Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 9ο 5 Μαρτίου 2019.

Έχουμε δει τις μερικές παραγώγους (προηγ. μάθημα)

Παρατήρηση!

Η ύπαρξη μερικών παραγώγων <u>δεν</u> εγγυάται την ύπαρξη παραγώγου σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

<u>Μια μεταβλητή</u>: Ύπαρξη παραγώγου σημαίνει ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

Ισοδύναμα: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0$.

Ορισμός (2 διαστάσεις)

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) εάν:

- οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν

<u>και</u> καθώς το $(x,y)\to(x_0,y_0)$:
το

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{}0$$

- Αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0,y_0) η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο (x_0,y_0) είναι:

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Υπολογίστε το επίπεδο που εφάπτεται στο γράφημα της $z=x^2+y^4+e^{xy}$ στο σημείο $(1,0,2)$ <u>Λύση</u>: $x=1$, $y=0$, $z=2$ $\quad\frac{\partial f}{\partial x}=2x+e^{xy}\cdot y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+e^{xy}\cdot x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1$ $\qquad$ άρα $z=2+2(x-1)+1(y-y_0)=2x+y$ ή $z-2x-y=0$.

$f(1,0)=2$

Ορισμός (Γενική Περίπτωση)

Έστω $\bar{f}:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. η $\bar{f}$ παραγωγίζεται στο $\bar{x}_0\in U$ αν:

- όλες οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν.

<u>και</u> $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\dfrac{\|f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)-T(\bar{x}-\bar{x}_0)\| \longleftarrow \text{στον } \mathbb{R}^m}{\|\bar{x}-\bar{x}_0\| \longleftarrow \text{στον } \mathbb{R}^n}=0$ όπου $T=D\bar{f}(\bar{x}_0)$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($m\times n$ πίνακας). $\quad(\bar{f}=(f_1,\dots,f_m))$.
(i γραμμές)
(j στήλες)

Ειδική Περίπτωση: Για $m=1$ (f πραγματική συνάρτηση) τότε το $T = Df(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0)\right)$ είναι $(1 \times n)$ διάνυσμα. Συμβολίζεται $\nabla f(\bar{x}_0)$ λέγεται ανάδελτα ή gradient ($\text{grad} f(x_0)$) ή κλίση και είναι διανυσματική συνάρτηση ή πεδίο.

Παράδειγμα: Υπολογίστε τον πίνακα των μερικών παραγώγων της

$$f(x,y) = (\underbrace{e^{x+y}}_{f_1(x,y)}, \underbrace{xy}_{f_2(x,y)})$$

. Από τον ορισμό

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y & x \end{bmatrix}$$

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0 \in U$ τότε είναι και συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$. (Απόδειξη εύκολα από τον ορισμό).

Παρατήρηση!

Αν η f έχει απλώς μερικές παραγώγους δεν είναι αναγκαστικά συνεχής.

Π.χ. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=0 \text{ ή } y=0 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$ και παρόμοια $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Η συνάρτηση αυτή όμως δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Θεώρημα

Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ έχει όλες τις μερικές παραγώγους στο $\bar{x}_0$ και είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις (ως συναρτήσεις πολλών μεταβλητών) σε μια περιοχή γύρω από το $\bar{x}_0$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0$.

Π.χ.

$f(x,y) = e^{xy} + \cos y^2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y\sin y^2$.

και οι δύο $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}^2$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

Σημαντική Άσκηση: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Δ.Ο.:

(α) η f είναι συνεχής στο $(0,0)$

(β) οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν (στο $(0,0)$).

(γ) Ελέγξτε ως προς την παραγωγισιμότητα της f στο $(0,0)$

Λύση: (α) Έχω $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Άρα $0 \leq |f(x,y)| = |x| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq |x| \frac{(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}|x| \longrightarrow 0$ Από κρ. παρεμβολής $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ άρα f συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Για $y=0$ έχω $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$.

Εντελώς παρόμοια και κάνουν 0. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ υπάρχουν

(γ) Είναι οι μερικές παράγωγοι συνεχείς σε μια περιοχή γύρω από το $(0,0)$; Για να απαντήσω σε αυτό υπολογίζω για $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Συνεπώς $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Είναι η $\frac{\partial f}{\partial x}$ συνεχής σε μία περιοχή γύρω από το $(0,0)$;

Αρκεί να είναι στο $(0,0)$. Όμως για $y=kx$ έχω $\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx) = \frac{2k^3}{(1+k^2)^2}$ και εξαρτάται από το k άρα δεν υπάρχει το όριο άρα δεν είναι συνεχής. Άρα το προηγ. Θεώρημα δεν ισχύει! (συνέχεια μερικών παραγώγων). Αυτό δεν σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη! Πρέπει να το αποδείξω. Θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό (στο επόμενο μάθημα).

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 10ο 7 Μαρτίου 2019.

Συνέχεια άσκησης προηγ. μαθήματος.

Θ.ν.δ.ο. η $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0).\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ δεν είναι παραγ. στο (0,0).

Θα χρησ. ορισμό παραγωγ.

Αν η f ήταν παραγ. στο (0,0) τότε το παρακάτω όριο θα υπήρχε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-0)\|}{\|(x,y)-(0,0)\|}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ θα έπρεπε να υπάρχει.

Όμως για $y=kx$ $f(x,kx)=\frac{|k|\,|x|^3}{|x|^3(1+k^2)^{3/2}}=\frac{|k|}{(1+k^2)^{3/2}}$ που εξαρτάται από το k! Άρα το όριο δεν υπάρχει. και συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,0).

