Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

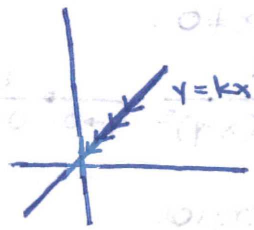
$\boxed{\text{Μάθημα } 7^{ο}}$ 26 Φεβρουαρίου 2019.

Παράδειγμα (1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad , f(x,y)=\frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

Κατ' αρχήν υπολογίζω το όριο κατά μήκος των ευθειών $\boxed{y=kx}$ (για $k\in\mathbb{R}$ είναι όλες οι ευθείες εκτός τον άξονα $y'y$ $(x=0)$).

Για $y=kx$ έχω $f(x,kx)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\frac{kx}{x^2+k^2}\to 0$ $(k\neq 0)$.
(όταν $x\to 0$) για $k=0$ είναι $f(x,0)=0$.



Παρατήρηση !!

Ακόμα και αν το όριο κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας που περνάει από το $(0,0)$ υπάρχει και είναι ίδιο, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το όριο μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών υπάρχει.

Συνέχεια Παραδείγματος (1)

Ελέγχω το όριο κατά μήκος της παραβολής $\boxed{y=kx^2}$ και έχω:
$(k\neq 0)$
$$f(x,kx^2)=\frac{x^2 kx^2}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$
που για διαφορετικά k έχω διαφορετικές τιμές. (εξαρτημένο από το k) $\boxed{\text{Άρα το όριο δεν υπάρχει.}}$

Παρατήρηση

Το να ελέγξουμε όλες τις κατευθύνσεις δεν είναι από μόνο του αρκετό για να συμπεράνουμε αν το όριο υπάρχει.

Διαδοχικά Όρια

Θεώρημα

Αν $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ και επιπλέον τα μονοδιάστατα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ και $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ υπάρχουν τότε τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα με L (Το αντίστροφο δεν ισχύει.)
$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]=\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]=L$$

Παράδειγμα (1)

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}, \quad (x\neq -y)$$

$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} f =;$

Θα υπολογίσω τα διαδοχικά όρια.

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{-y}{y}=-1$$
$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{x}{x}=1$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=-1\\ &\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ δεν υπάρχει}$$
(Από το Θεωρ.)

Άλλος τρόπος αν πάρω $y=kx$: $f(x,kx)=\frac{x-kx}{x+kx}=\frac{1-k}{1+k}$ εξαρτάται από το k άρα το όριο <u>δεν</u> υπάρχει.

<u>Παράδειγμα (2)</u>

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^2}\ ,\ (x,y)\neq(0,0)$$

$$\cdot\ \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}f(x,y)\right]=0 \quad = \quad \lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}f(x,y)\right]=0 \qquad (1)$$

για $x\neq0$:

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^2}\xrightarrow[y\to0]{}\frac{0}{0+x^2}=0$$

για $y\neq0$:

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\xrightarrow[x\to0]{}\frac{0}{0+y^2}=0$$

<u>Ερώτημα</u>

Από την (1) μπορώ να συμπεράνω ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ υπάρχει;

<u>Απάντηση</u>

$\boxed{\text{ΟΧΙ!}}$ <u>δεν</u> μπορώ να συμπεράνω κάτι. <u>Υπάρχει όμως το όριο;</u> $\boxed{\text{ΟΧΙ!}}$

Για $y=kx$: $f(x,kx)=\frac{k^2x^4}{k^2x^4+x^2(1-k)^2}=\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}$

$$\lim_{x\to0}f(x,kx)=\begin{cases}0, & k\neq1\\ 1, & k=1\end{cases}\Rightarrow \text{Το όριο } \underline{\text{δεν}} \text{ υπάρχει.}$$

<u>Ανισότητα Young</u> (Εφαρμογές της στον υπολογισμό ορίων).

· Έστω $a,b\geq0$ και $p,q>0$ τ.ω. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (p,q συζυγείς εκθέτες)

<u>Ανισότητα Young</u>: $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ (<u>π.χ.</u>: $p=q=2$ $\quad ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$).

<u>Θεώρημα</u>

Έστω ($a,b\geq0$) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^a|y|^b}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Τότε αν:
- $a+b>4$ η f συνεχής
- $a+b\leq4$ η f <u>όχι</u> συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>

(1) · Έστω $a+b>4$:

(α) $a>4, b=0$ τότε: $0<f(x,y)=\frac{|x|^4}{x^4+y^4}|x|^{a-4}\leq|x|^{a-4}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

Το ίδιο επιχείρημα αν $a=0$ και $b>4$.

(β) $a>0, b>0$ $(a+b>4)$.

Τότε γράφω: $a=a_1+\varepsilon_1$, $b=b_1+\varepsilon_2$ με $\boxed{a_1+b_1=4}$, $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0$.

