συνεχείς (αντίστοιχα $C^3, \dots, C^k$).

Θεώρημα

Αν η f είναι C^2 τότε οι μεικτές παράγωγοι είναι ίσες δηλ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Απόδειξη

Έστω $S(\Delta x, \Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0)$
Για $y_0, \Delta y$ σταθεροποιημένα: ορίζω $g(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$
Τότε: $S(\Delta x, \Delta y) = g(x_0+\Delta x) - g(x_0) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=\!=} g'(\bar{x})\Delta x$ όπου $\bar{x}$ μεταξύ x_0 και $x_0+\Delta x$ όμως $g'(x)\Delta x = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\right]\Delta x \underset{(\text{στο } y)}{\overset{\text{ΘΜΤ}}{=\!=}}$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y$ όπου $\bar{y}$ μεταξύ y_0, $y_0+\Delta y$.

Άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{S(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$ Εφόσον f είναι C^2 το $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) =$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{S(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$

Εντελώς ανάλογα $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{S(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$ και άρα

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ και τελειώσαμε. $(f_{xy} = f_{yx})$

<u>Παράδειγμα</u>: $f(x,y) = e^x \sin(xy)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$
και έστω $k(s,t) = f(g(s,t), h(s,t))$.

Βρείτε την $\frac{\partial^2 k}{\partial s \partial t} = K_{st}$

$K_s = f_x g_s + f_y h_s$

$K_{st} = (f_x g_s + f_y h_s)_t = (f_x)_t g_s + f_x (g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y (h_s)_t$

$= \left[(f_x)_x g_t + (f_x)_y h_t\right] g_s + f_x g_{st} + \left[(f_y)_x g_t + (f_y)_y h_t\right] h_s + f_y h_{st}$

$= (f_{xx} g_t + f_{xy} h_t) g_s + f_x g_{st} + (f_{xy} g_t + f_{yy} h_t) h_s + f_y h_{st}$.