Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 22^{o}}$ 7 Μαΐου 2019

Φυλλάδιο 11

Άσκηση 6: Βρείτε $\frac{dy}{dx}$ όταν: (α) $\frac{x}{y}=10$ (β) $x^3-\sin y+y^4=4$

(γ) $e^{x+y^2}+y^3=0$

Λύση: (α): Ισοδύναμα $y=\frac{x}{10}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{10}$

Έστω $F(x_0,y_0)=0$

Ερώτηση: Πότε μπορώ να λύσω τοπικά γύρω από το (x_0,y_0) ώστε να έχω $y=y(x)$? και $F(x,y(x))=0$.

Απάντηση: όταν $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0$ $\quad \frac{\partial y}{\partial x}=?$

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(α): 2ος τρόπος: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y(x)}\right)=0$

$$=\frac{y-xy'}{y^2}=0 \Leftrightarrow xy'=y \Rightarrow y'=\frac{y}{x}=\frac{\frac{x}{10}}{x}=\frac{1}{10}$$

(β): Για να έχω μία $y=y(x)$ ομαλή γύρω από το (x_0,y_0) πρέπει $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0$.

$F(x,y)=x^3-\sin y+y^4$

$\frac{\partial F}{\partial y}=-\cos y+4y^3\neq 0$ δηλαδή πρέπει $-\cos y+4y^3\neq 0$

$$\frac{d}{dx}(x^3-\sin y+y^4)=0 \Rightarrow 3x^2+(-\cos y+4y^3)y'=0 \Leftrightarrow$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2}{-\cos y+4y^3}$$

→ Έστω
$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots z_k)&=0\\ F_2(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)&=0\\ &\vdots\\ F_k(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)&=0\end{aligned}\right\}$$
k-εξισώσεις που ικανοποιούνται στα σημεία $(x_{10},\dots,x_{n0},z_{10},\dots,z_{k0})$.

Ερώτημα: Υπάρχουν k συναρτήσεις $z_i=z_i(x_1,\dots,x_n)$ $i=1,\dots,k$ ομαλές (C^1) κοντά στο σημείο $(x_{10},\dots,x_{n0},z_{10},\dots,z_{k0})$.

Απάντηση: Ναι εφόσον: $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_k}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial z_k}\end{pmatrix}\neq 0 \longleftarrow$ Ιακωβιανή ορίζουσα.

Βιβλίο Σελ 250

Άσκηση 18: Δείξτε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί p, q τ.ω. να υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις u, v από το $(-1-p,-1+p)$ στο $(1-q,1+q)$ που ικανοποιούν:

$F_1 = xe^u + ue^v = 0$

$F_2 = xe^v + ve^u = 0$

$\forall x \in (-1-p,-1+p)$ με $u(-1)=1$, $v(-1)=1$

Συσχέτιση με την προηγ. Θεωρία:

$n=1$ (μόνο x) $\quad k=2$ $(z_1=u, z_2=v)$.

$x_0=-1$, $z_{1_0}=u(-1)=1$, $z_{2_0}=v(-1)=1$

• Τα p,q εκφράζουν ουσιαστικά την ύπαρξη περιοχής γύρω από το $(-1,1,1)$.

Λύση: $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} xe^u+e^v & ue^v \\ ve^u & xe^v+e^u \end{pmatrix} = (xe^u+e^v)(xe^v+e^u) - uve^{u+v} =$

$= x^2e^{u+v} + xe^{2u} + xe^{2v} + e^{u+v} - uve^{u+v}$

$= e^{u+v}(x^2+1-uv) + x(e^{2u}+e^{2v})$ (*)

• για $\left.\begin{matrix} x=-1 \\ u=v=1 \end{matrix}\right|$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow} e^2(1+1-1) + (-1)(e^2+e^2) = -e^2 \neq 0$ άρα τελείωσα.