Και έχω: $|x|^{a_1}|y|^{b_1}\leq\frac{(|x|^{a_1})^{4/a_1}}{(4/a_1)}+\frac{(|y|^{b_1})^{4/b_1}}{(4/b_1)}=$ (Εφαρμογή της Αν. Young για $\cdot\ p=4/a_1$, $\cdot\ q=4/b_1$).

$=\frac{a_1}{4}|x|^4+\frac{b_1}{4}|y|^4$

Συνεπώς: $|x|^{a_1}|y|^{b_1}\leq\frac{a_1}{4}|x|^4+\frac{b_1}{4}|y|^4\leq\underbrace{\max\left(\frac{a_1}{4},\frac{b_1}{4}\right)}_{\gamma}(x^4+y^4)=\gamma(x^4+y^4)$

Άρα: $0<f(x,y)=|x|^{\varepsilon_1}\cdot|y|^{\varepsilon_2}\frac{|x|^{a_1}|y|^{b_1}}{x^4+y^4}\leq|x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2}\frac{\gamma(x^4+y^4)}{(x^4+y^4)}=$

$=\gamma|x|^{\varepsilon_1}|y|^{\varepsilon_2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$. (Άρα f συνεχής).

(2) Έστω $\alpha+\beta=4$, $y=kx \Rightarrow f(x,kx)=\frac{|x|^{\alpha}|k|^{\beta}|y|^{\beta}}{x^4+k^4x^4}=\frac{|k|^{\beta}|x|^{\alpha+\beta}}{x^4(1+k^4)} \underset{=}{\overset{\alpha+\beta=4}{=}}$
$=\frac{|k|^{\beta}}{1+k^4}$ Άρα το όριο εξαρτάται από k και συνεπώς το όριο της συνάρτησης 2 μεταβλητών <u>δεν</u> υπάρχει (f όχι συνεχής).

$\rightarrow$ $\alpha+\beta<4$ (στο επόμενο μάθημα).

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 8ο 28 Φεβρουαρίου 2019.

Από το προηγούμενο μάθημα:

$\boxed{\alpha,\beta \geq 0}$

• $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Αν $\begin{cases} \alpha+\beta>4 : f \text{ συνεχής} \\ \alpha+\beta\leq 4 : f \text{ όχι συνεχής} \end{cases}$

Στο προηγ. μάθημα αποδείξαμε τα:

(1) $\alpha+\beta>4 \to f$ συνεχής

(2) $\alpha+\beta=4 \to f$ όχι συνεχής

Τώρα θα δείξουμε το:

(3) $\alpha+\beta<4 \to f$ όχι συνεχής.

• (α) Έστω $0<\alpha<4$ και $\beta=0$

$f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha}{x^4+y^4}$. Επιλέγω την κατεύθυνση $y=0, x\to 0$ τότε:

$f(x,0) = \dfrac{|x|^\alpha}{x^4} = |x|^{\alpha-4} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ επειδή $(\alpha-4<0)$ άρα το όριο δεν υπάρχει και άρα f όχι συνεχής

• Αν $\alpha=0, 0<\beta<4$ ίδιο επιχείρημα.

• (β) Έστω $0<\alpha$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<4$. Έστω η καμπύλη $y=k|x|^\delta$, $\delta>0$, $k\neq 0$ (το δ θα το επιλέξω στην συνέχεια).

$f(x,k|x|^\delta) = \dfrac{|x|^\alpha \cdot |k|^\beta \cdot |x|^{\beta\delta}}{x^4+k^4|x|^{4\delta}} = \dfrac{|k|^\beta |x|^{\alpha+\beta\delta}}{x^4(1+k^4|x|^{4\delta-4})}$

Επιλέγω το δ: $\delta=1$

$f(x,k|x|) = \dfrac{|x|^{\alpha+\beta}\cdot|k|^\beta}{x^4(1+k^4)} = |x|^{\alpha+\beta-4}\dfrac{|k|^\beta}{1+k^4} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ Άρα το όριο δεν υπάρχει άρα f όχι συνεχής.

Όμοια για την $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma+|y|^\gamma}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\alpha,\beta\geq 0, \gamma>0$

• $\alpha+\beta>\gamma \to f$ συνεχής

• $\alpha+\beta\leq\gamma \to f$ όχι συνεχής.

Παρατήρηση γύρω από τις πολικές συντεταγμένες.

• $f(x,y) = \dfrac{|x|^{1/2}|y|}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$ $\quad \begin{array}{|l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta. \end{array}$

$f(x,y) = \dfrac{r^{1/2}|\cos\theta|\cdot r|\sin\theta|}{r^2} = r^{-1/2}|\cos\theta|^{1/2}\cdot|\sin\theta|$. Επιλέγω κατεύθυνση τ.ω. $\cos\theta, \sin\theta \neq 0$ και το όριο δεν υπάρχει (πηγαίνει στο $+\infty$).