Συμβολισμός

$f\in C^1$ αν η f έχει μερικές παραγώγους και είναι συνεχείς οι μερικές παράγωγοι.

Ιδιότητες Παραγώγων

Έστω $g,f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

(i) Αν Df υπάρχει και $c\in\mathbb{R}$ τότε $D(cf)=cD(f)$

(ii) Αν Df, Dg υπάρχουν τότε $D(f+g)=Df+Dg$

Έστω $f,g: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (πραγματικές συναρτήσεις)

(iii) Αν Df, Dg υπάρχουν $D(f\cdot g)=f\cdot Dg+Df\cdot g$

(iv) $(g\neq0)$ $D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gDf-fDg}{g^2}$

Θεώρημα (Κανόνας Αλυσίδας)

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα και $g: U\subset\mathbb{R}^n\to V\subset\mathbb{R}^m$, $f: V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$

Έστω $y_0=g(x_0)$ και g παραγωγίσιμη στο x_0 και f παραγωγίσιμη στο y_0.

Τότε: $$\underbrace{D(f\circ g)(x_0)}_{\substack{p\times n\\ \text{πίνακας}}}=\underbrace{Df(y_0)}_{\substack{p\times m\\ \text{πίνακας}}}\,\underbrace{Dg(x_0)}_{\substack{m\times n\\ \text{πίνακας}}}.$$

Καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ η $\mathbb{R}^2$ σε παραμετρική μορφή:

$\bar{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$.

Η ομαλότητα της καμπύλης καθορίζεται απο την ομαλότητα των $x(t), y(t), \ldots\ldots$

Π.χ. $\bar{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ $\quad \bar{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Ειδική Περίπτωση (1) (Κανόνας Αλυσίδας)

$\bar{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$f(\bar{c}(t)) \to$ τιμές της f πάνω στην καμπύλη c.

έστω $h(t) = f(c(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} f(\bar{c}(t)) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), y(t)). =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

$$= \underset{\nabla f}{\underset{\shortparallel}{\underline{Df}}} \cdot c'(t)$$

Df : 1×3 διάνυσμα (διάνυσμα γραμμής)

$c'(t)$: 3×1 διάνυσμα (διάνυσμα στήλης)

$D(f(\bar{c}(t))) = \underline{Df \cdot c'(t)}$: αριθμος

Απόδειξη (Επ1)

Στην περίπτωση οπου $f \in C^1$

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t), z(t))}{t - t_0} + \frac{f(x(t_0), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t))}{t - t_0} +$$

$$\frac{f(x(t_0), y(t_0), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0}$$

$$\overset{\text{Θ. Μέσης Τιμής}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(c, y(t), z(t)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), d, z(t)) \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} +$$

(c ανάμεσα στο $x(t), x(t_0)$) $\qquad$ (d ανάμεσα σε $y(t), y(t_0)$)

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(t_0), y(t_0), e) \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$$

(e ανάμεσα σε $z(t), z(t_0)$)

Παίρνω όριο για $t \to t_0$ $\quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$

στο $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Ειδική Περίπτωση (2) (Κανόνας Αλυσίδας)

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $h=f\circ g$ ($h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$)

Έστω $g(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$.

$f=f(u,v,w)$ και $h(x,y,z)=(f\circ g)(x,y,z)=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$

$$Dh=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y},\frac{\partial h}{\partial z}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Θεώρημα}}}{=}Df\cdot Dg=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \ \frac{\partial f}{\partial v}\ \ \frac{\partial f}{\partial w}\right)}_{\substack{\text{διάνυσμα }1\times3\\ (\text{γραμμής})}}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}}_{\substack{\text{πίνακας}\\ 3\times3.}}$$

δηλ.

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\quad (*)$$

όμοια και $\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$.

Παρατήρηση

Στην (*) αν θεωρήσω $y,z=$σταθ έχω ουσιαστικά τον τύπο της Ειδικής περίπτωσης (1).

Παράδειγμα (1)

$\bar{c}(t)=(t,t^2,e^t)$, $t\in\mathbb{R}$. Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα για $t=0$.

Εφαπτόμενο διάνυσμα: $\bar{c}'(t)=(1,2t,e^t)$ για $t=0$ $\bar{c}'(0)=(1,0,1)$

και το μοναδιαίο είναι $\bar{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.

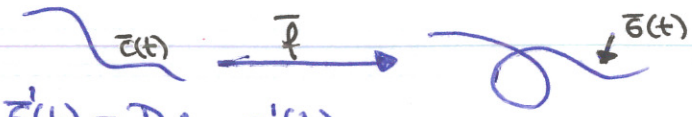
Παράδειγμα (2)

Έστω $\bar{c}(t)$ καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ $\bar{c}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ και $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

και έστω $\varphi(t)=f(\bar{c}(t))$. $\varphi'(t)=Df\cdot c'(t)=\nabla f\cdot c'(t)$

Αν το $\bar{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\bar{f}(\bar{c}(t))=\bar{\sigma}(t)$ η $\bar{\sigma}(t)$ είναι επίσης καμπύλη.

π.χ.



και $\underbrace{\bar{\sigma}'(t)}_{\substack{\text{διαν.}\\ \text{στήλης}}}=\underbrace{Df}_{\substack{2\times2\\ \text{πίνακας}}}\cdot\underbrace{c'(t)}_{\substack{\text{διαν.}\\ \text{στήλης}}}$

Παρατήρηση

Ο πίνακας Df μεταφέρει εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\bar{c}$ σε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\bar{\sigma}$.