→ Βρείτε το $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-1}$

$\frac{d}{dx}F_1 = 0 \iff e^u + x\cdot u'e^u + u'e^v + uv'e^v = 0$ (1)

$\frac{d}{dx}F_2 = 0 \iff e^v + xv'e^v + v'e^u + vu'e^u = 0$ (2)

(1) $\iff (xe^u+e^v)u' + ue^vv' = -e^u$

(2) $\iff u'e^uv + (xe^v+e^u) = -e^v$

Για $x=-1$, $u=v=1$

$\left.\begin{matrix} (1) \Rightarrow ev'(-1) = -e \\ (2) \Rightarrow eu'(-1) = -e \end{matrix}\right\} \Rightarrow u'(-1) = v'(-1) = 1$

Φυλλάδιο 11

Άσκηση 5: Βρείτε μέγιστο και ελάχιστο της $f(x,y) = \cos^2x + \cos^2y$ υπό την συνθήκη $x+y = \frac{\pi}{4}$

Λύση: Μπορούμε να το ανάγουμε σε μία μεταβλητή $\left(y = \frac{\pi}{4} - x\right)$, $f(x,y) = \cos^2x + \cos^2(\pi/4 - x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$).

Ας πάμε με πολ/τες Lagrange:

Έστω $g(x,y) = x + y - \frac{\pi}{4}$

Αναζητώ σημεία στα οποία ισχύει $\nabla f = \lambda \nabla g$.

Συνέχεια στο επόμενο μάθημα.

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 23^{o}}$ 9 Μαΐου 2019

Φυλλάδιο 11

Άσκηση 5

$f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y \ , \ x+y=\frac{\pi}{4}$

Να βρεθούν ακρότατα.

Λύση: έστω $g(x,y)=x+y=\frac{\pi}{4}$

Πολ/τες Lagrange: $\nabla f=\lambda \nabla g \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2\cos x\sin x=\lambda \\ -2\cos y\sin y=\lambda \\ x+y=\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sin 2x=-\lambda=\sin 2y$

και άρα έχω: $\sin 2x=\sin 2y \Rightarrow$

ή $\left\{\begin{matrix} 2x=2y+2k\pi \\ \pi-2x=2y+2k\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=y+k\pi \\ \text{ή} \\ x+y=(k+\frac{1}{2})\pi \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{matrix}\right. \rightarrow$ απορ.

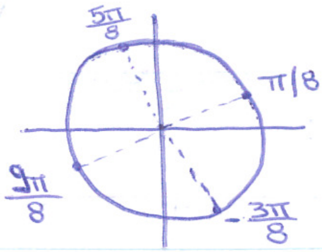
και: $x+y=\frac{\pi}{4}$

Άρα έχω: $\left\{\begin{matrix} x-y=k\pi \\ x+y=\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{4}) \\ y=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{4}-k)\end{matrix}\right. , k\in\mathbb{Z}$ υποψήφια σημεία για ακρότατα.

Έστω $\boxed{k=2m}$:

$x=\frac{\pi}{2}(2m+\frac{1}{4})=m\pi+\frac{\pi}{8}$

$y=-m\pi+\frac{\pi}{8}$, $m\in\mathbb{Z}$.



Έστω $\boxed{k=2m+1}$:

$x=\frac{\pi}{2}((2m+1)+\frac{1}{4})=m\pi+\frac{5\pi}{8}$

$y=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{4}-(2m+1))=-m\pi-\frac{3\pi}{8}$

Υπολογίζω: $f(x=m\pi+\frac{\pi}{8}, y=-m\pi+\frac{\pi}{8})=\cos^2(m\pi+\frac{\pi}{8})+\cos^2(-m\pi+\frac{\pi}{8})$ (*)

άρα: $\cos^2(m\pi+\frac{\pi}{8})=\frac{1+\cos(2m\pi+\frac{\pi}{4})}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$\boxed{\begin{matrix}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \\ \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}\end{matrix}}$

παρόμοια $\cos^2(-m\pi+\frac{\pi}{8})=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

άρα $\boxed{(*)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ για $k=2m$ άρτιος.

$\leftarrow$ μέγιστο

Έστω $k=2m+1$ περιττός.

Υπολογίζω: $f(x=m\pi+\frac{5\pi}{8}, y=-m\pi-\frac{3\pi}{8})=\cos^2(m\pi+\frac{5\pi}{8})+\cos^2(-m\pi-\frac{3\pi}{8})$ (**)

$\cos^2(m\pi+\frac{5\pi}{8})=\frac{1+\cos(2m\pi+\frac{5\pi}{4})}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$\cos^2(-m\pi-\frac{3\pi}{8})=\frac{1+\cos(-2m\pi-\frac{3\pi}{4})}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

άρα $\boxed{(**)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\leftarrow$ ελάχιστο

Φυλλάδιο 10

Άσκηση 1

Βρείτε απολ. μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ όταν $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

Λύση: Βήμα 1: Ελέγχω στο εσωτερικό $(x^2+y^2<1)$.

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0) \quad , \quad f(0,0)=0.$$

Βήμα 2: α' τρόπος: παραμετρικοποίηση συνόρου $x^2+y^2=1$ είναι $(x(t),y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$

$$g(t) = f(x(t),y(t)) = \cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t = 1 + \cos t \sin t$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$g'(t) = \cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$
$$\Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$$

Πρέπει επίσης να ελέγξω τα $t=0$ και $t=2\pi$

- $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} = g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = g\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$g(0) = 1$

$g(2\pi) = 1$

Άρα ελάχιστη τιμή $= 0$ στο $(0,0)$

μέγιστη τιμή $= \frac{3}{2}$ στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Β' τρόπος: πολλ/τες Lagrange

$h(x,y) = x^2+y^2 = 1$

$$\nabla f = \lambda \nabla h \iff \begin{cases} 2x+y = 2\lambda x \\ x+2y = 2\lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1-\lambda)x + y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Έχω ένα 2×2 ομ. σύστημα $\qquad x^2+y^2=1$

Αν η ορίζουσα ήταν $\neq 0 \Rightarrow x=y=0$ (δεν ικαν. το $x^2+y^2=1$)

άρα πρέπει η ορίζουσα να είναι 0.

$$4(\lambda-1)^2 - 1 = 0 \iff (2\lambda-3)(2\lambda-1) = 0 \iff \lambda = \frac{3}{2} \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}$$

Έστω $\boxed{\lambda = 1/2}$ $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm\sqrt{2}/2 \\ y = \pm\sqrt{2}/2 \end{matrix}$ με $x=-y$

Έστω $\boxed{\lambda = 3/2}$ $\begin{matrix} x=y \\ x^2+y^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm\sqrt{2}/2 \\ y = \pm\sqrt{2}/2 \end{matrix}$ με $x=y$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

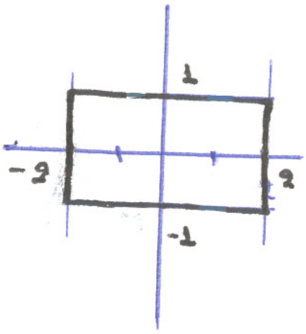
$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Άρα μέγιστο: $\frac{3}{2}$ στο $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ελάχιστο: 0 στο $(0,0)$

Φυλλάδιο 10

Άσκηση 2 $f(x,y)=xy$, $|x|\le 2$, $|y|\le 1$



Λύση: α) εσωτ. του ορθ. $\nabla f=0 \Rightarrow x=y=0$

β) Στο σύνορο. ελέγχω καθε κομ. ξεχωρ.

π.χ. στο $g(x)=f(x,-1)=-x$, $-2\le x\le 2$

$\max g=2 \to$ στο $x=-2$

$\min g=-2 \to$ στο $x=2$