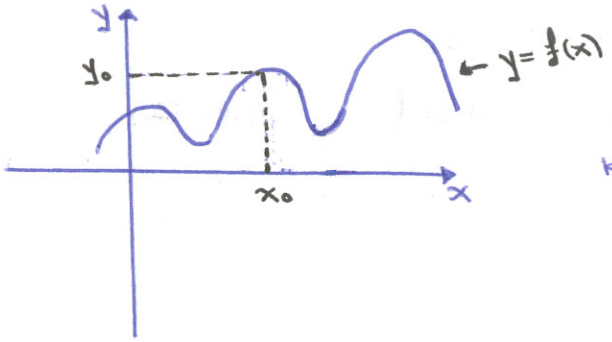
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

$\boxed{\text{Μάθημα } 20^{\circ}}$ 16 Απριλίου 2019

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Μια μεταβλητή: $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Μπορώ να την αντιστρέψω; δηλ. $x = f^{-1}(y)$



Γενικώς όχι (δεν είναι 1-1)

Κοντά σε ένα σημείο (x_0, y_0) είναι αντιστρέψιμη; Δηλ. υπάρχει διάστημα U τ.ω. $x_0 \in U$ και η f να αντιστρέφεται; Ναι

Αυτό που εξασφαλίζει την αντιστρεψιμότητα τοπικά σε μια περιοχή κοντά στο x_0 είναι η συνθήκη $f'(x_0) \neq 0$. Διότι τότε η $f'(x) \neq 0$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0 άρα η f είναι μονότονη, άρα αντιστρέψιμη.

Πολλές μεταβλητές:

$F(x,y,z) = 0 \qquad x^2 + xyz + \sin y = 0 \; (*)$

Μπορώ να βρω συνάρτηση $y = y(x,z)$ που να ικανοποιείται η $(*)$;

Θεώρημα (Πεπλ. συναρτήσεων)

Έστω $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση και $(\bar{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ και $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$ στο οποίο $F(\bar{x}_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}_0, z_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει μπάλα U όπου $\bar{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ και περιοχή $V \subset \mathbb{R}$ τ.ω. z_0 και μοναδική συνάρτηση $z = g(\bar{x})$, $\bar{x} \in U$ και $z \in V$ τ.ω. $F(\bar{x}, g(\bar{x})) = 0$. Η g είναι C^1 και $Dg(\bar{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}, z)} D_x F(\bar{x}, z) \quad (1)$

Παραδείγματα

$\boxed{\Pi_1}$ $x^2 + z^2 = 1$, $F(x,z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$

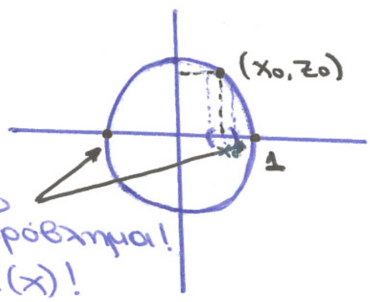
Κοντά στο (x_0, z_0): $z = z(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Ας το δούμε με το Θεώρημα.

Για να υπάρχει $z = z(x)$ συνάρτηση πρέπει: $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \Leftrightarrow 2z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$

Επειδή $x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

εδώ έχω πρόβλημα. $\left(z = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0\right)$



εδώ έχω πρόβλημα! $\nexists \; z = z(x)$!

↳ Εδώ μπορώ να βρω όμως συνάρτηση $x = x(z)$

$\boxed{\Pi_2}$ $x^2+xy+e^y=2$ Μπορώ να λύσω ως προς y κοντά στο $(x_0,y_0)=(1,0)$?

Λύση: Έστω $F(x,y)=x^2+xy+e^y-2=0$

Υπολογίζω $\frac{\partial F}{\partial y}=x+e^y$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)=2\neq 0$ άρα υπάρχει διάστημα U με $1\in U$ και συνάρτηση $f:U\to V$ (όπου $0\in V$, διάστημα) όπου η f είναι C^1 τ.ω. $y=f(x)$ και $x^2+xf(x)+e^{f(x)}=2$.

Βρείτε την $f'(x)$. Μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα (τον τύπο (1)) όμως μπορώ εύκολα να το βρω παραγωγίζοντας την σχέση που έχω και χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

$\Rightarrow 2x+f(x)+xf'(x)+f'(x)e^{f(x)}=0 \Rightarrow$

$$f'(x)=-\frac{2x+f(x)}{x+e^{f(x)}}.$$

Μπορώ να βρω συνάρτηση $x=g(y)$ γύρω από το $(1,0)$?

Ελέγχω $\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y$, $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)=2\neq 0$ άρα ναι υπάρχει g C^1 συνάρτηση, $x=g(y)$ $y\in U_2$ με $0\in U_2$.

$\boxed{\Pi_3}$ Έστω η εξίσωση $F(x,y,z)=xy+z^2+3xz^5-4=0$

Μπορούμε να λύσουμε κοντά στο $(1,0,1)$ $z=z(x,y)$?

$\frac{\partial F}{\partial z}=2z+15xz^4$, $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)=17\neq 0$. Άρα ναι υπάρχει δίσκος $U\subset\mathbb{R}^2$ με $(1,0)\in U$ και περιοχή $V\subset\mathbb{R}$ με $1\in V$ και συνάρτηση $h:U\to V$ τ.ω. h είναι C^1 και $z=h(x,y)$ και $F(x,y,h(x,y))=0$ $(x,y)\in U$

Βρείτε την $\frac{\partial h}{\partial x}$ στο σημείο $(1,0,1)$

Παραγωγίζοντας την σχέση (εξίσωση) ως προς x: $(z=z(x,y))$

$y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+3z^5+15xz^4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2z+15xz^4)=-3z^5+y$

$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3z^5+y}{2z+15x^4}$ άρα στο $(1,0)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0,1)=-\frac{3}{17}$

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 21° 18 Απριλίου 2019

• Έστω $F(x_1,\dots,x_n,z)=0$, $\exists\, z=g(x_1,\dots,x_n)$ τ.ω. $F(x_1,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))=0$;

<u>Ναι</u>, εφ'όσον $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. (απο Θ. πεπλ. συναρτ.)

• Τι συμβαίνει αν αντί για μια εξίσωση έχω ένα σύστημα εξισώσεων;

$$F_1(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots z_k)=0$$
$$F_2(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)=0$$
$$\vdots$$
$$F_k(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)=0$$

Μπορώ να λύσω ως προς $z_1,\dots,z_k$ ως προς τις μεταβλητές $x_1,\dots,x_n$;
Δηλαδή υπάρχουν k συναρτήσεις $g_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=1,\dots,k$ τ.ω.
$z_i=g_i(x_1,\dots,x_n)$ (έχω k z_i και k εξισώσεις) κοντά σε κάποιο σημείο $(\bar{x}_0,\bar{z}_0)$; <u>Ναι</u>, αν

$$\det\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_k}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial z_k}\end{bmatrix}}_{\Delta}\neq 0 \quad \text{στο σημείο } (\bar{x}_0,\bar{z}_0)$$

$\Delta=\frac{\partial(F_1,\dots,F_k)}{\partial(z_1,\dots,z_k)}$ και λέγεται Ιακωβιανή ορίζουσα

αν $\bar{F}=(F_1,\dots,F_k)$, $\Delta=J\bar{F}(\bar{x}_0,\bar{z}_0)$

<u>Παραδείγματα</u>

$\boxed{\Pi_1}$ $\left.\begin{aligned}F_1&=x+y+z^3w=2\\ F_2&=xyz+w^2=4\end{aligned}\right\}(*)$ Λύνεται ως προς (z,w) ως συναρτήσεις των x,y κοντά στο σημείο $(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,0,1,2)$

<u>Λύση</u>: Ελέγχω την Ιακωβιανή: $\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial w}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3z^2w & z^3\\ xy & 2w\end{vmatrix}$

στο σημείο $(0,0,1,2)$ έχω: $J\bar{F}(0,0,1,2)=\begin{vmatrix}6 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=24\neq 0$

$\bar{F}=(F_1,F_2)$

Άρα υπάρχει περιοχή U με $(0,0)\in U$ και περιοχή V με $(1,2)\in V$ τέτοια ώστε υπάρχει ακριβώς ένα $(z,w)\in V$ τ.ω τα σημεία (x,y,z,w) να ικανοποιούν τις εξισώσεις (*) και οι συναρτήσεις $z=z(x,y)$ και $w=w(x,y)$ είναι C^1.

Παρατήρηση

Οι συναρτήσεις που εξασφαλίζουμε ότι υπάρχουν μέσω του κριτηρίου είναι μοναδικές.

Συνέχεια $\boxed{\Pi_1}$ Να βρεθεί η $\frac{\partial z}{\partial x}$. Παραγωγίζω ως προς x τις (*) με πεπλεγμένο τρόπο. Δηλ. θεωρώντας το z ως συνάρτηση των x,y δηλ. $z=z(x,y)$ και το w ως συνάρτηση των x,y δηλ. $w=w(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F_1}{\partial x}=1+0+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}w+z^3\frac{\partial w}{\partial x}=0\\[2ex] \frac{\partial F_2}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+2w\frac{\partial w}{\partial x}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(3z^2w)\frac{\partial z}{\partial x}+(z^3)\frac{\partial w}{\partial x}=-1\\[2ex] (xy)\frac{\partial z}{\partial x}+(2w)\frac{\partial w}{\partial x}=-yz\end{array}\right.$$

Έχω ένα γραμμικό 2×2 σύστημα με αγνώστους τις $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}$.
Λύση με γραμμική Άλγεβρα (μέθοδος Cramer)

- $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & z^3\\ -yz & 2w\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3z^2w & z^3\\ xy & 2w\end{vmatrix}}=\frac{-2w+yz^4}{6z^2w^2-xyz^3}$$

Π.χ. όταν $(x,y,z,w)=(0,0,1,2)$ τότε $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4}{24}=-\frac{1}{6}$

- $$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}3z^2w & -1\\ xy & -yz\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3z^2w & z^3\\ xy & 2w\end{vmatrix}}=\dots\dots$$

Ενδιαφέρουσα ειδική Περίπτωση

Έστω $\bar{f}=(f_1,\dots,f_n)$ $\quad \bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$f_1(x_1,\dots,x_n)=y_1$
$f_2(x_1,\dots,x_n)=y_2$
$\vdots$
$f_n(x_1,\dots,x_n)=y_n$

Πότε μπορώ να λύσω τα x_i ως συναρτήσεις των y_i δηλ. να βρω συνάρτηση $\bar{g}$ τ.ω $\bar{x}=g(\bar{y})$
Δηλ. να αντιστρέψω την f; (τοπικά γύρω από το $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$)
→ Η συνθήκη είναι $Jf(\bar{x}_0)\neq 0$

Θεώρημα αντιστρόφου απεικόνισης

$U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{f}=(f_1,\dots,f_n)$ με $f_i:U\to\mathbb{R}$ είναι C^1 και $\bar{f}(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ και $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=J\bar{F}(\bar{x}_0)\neq 0$ τότε η $\bar{f}(\bar{x})=\bar{y}$ αντιστρέφεται σε μια περιοχή του $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ και $\exists$ C^1 συνάρτηση $\bar{g}$ τ.ω. $\bar{x}=g(\bar{y})$ για $(\bar{x},\bar{y})$ κοντά στο $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$

$\boxed{\Pi_2}$ Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f}(u,v) = \left(\frac{v^2-u^2}{2}, uv \right)$

Αντιστρέφεται; δηλ. $\exists\, \bar{g}$ τ.ω. $(u,v) = \bar{g}(x,y)$

Βρείτε την $\frac{\partial u}{\partial y}$.

<u>Λύση</u>: $\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -u & v \\ v & u \end{vmatrix} = -(u^2+v^2) \neq 0$ για $(u,v) \neq (0,0)$

<u>Παρατήρηση</u>

<u>Προσοχή</u> η απάντηση για το αν αντιστρέφεται ή όχι η συνάρτηση μέσω του Θεωρήματος είναι για <u>τοπική αντιστρεψιμότητα</u> (για ολική <u>δεν</u> ξέρω)

<u>Συνέχεια $\boxed{\Pi_3}$</u>

$$\left.\begin{aligned} \frac{v^2-u^2}{2} &= x \\ uv &= y \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{παραγ.} \\ \text{ως προς } y\end{array} \Rightarrow \begin{aligned} v\frac{\partial v}{\partial y} - u\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

μέθοδος Cramer:

(Λύνω το σύστημα): $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} v & 0 \\ u & 1 \end{vmatrix}}{(u^2+v^2)} = \frac{v}{u^2+v^2}$