• $f(x,y)=\dfrac{|x||y|^2}{x^2+y^2}$ $\quad\Big|\quad \begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix}$

$f(x,y)=\dfrac{r^3|\sin\theta|^2|\cos\theta|}{r^2}=r|\cos\theta|\sin^2\theta<r$ και $r\to 0$ άρα το όριο υπάρχει και είναι ίσο με το 0. $\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.\right)$

Ερώτηση:

Μπορώ με πολικές να αποδείξω το προηγ. θεώρημα;

Έστω $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ και $\alpha+\beta>4$.

με πολικές: $f(x,y)=\dfrac{r^\alpha|\cos\theta|^\alpha r^\beta|\sin\theta|^\beta}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}=r^{\alpha+\beta-4}\dfrac{|\cos\theta|^\alpha|\sin\theta|^\beta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$

Απάντηση: $\boxed{\text{ΟΧΙ!}}$

• Θα μπορούσε (εδώ δεν συμβαίνει) ενώ $r^{\alpha+\beta-4}\to 0$ να έχω και τον παρονομαστή να πηγαίνει στο 0 άρα οι πολικές δεν θα ήταν χρήσιμες.

Άλλο Παράδειγμα:

$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχει αν και μόνο αν το όριο (για $y=n^3$) υπάρχει (κάνει 0)

$\lim\limits_{(x,n)\to(0,0)} \dfrac{|x|^\alpha|n|^{3\beta}}{x^6+n^6}$ $\to \alpha+3\beta>6 \to$ υπάρχει (f συν.)

$\to \alpha+3\beta\leq 6 \to$ δεν υπάρχει (f όχι συν)

Άσκηση:

Για $x>0$ έχω $f(x,y)=x^y$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$ $\quad f(x,y)=e^{y\ln x}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln x=$

η καμπύλη $y=\frac{1}{\ln x}$ καθώς $x\to 0^+$ πάει στο $(0,0)$. Άρα είναι αποδεκτή για τον υπολογισμό του ορίου. Όμως κατά μήκος της η $f(x,y)=e$ ενώ κατά μήκος της $y=x$. η $f(x,x)\xrightarrow[x\to 0]{} e^0=1$ άρα το όριο δεν υπάρχει.

Μερική Παράγωγος

Ορισμός

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f:U\to\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)}{h}$$

ή αλλιώς $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\bar{x}+h\bar{e}_j)-f(\bar{x})}{h}$, $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$

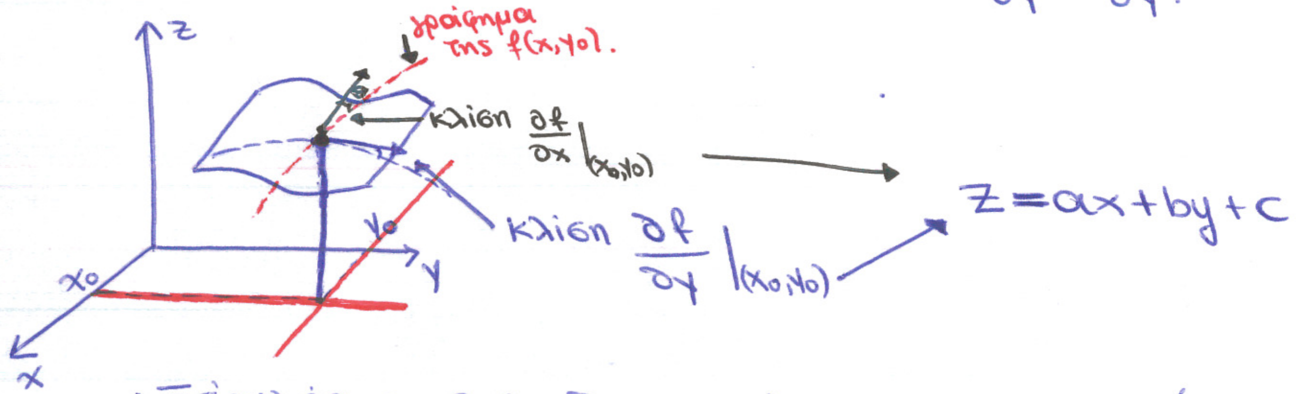
$\bar{e}_j=(0,\dots,\underset{\substack{\downarrow\\ j\text{-θέση}}}{1},\dots,0)$

<u>Παραδείγματα</u>

$\boxed{Π_1}$ $f(x,y)=x^2+e^y+xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^y+2yx .$$

<u>Συμβολισμός</u>: $z=f(x,y)$ άρα $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.



• Ξέρω ότι το επίπεδο περνάει από το σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

<u>άρα</u>: $z=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)+f(x_0,y_0)$.

<u>Παρατήρηση</u>

Παρόλο που αυτή είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου η ύπαρξη μερικών παραγώγων <u>ΔΕΝ</u> επαρκεί για την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου.