ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

πρόχειρες σημειώσεις για μεταπτυχιακό μάθημα
2017

Άλκης Τερσένοβ

Περιεχόμενα ... 1

Κεφάλαιο I. Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου

§1. Βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων ... 2

§2. Πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Laplace* για μπάλα ... 8

§3. Άλλα συνοριακά προβλήματα ... 13

§4. Πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Laplace* σε γενικά χωρία ... 15

§5. Πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Poissone* σε γενικά χωρία ... 22

§6. Αρχή του μεγίστου (ασθενής μορφή) ... 24

§7. Αρχή του μεγίστου (ισχυρή μορφή) ... 29

§8. *A priori* εκτιμήσεις ... 32

§9. Μερικά στοιχεία απο την Συναρτησιακή Ανάλυση ... 34

§10. *A priori* εκτιμήσεις *Schauder*,
πρόβλημα *Dirichlet* στην γενική περίπτωση ... 40

§11. Μοναδικότητα της λύσης για άλλα συνοριακά προβλήματα ... 42

§12. Μη γραμμικές εξισώσεις ... 44

Ασκήσεις ... 48

Κεφάλαιο II. Εξισώσεις παραβολικού τύπου

§1. Αρχή του μεγίστου για παραβολικές εξισώσεις ... 51

§2. Πρόβλημα *Cauchy* ... 57

§3. Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για παραβολικές εξισώσεις ... 61

Ασκήσεις ... 62

Κεφάλαιο III. Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

§1. Πρόβλημα *Cauchy* για την κυματκή εξίσωση ... 64

§2. Πρόβλημα *Cauchy* για την εξίσωση θερμότητας *vs*
πρόβλημα *Cauchy* για την κυματκή εξίσωση ... 73

§3. Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για κυματική εξίσωση ... 75

Ασκήσεις ... 77

Κεφάλαιο IV. Μη γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

§1. Πρόβλημα *Cauchy* για την εξίσωση *Hopf* ... 78

§2. Μη ομογενείς εξισώσεις πρώτης τάξης ... 82

Ασκήσεις ... 84

Κεφάλαιο I. Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου

§1 Βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων

Έστω $u(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ μια συνάρτηση ($x = (x_1, ..., x_n)$). Εξίσωση *Laplace* ονομάζουμε την εξίσωση

$$\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

Μια $C^2(\Omega)$ συνάρτηση $u(x)$ που ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace* στο χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζεται *αρμονική συνάρτηση* σε αυτο το χωρίο.

Πάντα θα υποθέτουμε οτι στο χωρίο Ω ισχύει το θεωρημα της απόκλισης

$$\int_\Omega div\, \mathbf{F} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\, s \Big(= \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu d\, s \Big)$$

εδω $\partial\Omega$ το προσανατολισμένο σύνορο του χωρίου Ω και το ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$, $\mathbf{F}(x)$ ενα αρκετά ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x) = \big(F_1(x), ..., F_n(x)\big)$,

$$div\, \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} F_{i x_i}.$$

Έστω οι συναρτήσεις $u, v \in C^2(\Omega)$, τότε έχουμε

$$v\, \Delta\, u - u\, \Delta\, v = div\, [v\, \nabla\, u - u\, \nabla\, v] \tag{1.1}$$

ή

$$v \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u \sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} (v\, u_{x_i} - u\, v_{x_i})_{x_i}$$

και

$$\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta\, u = div(v \nabla\, u) \tag{1.2}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} + v \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} (v\, u_{x_i})_{x_i}.$$

Θυμίζουμε οτι $\nabla\, u = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$, $\nabla\, v = (v_{x_1}, ..., v_{x_n})$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.1) παίρνουμε

$$\int_\Omega \big(v\, \Delta\, u - u\, \Delta\, v\big) dx = \int_{\partial\Omega} \Big(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big) d\, s, \tag{1.3}$$

Πράγματι, αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης για

$$\mathbf{F} = v\, \nabla\, u - u\, \nabla\, v = (vu_{x_1} - uv_{x_1}, ..., vu_{x_n} - uv_{x_n}),$$

προφανώς

$$\mathbf{F} \cdot \nu = v\, \nabla u \cdot \nu - u \nabla\, v \cdot \nu = v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}.$$

Ολοκληρώνοντας την (1.2) παίρνουμε

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \tag{1.4}$$

Οι τύποι (1.3) και (1.4) ονομάζονται τύποι $Green$. Για να είναι η διαδικασία που εφαρμόσαμε ¨νόμιμη¨ προφανώς πρέπει επιπλέον να ζητήσουμε απο τις συναρτήσεις u, v να είναι $C^1(\overline{\Omega})$.

Εισάγουμε την συνάρτηση

$$E(x,\xi) = E(|x-\xi|) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n}|x-\xi|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \\ \frac{1}{2\pi} ln|x-\xi|, & n = 2 \end{cases} \tag{1.5}$$

$x = (x_1, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, ω_n είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbf{R}^n$ και

$$|x-\xi| = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\Big)^{1/2}.$$

Η συνάρτηση E ονομάζεται *θεμελιώδης λύση* της εξίσωσης $Laplace$. Για $x \neq \xi$ η E είναι αρμονική ως προς x και ως προς ξ, δηλαδή

$$\Delta_x E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n E_{x_i x_i} = 0,$$

$$\Delta_\xi E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n E_{\xi_i \xi_i} = 0.$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης $Laplace$ προκύπτει π.χ. με τον εξής τρόπο. Έστω ξ αυθαίρετο (σταθεροποιημένο) σημείο στον $\mathbf{R}^n$ και $r = |x-\xi|$. Ψάχνουμε ακτινικά συμμετρική λύση E της εξίσωσης $Laplace$ (δηλαδή αυτή που εξαρτάτε μόνο από το r). Προφανώς

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E(r) = E_r \, r_{x_i} = E_r \, \frac{x_i - \xi_i}{r}$$

και

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} E(r) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(E_r \, \frac{x_i - \xi_i}{r}\big) = E_{rr} \frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2} + E_r \frac{r^2 - (x_i - \xi_i)^2}{r^3}.$$

Άρα

$$\Delta \, E \equiv E_{rr} + \frac{n-1}{r} E_r.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$E_{rr} + \frac{n-1}{r} E_r = 0$$

για $n = 2$ είναι η

$$c_0 \, ln \, r + c_1$$

και για $n > 2$ είναι η

$$c_0 \, r^{2-n} + c_1$$

(c_0, c_1 - αυθαίρετες σταθερές). Παίρνοντας $c_1 = 0$ και

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \text{ για } n = 2, \quad c_0 = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \text{ για } n > 2,$$

καταλήγουμε στη σχέση (1.5).

Λήμμα 1.1. Έστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, για κάθε $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ισχύει

$$(1.6) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big[u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big]ds + \int_\Omega \Delta_\xi u(\xi) E(x,\xi) d\xi.$$

Πόρισμα. Αν επιπλεον η u είναι αρμονική, τότε

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big[u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big]ds.$$

Απόδειξη (του Λήμματος 1). Έστω x αυθαίρετο σημείο του χωρίου Ω, υπάρχει μπάλα $B_\varepsilon = \{|x - \xi| < \varepsilon\}$ τ.ω. $B_\varepsilon \subset \Omega$. Έστω $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$. Προφανώς $E(x,\xi)$ είναι αρμονική στο Ω_ε ως προς το ξ. Στην σχέση (1.3) ας πάρουμε $v = E(x,\xi)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ και αντί για Ω το Ω_ε, τότε θα έχουμε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} E(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) d\xi =$$

$$\int_{\partial\Omega} \Big(E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} - u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big)ds - \int_{\partial B_\varepsilon} \Big(E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} - u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big)ds,$$

αφού $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon^-$. Το πρόσημο " $-$ " μπροστά στο ολοκλήρωμα ως προς την επιφάνεια ∂B_ε εμφανίζεται διότι παίρνουμε το ν_ξ να είναι εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο για το χωρίο B_ε και όχι Ω_ε (προφανώς $f_\zeta = -f_\eta$ αν $\eta = -\zeta$). Την τελευταία σχέση την ξαναγράφουμε ως εξής

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \Big(u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big)ds =$$

$$(1.7) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} E(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} \Big(u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} - E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big)ds, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Ο σκοπός μας είναι να περάσουμε στο όριο καθώς $\varepsilon \to 0$. Η $E(x,\xi)$ είναι ολοκληρώσιμη στο Ω αρα

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} E(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) d\xi = \int_\Omega E(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) d\xi.$$

Για να αποδείξουμε την (1.6) πρέπει να δείξουμε ότι το αριστερό μέρος της (1.7) καθώς $\varepsilon \to 0$ θα μας δώσει $u(x)$.

Πάνω στην σφαίρα $|x - \xi| = \varepsilon$ (δηλαδή στο ∂B_ε) έχουμε

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n}\varepsilon^{2-n}, & n \geq 3, \\ \\ \frac{1}{2\pi} ln\,\varepsilon, & n = 2 \end{cases}$$

και

$$\frac{\partial E}{\nu_\xi} = \frac{dE}{d\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi\,\varepsilon}. & n = 2 \end{cases}$$

Εστω $n \geq 3$. Το αριστερό μέρος της (1.7) γράφεται ως

$$\frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n}\int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(\xi)ds - \frac{1}{(2-n)\omega_n}\varepsilon^{2-n}\int_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}ds.$$

Συνεπώς, λόγω της συνέχειας της u στο $x = \xi$ και λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός ότι

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} ds = \omega_n \varepsilon^{n-1}$$

έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon} u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n}\int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(\xi)ds\Big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n}u(\xi^*)\int_{|x-\xi|=\varepsilon} ds\Big) = u(x)$$

όπου $\xi^* \in \{|x-\xi| = \varepsilon\}$ αρα $\xi^* \to x$ όταν $\varepsilon \to 0$ (εδω χρησιμοποιούμε το Θεωρημα της Μέσης τιμής για ολοκληρώματα).

Παρομοίως

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon} E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{(2-n)\omega_n}\varepsilon^{2-n}\int_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}ds\Big) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{(2-n)\omega_n}\varepsilon^{2-n}\frac{\partial u(\xi^*)}{\partial \nu_\xi}\int_{|x-\xi|=\varepsilon} ds\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2-n}\varepsilon\frac{\partial u(\xi^*)}{\partial \nu_\xi} = 0$$

Άρα καταλήγουμε στην (1.6).

Η περίπτωση $n = 2$ αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

□

Παρατήρηση. Το εμβαδόν S_n της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας ρ στον $\mathbf{R}^n$ δίνεται απο τον τύπο

$$S_n = nC_n\rho^{n-1},$$

ο όγγος V_n της μπάλας ακτίνας ρ στον $\mathbf{R}^n$ δίνεται απο τον τύπο

$$V_n = C_n\rho^n,$$

όπου η σταθερά C_n ορίζεται μέσω της Γ συνάρτησης

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Π.χ.

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ \Gamma(2) = 1,\ \ \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\ \ \ \Gamma(3) = 2\ldots$$

Προφανώς (για μοναδιαία σφαίρα) $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$.

Θα αποδείξουμε τωρα μερικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων.

I. *Αν η $u \in C^1(\overline{\Omega})$ είναι αρμονική, τότε*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \tag{1.8}$$

εδώ ν - μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την (1.3) αν θα πάρουμε $v \equiv 1$.

II. **Πρώτο Θεώρημα της Μέσης Τιμής.** *Έστω η u αρμονική στο Ω και $x \in \Omega$ αυθαίρετο σημείο. Τότε $\forall \rho \in (0, d)$, όπου το $d = dist(x, \partial\Omega)$ είναι (απόσταση του x από το σύνορο του Ω), ισχύει*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u\, ds. \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν στην (1.6) θα πάρουμε $\partial\Omega = \{|x - \xi| = \rho\}$, τότε η συνάρτηση E θα είναι σταθερή πάνω στο $\partial\Omega$ και λόγω της (1.8) θα έχουμε

$$u(x) = \int_{|x-\xi|=\rho} u \frac{\partial E}{\partial \nu} ds.$$

Για $|x - \xi| = \rho$ επίσης έχουμε

$$\frac{\partial E}{\partial \nu} = \frac{dE}{d\rho} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \rho^{1-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi\, \rho}, & n = 2 \end{cases}$$

Άρα αποδείξαμε την (1.9).

Για $n = 2$ ($x = (x, y)$) την σχέση (1.9) μπορούμε να την γράψουμε και ως εξής

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho\, cos\phi, y + \rho\, sin\phi) d\phi.$$

Πράγματι για $n = 2$ η (1.9) γράφεται ως εξής

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2} u(\xi, \eta)\, ds,$$

θέτοντας $\xi = x + \rho\, cos\phi$, $\eta = y + \rho\, sin\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$ και λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $ds = \rho d\phi$ παίρνουμε το ζητούμενο.

$\square$

III. **Αρχή του Μεγίστου.** *Η αρμονική στο Ω συνάρτηση u δεν μπορεί να πάρει ούτε την μέγιστη ούτε την ελάχιστη τιμή της στα εσωτερικά σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Έστω ότι στο $x_0 \in \Omega$ η u λαμβάνει το μέγιστό της $u(x_0) = M$. Έχουμε

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x_0-\xi|=\rho} u\, ds \;\; \forall \rho > 0 \;\text{ αν }\; |\xi - x_0| \leq \rho \subset \Omega.$$

Παίρνουμε ενα τυχαίο $\rho \in (0, d)$ ($d = dist(x_0, \partial\Omega)$). Θα αποδείξουμε οτι $u \equiv M$ στο $\{|x_0 - \xi| = \rho\}$. Έστω οτι $\exists \xi_0 \in \{|x_0 - \xi| = \rho\}$ τ.ω. $u(\xi_0) < u(x_0)$, τότε $u(\xi) < u(x_0)$ σε κάποια περιοχή $\Gamma_\varepsilon \subset \{|x_0 - \xi| = \rho\}$ ($\xi_0 \in \Gamma_\varepsilon$). Άρα

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n}\int_{\Gamma_\varepsilon} u\, ds + \frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n}\int_{\{|x_0-\xi|=\rho\}\setminus\Gamma_\varepsilon} u\, ds <$$
$$\frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n}\int_{\Gamma_\varepsilon} M\, ds + \frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n}\int_{\{|x_0-\xi|=\rho\}\setminus\Gamma_\varepsilon} M\, ds =$$
$$\frac{1}{\rho^{n-1}\omega_n}\int_{|x_0-\xi|=\rho} M\, ds = M,$$

δηλαδή $M < M$, άτοπο. Συνεπώς $u(\xi) = u(x_0)$ $\forall \xi \in \{|x_0 - \xi| = \rho\}$. Επειδή το ρ μπορεί να μεταβάλλεται στο $(0, d)$, έχουμε ότι $u(x) = u(x_0) = M$ $\forall x \in \{|x - x_0| < d\}$.

Παίρνουμε τώρα ενα τυχαίο σημείο $y \in \Omega$. Θα αποδείξουμε ότι $u(y) = u(x_0)$. Παίρνουμε μια καμπύλη l που βρίσκεται στο Ω και ενώνει τα σημεία x_0 και y. Έστω $\bar{d} = dist(l, \partial\Omega)$. Καλύπτουμε την καμπύλη l με πεπερασμένο πλήθος χωρίων

$$B_i = \{|x - x^i| < \bar{d}/2\}, \;\; i = 0, ..., m \;\; \big(B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset\big)$$

(δηλαδή μπάλες με ακτίνα $\bar{d}$ και κέντρο στο x^i) όπου $x^i \in l$ $\forall i$ και $y \in B_m$. Έχουμε $u \equiv M$ στο χωρίο B_1, B_2... B_m άρα $u(y) = M$.

□

Πόρισμα α). Αν η $u \in C^0(\overline{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω και $u \not\equiv const$, τότε λαμβάνει το μέγιστο και το ελάχιστο της στο σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω.

Πόρισμα β). Αν η $u \in C^0(\overline{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω και $u \geq 0$ στο $\partial\Omega$, τότε $u \geq 0$ στο $\bar{\Omega}$. Παρομοίως αν $u \leq 0$ στο $\partial\Omega$, τότε $u \leq 0$ στο $\overline{\Omega}$.

Πόρισμα γ). Αν η $u \in C^0(\overline{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω και $u \not\equiv Const$, τότε

$$\min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \;\; \text{σε κάθε σημείο του} \;\; \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega.$$

IV. **Δεύτερο Θεώρημα της μέσης τιμής.** *Αν η u είναι αρμονική στο Ω και $x \in \Omega$, τότε*

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{|x-\xi|\leq r} u\, d\xi, \;\; r \in (0, d),$$

$d = dist(x, \partial\Omega)$.

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε από το πρώτο θεώρημα της μέσης τιμής

$$u(x)\omega_n\rho^{n-1} = \int_{|x-\xi|=\rho} u\, ds.$$

Ολοκληρώνουμε αυτή τη σχέση ως προς ρ από 0 εως r, και έχουμε

$$u(x)\omega_n\frac{r^n}{n} = \int_{|x-\xi|\leq r} u\, d\xi.$$

□

Για να αποδείξουμε τις δυο άλλες βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων (αντίστροφος ισχυρισμός και Θεώρημα *Liouville*) θα χρειαστούμε τις γνώσεις απο την επόμενη παράγραφο.

§2 **Πρόβλημα** Dirichlet **για την εξίσωση** Laplace **για μπάλα**

Έστω τώρα στη σχέση (1.3) η $v(\xi)$ είναι τυχαία αρμονική συνάρτηση, τότε έχουμε

$$0=\int_{\partial\Omega}\Big(u(\xi)\frac{\partial v(\xi)}{\partial\nu_\xi}-v(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu_\xi}\Big)d\,s+\int_\Omega v(\xi)\,\Delta\,u(\xi)d\xi.$$

Προσθέτοντας την σχέση αυτη στην σχέση (1.6) για την

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)+v(\xi) \tag{2.1}$$

έχουμε $\forall x\in\Omega$:

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\Big[u(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}-G(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu_\xi}\Big]ds+\int_\Omega\Delta u(\xi)G(x,\xi)d\xi. \tag{2.2}$$

Αν θα υποθέσουμε οτι έχουμε $G=0$ για $\xi\in\partial\Omega$ (για να εξαφανίσουμε την συνάρτηση $u_{\nu_\xi}(\xi)$ η οποία στην περίπτωση προβλήματος *Dirichlet* δεν είναι δοσμένη στο $\partial\Omega$), τότε ο τύπος (2.2) παίρνει τη μορφή

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}u(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}ds+\int_\Omega\Delta u(\xi)G(x,\xi)d\xi, \tag{2.3}$$

και για αρμονική u τη μορφή

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}u(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}ds. \tag{2.4}$$

Θα πάρουμε την περίπτωση όπου το χωρίο $\Omega=B_R(0)$, δηλαδή το χωρίο είναι μπάλα ακτίνας R και, χωρις βλάβη της γενικότητας, κέντρο στο σημείο $\mathbf{0}$. Διαπιστώνουμε οτι η συνάρτηση

$$G(x,\xi)=\begin{cases}E(|x-\xi|)-E\Big(\big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\big|\Big), & \text{για } x\neq 0,\\ E(|\xi|)-E(R), \quad \text{για } x=0\end{cases} \tag{2.5}$$

έχει τις ζητούμενες ιδιότητες δηλαδή έχει τη μορφή (2.1) και είναι μηδέν στο σύνορο του χωρίου (δηλαδή για $|\xi|=R$). Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη την σχέση

$$|x-\xi|^2=|x|^2-2x\cdot\xi+|\xi|^2 \tag{2.6}$$

την συνάρτηση $G(x,\xi)$ την γράφουμε ως εξής

$$G(x,\xi)=E\big(\sqrt{|x|^2+|\xi|^2-2x\cdot\xi}\big)-E\Big(\sqrt{R^2-2x\cdot\xi+\frac{|x|^2|\xi|^2}{R^2}}\Big).$$

Απο την τελευταία σχέση άμεσα προκύπτει οτι $G(x,\xi)=0$ για $|\xi|=R$. Επίσης κάνοντας τις πράξεις διαπιστώνουμε οτι

$$\Delta_\xi E\Big(\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|\Big)=0.$$

Πράγματι για $n\geq 3$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}E\Big(\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|\Big)=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|^{2-n}=$$

$$-\frac{|x|}{\omega_n R}\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|^{-n}\Big(\frac{R}{|x|}x_i-\frac{|x|}{R}\xi_i\Big),$$

και

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}E\Big(\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|\Big)=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|^{2-n}=$$

$$\frac{1}{\omega_n}\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|^{-n-2}\Big[\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|^2-n\Big(\frac{R}{|x|}x_i-\frac{|x|}{R}\xi_i\Big)^2\Big]$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. Παρομοίως και για $n=2$.

Η συνάρτηση $G(x,\xi)$ ονομάζεται συνάρτηση $Green$.

Ευκολα καταλίγουμε και στο οτι

$$\Delta_x E\Big(\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|\Big)=0$$

παρατηρώντας την ταυτότητα

$$\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|=\Big|\frac{R}{|\xi|}\xi-\frac{|\xi|}{R}x\Big|$$

η οποία άμεσα προκύπτει απο την (2.6).

Ας υπολογίσουμε τωρα την $\frac{\partial G}{\partial\nu_\xi}\Big|_{|\xi|=R}$ (έπειτα θα την αντικαταστήσουμε στον τύπο (2.4)).

Προφανώς, εδω $\nu_\xi=(\xi_1,...,\xi_n)/R$, άρα

$$\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}=\nabla_\xi\,\cdot\,\nu_\xi.$$

Έχουμε (τα ακόλουθα ισχύουν και για $n=2$ και για $n\geq 3$)

$$\frac{\partial E(|x-\xi|)}{\partial\xi_i}=-\frac{1}{\omega_n}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^n},$$

άρα

$$\frac{\partial E}{\partial\nu_\xi}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\omega_n R}\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|^n}\xi_i=\frac{|\xi|^2-x\cdot\xi}{\omega_n R|x-\xi|^n}$$

και

$$\frac{\partial E(|x-\xi|)}{\partial\nu_\xi}\Big|_{|\xi|=R}=\frac{R^2-x\cdot\xi}{\omega_n R|x-\xi|^n}\Big|_{|\xi|=R}. \tag{2.7}$$

Παρατηρούμε ότι

$$E\Big(\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|\Big)=\Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}E\Big(\Big|\frac{R^2}{|x|^2}x-\xi\Big|\Big),$$

συνεπώς

$$\frac{\partial E\Big(\Big|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\Big|\Big)}{\partial\nu_\xi}=\Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}\frac{\partial E\Big(\Big|\frac{R^2}{|x|^2}x-\xi\Big|\Big)}{\partial\nu_\xi}=\Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}\frac{|\xi|^2-x\cdot\xi\frac{R^2}{|x|^2}}{\omega_n R\Big|\frac{R^2}{|x|^2}x-\xi\Big|^n}$$

και
$$\frac{\partial E\left(\left|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\right|\right)}{\partial\nu_\xi}\Big|_{|\xi|=R}=\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{R^2-x\cdot\xi\frac{R^2}{|x|^2}}{\omega_nR\left|\frac{R^2}{|x|^2}x-\xi\right|^n}\Big|_{|\xi|=R}.$$
Χρησημοποιώντας την (2.6), για $|\xi|=R$ έχουμε
$$\left|\frac{R^2}{|x|^2}x-\xi\right|=$$
$$\frac{R}{|x|}\sqrt{R^2-2x\cdot\xi+|x|^2}=\frac{R}{|x|}\sqrt{|\xi|^2-2x\cdot\xi+|x|^2}=\frac{R}{|x|}|x-\xi|,$$
συνεπώς ισχύει
$$\frac{\partial E\left(\left|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}\xi\right|\right)}{\partial\nu_\xi}\Big|_{|\xi|=R}=\frac{|x|^2-x\cdot\xi}{\omega_nR|x-\xi|^n}\Big|_{|\xi|=R}. \tag{2.8}$$
Αφαιρώντας την (2.8) απο την (2.7) παίρνουμε (βλ. (2.5))
$$\frac{\partial G}{\partial\nu_\xi}\Big|_{|\xi|=R}=\frac{R^2-|x|^2}{\omega_nR}\frac{1}{|x-\xi|^n}\Big|_{|\xi|=R}.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι αν η $u\in C^2(B_R(0))\cap C^1(\overline{B}_R(0))$ είναι αρμονική στο χωρίο $B_R(0)$, τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος που ονομάζεται ολοκληροτικός τύπος $Poissone$
$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{\omega_nR}\int_{\partial B_R}\frac{u(\xi)}{|x-\xi|^n}ds.$$
Τωρα για να λύσουμε το πρόβλημα $Dirichlet$ στο χωρίο $B_R(0)$
$$\Delta u=0 \ \text{ στην } \ B_R(0),\ \ u\Big|_{\partial B_R(0)}=\phi \tag{2.9}$$
θα πρέπει να αποδείξουμε κατα κάποιο τρόπο το αντίστροφο.

Ας δώσουμε έναν ορισμό:

Κλασική λύση ονομάζουμε τη συνάρτηση που ανήκει στο $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, επαληθευει την εξίσωση σε κάθε σημείο του Ω και την συνοριακή συνθήκη σε κάθε σημείο του $\partial\Omega$.

Θεώρημα 2.1 (ύπαρξη). *Έστω ότι $\phi\in C^0(\partial B_R(0))$, τοτε η συνάρτηση*
$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{\omega_nR}\int_{\partial B_R}\frac{\phi(\xi)}{|x-\xi|^n}ds \tag{2.10}$$
είναι κλασική λύση του προβλήματος (2.9).

Απόδειξη. Το ότι η $u(x)$ είναι αρμονική άμεσα προκύπτει απο το γεγονός οτι η $G(x,\xi)$ και η $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu}$ είναι αρμονικές ως προς το x συναρτήσεις άρα $\Delta_xu=0$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε οτι επαληθεύεται η συνοριακή αυνθήκη.

Απο τον τύπο $Poissone$ (θέτοντας $u\equiv1$) για
$$P(x,\xi)=\frac{R^2-|x|^2}{\omega_nR|x-\xi|^n}$$

(η συνάρτηση $P(x,\xi)$ ονομάζεται πυρίνας $Poissone$) έχουμε

$$\int_{\partial B_R} P(x,\xi)ds = 1 \ \ \forall x \in B_R(0) \ \ (\xi \in \partial B_R(0)).$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διαφορά $u(x) - \phi(x_0)$ όπου $x_0 \in \partial B_R$. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε $\forall \varepsilon > 0$ να υπάρχει ενα $\delta_\varepsilon > 0$ ε.ω. $|u(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon$ όταν $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ($x \in B_R$). Έχουμε

$$|u(x) - \phi(x_0)| = \Big| \int_{\partial B_R} P(x,\xi)[\phi(\xi) - \phi(x_0)]ds \Big| \leq$$

$$\int_{\partial B_R} P(x,\xi)\big|\phi(\xi) - \phi(x_0)\big|ds =$$

$$\int_{|\xi - x_0| \leq \delta \cap \partial B_R} P(x,\xi)\big|\phi(\xi) - \phi(x_0)\big|ds + \int_{|\xi - x_0| > \delta \cap \partial B_R} P(x,\xi)\big|\phi(\xi) - \phi(x_0)\big|ds$$

για κάθε $\delta > 0$.

Θα εκτιμήσουμε τα δυο ολοκληρώματα στο δεξι μέρος. Έστω $|\phi| \leq M$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ (λόγω της συνέχειας της ϕ) μπορούμε να βρούμε ενα $\delta_1 > 0$ τ.ω. $|\phi(\xi) - \phi(x_0)| < \varepsilon/2$ για $|\xi - x_0| < \delta_1$ ($\xi \in \partial B_R$). Για τετοια δ_1 έχουμε

$$\int_{|\xi - x_0| \leq \delta_1 \cap \partial B_R} P(x,\xi)\big|\phi(\xi) - \phi(x_0)\big|ds < \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial B_R} P(x,\xi)ds = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ας παρουμε το x τ.ω. $|x - x_0| < \delta_1/2$, τότε στο δευτερο ολοκλήρωμα ισχύει

$$\int_{|\xi - x_0| > \delta_1 \cap \partial B_R} P(x,\xi)\big|\phi(\xi) - \phi(x_0)\big|ds \leq 2M \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \frac{1}{\delta_1^n} \int_{|\xi| = R} ds =$$

$$2MR^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{(\delta_1/2)^n}$$

διότη αν $|x - x_0| < \delta_1/2$ και $|\xi - x_0| > \delta_1$ έχουμε οτι $|x - \xi| > \delta_1/2$ και συνεπώς

$$\frac{1}{|x - \xi|^n} < \frac{1}{(\delta_1/2)^n}.$$

Πράγματι,

$$|\xi - x_0| \leq |\xi - x| + \frac{\delta_1}{2} \leq |\xi - x| + \frac{1}{2}|\xi - x_0|,$$

αρα

$$|\xi - x| \geq \frac{1}{2}|\xi - x_0| > \frac{\delta_1}{2}.$$

Επιλέγοντας τώρα το $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ αρκετά μικρό (δηλαδη $|x|$ θα είναι κοντά στο R) έχουμε

$$2MR^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{\delta_1^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

άρα για $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ισχύει οτι

$$|u(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Παρατήρηση. Για τυχαίο χωρίο η κατασκευή της συνάρτησης $Green$ είναι αδήνατη.

Θεώρημα 2.2 (μοναδικότητα). *Η κλασική λύση του προβλήματος*

$$\Delta u = f(x) \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = \phi$$

είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω ότι εκτός απο την λύση u υπάρχει μια άλλη λύση v, τότε για $w \equiv u - v$ έχουμε

$$\Delta w = 0 \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; w\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Απο την Αρχή του Μεγίστου προκύπτει ότι $w \equiv 0$ στο Ω άρα $u \equiv v$ στο Ω.
□

Παρατήρηση. Την μοναδικότητα την αποδείξαμε για τυχαίο χωρίο.

Είμαστε τωρα έτοιμοι για να αποδείξουμε τις δυο τελευταίες βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων.

V. **Αντίστροφος ισχυρισμός.** *Έστω $v(x)$ συνεχής στο Ω συνάρτηση για την οποία ισχύει το εξής: $\forall x \in \Omega$ και $\forall \rho \in (0, d)$ όπου το $d = dist(x, \partial\Omega)$, έχουμε*

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} v\, ds.$$

Τότε η $v(x)$ είναι αρμονική συνάρτηση στο Ω.

Απόδειξη. Πράγματι, όπως αποδείξαμε πάνω η v δεν λαμβάνει ούτε το μέγιστό της ούτε το ελάχιστο της στο Ω αν δεν είναι σταθερή. Έστω τώρα u αρμονική στη μπάλα $|x_0 - x| < r \subset \Omega$ συνάρτηση τ.ω.

$$u = v \;\text{ στο }\; |x_0 - x| = r.$$

Προφανώς για την $w = u - v$ ισχύει το πρώτο θεώρημα της μέσης τιμής και συνεπώς η w δεν λαμβάνει ούτε το μέγιστο της ούτε το ελάχιστό της στο $|x_0 - x| = r$(αν δεν είναι σταθερή). Λαμβάνοντας υπ όψιν οτι στο $|x_0 - x| = r$ η $w = 0$ καταλήγουμε στο ότι $w \equiv 0$ στο $|x_0 - x| \le r$ δηλαδή $u \equiv v$ στο $|x_0 - x| \le r$. Συνεπώς η v είναι αρμονική σε κάθε μπάλα $\subset \Omega$ άρα αρμονική στο Ω.
□

Λέμε ότι η $u(x)$ είναι άνω (κάτω) φραγμένη στο Ω αν υπάρχει σταθερά M τ.ω. $u(x) \le M$ ($u(x) \ge M$).

VI.**Θεώρημα 2.3 (*Liouville*).** *Έστω η $u(x)$ είναι αρμονική στον $\mathbf{R}^n$ και είναι άνω ή κάτω φραγμένη. Τότε η $u(x)$ είναι σταθερά.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $u(x)$ είναι κάτω φραγμένη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι η $u \ge 0$. Αλλιως θεωρούμε την $v \equiv u - M$ και αρκεί να αποδείξουμε οτι η v είναι σταθερά.

Έστω x τυχαίο σημείο στον R^n, για κάθε $|x| < R$ και $|\xi| = R$ έχουμε $R + |x| \ge |\xi - x|$ (αφού $R^2 + 2|x|R + |x|^2 \ge |\xi|^2 + |x|^2 - 2x \cdot \xi = |\xi - x|^2$),

συνεπώς
$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^n} \le \frac{R-|x|}{|\xi-x|^n}$$
και
$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} \le \frac{R^2-|x|^2}{|\xi-x|^n}$$
Επίσης για $|x| < R$ και $|\xi| = R$ έχουμε $|\xi - x| \ge R - |x|$ (αφού $|\xi - x| \ge |\xi| - |x| = R - |x|$), άρα
$$\frac{R+|x|}{|\xi-x|^n} \le \frac{R+|x|}{(R-|x|)^n}$$
και
$$\frac{R^2-|x|^2}{|\xi-x|^n} \le \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}.$$
Δηλαδή
$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} \le \frac{R^2-|x|^2}{|\xi-x|^n} \le \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}.$$
Πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή με $(R\omega_n)^{-1}u(\xi)$ και ολοκληρώνοντας πάνω στο $|\xi| = R$ έχουμε
$$\frac{1}{\omega_n R}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}\int_{|\xi|=R} u(\xi)ds \le \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{|\xi|=R}\frac{u(\xi)}{|\xi-x|^n}ds \le$$
$$\frac{1}{\omega_n R}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}\int_{|\xi|=R} u(\xi)ds.$$
Τώρα λαμβάνοντας υπ όψιν τον τύπο $Poissone$ και το πρώτο θεώρημα της Μεσης Τιμής καταλήγουμε στην σχέση
$$\frac{(R-|x|)R^{n-2}}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le \frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$
Η τλευταία ανισότητα ισχύει $\forall R > |x|$ άρα
$$u(0) \le u(x) \le u(0).$$
Συνεπώς $u(x) = u(0)$ για κάθε x δηλαδή η u είναι σταθερα.

Στην περίπτωση της άνω φραγμένης συνάρτησης η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

§3 **Άλλα συνοριακά προβλήματα**

Παρομοιως με το πρόβλημα $Dirichlet$ μπορούν να αντιμετωπιστούν και τα δυο άλλα συνοριακά προβλήματα.

Έστω έχουμε τρίτο συνοριακό πρόβλημα (ή αλλοιώς μεικτό πρόβλημα ή προβλημα $Robin$):
$$\Delta u = 0 \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu} + h\,u\Big|_{\partial\Omega} = \phi, \;\; h \ne 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση στη σχέση (2.2) στο ολοκλήρωμα ως προς $\partial\Omega$ προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο huG για να πάρουμε

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big[u(\xi)\Big(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu_\xi} + hG\Big) - \Big(\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu_\xi} + hu\Big)G(x,\xi)\Big]ds +$$

$$\int_{\Omega} \Delta u(\xi) G(x,\xi) d\xi. \tag{3.1}$$

Όπως στην περίπτωση του προβλήματος $Dirichlet$ ψάχνουμε τη συνάρτηση $Green$ σε μορφή $G = E + v$ εδω όμως απαιτούμε

$$\frac{\partial G}{\partial\nu} + hG\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

για να εξαφανίσουμε την συνάρτηση $u(\xi)$ η οποία (στην περίπτωση προβλήματος $Robin$) δεν είναι δοσμένη στο $\partial\Omega$, Τότε για αρμονική u ο τύπος (3.1) θα πάρε την μορφή

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu_\xi} + hu\Big)G(x,\xi)ds.$$

Αν το χωρίο μας είναι μπάλα η συνάρτηση $Green$ μπορεί να κατασκευαστεί.

Για το πρόβλημα $Neumann$

$$\Delta u = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

τα πράγματα είναι λίγο πιο πολύπλοκα. Εδώ θα περίμενε κανείς ότι θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $Green$ τ.ω.

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.2}$$

για να εξαφανίσουμε στον τύπο (2.2) την συνάρτηση $u(\xi)$ η οποία δεν είναι δοσμένη στο $\partial\Omega$. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι τετοια συνάρτηση $Green$ υπάρχει, τότε πρέπει να υπάρχει μια αρμονική συνάρτηση $v = G - E$ η οποία επαληθευει την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial v}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial E}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}.$$

Θέτοντας στον τύπο (1.6) $u \equiv 1$ θα πάρουμε

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial\nu} ds = 1$$

άρα άτοπο (βλ. την ιδιότητα I των αρμονικών συναρτήσεων). Για αυτο θα πάρουμε αντι της (3.2) την ακόλουθη

$$\frac{\partial G}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = S_0$$

όπου το

$$S_0 = \Big(\int_{\partial\Omega} ds\Big)^{-1}.$$

Τώρα δεν έχουμε αντιφαση, αφου

$$\int_{\partial\Omega}\Big(S_0 - \frac{\partial E}{\partial \nu}\Big)ds = 0,$$

και για μπάλα τετοι συνάρτηση μπορεί να κατασκευαστεί. Ο αντίστοιχως (στον (2.4)) τύπος θα είναι ο εξής

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} G(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}ds + C$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά.

§4 **Πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε γενικά χωρία**

Έστω $v(x) \in C^0(\Omega)$ και $B \subset \Omega$ τυχαία (ανοιχτή) μπάλα (στο $B \subset \Omega$). Ορίζουμε την συνεχής συνάρτηση $H_B[v]$ ως εξής

$$H_B[v](x) = \begin{cases} \text{αρμονική για } x \in B, \\ v(x) \text{ για } x \in \Omega \setminus B \end{cases}.$$

Η ύπαρξη μιας τετοιας συνάρτησης προκήπτη απο το Θεώρημα 2.1.

Ορισμός. *Λέμε ότι η συνάρτηση v είναι ύφαρμονικη στο Ω αν για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχύει*

$$v \le H_B[v] \ \ \big(v(x) \le H_B[v](x)\big).$$

Προφανώς αν οι $v_1, ..., v_n$ είναι υφαρμονικές τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους με θετικές σταθερές είναι επίσης υφαρμονική συνάρτηση. Αν η v είναι αρμονική τοτε είναι και υφαρμονική.

Θα διατυπώσουμε τωρα δυο λήμματα, τις αποδείξεις των οποίων θα δώσουμε αργότερα (βλ. Θεώρημα 7.1).

Λήμμα 4.1. *Έστω $u \in C^2(\Omega)$ και $\Delta u \ge 0$ τότε η u δεν λαμβάνει το μέγιστό της στα εσωτερικα σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερή.*

Απο το Λήμμα 4.1 άμεσα προκύπτει ότι αν $v \in C^2(\Omega)$ και $\Delta v \ge 0$, τότε η v είναι υφαρμονική. Πράγματι,

$$v(x) = H_B[v](x)$$

για $x \in \Omega \setminus B$ (B τυχαία μπάλα στο Ω). Αν $x \in B$ έχουμε

$$\Delta(v - H_B[v]) \ge 0.$$

Λαμβάνοντας υο όψιν ότι $v\,, H_B[v] \in C^0(\overline{B})$ και ότι

$$v - H_B[v]\Big|_{\partial B} = 0$$

καταλήγουμε στο ότι $v(x) \le H_B[v](x)$ και για $x \in B$.

Ορισμός. *Λέμε ότι η $C^0(\Omega)$ συνάρτηση v είναι υπεραρμονική στο Ω αν για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχύει*

$$v \ge H_B[v].$$

Λήμμα 4.2. *Έστω $u \in C^2(\Omega)$ και $\Delta u \leq 0$ τότε η u δεν λαμβάνει το ελάχιστό της στα εσωτερικα σημεία του Ω αν δεν είναι σταθερή.*

Απο το Λήμμα 4.2 άμεσα προκύπτει ότι αν $v \in C^2(\Omega)$ και $\Delta v \leq 0$ τότε η v είναι υπεραρμονική. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Λήμματος 2.

Μερικές ιδιότητες των υφαρμονικών συναρτήσεων

I. *Αν η $v \geq 0$ στο Ω τότε και η $H_B[v] \geq 0$ στο Ω.*

Πράγματι, για $x \in \Omega \setminus B$ έχουμε $H_B[v] = v \geq 0$, στο B η $H_B[v]$ είναι αρμονική συνεπως απο αρχή του μεγίστου (αφου $H_B[v]\Big|_{\partial B} \geq 0$) έχουμε $H_B[v] \geq 0$ στο $\overline{B}$

Απο την ιδιοτητα αυτή προκύπτει οτι αν $v_1 - v_2 \geq 0$ τότε

$$H_B[v_1 - v_2] \equiv H_B[v_1] - H_B[v_2] \geq 0.$$

II. Αρχή του μεγίστου για υφαρμονικές συναρτήσεις. *Η υφαρμονική στο Ω συνάρτηση δεν λαμβάνει το μέγιστό της στα εσωτερικά σημεια του Ω αν δεν είναι σταθερά.*

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι στο σημειο $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega$ η υφαρμονική συνάρτηση v λαμβάνει το μέγιστό της. Θεωρούμε την μπάλα $B_{x_0}(\rho) \subset \Omega$ ($\rho < \delta = dist(x_0, \partial\Omega)$) και την συνάρτηση $w = H_{B_{x_0}(\rho)}[v]$. Έχουμε

$$\max w\Big|_{\partial B_{x_0}(\rho)} = \max v\Big|_{\partial B_{x_0}(\rho)} \leq v(x_0)$$

(w και v συμπίπτουν στο $\Omega \setminus B_{x_0}(\rho)$ εξ ορισμού, στο x_0 η v έχει μέγιστο). Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι εξ ορισμού $v(x_0) \leq H_{B_{x_0}(\rho)}[v](x_0) = w(x_0)$, έχουμε για αρμονική $w(x)$

$$\max w\Big|_{\partial B_{x_0}(\rho)} \leq w(x_0)$$

άρα (απο αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις) η $w(x)$ σταθερά στο χωρίο $B_{x_0}(\rho)$ και συνεπώς η $v(x)$ σταθερά στο σύνορο του $\partial B_{x_0}(\rho)$. Παρατηρούμε οτι ρ ειναι τυχαίο μεταξύ του 0 και $dist(x_0, \partial\Omega)$, μεταβάλλοντας τωρα το ρ στο διάστημα $(0, \delta)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η v είναι σταθερή στη μπάλα $B_{x_0}(\delta)$.

Το οτι η v θα είναι σταθερή παντού στο Ω αποδεικνυεται όπως και στην περίπτωση των αρμονικών συναρτήσεων.

$\square$

III. *Αν οι συναρτήσεις $v_1, v_2, \ldots, v_m$ είναι υφαρμονικές σε ένα χωρίο Ω, τότε και η $\max(v_1, v_2, ..., v_m)$ είναι υφαρμονική στο Ω.*

Αυτό προκύπτει απο την ιδιότητα I αφού $v - v_i \geq 0$ και συνεπώς ($\forall$ μπάλα B στο Ω) $H_B[v] \geq H_B[v_i] \geq v_i$ ($i = 1, ..., m$) (η δευτερη ανισότητα ισχύει επειδή οι v_i είναι υφαρμονικές). Άρα

$$v = \max(v_1, v_2, ..., v_m) \leq H_B[v].$$

$\square$

IV. Αν η συνάρτηση v είναι υφαρμονική σε ένα χωρίο Ω, τότε και η $H_{B_0}[v]$ είναι υφαρμονική στο Ω.

Εδω B_0 μια μπάλα στο Ω. Αυτο που πρέπει να αποδείξουμε είναι οτι για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχύει

$$w \leq H_B[w] \text{ όπου } w = H_{B_0}[v].$$

Δηλαδή συγκρίνουμε τις συναρτήσεις

$$w(x) = \begin{cases} \text{αρμονική για } x \in B_0, \\ v(x) \text{ για } x \in \Omega \setminus B_0 \end{cases}$$

και

$$H_B[w](x) = \begin{cases} \text{αρμονική για } x \in B, \\ w(x) \text{ για } x \in \Omega \setminus B \end{cases}.$$

όπου v μια υφαρμονική συνάρτηση.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

α). Αν $B \subset B_0$ τότε $w = H_B[w]$.

Πράγματι, στο B συμπίπτουν επειδή δυο αρμονικές συναρτήσεις αν ειναι ισες στο συνορο του χωρίου θα ειναι ισες και στο χωρίο. Στο $\Omega \setminus B$ συμπίπτουν εξ ορισμού.

β). Θεωρούμε τωρα την περίπρωση $B_0 \subset B$.

Στο $\Omega \setminus B$ οι w και $H_B[w]$ συμπίπτουν. Στο B η $H_B[w]$ είναι αρμονική και η w υφαρμονική (αφου η w στο B_0 αρμονική και στο $B \setminus B_0$ ισούται με v αρα υφαρμονική). Συνεπώς $w - H_B[w]$ υφαρμονική και (βλ. ιδιοτητα II)

$$w - H_B[w]\Big|_{\partial B} = 0 \quad \Rightarrow \quad w - H_B[w]\Big|_{B} \leq 0.$$

γ). Αν $B \subset \Omega \setminus B_0$, τότε παλι $w \leq H_B[w]$.

Πράγματι, στο B η $H_B[w]$ είναι αρμονική ενω η $w = v$ υφαρμονική, αρα η $w - H_B[w]$ υφαρμονική στο B και μηδέν στο ∂B, συνεπώς (βλ. την ιδιότητα II) $w - H_B[w] = 0$ (στο $\Omega \setminus B$ προφανώς συμπίπτουν).

δ). Έστω τωρα $B_0 \cap B \neq \emptyset$ και B_0 δεν είναι υποσύνολο το B ούτε το αντίστροφο.

Στο $B \setminus B_0$ ισχύει

$$w = H_{B_0}[v] = v \leq H_B[v] = H_B[w]$$

(η τελευταία σχέση λαμβάνει χώρα επειδή $w = v$ εκτός του B_0).

Στο $B \cap B_0$ οι w και $H_B[w]$ είναι αρμονικές, και στο $\partial\big(B \cap B_0\big)$ ισχύει $w \leq H_B[w]$, αρα απο αρχή μεγίστου

$$w \leq H_B[w] \text{ για } x \in B \cap B_0.$$

Προφανώς στο $\Omega \setminus B$ οι w και $H_B[w]$ συμπίπτουν.

□

Θα δωσουμε χωρίς απόδειξη ενα Θεώρημα το οποίο θα μας χρειαστεί παρακάτω.

Θεώρημα 4.1(συμπάγειας). *Κάθε ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία αρμονικών στο Ω συναρτήσεων έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Το όριο είναι αρμονική συνάρτηση.*

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης του προβλήματος $Dirichlet$ θα εισάγουμε την εννοια της κάτω και άνω συνάρτησης.

Ορισμός. *Έστω ότι η συνάρτηση* $\phi \in C^0(\partial\Omega)$.

Η συνάρτηση $v \in C^0(\overline{\Omega})$ *ονομάζεται κάτω συνάρτηση της* ϕ *στο* Ω *αν είναι υφαρμονική στο* Ω *και στο* $\partial\Omega$ *έχουμε*

$$v\Big|_{\partial\Omega} \leq \phi.$$

Η συνάρτηση $V \in C^0(\overline{\Omega})$ *ονομάζεται άνω συνάρτηση της* ϕ *στο* Ω *αν είναι υπεραρμονική στο* Ω *και στο* $\partial\Omega$ *έχουμε*

$$V\Big|_{\partial\Omega} \geq \phi.$$

Προφανώς καθε σταθερά $C \leq \inf_{\partial\Omega} \phi$ έναι κάτω συνάρτηση της ϕ στο Ω και καθε σταθερά $C \geq \sup_{\partial\Omega} \phi$ έναι άνω συνάρτηση της ϕ στο Ω.

Έστω οτι το F_ϕ είναι το σύνολο των κάτω συναρτήσεων της ϕ στο Ω.

Θεώρημα 4.2 ($Perron$**).** Η συνάρτηση

$$u(x) = \sup_{v \in F_\phi} v(x)$$

είναι αρμονική στο Ω.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι λόγω αρχής μεγίστου (βλ. την ιδιότητα II) $\forall v \in F_\phi$ ισχύει ότι

$$v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \phi(s) \;\; \forall x \in \overline{\Omega}$$

αρα η $u(x)$ είναι ορισμένη παντού στο $\overline{\Omega}$.

Αυτό που θα κάνουμε τώρα είναι θα κατασκευασουμε σε μια τυχαία μπάλα στο Ω μια αρμονική συνάρτηση $w(x)$ (βλ. παρακάτω) και θα δείξουμε οτι η $u(x)$ συμπίπτει με την $w(x)$ σε αυτήν την μπάλα.

Ας πάρουμε ενα τυχαίο σημείο x_0 στο Ω, απο τον ορισμό της u έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{v_m\} \in F_\phi$ τ.ω.

$$v_m(x_0) \to u(x_0) \;\; \text{καθώς} \;\; m \to \infty.$$

Η ακολουθία αυτη είναι άνω φραγμένη (αφου $v_m \leq \sup \phi(s)$). Χωρίς βλαβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε οτι η $\{v_m\}$ είναι και κάτω φραγμένη επιλέγοντας αντί της $\{v_m\}$ την $\max(\{v_m\}, \inf \phi)$. Πράγματι

$$\inf \phi \leq \max(\{v_m\}, \inf \phi) \leq \sup \phi,$$

αρα η καινούργια ακολουθία είναι φραγμένη, επίσης έχουμε οτι η συνάρτηση $\max(\{v_m\}, \inf \phi)$ είναι υφαρμονική (βλ. την ιδιότητα III) και

$$\max(\{v_m\}, \inf \phi)\Big|_{\partial\Omega} \leq \phi$$

δηλαδή η συνάρτηση $\max(\{v_m\}, \inf \phi) \in F_\phi \; \forall m$. Τέλος απο την

$$0 \leq u(x_0) - \max(\{v_m(x_0)\}, \inf \phi) \leq u(x_0) - v_m(x_0)$$

προκύπτει ότι

$$\max(\{v_m(x_0)\}, \inf \phi) \to u(x_0) \ \text{ όταν } \ m \to \infty.$$

Αρα παίρνουμε την $\{v_m\}$ να είναι φραγμένη.

Έστω $B_0 = B_{x_0}(\delta)$ μια μπάλα με κέντρο στο x_0 και ακτίνα $\delta < dist(x_0, \partial\Omega)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$V_m(x) = H_{B_0}[v_m](x).$$

Η ακολουθία $\{V_m\}$ είναι φραγμένη. Έχουμε οτι η $V_m(x)$ είναι υφαρμονική $\forall m$ (βλ. την ιδιότητα $\mathrm{I}V$) και

$$V_m(x)\Big|_{\partial\Omega} = v_m(x)\Big|_{\partial\Omega} \leq \phi$$

άρα $V_m \in F_\phi$. Απο το Θεώρημα της συμπάγειας υπάρχει ύπακολουθία $V_{m_k}(x)$ η οποια συγκλίνει ομοιόμορφα στο $B_{x_0}(\rho)$ $\forall \rho < \delta$ σε μια αρμονική (στο $B_{x_0}(\rho)$) συνάρτηση $w(x)$. Προφανώς

$$v_m \leq V_m \leq u \tag{4.1}$$

(η πρώτη ανισότητα ισχύει αφου v_m υφαρμονική και η δευτερη αφου $V_m \in F_\phi$)) αρα

$$V_{m_k}(x_0) \to u(x_0) \ \text{ καθώς } \ k \to \infty$$

και συνεπώς

$$w(x_0) = u(x_0).$$

Επίσης απο την (4.1) έχουμε οτι

$$w(x) \leq u(x).$$

Ο σκοπός μας τωρα είναι να αποδείξουμε ότι $w(x) \equiv u(x)$ στη μπάλα B_0 δηλαδή $u(x)$ αρμονική στη B_0, και λαμβάνοντας υπ όψιν οτι το x_0 ειναι αυθαίρετο σημειο του χωρίου Ω, θα καταλήξουμε στο οτι η $u(x)$ είναι αρμονική στο Ω.

Έστω οτι αυτο δεν ισχύει, τουτ έστιν υπάρχει $x_1 \in B_0$ (με $x_1 \neq x_0$) τ.ω.

$$w(x_1) < u(x_1),$$

τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\tilde{w}(x) \in F_\phi$ τ.ω.

$$w(x_1) < \tilde{w}(x_1). \tag{4.2}$$

Θεωρούμε την ακολουθία των υφαρμονικών συναρτήσεων (βλ. τις ιδιότητες III, $\mathrm{I}V$)

$$\omega_k = \max(\tilde{w}, V_{m_k})$$

και

$$W_k = H_{B_0}[\omega_k]$$

(προφανώς $\omega_k \in F_\phi$). Όπως και πρίν υπάρχει υπακολουθία W_{k_s} που συγκλινει ομοιόμορφα στο χωρίο $B_{x_0}(\rho)$ στην αρμονική σε αυτό το χωριο συνάρτηση ω_1. Ισχύει οτι

$$V_{m_k} \leq \omega_k \leq H_{B_0}[\omega_k] = W_k$$

συνεπώς

$$w(x) \leq \omega_1(x) \leq u(x) \text{ στο } B_{x_0}(\rho) \tag{4.3}$$

(η δευτερη ανισότητα στο (4.3) λαμβάνει χώρα επειδή $\omega_1 \in F_\phi$). Απο την (4.3) αφου $w(x_0) = u(x_0)$ έχουμε οτι

$$w(x_0) = \omega_1(x_0) = u(x_0) \text{ στο } B_{x_0}(\rho).$$

Θεωρούμε την αρμονική συνάρτηση

$$\psi(x) = \omega_1(x) - w(x)$$

για την οποια ισχύει (βλ. (4.3)) $\psi(x) \geq 0$ στην μπάλα $B_{x_0}(\rho)$ και $\psi(x_0) = 0$, αρα (απο αρχή μεγίστου) $\psi(x) \equiv 0$ και συνεπώς $\omega_1(x) \equiv w(x)$ στην μπάλα $B_{x_0}(\rho)$. Καταλήγουμε στο οτι

$$w(x_1) = \omega_1(x_1) \geq \tilde{w}(x_1).$$

άτοπο (βλ. (4.2)).

□

Αποδείξαμε οτι η $u = \sup_{v \in F_\phi} v$ επαληθευει την εξίσωση $Laplace$ στο Ω. Για να λύσουμε το πρόβλημα $Dirichlet$ πρέπει να δείξουμε οτι η u επαληθευει και την συνοριακή συνθήκη.

Θα δούμε τώρα ότι υπο ποιες προυποθέσεις σχετικά με το χωρίο ισχύει οτι $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$u(x) \to \phi(x_0) \text{ καθώς } x \to x_0 \;\; x \in \Omega,$$

θα θυμίσουμε οτι η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο $\partial\Omega$.

Ορισμός. *Λέμε οτι το χωρίο Ω επαληθευει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας στο σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ αν υπάρχει $y \notin \overline{\Omega}$ και αριθμός $R > 0$ τέτοιοι ωστε*

$$\overline{\Omega} \cap \overline{B}_y(R) = \{x_0\}.$$

Λέμε οτι το χωρίο Ω επαληθευει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας αν η συνθήκη αυτη επαληθεύεται σε κάθε σημείο του $\partial\Omega$.

Εδω $B_y(R)$ μπάλα με κέντρο στο σημείο y και ακτίνα R. Προφανώς $|x_0 - y| = R$.

Θεώρημα 4.3. *Αν $u(x) = \sup_{v \in F_\phi} v(x)$ και στο σημείο x_0 το χωρίο Ω επαληθευει τη συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας, τότε*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \phi(x_0) \;\; x \in \Omega$$

Απόδειξη. Έστω $n \geq 3$. Ορίζουμε την συνάρτηση $h(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

Προφανώς $h(x_0) = 0$ και $h(x) > 0$ στο $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$. Αφου η ϕ είναι συνεχής έχουμε οτι $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ ε.ω.

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon \text{ για } |x - x_0| < \delta \;\; x \in \partial\Omega.$$

Επίσης υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω. $Ch(x) > 2M$ για $|x - x_0| \geq \delta$ αφου $h(x) > 0$ στο $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, εδω $M = \sup \phi$. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα αρκει να δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$|u(x) - \phi(x_0)| \leq \varepsilon + Ch(x)$$

διότι

$$Ch(x) \to 0 \ \text{ καθώς } \ x \to x_0.$$

Αρα θέλουμε να ισχύει η

$$\phi(x_0) - \varepsilon - Ch(x) \leq u(x) \leq \phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x) \ \ \forall x \in \Omega. \tag{4.4}$$

Έχουμε ότι η $\phi(x_0) - \varepsilon - Ch(x)$ είναι κάτω συνάτηση. Πράγματι, η συνάρτηση αυτη είναι αρμονική αρα και υφαρμονικη και

$$\phi(x_0) - \varepsilon - Ch(x)\Big|_{\partial\Omega} \leq \phi(x) \ \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Αυτό ισχύει διότι στο $\partial\Omega$ για $|x - x_0| < \delta$ έχουμε

$$\phi(x_0) - \phi(x) < \varepsilon$$

και για $|x - x_0| \geq \delta$

$$\phi(x_0) - \phi(x) \leq 2M \leq Ch(x).$$

Η πρώτη ανισότητα στην (4.4) προκύπτει απο τον ορισμό της $u(x)$.

Η δευτερη ανισότητα της (4.4) προκύπτει απο το οτι η $\phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x)$ είναι άνω συνάρτηση και το γεγονός οτι κάθε κάτω συνάρτηση είναι μικρότερη απο κάθε άνω συνάρτηση.

Ας διαπιστώσουμε οτι η $\phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x)$ είναι άνω συνάρτηση. Έχουμε οτι η συνάρτηση αυτη είναι αρμονική αρα και υπεραρμονική και

$$\phi(x_0) + \varepsilon + Ch(x)\Big|_{\partial\Omega} \geq \phi(x) \ \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Αυτό ισχύει διότι στο $\partial\Omega$ για $|x - x_0| < \delta$ έχουμε

$$\phi(x) - \phi(x_0) < \varepsilon$$

και για $|x - x_0| \geq \delta$

$$\phi(x) - \phi(x_0) \leq 2M \leq Ch(x).$$

Για $n = 2$ η μόνη διαφορά είναι οτι την $h(x)$ την ορίζουμε ως εξής

$$h(x) = ln\frac{|x - y|}{R}$$

□

Συνοψίζοντας έχουμε:

Θεώρημα 4.4 (υπαρξης και μοναδικότητας). *Αν η $\phi \in C^0(\partial\Omega)$ και το χωρίο Ω επαληθεύει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας, τότε το πρόβλημα Dirichlet*

$$\Delta u = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

έχει μοναδική (κλασική) λύση.

Παρατήρηση. 1. Η συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας δεν είναι βέλτηστη.

2. Υπάρχουν χωρία για τα οποία το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Laplace* δεν έχει λύση. Π.χ. για $n \geq 3$ χωρίο με αρκετά μυτερό εσωτερικό αγκάθι. Η αιχμή του αγκαθιου είναι το σημείο οπου δεν θα επαληθευεται η συνοριακή συνθήκη.

§ 5. Πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poissone σε γενικά χωρία

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\Delta\, u(x) = f(x) \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = \phi(s). \tag{5.1}$$

Εισάγουμε την συνάρτηση

$$w(x) = \int_\Omega E(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Αν θα αποδείξουμε οτι

$$\Delta w(x) = f(x), \tag{5.2}$$

τότε το πρόβλημα (5.1) ανάγεται στο ομογενές. Πράγματι για την

$$v(x) = u(x) - w(x)$$

έχουμε

$$\Delta\, v(x) = 0 \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; v\Big|_{\partial\Omega} = \chi(s)$$

όπου

$$\chi = \phi - w\Big|_{\partial\Omega}.$$

Την ύπαρξη τετοιας $v(x)$ την έχουμε αποδείξει και η λύση του (5.1) θα δίνεται απο τον τυπο

$$u(x) = v(x) + \int_\Omega E(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Άρα αυτο που πρεπει να αποδείξουμε είναι η (5.2). Θα το κάνουμε για $f \in C^1(\Omega)$ και φραγμένη.

Θα χρειαστούμε τον τυπο της ολοκλήρωσης κατα μέρη. Ας γράψουμε το θεωρημα της απόκλισης αναλυτικά (παίρνοντας ξ αντι για x):

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n F_{i\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n F_i\, \nu_i ds$$

εδω $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο $\partial\Omega$. Οπως προκύπτει απο την απόδειξη του Θεωρήματος της απόκλισης ισχύει οτι

$$\int_\Omega F_{i\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega} F_i\, \nu_i ds, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Αν θα πάρουμε $F_i(\xi) = h(\xi) g(\xi)$, οπου $h(\xi)$, $g(\xi)$ (παραγωγίσιμες) συναρτήσεις, τότε

$$\int_\Omega (h\, g)_{\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega} h\, g\, \nu_i ds, \quad i = 1, ..., n,$$

ή αλλοιώς

$$\int_\Omega h_{\xi_i} g d\xi = \int_{\partial\Omega} h\, g\, \nu_i ds - \int_\Omega h\, g_{\xi_i} d\xi, \quad i = 1, ..., n. \tag{5.3}$$

Ο τύπος (5.3) είναι η ολοκλήρωση κατα μέρη.

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της (5.2). Έστω $f \in C^1(\Omega)$, αφου $E_{x_i} = -E_{\xi_i}$ έχουμε

$$w_{x_i}(x) = \int_\Omega E_{x_i}(x,\xi) f(\xi) d\xi = -\int_\Omega E_{\xi_i}(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

Ολοκληρώνοντας κατα μέρη παίρνουμε

$$w_{x_i} = -\int_{\partial\Omega} f(\xi) E(x,\xi) \nu_i ds + \int_\Omega f_{\xi_i}(\xi) E(x,\xi) d\xi.$$

Παραγωγίζουμε άλλη μια φορα

$$w_{x_i x_i} = -\int_{\partial\Omega} f(\xi) E_{x_i}(x,\xi) \nu_i ds + \int_\Omega f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x,\xi) d\xi.$$

Αρα

$$\Delta w = -\int_{\partial\Omega} f(\xi) \sum_{i=1}^n E_{x_i}(x,\xi) \nu_i ds + \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x,\xi) d\xi. \tag{5.4}$$

Θα υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης. Έστω

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \{|x - \xi| < \varepsilon\}$$

οπου το $\varepsilon > 0$ το επιλέγουμε ε.ω. $\{|x - \xi| < \varepsilon\} \subset \Omega$. Προφανώς

$$I \equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x,\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(\xi) E_{x_i}(x,\xi) d\xi.$$

Ολοκληρώνωντας κατα μέρη έχουμε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (f E_{x_i})_{\xi_i} d\xi = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f E_{x_i} \nu_i ds$$

δηλαδή

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^n f E_{x_i} \nu_i ds - \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^n f E_{x_i \xi_i} d\xi \Big) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds + \int_{\Omega_\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i x_i} d\xi \Big)$$

$\Big($ προφανώς $E_{x_i \xi_i} = -E_{x_i x_i}$ $\Big)$.

Η E στο Ω_ε είναι αρμονική, συνεπώς

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds =$$

$$\int_{\partial\Omega} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} f \sum_{i=1}^n E_{x_i} \nu_i ds. \tag{5.5}$$

Ας υπολογίσουμε το δευτερο ολοκλήρωμα, κάνοντας αντικατάσταση $\zeta = \xi - x$, έχουμε

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} \nu_i ds = \int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta + x) \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} \nu_i ds.$$

Στο $|\zeta| = \varepsilon$ ισχύει

$$E_{x_i} = \frac{x_i - \xi_i}{w_n \varepsilon^n} = -\frac{\zeta_i}{w_n \varepsilon^n}, \quad \text{και} \quad \nu = \frac{\zeta}{|\zeta|} = \frac{1}{\varepsilon}(\zeta_1, ..., \zeta_n).$$

Αρα

$$\int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta + x) \sum_{i=1}^{n} E_{x_i} \nu_i ds = -\int_{|\zeta|=\varepsilon} f(\zeta + x) \frac{\varepsilon^2}{w_n \varepsilon^n \varepsilon} ds =$$

$$-f(\zeta^* + x) \frac{1}{w_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\zeta|=\varepsilon} ds = -f(\zeta^* + x) \to -f(x) \ \text{ καθώς } \ \varepsilon \to 0.$$

Εδω χρησιμοποιήσαμε το Θεώριμα της Μεσης Τιμής ($\zeta^* \in \{|\zeta| = \varepsilon\}$, $\zeta^* \to 0$ καθως $\varepsilon \to 0$). Επιστρέφουμε στην σχέση (5.5) για να πάρουμε

$$I = \int_{\partial\Omega} f(\xi) \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}(x, \xi) \nu_i ds + f(x).$$

Αντικαθιστώντας το I στην (5.4) θα έχουμε το ζητούμενο.

Αρα λαμβάνει χωρα το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 5.1 (υπαρξης και μοναδικότητας). *Αν η $\phi \in C^0(\partial\Omega)$, το χωρίο Ω επαληθεύει την συνθήκη της εξωτερικής σφαίρας και η f είναι φραγμένη και $C^1(\Omega)$, τότε το πρόβλημα Dirichlet (5.1) έχει μοναδική (κλασική) λύση.*

Παρατήρηση. Το Θεωρημα 5.1 ισχύει και αν η f είναι φραγμένη και $Hölder$ συνεχής συνάρτηση. Αν η f είναι μόνο συνεχής συνάρτηση τότε η εξίσωση $\Delta u = f$ μπορεί να μην έχει δυο φορές παραγωγίσιμη λύση.

§ 6. Αρχή του μεγίστου (ασθενής μορφή)

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \tag{6.1}$$

όπου $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, Ω είναι φραγμένο χωρίο στον $\mathbf{R}^n$ και $a_{i,j}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$ δοσμένες φραγμένες στο χωρίο Ω συναρτήσεις. Θυμίζουμε οτι ενα χωρίο είναι πάντα ανοιχτό σύνολο.

Θα υποθέτουμε οτι η συνάρτηση u είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα θεωρούμε οτι ο πίνακας

$$A(x) = \Big(a_{i,j}(x)\Big)_{i,j=1}^{n}$$

είναι συμμετρικός αρα οι ιδιοτιμές του για κάθε σταθεροποιημένο x_0 είναι όλες πραγματικες.

Η εξίσωση (6.1) ονομάζεται ελλειπτικού τύπου αν υπάρχουν σταθερές λ και Λ τ.ω. να ισχύει

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \ \ \forall x \in \Omega \ \text{ και } \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \tag{6.2}$$

εδω $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Η συνθήκη (6.2) ονομάζεται συνθήκη ελλειπτικότητας. Η συνθήκη αυτη είναι ισοδύναμη με τις εξής, η συναρτήσεις $a_{i,j}(x)$ είναι φραγμένες και όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A(x)$ είναι θετικές για κάθε $x \in \Omega$.

Λέμε οτι ο πίνακας A είναι *θετικά ορισμένος* αν ισχύει η ανισότητα

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j, \ \ \forall x \in \Omega \ \text{ και } \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

ή ισοδύναμα - όλες οι ιδιοτιμές του $A(x)$ για κάθε σταθεροποιημένο x είναι θετικές

Λέμε οτι ο πίνακας A είναι *μη αρνητικά ορισμένος* αν ισχύει η ανισότητα

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j, \ \ \forall x \in \Omega \ \text{ και } \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

ή ισοδύναμα - όλες οι ιδιοτιμές του $A(x)$ για κάθε σταθεροποιημένο x είναι μη αρνητικές.

Λέμε οτι ο πίνακας A είναι *αρνητικά ορισμένος* (*μη θετικά*) αν ο πίνακας $-A$ είναι *θετικά ορισμένος* (*μη αρνητικά*).

Για την Λαπλασιανή

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0,$$

ο πίνακας A είναι ο μοναδιαίος και η (6.2) παίρνει τη μορφή

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_i \leq \Lambda|\xi|^2$$

που προφανώς ισχύει με $\lambda = \Lambda = 1$.

Για συντομία θα χρησιμοποιουμε τον εξής συμβολισμό

$$L\,u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Λήμμα 6.1. *A.) Έστω η $u(x) \in C^2(\Omega)$ και στο Ω ισχύει οτι*

$$c(x) \leq 0 \ \ \textit{και} \ \ L\,u < 0 \ \ \big(L\,u > 0\big). \tag{6.3}$$

Τότε η συνάρτηση $u(x)$ δεν λαμβάνει στο Ω αρνητικό ελάχιστο (θετικό μέγιστο).

B.) Αν επιπλέον $u(x) \in C(\overline{\Omega})$, τότε

$$\min\{0, \inf_{\partial\Omega} u\} \leq \inf_{\overline{\Omega}} u \quad \left(\sup_{\Omega} u \leq \max\{0, \sup_{\partial\Omega} u\}\right)$$

Απόδειξη. A1.) Απο τον τυπο του $Taylor$ (ανάπτυγμα $Taylor$ δευτερης τάξης) γνωρίζουμε οτι αν στο σημείο $x_0 \in \Omega$ η συνάρτηση $u(x)$ λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο τότε σε αυτο το σημείο ο πίνακας

$$\Big(u_{x_i x_j}\Big)_{i,j=1}^{n}$$

είναι μη αρνητικά ορισμένος. Αφου ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος απο την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε οτι τότε ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) \geq 0.$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν οτι σε αυτό το σημείο επίσης έχουμε οτι

$$c(x_0)u(x_0) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0) u_{x_i}(x_0) = 0$$

καταλήγουμε στο

$$L\, u(x_0) \geq 0,$$

άτοπο.

Συνεπώς η $u(x)$ δεν μπορεί να λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στο Ω.

A2.) Ας υποθέσουμε τωρα οτι η $u(x)$ λαμβάνει το θετικό της μέγιστο σε ένα σημείο $x^0 \in \Omega$, τότε σε αυτό το σημειο έχουμε

$$c(x^0)u(x^0) \leq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i(x^0) u_{x_i}(x^0) = 0 \;\; \text{και} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x^0) u_{x_i x_j}(x^0) \leq 0.$$

Καταλήγουμε στο

$$L\, u(x^0) \leq 0,$$

άτοπο.

Συνεπώς η $u(x)$ δεν μπορεί να λαμβάνει το θετικό της μέγιστο στο Ω.

B.) Για να αποδείξουμε τον δευτερο ισχυρισμό παρατηρούμε οτι τωρα η u ή θα είναι μη αρνητική ή θα λαμβάνει το αρνητικό ελάχιστό της στο σύνορο του χωρίου. (Παρομοίως ή θα είναι μη θετική ή θα λαμβάνει το θετικό μέγιστό της στο σύνορο του χωρίου).

□

Πόρισμα. Στο Λήμμα 6.1 τη συνθήκη (6.3) μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με

$$c(x) < 0 \;\; \text{και} \;\; L\, u \leq 0 \;\; \big(L\, u \geq 0\big).$$

Λήμμα 6.2. *A.) Έστω οτι η $u(x) \in C^2(\Omega)$ και στο Ω ισχύει οτι*

$$c(x) \equiv 0, \quad \text{και} \;\; L\, u < 0 \;\; \big(L\, u > 0\big).$$

Τότε η συνάρτηση $u(x)$ δεν λαμβάνει στο Ω ελάχιστο (μέγιστο).

B.) Αν επιπλέον $u(x) \in C(\overline{\Omega})$, τότε

$$\inf_{\partial\Omega} u \le \inf_{\overline{\Omega}} u \quad \left(\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u\right)$$

Η απόδειξη του Λήμματος 6.2 είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 6.1.

Λήμμα 6.3. *Έστω οτι η $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ και στο Ω ισχύει*

$$c(x) \equiv 0, \quad \text{και} \;\; L\,u \ge 0 \;\; \big(L\,u \le 0\big). \tag{6.3}$$

Τότε η συνάρτηση $u(x)$ λαμβάνει το μέγιστό της (ελάχιστό της) στο $\partial\Omega$ δηλαδή

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \;\; (\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε με την περίπτωση $L\,u \ge 0$ η περίπτωση $L\,u \le 0$ αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Εστω $\gamma > 0$ μια σταθερά την οποια θα την προσδιορίσουμε πιο κάτω. Προφανώς

$$L\,e^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} \ge \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1}$$

όπου

$$b_0 = \frac{\max|b_1|}{\lambda}.$$

Επιλέγουμε τον αριθμό γ ε.ω

$$\gamma > b_0.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$L\,(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = L\,u + \varepsilon L\,e^{\gamma x_1} > 0.$$

Άρα απο το Λήμμα 6.2 ισχύει οτι

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Περνώντας στο όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε το ζητούμενο:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

□

Θα γενικεύσουμε τωρα το Λήμμα 6.3 εις την περίπτωση $c(x) \le 0$.

Λήμμα 6.4. *Έστω οτι η $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ και στο Ω ισχύει*

$$c(x) \le 0 \;\; \text{και} \;\; L\,u \ge 0 \;\; \big(L\,u \le 0\big).$$

Τότε

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \le \max\{0, \sup_{\partial\Omega} u\} \quad \left(\min\{0, \inf_{\partial\Omega} u\} \le \inf_{\overline{\Omega}} u\right)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τον τελεστή

$$L_0\,u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}.$$

(Στο Λήμμα 6.2 και 6.3 ο L_0 συμπίπτει με τον L.)

Θα συμβολίσουμε με Ω^+ το υποσύνολο του Ω όπου $u > 0$ (προφανώς Ω^+ είναι ανοιχτό σύνολο). Αν $u \leq 0$, τότε το σύνολο Ω^+ είναι κενό. Έστω οτι το συνολο Ω^+ δεν είναι κενό. Έχουμε οτι

$$L_0 u \geq -cu \geq 0 \ \text{ στο } \ \Omega^+.$$

Συμφωνα με το Λήμμα 6.3

$$\sup_{\overline{\Omega}^+} u = \sup_{\partial\Omega^+} u$$

αρα

$$\sup_{\overline{\Omega}^+} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

Συνεπώς ή η συνάρτηση u λαμβάνει το μέγιστο στο $\partial\Omega$ ή είναι μη θετική, δηλαδη

$$\sup_{\Omega} u \leq \max\{0, \sup_{\partial\Omega} u\}.$$

2. Έστω τώρα

$$c(x) \leq 0 \ \text{ και } \ L\, u \leq 0.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με τη διαφορά οτι αντι για Ω^+ παίρνουμε Ω^- - υποσύνολο του Ω όπου $u < 0$.

□

Πόρισμα α.) Αν στο Λήμμα 6.4 έχουμε ότι

$$L\, u = 0,$$

τότε

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|$$

Πόρισμα β.) Αν στο Λήμμα 6.4 έχουμε ότι

$$\inf_{\partial\Omega} u \geq 0,$$

τότε

$$\inf_{\Omega} u \geq 0.$$

Πόρισμα γ.) Αν στο Λήμμα 6.4 έχουμε ότι

$$\sup_{\partial\Omega} u \leq 0$$

τότε

$$\sup_{\Omega} u \leq 0.$$

Θεώρημα 6.1(σύγκρισης)*Υποθέτουμε οτι στο Ω υσχύει η συνθήκη (6.2) και $c(x) \leq 0$. Έστω οι συναρτήσεις u, $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

A.) Αν

$$Lu \geq Lv \ \textit{ στο } \ \Omega, \ \ u \leq v \ \textit{ στο } \ \partial\Omega,$$

τότε

$$u \leq v \ \textit{ στο } \ \Omega.$$

B.) Αν

$$Lu = Lv \ \textit{ στο } \ \Omega, \ \ u = v \ \textit{ στο } \ \partial\Omega,$$

τότε

$$u = v \ \textit{στο} \ \Omega.$$

Η απόδειξη είναι προφανής.

§ 7. Αρχή του μεγίστου (ισχυρή μορφή)

Λήμμα 7.1. *Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και*

$$L\,u \le 0, c \le 0 \ \textit{για} \ x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το αρνητικό της ελάχιστο και $u(x) > u(x_0)$ $\forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

(εδώ ν μοναδιαιο κάθετο ως προς $\partial B_R(y)$)

Απόδειξη. Για $0 < \rho < R$ εισάγουμε την συνάρτηση

$$w(x) = e^{-\delta R^2} - e^{-\delta r^2} < 0$$

όπου

$$r^2 = |x-y|^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 > \rho^2$$

και δ θετική σταθερά την οποια θα την επιλέξουμε αργότερα. Προφανώς

$$L\,w = -e^{-\delta r^2}\Big[4\delta^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\delta \sum_{i=1}^{n} \big(a_{ii} + b_i(x_i - y_i)\big)\Big] + cw$$

Θεωρούμε τωρα το χωρίο $D = B_R(y) \setminus B_\rho(y)$. Επιλέγουμε την σταθερά δ ε.ω. στο D να ισχύει

$$L\,w < 0.$$

Αυτο μπορούμε να το κάνουμε διότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \ge \lambda |x-y|^2 > \lambda \rho^2$$

αρα

$$L\,w < -e^{-\delta r^2}\Big[4\delta^2 \lambda \rho^2 - 2\delta \sum_{i=1}^{n} \big(a_{ii} + b_i(x_i - y_i)\big)\Big] - ce^{-\delta r^2},$$

επιλέγοντας δ αρκετά μεγάλο παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την συνάρτηση

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)$$

με $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό (θα το επιλέξουμε παρακάτω) στο D έχουμε

$$L\big(u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)\big) \le -cu(x_0) < 0.$$

Στο σύνορο του D ισχύει

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)\Big|_{\partial D} \geq 0.$$

Πράγματι στο $\partial B_R(y)$ έχουμε $w = 0$, στο $\partial B_\rho(y)$ ισχύει $u(x) - u(x_0) > 0$ αρα μπορούμε να επιλέξουμε ε (αρκετα μικρό) ε.ω.

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)\Big|_{\partial B_\rho(y)} \geq 0.$$

Συνεπώς απο αρχή του μεγίστου έχουμε

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x) \geq 0 \ \text{ στο } \ D.$$

Δηλαδή στο D

$$u(x) - u(x_0) \geq -\varepsilon w(x) = \varepsilon(w(R) - w(r)) \ \Leftrightarrow \ \frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|} \geq \varepsilon \frac{w(R) - w(r)}{|x - x_0|}.$$

ή

$$\frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} \leq -\varepsilon \frac{w(R) - w(r)}{|x - x_0|}.$$

Απο την τελευταία σχέση προκύπτει οτι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \equiv \frac{\partial u}{\partial r}(R) \leq -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \equiv -\varepsilon w'(R) < 0.$$

□

Παρατήρηση. Το οτι

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$$

είναι προφανές. Το Λήμμα μας δίνει γνήσια ανισότητα.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και τα ακόλουθα λήμματα

Λήμμα 7.2. *Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και*

$$L\, u \geq 0, c \leq 0 \ \text{ για } \ x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το θετικό της μέγιστο και $u(x) < u(x_0)$ $\forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Λήμμα 7.3. *Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και*

$$L\, u \leq 0, c \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το ελάχιστο της και $u(x) > u(x_0)$ $\forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Λήμμα 7.4. *Έστω $B_R(y)$ μπάλα με ακτίνα R και κέντρο στο σημείο y. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(B_R(y)) \cap C^1(\overline{B_R}(y))$ και*

$$L\,u \geq 0, c \equiv 0 \;\; \text{για} \;\; x \in B_R(y).$$

Αν η u λαμβάνει στο $x_0 \in \partial B_R(y)$ το μέγιστο της και $u(x) < u(x_0)\; \forall x \in B_R(y)$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Παρατήρηση. Είναι ευκολο να διαπιστώσει κανείς οτι τα παραπάνω λήμματα λαμβάνουν χώρα και εις την περίπτωση που αντί για μπάλα παίρνουμε τυχαίο χωρίο Ω που στο σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ επαληθευει την συνθήκη της εσωτερικής σφαίρας.

Είμαστε τωρα ετοιμοι για να αποδείξουμε την ισχυρή αρχή του μεγίστου.

Θεώρημα 7.1

Α. Έστω

$$c(x) \leq 0 \;\; \text{και} \;\; L\,u \leq 0 \;\; (L\,u \geq 0) \text{στο} \;\; \Omega.$$

Τότε η u δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο (θετικό μέγιστο) στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

Β. Έστω

$$c(x) \equiv 0 \;\; \text{και} \;\; L\,u \leq 0 \;\; (L\,u \geq 0) \text{στο} \;\; \Omega.$$

Τότε η u δεν λαμβάνει το ελάχιστό (μέγιστο) της στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

Παρατήρηση. Όπως είχαμε πει το Ω είναι ανοιχτό σύνολο άρα όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά. Τουτέστιν όταν λέμε π.χ. ¨η u δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στο Ω¨ εννοούμε στα εσωτερικά σημεία του Ω.

Απόδειξη (του Θεωρήματος 7.1). Θα περιοριστούμε με την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού για το αρνητικό ελάχιστο, τα υπόλοιπα αποδεικνύονται παρομοίως.

Δηλαδή έχουμε οτι

$$c(x) \leq 0 \;\; \text{και} \;\; L\,u \leq 0 \;\; \text{στο} \;\; \Omega$$

και ας υποθέσουμε ότι η u λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο έστω m, σε κάποιο σημείο του Ω και έστω

$$E = \{x \in \Omega : u(x) = m\} \;\; (E - \;\; \text{κλειστό συνολο}).$$

Αν η u δεν είναι σταθερή τότε $E \subset \Omega$. Έστω $\Omega^+ = \Omega \setminus E \subset \Omega$, δηλαδή Ω^+ αποτελείται απο εκείνα τα σημεία του Ω όπου ισχύει $u(x) > m$. Υπάρχει $x_0 \in \partial E$ και μπάλα $B_\varepsilon(y) \subset \Omega^+$ τ.ω.

$$\overline{B_\varepsilon}(y) \cap E = \{x_0\}.$$

Αρα ισχύει το Λήμμα 7.1, απο την άλλη, αφου το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Ω έχουμε

$$\nabla u(x_0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = 0,$$

άτοπο.

□

Πόρισμα.
Α. Έστω
$$c(x) \leq 0 \;\; \textit{και} \;\; L\,u = 0 \textit{στο} \;\; \Omega.$$
Τότε η u δεν λαμβάνει ουτε το αρνητικό της ελάχιστο ούτε το θετικό της μέγιστο στο Ω αν δεν είναι σταθερή.
Β. Έστω
$$c(x) \equiv 0 \;\; \textit{και} \;\; L\,u \leq 0 \;\; (L\,u \geq 0) \textit{στο} \;\; \Omega.$$
Τότε η u δεν λαμβάνει ουτε το ελάχιστό ουτε το μέγιστο της στο Ω αν δεν είναι σταθερή.

Είναι προφανές οτι απο το Πόρισμα προκίπτει και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Dirichlet$ για την εξίσωση (6.1).

Παρατήτηση. Αν τη συνθήκη (6.2) θα την αντικαταστήσουμε με πιο γενική
$$0 \leq \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \;\; \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$
(η εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση ονομάζεται *εκφυλισμένη*) τότε εν γένει η αρχή του μεγίστου (και ως συνέπεια η μοναδικότητα) παραβιάζεται. Πράγματι, θεωρούμε το εξης πρόβλημα
$$|x|^2\Delta\,u - n\,x\cdot\nabla u = 0 \;\; \text{για} \;\; |x| < R, \;\; \text{και} \;\; u\Big|_{|x|=R} = 0.$$
Εδω έχουμε
$$a_{ii} = |x|^2, \;\; a_{ij} = 0 \;\; \text{για} \;\; i \neq j,$$
συνεπώς
$$0 \leq |x|^2|\xi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \;\; \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$
Προφανώς οι
$$u(x) \equiv 0 \;\; \text{και} \;\; u(x) = |x|^2 - R^2$$
είναι λύσεις το προβλήματος. Παρατηρούμε οτι η $u = |x|^2 - R^2$ λαμβάνει το ελάχιστό της στο $|x| = 0$.

§ 8. *A priori* εκτημήσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα εισάγουμε την εννοια της *a priori* εκτίμησης, που σημαίνει εκτίμηση εκ των προτέρων.

A priori εκτίμηση ονομάζουμε την εκτίμηση της λύσης υπο την προυπόθεση ύπαρξής της. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε μια σταθερά η οποία θα εξαρτάται αποκλειστικά απο τα δεδομένα του προβλήματος τ.ω. κάποια νόρμα της (κλασικής) λύσης εφόσον υπάρχει θα φράσσεται με αυτή τη σταθερά.

Έχουμε ήδη συναντήση τετοιου είδους εκτιμήσεις. Π.χ. απο το Λημμα 6.4 ευκολα προκύπτει το συμπέρασμα οτι αν η λύση του προβλήματος
$$L\,u = 0 \;\; \text{στο} \;\; \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = \phi$$

υπάρχει (που δεν το ξέρουμε προς το παρόν) τότε ισχύει

$$|u| \le C_0 = \sup_{\partial\Omega} |\phi|, \tag{8.1}$$

που είναι *a priori* εκτίμηση.

Το πόσο σημαντικό ρόλο παίζουν οι *a priori* εκτιμήσεις (των παραγώφων πρώτης και δευτερης τάξης) θα το καταλάβουμε λιγο αργότερα στην §10 και §12.

Εδω θα περιοριστούμε με την εκτίμηση της λύσης για την γενική περίπτωση δηλαδή για το πρόβλημα

$$L\,u = f \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi. \tag{8.2}$$

Λήμμα 8.1. *Για την λύση του προβλήματος (8.2) (εφόσον υπάρχει) ισχύει η εκτίμηση*

$$\sup_{\Omega} |u| \le \sup_{\partial\Omega} |\phi| + C \sup_{\Omega} |f|$$

όπου η σταθερά C (την οποια θα την βρουμε σε κλειστή μορφή) εξαρτάται μόνο απο το μέγεθος του χωρίου Ω σε μια κατεύθυνση.

Απόδειξη. Το χωρίο Ω είναι φραγμένο, αρα υπάρχει ενα $d > 0$ τ.ω.

$$x_1 + d \ge 0 \ \text{ για όλα τα } \ x \in \Omega.$$

Επιλέγουμε ενα γ ε.ω.

$$\gamma > x_1 + d.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\omega(x_1) = e^{\beta\gamma} - e^{\beta(x_1+d)} > 0,$$

όπου την σταθερά $\beta > 0$ θα επιλέξουμε παρακάτω. Προφανώς ισχύει

$$L\,\omega(x_1) = -e^{\beta(x_1+d)}\big(a_{11}\beta^2 + a_1\beta\big) + c\,\omega.$$

Λαμβάνοντας υπόψη οτι

$$a_{11} \ge \lambda, \ \ c \le 0, \ \ \omega > 0$$

έχουμε

$$L\,\omega(x_1) \le -e^{\beta(x_1+d)}\big(\lambda\beta^2 + a_1\beta\big).$$

Προφανώς επιλέγοντας β αρκετά μεγάλο θα έχουμε

$$L\,\omega(x_1) \le -1.$$

Επιλέγουμε τετοιο β και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$v_1(x) = h(x_1) - u(x) \ \text{ και } \ v_2(x) = h(x_1) + u(x)$$

όπου

$$h(x_1) = \omega(x_1) \sup_{\Omega} |f| + \sup_{\partial\Omega} |\phi|.$$

Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει οτι

$$L\,v_1 = L\,h - L\,u = \sup_{\Omega} |f| L\,\omega + c(x) \sup_{\partial\Omega} |\phi| - f \le -\sup_{\Omega} |f| - f \le 0,$$

$$L\,v_2 = L\,h + L\,u = \sup_{\Omega} |f| L\,\omega + c(x) \sup_{\partial\Omega} |\phi| + f \leq -\sup_{\Omega} |f| + f \leq 0.$$

Επίσης ισχύει οτι

$$v_i \geq 0 \;\; \text{στο} \;\; \partial\Omega$$

αφού $v_i \geq \sup|\phi|$. Συνεπώς (βλ. Πορισμα β.) στο Λήμμα 6.4)

$$v_i \geq 0 \;\; \text{στο} \;\; \Omega \quad \Leftrightarrow \quad -h(x_1) \leq u(x) \leq h(x_1).$$

Δηλαδή

$$|u(x)| \leq h(x_1) \leq \sup_{\partial\Omega} |\phi| + C \sup_{\Omega} |f|$$

όπου

$$C = \sup \omega(x_1).$$

□

Πόρισμα. *Η λύση του προβλήματος Dirichlet (8.2) (εφόσον υπάρχει) είναι μοναδική*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω οτι εκτός απο την λύση u_1 υπάρχει και κάποια άλλη λύση, έστω η u_2. Δηλαδή

$$L\,u_1 = f, \;\; L\,u_2 = f \;\; \text{στο} \;\; \Omega, \;\; u_1\Big|_{\partial\Omega} = \phi, \;\; u_2\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Για $u \equiv u_1 - u_2$ έχουμε

$$L\,u = 0 \;\; \text{στο} \;\; \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

άρα απο το Λήμμα 8.1

$$\sup_{\Omega} |u| \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 \equiv u_2.$$

□

§ 9. Μερικά στοιχεία απο την Συναρτησιακή Ανάλυση

Θεωρούμε ενα σύνολο στοιχείων $\mathcal{V}$ στο οποιο είναι ορισμένες η πράξεις πρόσθεση ¨+¨ και πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό ¨·¨ έτσι ώστε αν

α. $f_1 \in \mathcal{V}$ και $f_2 \in \mathcal{V}$ τότε και το άθροισμα $f_1 + f_2 \in \mathcal{V}$,

β. $f \in \mathcal{V}$ και $C \in \mathbf{R}$ τότε και το γινόμενο $C \cdot f \in \mathcal{V}$.

Το σύνολο αυτό ονομάζεται *γραμμικός χώρος* αν ισχύουν τα παρακάτω

1. $f_1 + f_2 = f_2 + f_1 \; \forall f_1, f_2 \in \mathcal{V}$,
2. $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_2) \; \forall f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{V}$,
3. στο $\mathcal{V}$ υπάρχει μηδενικό στοιχείο $\mathbf{o}$ τετοιο ώστε $0 \cdot f = \mathbf{o} \; \forall f \in \mathcal{V}$,
4. $(C_1 + C_2) \cdot f = C_1 \cdot f + C_2 \cdot f \; \forall f \in \mathcal{V}$ και $\forall C_1, \, C_2 \in \mathbf{R}$,
5. $C \cdot (f_1 + f_2) = C \cdot f_1 + C \cdot f_2 \; \forall f_1, \, f_2 \in \mathcal{V}$ και $\forall C \in \mathbf{R}$,
6. $(C_1 C_2) \cdot f = C_1 \cdot (C_2 \cdot f) \; \forall f \in \mathcal{V}$ και $\forall C_1, \, C_2 \in \mathbf{R}$,
7. $1 \cdot f = f \; \forall f \in \mathcal{V}$.

Παραδείγματα γραμμικών χώρων:

το σύνολο $C^k(\Omega)$ των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων στο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ συναρτήσεων ($k = 0, 1, 2, ...$), το σύνολο $C_0^k(\Omega)$ των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων στο Ω συναρτήσεων που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$,

το σύνολο $C^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$ των $H\ddot{o}lder$ συνεχών στο Ω συναρτήσεων,

το σύνολο $C_0^\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$ των $H\ddot{o}lder$ συνεχών στο Ω συναρτήσεων που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$,

το σύνολο $C^{k+\alpha}(\Omega)$ των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων στο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ συναρτήσεων, τ.ω. ολες οι παράγωγοι k τάξης να είναι $H\ddot{o}lder$ συνεχείς στο Ω,

το σύνολο $C_0^{k+\alpha}(\Omega)$ που είναι υποσύνολο του $C^{k+\alpha}(\Omega)$ με επιπλέον προυπόθεση οτι οι συναρτήσεις που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$.

Θυμίζουμε οτι μια συνάρτηση f είναι $H\ddot{o}lder$ συνεχής στο Ω αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ και $\alpha \in (0,1)$ τ.ω. για κάθε x, $y \in \Omega$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha$$

με K και α να μήν εξαρτώνται απο x, y.

Γραμμικός χώρος με νόρμα (ή μέτρο) ονομάζεται γραμμικός χώρος στον οποιον ορίζεται ενα συναρτισοειδές $\|\,\|_{\mathcal{V}}$ δηλαδή μια απεικόνιση απο τον $\mathcal{V}$ στον $\mathbf{R}$:

$$\|\,\|_{\mathcal{V}} : f \in \mathcal{V} \to \|f\|_{\mathcal{V}} \;\; \forall f \in \|\|_{\mathcal{V}}$$

τετοια ωστε

1. $\|f\|_{\mathcal{V}} \geq 0$ και $\|f\|_{\mathcal{V}} = 0$ αν και μόνο αν $f = \mathbf{o}$ (μηδενικό στοιχείο),
2. $\|C\,f\|_{\mathcal{V}} = |C|\,\|f\|_{\mathcal{V}}$, $\forall f \in \mathcal{V}$ και $\forall C \in \mathbf{R}$,
3. $\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{V}} \leq \|f_1\|_{\mathcal{V}} + \|f_2\|_{\mathcal{V}}$ $\forall f_1,\, f_2 \in \|\|_{\mathcal{V}}$.

Ο αριθμός $\|f\|_{\mathcal{V}}$ ονομάζεται νόρμα (ή μέτρο) του στοιχείου f.

Λέμε οτι η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}$ συγκλίνει στο στοιχείο $f \in \mathcal{V}$ αν

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{V}} \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; n \to \infty.$$

Λέμε οτι η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}$ είναι ακολουθία $Cauchy$ αν

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{V}} \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; n,\, m \to \infty.$$

Ο χώρος $\mathcal{V}$ είναι *πλήρης* αν το όριο κάθε ακολουθίας $Cauchy$ ανίκει στον $\mathcal{V}$. Πλήρης γραμμικός χώρος με νόρμα ονομάζεται *χώρος* $Banach$.

Ο χώρος $C^0(\Omega)$ (το σύνολο των συνεχών στο Ω συναρτήσεων) γίνεται χώρος $Banach$ αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} = \max_{\overline{\Omega}} |f|,$$

Ο χώρος $C^1(\Omega)$ (και $C_0^1(\Omega)$) γίνεται χώρος $Banach$ αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^1(\Omega)} = \|f\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_{x_i}\|_{C^0(\Omega)}.$$

Ο χώρος $C^2(\Omega)$ (και $C_0^2(\Omega)$) γίνεται χώρος $Banach$ αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^2(\Omega)} = \|f\|_{C^1(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \|f_{x_i x_j}\|_{C^0(\Omega)},$$

παρομοιως και ο χώρος $C^k(\Omega)$ (και $C_0^k(\Omega)$) για $k = 3, 4, ...$

Ο χώρος $C^\alpha(\Omega)$ (και $C_0^\alpha(\Omega)$) γίνεται χώρος $Banach$ αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} = \|f\|_{C^0(\Omega)} + \tilde{K}$$

όπου

$$\tilde{K} = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Ο χώρος $C^{2+\alpha}(\Omega)$ (και $C_0^{2+\alpha}(\Omega)$) γίνεται χώρος $Banach$ αν θα τον εφοδιάσουμε με την νόρμα

$$\|f\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C^2(\Omega)} + \mathbf{K},$$

όπου

$$\mathbf{K} = \sup_{x',x''\in\Omega, x'\neq x''} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{|f_{x_i x_j}(x') - f_{x_i x_j}(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}.$$

Εστω T τελεστής που δρα απο τον $\mathcal{V}$ στον $\mathcal{V}$, δηλαδή απεικονίζει τον $\mathcal{V}$ στον $\mathcal{V}$

$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}.$$

Ορισμός. Λέμε οτι ο T είναι *συστολή* αν υπάρχει ενας θετικός αριθμός $\gamma < 1$ τ.ω.

$$\|Tf - Tg\|_\mathcal{V} \leq \gamma\|f - g\|_\mathcal{V}, \forall f,\, g \in \mathcal{V}.$$

Σταθερό σημείο της απεικόνισης T ονομάζουμε ενα στοιχείο $f \in \mathcal{V}$ τ.ω. ισχύει

$$Tf = f.$$

Θεώρημα 9.1. *Έστω $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ συστολή και $\mathcal{B}$ χώρος $Banach$. Τότε ο τελεστής T έχει μοναδικό σταθερό σημείο στον $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. 1. Υπαρξη (μεθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων).

Έστω f_0 τυχαίο στοιχείο του $\mathcal{B}$. Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{B}$ με την σχέση

$$f_n = T^n f_0, \quad n = 1, 2, ...,$$

δηλαδή

$$f_1 = Tf_0, \quad f_2 = Tf_1 = T(Tf_0) \equiv T^2 f_0, \quad f_3 = Tf_2 = T(T^2 f_0) \equiv T^3 f_0, ...$$

Για $n \geq m$ έχουμε

$$\|f_n - f_m\| = \|f_{m+1} - f_m + f_{m+2} - f_{m+1} + ... + f_{n-1} - f_{n-2} + f_n - f_{n-1}\| \leq$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \|T^{k-1} f_1 - T^{k-1} f_0\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \gamma^{k-1} \|f_1 - f_0\| =$$

$$\|f_1 - f_0\| \sum_{k=m+1}^{n} \gamma^{k-1} = \|f_1 - f_0\| \frac{\gamma^m - \gamma^n}{1-\gamma} \leq$$
$$\|f_1 - f_0\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} \to 0 \;\text{ καθώς }\; m \to \infty \;\; (n \geq m)$$

Άρα η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι ακολουθία $Cauchy$ και συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $f \in \mathcal{B}$. Προφανώς

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf$$

διοτι

$$\|Tf_n - Tf\| \leq \gamma \|f_n - f\| \to 0.$$

Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = f,$$

Συνεπώς

$$Tf = f.$$

2. Μοναδικότητα.

Έστω οτι υπάρχουν δυο σταθερα σημεία f και g με $f \neq g$, δηλαδή $Tf = f$, $Tg = g$ και $\|f - g\| > 0$. Έχουμε

$$\|f - g\| = \|Tf - Tg\| \leq \gamma \|f - g\| < \|f - g\|,$$

άτοπο. Άρα $f = g \Leftrightarrow \|f - g\| = 0$.

□

Έστω V_1 και V_2 γραμμικοί χώροι με νόρμα. Λέμε οτι η απεικόνιση $L : V_1 \to V_2$ είναι *γραμμικός τελεστής* αν

$$L(C_1 u_1 + C_2 u_2) = C_1 L(u_1) + C_2 L(u_2)$$

για κάθε $u_1,\, u_2 \in V_1$ και για κάθε $C_1,\, C_2 \in \mathbf{R}$.

Το σύνολο των γραμμικών τελεστών ορισμένων σε κάποιο γραμμικό χώρο με νόρμα είναι επίσης γραμμικός χώρος. Ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό με προφανή τρόπο:

$$L = L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \quad Lu = L_1 u + L_2 u,$$
$$(CL)u = C\, Lu.$$

Παράδειγμα. Ο τελεστής Δ είναι γραμμικός τελεστης που δρα απο C^k στο C^{k-2}

$$\Delta : u \in C^k \to f = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \in C^{k-2}.$$

Ο γραμμικός τελεστής $L : V_1 \to V_2$ ονομάζεται φραγμένος αν

$$\|L\| < \infty,$$

όπου

$$\|L\| = \sup_{u \in V_1, u \neq 0} \frac{\|L(u)\|_{V_2}}{\|u\|_{V_1}}.$$

Προφανώς θεωρούμε οτι ο L είναι ορισμένος σε ολο το V_1.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε οτι το συναρτισοειδές

$$\|\cdot\| : L \to \|L\| \in \mathbf{R}$$

είναι νόρμα και συνεπος το σύνολο των γραμμικών τελεστών ορισμένων σε κάποιο γραμμικό χώρο με νόρμα είναι επίσης γραμμικός χώρος με νόρμα.

Απο την Συναρτησιακή Ανάλυση γνωρίζουμε οτι ο γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής.

Ορισμός 1. Λέμε οτι ο τελεστής (ή η απεικόνιση) $L : B \to V$ (οπου B και V γραμμικοί χώροι με νόρμα) είναι *επί* αν για κάθε $f \in V$ υπάρχει $u \in B$ τ.ω. $f = Lu$. Με αλλα λόγια για κάθε $f \in V$ η εξίσωση $Lu = f$ έχει λύση (που ανήκει στο B).

2. Λέμε οτι ο τελεστής $L : B \to V$ είναι *ενα-προς-ενα* αν για κάθε $f \in V$ υπάρχει ενα και μόνο ενα $u \in B$ τ.ω. $f = Lu$, και αντιστρόφως.

Θεώρημα 9.2. *Έστω B χώρος Banach, V γραμμικος χώρος με νόρμα και L_0, L_1 γραμμικοί φραγμένοι τελεστές*

$$L_0 : B \to V, \quad L_1 : B \to V.$$

Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε τον τελεστή L_t:

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1.$$

Έστω οτι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τ.ω. για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $u \in B$ ισχύει

$$\|u\|_B \leq C\|L_t u\|_V. \tag{9.1}$$

Τότε ο τελεστής $L_1 : B \to V$ είναι επί αν και μόνο αν είναι επί ο τελεστής $L_0 : B \to V$.

(Η σταθερά C στην ανισότητα (9.1) είναι ανεξάρτητη του u και του t)

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $s \in [0,1]$ (π.χ. για $s = 0$) ο τελεστής L_s είναι επί. Τότε ο L_s είναι ένα-προς-ενα λόγω της (9.1) και της γραμμικότητας τουL_s. Πράγματι έχουμε για κάθε u_1, $u_2 \in B$

$$\|u_1 - u_2\|_B \leq C\|L_s(u_1 - u_2)\|_V = C\|L_s u_1 - L_s u_2)\|_V,$$

αρα αν $L_s u_1 = L_s u_2$, τότε $u_1 = u_2$.

Αφου ο L_s είναι ένα-προς-ενα, ορίζεται ο τελεστής L_s^{-1} (αντίστροφη απεικόνιση απο το V στο B) ο οποιος είναι γραμμικός και φραγμένος. Θεωρούμε την εξίσωση

$$L_t u = f \tag{9.2}$$

με τυχαίο t. Θέλουμε να αποδείξουμε οτι ο L_t είναι επι. Εδω f δοσμένο στοιχείο (του V) και η u λύση της εξίσωσης που θέλουμε να βρούμε (στο B). Θέλουμε να αποδείξουμε οτι ο L_t είναι επι. Η (9.2) μπορεί να γραφτει ως

$$L_s u = f + L_s u - L_t u$$

ή

$$L_s u = f + \big(L_s - L_t\big)u$$

ή (αφου $L_t = (1-t)L_0 + tL_1$ και $L_s = (1-s)L_0 + sL_1$)

$$L_s u = f + (t-s)L_0 u - (t-s)L_1 u.$$

Εφαρμόσουμε τον L_s^{-1} στην τελευταία σχέση και παίρνουμε

$$u = L_s^{-1}\big(f + (t-s)L_0 u - (t-s)L_1 u\big)$$

και, εφόσον ο L_s^{-1} είναι γραμμικός,

$$u = L_s^{-1} f + (t-s)L_s^{-1}\big[L_0 - L_1\big]u. \tag{9.3}$$

Ορίζουμε τον τελεστή T ως

$$T \equiv L_s^{-1} f + (t-s)L_s^{-1}\big[L_0 - L_1\big],$$

τότε η εξίσωση (9.3) (ουσιαστικά η (9.2)) γράφεται ως

$$u = Tu. \tag{9.4}$$

Ευκολα διαπιστώνουμε οτι ο T απεικονίζει τον χώρο B στον εαυτό του. Πράγματι,

$$Tu = L_s^{-1} f + (t-s)L_s^{-1}\big[L_0 - L_1\big]u,$$

το στοιχείο $f \in V$ αρα

$$L_s^{-1} f \in B,$$

το $u \in B$ αρα

$$(L_0 - L_1)u \in V \ \text{ και } \ L_s^{-1}\big(L_0 - L_1\big)u \in B.$$

Ας εξετάσουμε τωρα πότε ο T είναι συστολή. Έχουμε

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B =$$

$$\|L_s^{-1} f + (t-s)L_s^{-1}\big[L_0 - L_1\big]u_1 - L_s^{-1} f + (t-s)L_s^{-1}\big[L_0 - L_1\big]u_2\|_B =$$

$$|t-s|\|L_s^{-1}\big[L_0 - L_1\big](u_1 - u_2)\|_B.$$

Το στοιχείο

$$w = L_s^{-1}\big(L_0 - L_1\big)(u_1 - u_2)$$

ανήκει στο B και λόγω της (9.1) έχουμε

$$\|w\|_B \leq C\|L_s w\|_V = C\|\big[L_0 - L_1\big](u_1 - u_2)\|_V \leq$$

$$C\|\big[L_0 - L_1\big]\|\|(u_1 - u_2)\|_B.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της νόρμας του τελεστή. Άρα καταλήγουμε στο οτι

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \leq C|t-s|\|\big[L_0 - L_1\big]\|\|(u_1 - u_2)\|_B \leq$$

$$C|t-s|\big(\|L_0\| + \|L_1\|\big)\|(u_1 - u_2)\|_B.$$

Αρα ο T είναι συστολή όταν

$$C|t-s|\big(\|L_0\| + \|L_1\|\big) < 1.$$

Συνεπώς για ολα τα $t \in [0,1]$ που επαληθευουν την σχέση

$$|t-s| < \delta = \frac{1}{(C\|L_0\| + \|L_1\|)}$$

ο T είναι συστολή και η εξίσωση (9.4) έχει λύση άρα και η (9.2) έχει λύση δηλαδή ο L_t για τετοιες τιμές του t είναι επί.

Τώρα χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε διαστήματα μήκους $\tilde{\delta} < \delta$ ($\tilde{\delta} > 0$), αν ο L_0 είναι επι τότε και ο L_t είναι επι για $t \in [0, \tilde{\delta}]$, αφου τωρα ο $L_{\tilde{\delta}}$ είναι επι θα είναι επι και ο L_t για $t \in [0, 2\tilde{\delta}]$. Συνεχίζοντας ετσι σε πεπερασμένο πλήθως βημάτων θα φτάσουμε στον L_1. Προφανώς με την ιδια διαδικασία αν ο L_1 είναι επί τότε και ο L_0 θα είναι επι.

$\square$

§ 10. Εκτιμήσεις *Schauder*, προβλήμα *Dirichlet* στην γενική περίπτωση

Έστω Ω φραγμένο χωρίο στον $\mathbf{R}^n$ τ.ω. $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Θεωρούμε στο Ω το εξής πρόβλημα *Dirichlet* :

(10.1)

$$L\,u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u = f(x) \,\text{στο}\, \Omega, \quad u\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (6.2) και $c(x) \le 0$. Επίσης υποθέτουμε οτι οι $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ και $f(x)$ είναι $C^\alpha(\overline{\Omega})$ ενω η $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$. Τότε λαμβάνει χώρα η ακόλουθη εκτίμηση της λύσης του προβλήματος (10.1)

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \le C\big(\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|\phi\|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\big). \tag{10.2}$$

η οποια ονομάζεται *a priori* εκτίμηση *Schauder*. Η σταθερά C εξαρτάται απο το χωρίο Ω, τις νόρμες $\|a_{ij}\|_{C^\alpha}$, $\|b_i\|_{C^\alpha}$, $\|c\|_{C^\alpha}$ και απο την σταθερά ελλειπτικότητας λ, δηλαδή απο τα δεδομένα του προβλήματος.

Θα εφαρμόσουμε τωρα το Θεώρημα 9.2 για να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (10.1) χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (10.2).

Κατ αρχάς ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση ϕ είναι ορισμένη σε όλο το χωρίο Ω και $\phi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Τότε τη συνοριακή συνθήκη μπορούμε να την βλέπουμε ως

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \phi\Big|_{\partial\Omega}.$$

(Γενικώς το πρόβλημα επέκτασης μιας συνάρτησης ορισμενης στο σύνορο ενός χωρίου στο εσωτερικό του χωρίου αυτου είναι αρκετά πολύπλοκο, θα σημειώσουμε μόνο οτι αν $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ και $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, τότε μπορούμε να την επεκτείνουμε την ϕ σε όλο το Ω ε.ω. η ϕ να ανήκει στο $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.)

Προφανώς η αντικατάσταση $u = v + \phi$ ανάγει το πρόβλημα (10.1) στο

$$Lv = \tilde{f} \,\text{στο}\, \Omega, \quad v\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

όπου

$$\tilde{f} = f - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \phi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \phi_{x_i} + c(x)\phi.$$

Συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας εξ αρχής μπορούμε να πάρουμε μηδενικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδη να θεωρούμε το πρόβλημα

$$(10.3) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \,\text{στο}\, \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Πάμε πίσω στο Θεώρημα 9.2. Ως χώρο B θα πάρουμε τον $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ δηλαδή

$$B = \{u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = 0\}$$

και ως V θα πάρουμε τον $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Ορίζουμε τους τελεστές L_t ως εξής

$$L_t\, u = tL\, u + (1-t)\Delta\, u, \;\; t \in [0,1].$$

Προφανώς $L_0 = \Delta$, $L_1 = L$ και

$$L_0 : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega}), \;\; L_1 : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega}), \;\; L_t : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$L_0\, u = f, \;\; \text{και} \;\; L_1\, u = f$$

και

$$L_t\, u = f \;\; (\text{αφού} \;\; L_t\, u = tf + (1-t)f = f).$$

Παρατηρούμε ότι η επιλυσιμότητα του προβλήματος

$$L\, u = f \;\; \text{στο} \;\; \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

ανάγεται στο αν η απεικόνιση

$$L : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$$

είναι ¨επί¨. Δηλαδή αν για κάθε $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ υπάρχει $u \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ τ.ω. η f είναι εικόνα της u και προφανώς αυτη η u θα είναι λύση του προβλήματος (10.3).

Γνωρίζουμε οτι η απεικόνιση

$$L_0(\equiv \Delta) : C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$$

είναι ¨επί¨. Άρα για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.2 και ως συνέπεια να έχουμε οτι είναι επί η απεικόνιση L πρέπει να βεβαιωθούμε οτι λαμβάνει χώρα η *a priori* εκτίμηση (9.1). Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}$$

που είναι η εκτίμηση *Schauder*. Άρα ισχύει το εξής θεώρημα

Θεώρημα 10.1. *Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (6.2) και* $c(x) \leq 0$. *Επίσης υποθέτουμε οτι οι* $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $f(x)$ *είναι* $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *συναρτήσεις και θεωρούμε οτι* $\phi \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$.

Τότε υπάρχει μοναδική λύση $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *του προβλήματος (10.1).*

Την μοναδικότητα την έχουμε αποδείξει στην §8.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ οτι αν η f είναι μόνο συνεχής συνάρτηση,τότε το πρόβλημα (10.1) μπορεί να μην έχει κλασική λύση (το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές). Πράγματι, θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Dirichlet$:
(10.4)

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f(x_1, x_2) \text{ στην μπάλα } B_R(0) : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R < 1,$$

$$(10.5) \qquad u\Big|_{|x|=R} = \big(x_1^2 - x_2^2\big)\sqrt{-\ln R}\Big|_{|x|=R},$$

όπου η συνεχής (όχι όμως $H\ddot{o}lder$ συνεχής) συνάρτηση f όριζεται να είναι

$$f = \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2}\Big(\frac{4}{\big(-\ln|x|\big)^{1/2}} + \frac{1}{2\big(-\ln|x|\big)^{3/2}}\Big), & \text{για } |x| > 0, \\ 0, & \text{για } |x| = 0 \end{cases}$$

Με άμεσους υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση

$$(10.6) \qquad u(x_1, x_2) = \big(x_1^2 - x_2^2\big)\big(-ln|x|\big)^{1/2}$$

ανήκει στον χώρο $C^\infty\big(\overline{B_R(0)} \setminus \{0\}\big) \cap C^0\big(\overline{B_R(0)}\big)$, επαληθευει την συνοριακή συνθήκη και επαληθεύει την εξίσωση στο $B_R(0) \setminus \{0\}$. Όμως

$$u_{x_1x_1} =$$

$$2\big(-\ln|x|\big)^{1/2} + \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^4\big(-\ln|x|\big)^{1/2}} -$$

$$\frac{2x_1^2}{|x|^2\big(-\ln|x|\big)^{1/2}} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2\big(-\ln|x|\big)^{1/2}} - \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4\big(-\ln|x|\big)^{3/2}}.$$

Προφανώς

$$\lim_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \infty,$$

άρα η (10.6) δεν μπορεί να είναι (κλασική) λύση του προβληματος (10.4), (10.5). Μπορούμε να αποδείξουμε οτι το πρόβλημα αυτο δεν έχει (κλασική) λύση.

Τέλος, ας επισημάνουμε οτι με πιο λεπτές διαδικασίες είναι δυνατόν να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης υπο λιγότερες προυποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα της ϕ και του $\partial\Omega$.

§ 11. Μοναδικότητα της λύσης για άλλα συνοριακά προβλήματα

Κατ αρχάς θα επισημάνουμε οτι η ύπαρξη της λύσης για δευτερο και τρίτο συνοριακό μπορεί να κατασκευαστεί παρόμοιως με το πρόβλήμα $Dirichlet$. Στο μάθημα αυτό θα περιοριστούμε με την απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης για αυτά τα προβλήματα.

Θεωρούμε το πρόβλημα $Neumann$

$$Lu = f \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \phi. \tag{11.1}$$

Θεώρημα 11.1. *Υποθέτουμε οτι $c(x) \leq 0$ και η $c(x)$ σε κάποια σημεία του Ω είναι γνησίως αρνητηκή. Τότε η λύση του προβλήματος (11.1) είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι υπάρχει μια άλλη λύση η v, δηλαδή:

$$Lv = f \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Για την $w \equiv u - v$ έχουμε

$$Lw = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Αν η w δεν είναι σταθερά τότε λόγω συνοριακής συνθήκης δεν λαμβάνει στο $\partial\Omega$ ουτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστο, αλλοιώς (βλ. §7) στο σημείο αυτό θα είχαμε

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} > 0 \ \text{ ή } \ \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} < 0.$$

Επίσης αν η w δεν είναι σταθερά τότε δεν λαμβάνει ουτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστοτο και στα εσωτερικά σημεία του Ω, συνεπώς η w είναι σταθερά. Απο την υπόθεση οτι ο μη θετικός συντελεστής $c(x)$ είναι αρνητικός τουλάχιστον σε κάποια σημεία προκύπτει οτι η σταθερά αυτή πρέπει να είναι μηδέν, τουτέστιν $w \equiv 0 \Leftrightarrow u \equiv v$.

□

Παρατηρούμε ότι αν $c(x) \equiv 0$ τότε η λύση του προβλήματος $Neumann$ δεν είναι μοναδική διότι οποιαδήποτε σταθερά C θα είναι λύση του ομογενούς προβλήματος. Δηλαδή αν η u είναι λύση του προβλήματος (11.1) με $c(x) \equiv 0$, τότε και η $u + C$ θα είναι επίσης λύση του (11.1).

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα $Robin$

$$Lu = f \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h\,u\Big|_{\partial\Omega} = \phi. \tag{11.2}$$

Θεώρημα 11.2. *Υποθέτουμε οτι $c(x) \leq 0$, $h(x) \geq 0$. Επιπλέον ζητάμε ή η $c(x)$ σε κάποια σημεία του Ω να είναι γνησίως αρνητηκή ή η $h(x)$ σε κάποια σημεία του $\partial\Omega$ να είναι γνησίως θετική. Τότε η λύση του προβλήματος (11.2) είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι υπάρχει μια άλλη λύση η v, δηλαδή:

$$Lv = f \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial v}{\partial \nu} + h\,v\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Για την $w \equiv u - v$ έχουμε

$$Lw = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ \frac{\partial w}{\partial \nu} + h\,w\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Αν η w δεν είναι σταθερά τότε δεν λαμβάνει στο $\partial\Omega$ ουτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστο. Πράγματι, αν στο σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ το θετικό της μέγιστο (αρνητικό ελάχιστο), τότε σε αυτό το σημείο έχουμε

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + h\,w\Big|_{x_0} > 0 \ \Big(\frac{\partial w}{\partial \nu} + h\,w\Big|_{x_0} < 0\Big)$$

άτοπο.

Επίσης αν η w δεν είναι σταθερά τότε δεν λαμβάνει ουτε το θετικό της μέγιστο ούτε το αρνητικό της ελάχιστοτο και στα εσωτερικά σημεία του Ω, συνεπώς η w είναι σταθερά.

Απο την υπόθεση οτι ή ο $c(x) \leq 0$ είναι αρνητικός τουλάχιστον σε κάποια σημεία προκύπτει ή οτι η $h(x) \geq 0$ είναι θετική τουλάχιστον σε κάποια σημεία προκύπτει οτι σταθερά αυτή πρέπει να είναι μηδέν, τουτέστιν $w \equiv 0$.

$\square$

§ 12. Μη γραμμικές εξισώσεις

Η μη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\nabla u)u_{x_i x_j} + b(x,u,\nabla u) = 0,$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε οτι $a_{ij} = a_{ji}$, ονομάζεται ελλειπτικού τύπου (ή ελλειπτική) στο χωρίο Ω αν υπάρχουν συναρτήσεις $\lambda(x,u,\mathbf{p})$, $\Lambda(x,u,\mathbf{p})$ τ.ω. ισχύει

(12.1)

$$0 < \lambda(x,u,\mathbf{p})|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\mathbf{p})\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x,u,\mathbf{p})|\xi|^2, \ \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

και για όλα τα $x \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$. Όπως θα δούμε στο παράδειγμα παρακάτω οι λ και Λ είναι συχνά η μεγαλύτερη και η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα $A = \Big(a_{ij}\Big)$.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Dirichlet$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,u,\nabla u)u_{x_i x_j} + b(x,u,\nabla u) = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi \tag{12.2}$$

Ορισμός. *Λέμε ότι ο τελεστής T που απεικονίζει τον χώρο $Banach$ B στον εαυτό του (δηλαδή $T : B \to B$) είναι συμπαγής αν η είκονα κάθε φραγμένου συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.*

Θεώρημα 12.1 ($Leray - Schauder$). *Έστω T συμπαγής τελεστής που απεικονίζει τον χώρο $Banach$ B στον εαυτό του και έστω οτι υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τ.ω. για καθε $u \in B$ και κάθε $\sigma \in [0,1]$ που επαληθευουν την εξίσωση*

$$u = \sigma T\,u$$

ισχύει η ανισότητα

$$\|u\|_B \le M. \tag{12.3}$$

Τότε η απεικόνιση T έχει σταθερο σημείο, δηλαδή υπάρχει $u \in B$ τ.ω. $u = T\,u$.

Προφανώς εννοούμε ότι η σταθερά M δεν εξαρτάται ούτε απο την u ούτε απο το σ!

Κατασκευάζουμε την απεικόνιση (τον τελεστή)

$$T : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$$

ως εξής: έστω v τυχαία συνάρτηση απο τον χώρο $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$

$$T : v \to u \quad \Leftrightarrow \quad u = T\,v,$$

όπου η u μοναδική λύση του γραμμικού προβλήματος

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, v, \nabla v) u_{x_i x_j} = -b(x, v, \nabla v) \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = \phi \tag{12.4}$$

με $a_{ij}, b \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$, $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Λόγω εκτιμήσεων $Schauder$ έχουμε οτι $u \in C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ αρα ο τελεστής T απεικονίζει

$$T : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega}).$$

Ο τελεστής είναι φραγμένος αρα αν θα πάρουμε τον περιορισμό του στον $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ θα είναι συμπαγής. Συνοψίζοντας εχουμε εναν συμπαγή τελεστή ο οποιος δρα απο τον χωρο $Banach$ $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ στον ίδιο. Είναι προφανές ότι το σταθερό σημείο της απεικόνισης T είναι λύση του προβλήματος (12.2). Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα $Leray - Schauder$ πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει η (12.3).

Κατ αρχάς ας καταλάβουμε την εξίσωση

$$u = \sigma T\,u.$$

Εφόσον $u = T\,v$ προφανώς

$$\sigma u = \sigma T\,v,$$

δηλαδή ο τελεστής σT απεικονίζει κάθε $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ στην σu οπου u (όπως και πρίν) λύση του προβλήματος (12.4). Πολλαπλασιάζουμε την (12.4) με σ:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, v, \nabla v)(\sigma u)_{x_i x_j} = -\sigma b(x, v, \nabla v) \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; \sigma u\Big|_{\partial\Omega} = \sigma\phi. \tag{12.5}$$

Για $w = \sigma u$ η (12.5) γράφεται ως

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, v, \nabla v) w_{x_i x_j} = -\sigma b(x, v, \nabla v) \;\text{ στο }\; \Omega, \;\; w\Big|_{\partial\Omega} = \sigma\phi. \tag{12.6}$$

Αρα

$$\sigma T : v \to w \quad \Leftrightarrow \quad w = \sigma T\,v$$

όπου w λύση του προβλήματος (12.6).

Χρησιμοποιώντας u αντι w μπορούμε να πούμε ότι

$$\sigma T : v \to u \quad \Leftrightarrow \quad u = \sigma T\, v$$

όπου u είναι λύση του προβλήματος

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, v, \nabla v) u_{x_i x_j} = -\sigma b(x, v, \nabla v) \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \sigma\phi.$$

Άρα η εξίσωση

$$u = \sigma T\, u$$

(βλ. (12.3)) ισοδυναμεί με το πρόβλημα $Dirichlet$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} + \sigma b(x, u, \nabla u) = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \sigma\phi.$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο οτι η απόδειξη της ύπαρξης της λύσης του προβλήματος (12.2) ανάγεται στην $a\ priori$ εκτήμηση της νόρμας $\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})}$ της λύσης αυτού του προβλήματος (θυμίζουμε οτι $\sigma \in (0,1)$). Δηλαδή αν υποθέσουμε οτι η (κλασική) λύση υπάρχει και μπορούμε να βρούμε μια απόλυτη σταθερά C η οποία θα εξαρτάται μόνο απο τα δεδομένα του προβλήματος (όπως π.χ. στην § 8) τ.ω.

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C,$$

τότε το θεώρημα $Leray-Schauder$ εξασφαλίζει οτι η (κλασική) λύση υπάρχει.

Ίσως το πιο γνωστό παράδειγμα μη γραμμικής εξίσωσης είναι η εξίσωση της ελάχηστης επιφάνειας.

Θεωρούμε μια επιφάνεια η οποια είναι γράφημα της συνάρτησης $u = u(x,y)$ με $(x,y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$. Το εμβαδόν $\mathcal{I}$ της επιφάνειας αυτής δίνεται απο τον τύπο

$$\mathcal{I}(u) = \int\int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy. \tag{12.7}$$

Έστω τωρα η επιφάνεια αυτή στο $\partial\Omega$ παίρνει δοσμένες τιμές

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \phi \tag{12.8}$$

και θέλουμε να βρούμε την επιφάνεια η οποια επαληθέυει την (12.8) και έχει ελάχιστο δυνατο εμβαδόν. Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησοειδές (12.7) με περιορισμό (12.8). Απο τον Λογισμό Μεταβολών έχουμε ότι το ζητούμενο ελάχιστο είναι λύση του προβλήματος $Dirichlet$:

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Η σχέση (12.1) για την τελευταία εξίσωση ισχύει με

$$\lambda = 1 \ \text{ και } \ \Lambda = 1 + u_x^2 + u_y^2.$$

Παρατηρούμε οτι αυτά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_x\, u_y \\ -u_x\, u_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, ας αναφέρουμε ενα μη γραμμικό πρόβλημα το οποίο εχεί μοναδική κλάσική λύση αλλα έχει και μια άλλη λύση.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα *Dirichlet*:

$$\Delta u + |\nabla u|^2 = 0 \ \text{ για } \ |x| < R < 1, \quad (x = (x_1, x_2))$$

$$u\Big|_{|x|=R} = 0.$$

Η μοναδική κλασική λύση του προβλήματος είναι $u \equiv 0$. Ταυτοχρόνως υπάρχει και άλλη λήση η

$$u(x) = u(|x|) = \ln\,\ln\frac{1}{|x|} - \ln\,\ln\frac{1}{R}. \tag{12.9}$$

Πράγματι

$$\nabla\, u = -\Big(\frac{x_1}{|x|^2\ln\frac{1}{|x|}}, \frac{x_2}{|x|^2\ln\frac{1}{|x|}}\Big) = -\frac{\nabla|x|}{|x|\ln\frac{1}{|x|}},$$

$$|\nabla\, u|^2 = |x|^{-2}\Big(\ln\frac{1}{|x|}\Big)^{-2}.$$

Υπολογίζουμε την δευτερη παράγωγο:

$$u_{x_ix_i} = 2\frac{x_i^2}{|x|^4\ln\frac{1}{|x|}} - \frac{x_i^2}{|x|^4\big(\ln\frac{1}{|x|}\big)^2} - \frac{1}{|x|^2\ln\frac{1}{|x|}}.$$

Άρα

$$\Delta\, u = -|x|^{-2}\Big(\ln\frac{1}{|x|}\Big)^{-2} = -|\nabla\, u|^2.$$

Επίσης

$$u(x)\Big|_{|x|=R} = u(R) = 0.$$

Προφανώς η συνάρτηση (12.9) δεν είναι φραγμένη αρα δεν είναι κλάσική λύση. Παρατηρούμε οτι η $u(x)$ και το ∇u είναι τετραγωνικά ολοκληρώσημες συναρτήσεις.

Ασκήσεις

1. Έστω $u(x,y)$ και $v(x,y)$ αρμονικές στον $\mathbf{R^2}$ συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η $u(x,y)$ είναι φραγμένη στον $\mathbf{R^2}$ και $u(1,0)=2$. Υπολογίστε τη διαφορά $u(0,0)-v(0,0)$ αν

$$v\Big|_{x^2+y^2=1} = sin\,\phi + 1, \quad \text{όπου} \;\; x = cos\phi, \quad y = sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

2. Έστω $u(x,y)$ αρμονική στο χωρίο $\{(x,y) : x^2+y^2 < 5\}$ και $\Omega \subset \{(x,y) : x^2+y^2 < 5\}$ τυχαίο χωρίο τέτοιο ώστε $(0,0) \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι $u \equiv 1$ στο σύνορο του χωρίου Ω. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{x^2+y^2\le 4} u(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Έστω $u(x,y)$ και $v(x,y)$ αρμονικές στον $\mathbf{R^2}$ συναρτήσεις. Τι πρόσημο έχει η διαφορά $u(0,0)-v(0,0)$ αν

$$u\Big|_{x^2+y^2=1} = \frac{1}{2} - sin\,\phi \;\; \big(\text{όπου} \;\; x = cos\phi, \quad y = sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi)\big)$$

και

$$v\Big|_{(x-2)^2+y^2=3^2} \le 0.$$

4. Αποδείξτε οτι εαν η $u \in C^2(\Omega)$ και για κάθε μπάλα $B \subset \Omega$ ισχυει

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$$

τότε η u είναι αρμονική (εδω ν μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του χωρίου B).

5. Έστω $u(x,y)$ αρμονική στον $\mathbf{R}^2$ συνάρτηση και $u(0,0)=1$ υπολογίστε το εξής ολοκλήρωμα

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}=C} u ds$$

$C > 0$ κάποια σταθερά.

6. Ποια είναι η αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το εξής πρόβλημα $Neumann$:

$$\Delta\, u = f(x) \;\; \text{στο} \;\; \Omega \subset \mathbf{R}^n,$$
$$\frac{\partial\, u}{\partial\, \nu} = \phi(s) \;\; \text{στο} \;\; \partial\Omega$$

όπου ν μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

7. Έστω ότι οι συναρτήσεις $u(x), v(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ και

$$\Delta\, u = f(x), \quad \Delta\, v = f(x) \;\; \text{στο} \;\; \Omega$$
$$u = \phi(s), \quad v = \psi(s) \;\; \text{στο} \;\; \partial\Omega.$$

Αποδείξτε ότι

1. αν $\phi(s) \le \psi(s)$ τότε $u \le v$ στο $\bar{\Omega}$,
2. αν $\phi(s) \ge \psi(s)$ τότε $u \ge v$ στο $\bar{\Omega}$.

8. Έστω $u(x) \geq 0$ αρμονική στο Ω και

$$u\Big|_{\partial\Omega'} = 0$$

όπου το χωρίο Ω' είναι γνήσιο υποσύνολο του Ω.

Αποδείξτε ότι $u(x) \equiv 0$ στο Ω.

(Παρατήρηση: αυτο ισχύει και χωρίς την υπόθεση $u(x) \geq 0$.)

9. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} E(|x-\xi|)g(\xi)ds = 0$$

για κάθε συνεχής και φραγμένη g.

10. Έστω $u(x)$ αρμονική στο Ω και πανω σε ενα ανοιχτό ομαλό τμήμα του $\partial\Omega$ ισχύει οτι

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \nu - \text{μοναδιαίο εξωτερικό καθετο στο } \partial\Omega.$$

Αποδείξτε ότι $u(x) \equiv 0$ στο Ω.

11. Αποδείξτε ότι αν η v είναι υπεραρμονική στο Ω τότε η $-v$ είναι υφαρμονική στο Ω.

12. Αποδείξτε ότι αν $\Delta v \leq 0$ στο Ω τότε η v είναι υπεραρμονική στο Ω.

13. Αποδείξτε ότι αν η υπεραρμονική σε ενα χωρίο Ω συνάρτηση v λαμβάνει το ελάχιστό της σε εσωτερικό σημείο του Ω τότε είναι σταθερή.

14. Αποδείξτε ότι αν οι $v_1, ..., v_m$ είναι υπεραρμονικές σε ενα χωρίο Ω τότε καιη συνάρτηση $v = \min(v_1, ..., v_m)$ είναι υπεραρμονική στο Ω.

15. Αποδείξτε ότι αν η v είναι υπεραρμονική σε ενα χωρίο Ω τότε και η συνάρτηση $w = H_B[v]$ είναι υπεραρμονική (B_0 καποια μπάλα στο Ω).

16. Έστω ότι η συνάρτηση $\phi \in C^0(\partial\Omega)$. Αποδείξτε ότι στο Ω κάθε κάτω συνάρτηση της ϕ είναι μικρότερη απο κάθε άνω συνάρτηση της ϕ.

Στις παρακάτω ασκήσεις το χωρίο Ω επαληθευει τη συνθήκη της εσωτερικής σφαίρας και το ν μοναδιάιο κάθετο στο S_2.

17. Στο χωρίο Ω θεωρούμε ενα ελειπτικό τελεστή L με $c(x) \leq 0$. Έστω $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$. Τι μπορούμε να πούμε για την λύση του προβλήματος

$$L\,u = 0 \ \text{ στο } \ \Omega,$$

$$u\Big|_{S_1} = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_2} = 0.$$

18. Στο χωρίο Ω θεωρούμε ενα ελειπτικό τελεστή L. Έστω $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$. Τι μπορούμε να πούμε για την λύση του προβλήματος

$$L\,u = 0 \ \text{ στο } \ \Omega,$$

$$u\Big|_{S_1} = 1, \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_2} = 0$$

αν

α) $c(x) \equiv 0$,

β) $c(x) \leq 0$.

19. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$L\,u = f(x) \ \text{ στο } \ \Omega,$$
$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Αποδείξτε ότι εαν $c(x) \leq -c_0 < 0$ στο $\overline{\Omega}$, τότε ισχύει

$$\min\{0, \frac{\min_\Omega\big(-f(x)\big)}{c_0}\} \leq u(x) \leq \max_\Omega\{0, \frac{\max_\Omega\big(-f(x)\big)}{c_0}\}.$$

20. Έστω $v(x)$ λύση του προβλήματος

$$Lv = f(x) \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ v\Big|_{\partial\Omega} = \phi$$

και $u(x)$ λύση του προβλήματος

$$Lu = g(x) \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = \chi.$$

Αποδείξτε ότι αν $f(x) \geq g(x)$ στο Ω και $\phi\Big|_{\partial\Omega} \leq \chi\Big|_{\partial\Omega}$ τότε

$$v(x) \leq u(x) \ \text{ στο } \ \overline{\Omega}.$$

21. Έστω $u(x)$ λύση του προβήματος

$$Lu = -1 \ \text{ στο } \ \Omega, \ \ u\Big|_{\partial\Omega} = 2, \ \ (c(x) \leq 0)$$

Προσδιορίστε τις σταθερές c_1 και c_2 ετσι ώστε

$$(*) \qquad c_1 \leq u(x) \leq c_2.$$

22. Βελτιώστε την εκτίμηση $(*)$ στο πρόβλημα 21. αν επιπλέον γνωρίζουμε οτι $c(x) \equiv -1$.

23. Αποδείξτε οτι οι συνθήκες (6.3) μπορούν να αντικατασταθούν με

$$c(x) < 0, \quad L\,u \leq 0 \ \big(L\,u \geq 0\big).$$

24. Αποδείξτε οτι αν στις υποθέσεις του Λήμματος 6.1 επιπλέον $u \in C(\overline{\Omega})$ τότε $u \geq 0$ στο $\partial\Omega$ συνεπάγεται $u \geq 0$ στο Ω ($u \leq 0$ στο $\partial\Omega$ συνεπάγεται $u \leq 0$ στο Ω).

Βιβλιογραφία:

[1] *D.Gilbarg, N.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer − Verlag*, 1983.

[2] *L.C.Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V.* 19, *AMS*.

[3] *V.P.Mikhailov, PartialDifferentialEquations, Mir*, 1978.

Κεφάλαιο II. Εξισώσεις παραβολικού τύπου

§1. Αρχή του μεγίστου για παραβολικές εξισώσεις

Εστω $Q_T = (0,T)\times\Omega$ κύλινδρος με κάτω βάση Ω- φραγμένο χωρίο στο $\mathbf{R}^n$. Με S_T θα συμβολίζουμε την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, δηλαδη $S_T = (0,T]\times\partial\Omega$ και με Γ_T *το παραβολικό σύνορο* του χωρίου Q_T δηλαδη $\Gamma_T = \Omega \cup S_T$.

Στο Q_T θεωρούμε την εξίσωση

$$(1.1)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u - u_t = f(t,x).$$

Στο εξής

$$L\cdot \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial \cdot}{\partial x_i} + c(t,x)\ \cdot - \frac{\partial \cdot}{\partial t}$$

άρα η εξήσωση (1.1) γράφεται σε μορφή

$$L\,u = f(t,x).$$

Λέμε οτι η εξίσωση (1.1) είναι παραβολικού τύπου (ή παραβολική) αν υπάρχουν σταθερές $\Lambda \geq \lambda > 0$ στο Q_T τ.ω.

$$(1.2)\quad \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2,\quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n\setminus\{0\},\quad \text{και}\quad \forall (t,x)\in Q_T.$$

Υποθέτουμε οτι οι συναρτήσεις a_{ij}, b_i, c (συντελεστές της (1.1)) και f (δευτερο μέρος) είναι ορισμένες στο Q_T και τουλάχιστον φραγμένες.

Λήμμα 1.1 *Έστω $u(t,x)\in C^{1,2}_{t,x}(Q_T)$. Εαν στο Q_T ισχύει*

$$c \leq 0,\ \ Lu < 0\ \ \big(Lu > 0\big)$$

ή

$$c < 0,\ \ Lu \leq 0\ \ \big(Lu \geq 0\big),$$

τότε η u δεν λαμβάνει το αρνητικό ελάχιστό (θετικό μέγιστο) της στο Q_T.

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση $c \leq 0$, $Lu < 0$, οι υπόλοιπες αποδεικνύονται παρομοιως. Αν σε κάποιο σημείο $(t_0,x_0)\in Q_T$ (δηλαδή $(t_0,x_0)\in \overline{Q}_T\setminus\partial Q_T$) η u λαμβάνει αρνητικό ελάχιστο τότε σε αυτό το σημείο έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} = 0,\ \ c(t,x)u \geq 0,\ \ -u_t = 0$$

αυτο όμως αντιφάσκει στην υπόθεση

$$Lu\Big|_{t_0,x_0} < 0.$$

Άτοπο.

□

Λήμμα 1.2 *Αν στο Λήμμα 1.1 έχουμε επιπλέον οτι* $u(t,x) \in C^0(\overline{Q}_T)$ *και*

$$u\Big|_{\Gamma_T} \geq 0 \ \left(u\Big|_{\Gamma_T} \leq 0\right),$$

τότε

$$u \geq 0 \ \textit{στο} \ Q_T \ \left(u \leq 0 \ \textit{στο} \ Q_T\right).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση

$$u\Big|_{\Gamma_T} \geq 0 \ \text{ και } \ c \leq 0, \ \ Lu < 0 \ \text{ στο } \ Q_T$$

ή

$$u\Big|_{\Gamma_T} \geq 0 \ \text{ και } \ c < 0, \ \ Lu \leq 0 \ \text{ στο } \ Q_T.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$v = \varepsilon(T-t)^{-\alpha} + u,$$

για κάποιο $\alpha > 0$. Προφανώς

$$Lv = L\big(\varepsilon(T-t)^{-\alpha}\big) + Lu \leq -\alpha\varepsilon(T-t)^{-\alpha-1} < 0.$$

Συνεπώς η v δεν λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστό στο Q_T. Αφου είναι συνεχής στο $\overline{Q}_T$ το λαμβάνει στο ∂Q_T. Επειδή ομως στο ∂Q_T ισχύει $v \geq 0$ καταλήγουμε στο οτι $v \geq 0$ στο Q_T. Αρα

$$\varepsilon(T-t)^{-\alpha} + u \geq 0 \ \text{ στο } \ Q_T \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Περνώντας στο όριο $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Η περίπτωση $u \leq 0$ αποδεικνύεται παρομοίως.

□

Θα συμβολίσουμε

$$Q_{t_1} = (0,t_1) \times \Omega, \ \ S_{t_1} = (0,t_1] \times \partial\Omega, \ \ \Gamma_{t_1} = \Omega \cup S_{t_1}.$$

Θεώρημα 1.1 ($apriori$ εκτίμηση) *Έστω* a_{ij}, b_i, c, $f \in C^0(\overline{Q}_T)$ *και* $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$ *είναι λύση της εξίσωσης (1.1) στο* Q_T.

1. Αν $c(t,x) \leq 0$, *τότε ισχύει*

$$|u(t,x)| \leq \max_{\Gamma_{t_1}} |u| + C \max_{Q_{t_1}} |f| \ \ \forall t \leq t_1 \in (0,T), \ \ x \in \Omega.$$

2. Αν $c(t,x) \leq \gamma$ *(*$\gamma > 0$ *σταθερά), τότε ισχύει*

$$|u(t,x)| \leq e^{\gamma t} \max_{\Gamma_{t_1}} |ue^{-\gamma t}| + Ce^{\gamma t} \max_{Q_{t_1}} |fe^{-\gamma t}| \ \ \forall t \leq t_1 \in (0,T), \ \ x \in \Omega.$$

Εδω $C > 0$ *είναι μια σταθερά την οποια θα την προσδιορίσουμε πιο κάτω.*

Απόδειξη. 1. Λόγω της (1.2) έχουμε ότι $a_{11} \geq \lambda > 0$. Επειδή το χωρίο Ω είναι φραγμένο υπάρχει σταθερά $q > 0$ τ.ω. $q > x_1$ στο Ω. Θέτουμε

$$M = \max_{\Gamma_{t_1}} |u|, \ \ N = \max_{Q_{t_1}} |f|.$$

Για $\alpha > 0, \rho > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(t,x) \equiv \varepsilon(t_1 - t)^{-\alpha} + M + (e^{\rho q} - e^{\rho x_1})N \pm u(t,x)$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$(1.3) \qquad v \geq 0 \ \text{ στο } \ \partial Q_{t_1}$$

και

$$L\,v = L\big(\varepsilon(t_1-t)^{-\alpha} + M + (e^{\rho q} - e^{\rho x_1})N\big) \pm L\,u =$$
$$-(a_{11}\rho^2 + b_1\rho)e^{\rho x_1}N +$$
$$c(\varepsilon(t_1-t)^{-\alpha} + M + (e^{\rho q} - e^{\rho x_1})N) - \varepsilon\alpha(t_1-t)^{-\alpha-1} \pm f \leq$$
$$-(\lambda\rho^2 + b_1\rho)Ne^{\rho x_1} \pm f.$$

Επιλέγοντας το ρ αρκετά μεγάλο (ε.ω. $\lambda\rho^2 + b_1\rho > 1$) παίρνουμε οτι

$$(1.4) \qquad Lv < 0 \ \text{ στο } \ Q_{t_1}.$$

Απο (1.3), (1.4) (και Λήμμα 1.2) έχουμε $v \geq 0$ στο $\overline{Q}_{t_1}$ δηλαδή

$$|u| \leq M + (e^{\rho q} - e^{\rho x_1})N + \varepsilon(t_1-t)^{-\alpha} \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Προφανώς

$$|u| \leq M + C\,N + \varepsilon(t_1-t)^{-\alpha} \ \ \forall \varepsilon > 0$$

όπου

$$C = \max_{\Omega}(e^{\rho q} - e^{\rho x_1}).$$

Στέλνοντας το ε στο μηδέν καταλήγουμε στο ζητούμενο.

2. Έστω τώρα $c(t,x) \leq \gamma$. Εισάγουμε τη συνάρτηση

$$w(t,x) = u(t,x)\,e^{-\gamma t}, \quad \big(u(t,x) = w(t,x)\,e^{\gamma t}\big)$$

η οποια επαληθευει την εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)w_{x_i} + \tilde{c}(t,x)w - w_t = \tilde{f}(t,x)$$

με

$$\tilde{c}(t,x) = c(t,x) - \gamma \leq 0 \ \text{ και } \ \tilde{f}(t,x) = f(t,x)e^{-\gamma t}.$$

Προφανώς $\tilde{c}(t,x) \leq 0$ αρα βρισκόμαστε στην περίπτωση 1. και έχουμε

$$|w(t,x)| \leq \max_{\Gamma_{t_1}} |w| + C \max_{Q_{t_1}} |\tilde{f}| \ \ \forall t \leq t_1 \in (0,T), \ \ x \in \Omega.$$

Επιστρέφοντας στην u καταλήγουμε στο ζητούμενο.

$\square$

Θα δείξουμε τωρα οτι η άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Dirichlet$ για την εξίσωση (1.1).

Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$: Στο χωρίο Q_T να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (1.1) η οποία επαληθευει την αρχική και την συνοριακή συνθήκη

$$(1.5) \qquad u\Big|_{\Gamma_T} = \phi,$$

οπου η συνεχής συνάρτηση ϕ είναι ορισμένη στο Γ_T.

Θεώρημα 1.2 (μοναδικότητας για το πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$). *Το πρόβλημα (1.1), (1.5) έχει μοναδική (κλασική) λύση.*

Απόδειξη. Έστω u_1 λύση του προβλήματος (1.1), (1.5) και η u_2 μια άλλη λύση. Προφανώς η είναι λύση του προβλήματος

$$L\,u = 0 \ \text{ στο } \ Q_T, \ \ u\Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

Απο το Θεώρημα 1.1 έχουμε (αφου $f \equiv 0$) ότι στο Q_T

$$|u| \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 \equiv u_2.$$

□

Θα δώσουμε τωρα μια αλλή προσέγγιση στην εκτίμηση της λύσης. Στο Q_T θεωρούμε την εξίσωση (1.1). Εισάγουμε τη συνάρτηση $v = u\,e^{-\gamma t}$ με

$$\gamma > c_0 = \max_{Q_T} c,$$

για την οποια έχουμε

$$\text{(1.6)} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)v_{x_i} + (c(t,x) - \gamma)v - v_t = e^{-\gamma t} f(t,x).$$

Επιλέγουμε τυχαίο $t_1 \in (0,T)$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

1. $v \le 0$ στο $\overline{Q}_{t_1}$,
2. η v παίρνει το θετικό της μέγιστο στο $\overline{Q}_{t_1}$ σε κάποιο σημείο του Γ_{t_1},
3. η v παίρνει το θετικό της μέγιστο στο $\overline{Q}_{t_1}$ σε κάποιο σημείο του $\overline{Q}_{t_1} \setminus \Gamma_{t_1}$.

Θεωρούμε την τρίτη περίπτωση, η v λαμβάνει το θετικό της μέγιστο στο σημείο $(t^0, x^0) \in (0, t_1] \times \Omega$. Σε αυτο το σημείο ισχυεί

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i x_j} \le 0, \ \ v_{x_i} = 0, \ \ -v_t \le 0$$

($v_t(t^0, x^0) = 0$ για $t^0 \in (0, t_1)$ και $v_t(t^0, x^0) \ge 0$ αν $t^0 = t_1 = T$).

Συνεπώς, απο την εξίσωση (1.6) έχουμε

$$(\gamma - c(t^0, x^0))v(t^0, x^0) \le -e^{-\gamma t^0} f(t^0, x^0).$$

δηλαδή

$$\text{(1.7)} \qquad v(t^0, x^0) \le -\frac{e^{-\gamma t^0} f(t^0, x^0)}{\gamma - c_0}.$$

Αφου στο σημείο (t^0, x^0) η v λαμβάνει (θετικό) μέγιστο απο την σχέση (1.7) προκύπτει

$$v(t,x) \le v(t^0, x^0) \le -\frac{e^{-\gamma t^0} f(t^0, x^0)}{\gamma - c_0} \le \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0}, \ \ \forall (t,x) \in Q_{t_1}.$$

Συνεπώς

$$\text{(1.8)} \qquad v \le \max\big\{0, \max_{\Gamma_{t_1}} v, \max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0}\big\}, \, \forall (t,x) \in \overline{Q}_{t_1}$$

και

$$u \le \max\{0,\, e^{\gamma t}\max_{\Gamma_{t_1}} u e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0}\},\ \forall (t,x)\in \overline{Q}_{t_1}.$$

Διακρίνουμε τρείς άλλες περιπτώσεις:

1. $v \ge 0$ στο $\overline{Q}_{t_1}$,

2. η v παίρνει το αρνητικό της ελάχιστο στο $\overline{Q}_{t_1}$ σε κάποιο σημείο του Γ_{t_1},

3. η v παίρνει το αρνητικό της ελάχιστο στο $\overline{Q}_{t_1}$ σε κάποιο σημείο του $\overline{Q}_{t_1} \setminus \Gamma_{t_1}$.

Θεωρούμε την τρίτη περίπτωση, η v λαμβάνει το αρνητικό της ελάχιστο στο σημείο $(t_0, x_0) \in (0, t_1] \times \Omega$. Σε αυτο το σημείο ισχυεί

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i x_j} \ge 0,\quad v_{x_i} = 0,\quad -v_t \ge 0.$$

Παρομοίως με την προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$v(t_0,x_0) \ge -\frac{e^{-\gamma t_0} f(t_0,x_0)}{\gamma - c_0}.$$

Αφου στο σημείο (t^0, x^0) η v λαμβάνει (αρνητικό) ελάχιστο έχουμε

$$v(t,x) \ge v(t_0,x_0) \ge -\frac{e^{-\gamma t_0} f(t_0,x_0)}{\gamma - c_0} \ge \min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0},\quad \forall (t,x)\in Q_{t_1}.$$

Συνεπώς

$$u \ge \min\{0,\, e^{\gamma t}\min_{\Gamma_{t_1}} u e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0}\},\ \forall (t,x)\in \overline{Q}_{t_1}.$$

Αρα αποδείξαμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.3. *Για την κλασική λύση $u(t,x)$ του προβλήματος (1.1), (1.5) ισχύει η εκτίμηση*

$$\sup_{\gamma > c_0} \min\{0,\, e^{\gamma t}\min_{\Gamma_{t_1}} \phi e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\min_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0}\} \le$$

$$u(t,x) \le$$

$$\inf_{\gamma > c_0} \max\{0,\, e^{\gamma t}\max_{\Gamma_{t_1}} \phi e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\max_{Q_{t_1}} \frac{-e^{-\gamma t} f(t,x)}{\gamma - c_0}\},$$

$\forall (t,x) \in \overline{Q}_{t_1}$.

Παρόμοιο θεώρημα λαμβάνει χώρα και για το τρίτο συνοριακό πρόβλημα. Θεωρούμε την (1.1) με τις συνθήκες

$$u(0,x) = \phi(x),\ x \in \Omega,\quad \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u\Big|_{S_T} = \chi,\quad \alpha\beta > 0. \tag{1.9}$$

Θεώρημα 1.4. *Για την κλασική λύση $u(t,x)$ του προβλήματος (1.1), (1.9) ισχύει η εκτίμηση*

$$\sup_{\gamma>c_0} \min\big\{0,\, e^{\gamma t}\min_{\Omega}\phi e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\min_{S_{t_1}}\frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta},\, e^{\gamma t}\min_{Q_{t_1}}\frac{-e^{-\gamma t}f(t,x)}{\gamma-c_0}\big\} \le$$
$$u(t,x) \le$$
$$\inf_{\gamma>c_0} \max\big\{0,\, e^{\gamma t}\max_{\Omega}\phi e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\max_{S_{t_1}}\frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta},\, e^{\gamma t}\max_{Q_{t_1}}\frac{-e^{-\gamma t}f(t,x)}{\gamma-c_0}\big\},$$

$\forall (t,x)\in \overline{Q}_{t_1}$.

Η μόνη διαφορά στην απόδειξη είναι στην παράπλευρη επιφάνεια. Για την v η συνθήκη (1.9) γράφεται ως

$$v(0,x)=\phi(x),\ x\in\Omega,\ \ \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial v}{\partial \nu}+v\Big|_{S_T}=\frac{1}{\beta}e^{-\gamma t}\chi.$$

Συνεπώς αν σε κάποιο σημείο της S_{t_1} η v λαμβάνει μέγιστο (ελάχιστο), τότε σε αυτό το σημείο

$$v\Big|_{S_{t_1}} \le \frac{1}{\beta}e^{-\gamma t}\chi \quad \Big(v\Big|_{S_{t_1}} \ge \frac{1}{\beta}e^{-\gamma t}\chi\Big)$$

(εδω χρησιμοποιήσαμε το οτι προφανώς στο σημείο οπου εχουμε μέγιστο ισχύει $v_\nu \ge 0$ και στο σημείο οπου εχουμε ελάχιστο ισχύει $v_\nu \le 0$). Αρα η (1.8) παίρνει τη μορφή

$$v \le \max\big\{0,\, \max_{\Omega}\phi e^{-\gamma t},\, \max_{S_{t_1}}\frac{1}{\beta}e^{-\gamma t}\chi,\, \max_{Q_{t_1}}\frac{-e^{-\gamma t}f(t,x)}{\gamma-c_0}\big\},\ \forall (t,x)\in\overline{Q}_{t_1}$$

και συνεπώς

$$u(t,x) \le$$
$$\max\big\{0,\, e^{\gamma t}\max_{\Omega}\phi e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\max_{S_{t_1}}\frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta},\, e^{\gamma t}\max_{Q_{t_1}}\frac{-e^{-\gamma t}f(t,x)}{\gamma-c_0}\big\},$$

$\forall (t,x)\in \overline{Q}_{t_1}$.

Παρομοίως και η κάτω εκτίμηση

$$u(t,x) \ge$$
$$\min\big\{0,\, e^{\gamma t}\min_{\Omega}\phi e^{-\gamma t},\, e^{\gamma t}\min_{S_{t_1}}\frac{\chi e^{-\gamma t}}{\beta},\, e^{\gamma t}\min_{Q_{t_1}}\frac{-e^{-\gamma t}f(t,x)}{\gamma-c_0}\big\}.$$

Τα υπόλοιπα οπως στο προηγούμενο θεωρημα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθέι είναι όμοιο με το αντίστοιχο θεώρημα για της ελλειπτικές εξισώσεις.

Θεώρημα 1.5. (Αρχή του μεγίστου) *1. Έστω $c(t,x)\equiv 0$. Αν η συνάρτηση $u(t,x)$ στο Q_T επαληθευει την ανισότητα $Lu \ge 0$ ($Lu \le 0$), τότε η u δεν λαμβάνει το μέγιστό της (το ελάχιστό της) στα σημεία $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ αν δεν είναι σταθερα.*

2. Έστω $c(t,x)\le 0$. Αν η συνάρτηση $u(t,x)$ στο Q_T επαληθευει την ανισότητα $Lu \ge 0$ ($Lu \le 0$), τότε η u δεν λαμβάνει το θετικό της μέγιστό (αρνητικό της ελάχιστό) στα σημεία $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ αν δεν είναι σταθερα.

§2. Πρόβλημα $Cauchy$

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$: στο $(0,T)\times\mathbf{R}^n$ να βρεθεί η φραγμένη λύση της εξίσωσης (1.1) η οποια επαλυθευει τη αρχική συνθήκη

$$u(0,x)=\phi(x),\quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{2.1}$$

Πρώτα θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.1 *Έστω a_{ij}, b_i, c, f συνεχέις και φραγμένες στο $(0,T)\times\mathbf{R}^n$ συναρτήσεις και $u(t,x)$ είναι (κλασική) λύση του προβλήματος $Cauchy$.*

1. Αν $c(t,x)\le 0$, τότε ισχύει

$$|u(t,x)|\le \max_{\mathbf{R}^n}|\phi(x)|+t\max_{(0,T)\times\mathbf{R}^n}|f(t,x)|\ \ \forall (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}^n. \tag{2.2}$$

2. Αν $c(t,x)\le\gamma$ ($\gamma>0$ σταθερά), τότε ισχύει

$$|u(t,x)|\le e^{\gamma t}\big[\max_{\mathbf{R}^n}|\phi(x)|+t\max_{(0,T)\times\mathbf{R}^n}|f(t,x)|\big]\ \ \forall (t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}^n. \tag{2.3}$$

Απόδειξη. 1. Στον κύλινδρο $Q_R=(0,T)\times\{|x|<R\}$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(t,x)=m+Nt+\frac{M}{R^2}\big(|x|^2+CRt\big)\pm u(t,x).$$

Εδω

$$m=\max_{\mathbf{R}^n}|\phi(x)|,\quad N=\max_{(0,T)\times\mathbf{R}^n}|f(t,x)|,\quad |u(t,x)|\le M,$$

R- τυχαία σταθερα και η σταθερά $C>0$ θα προσδιοριστει παρακάτω. Στο $Q_R=(0,T)\times\{|x|<R\}$ έχουμε

$$L\,v=L\Big(m+Nt+\frac{M}{R^2}\big(|x|^2+CRt\big)\Big)\pm f=$$

$$\frac{M}{R^2}\big(2\sum_{i=1}^n a_{ii}+2\sum_{i=1}^n b_ix_i\big)+c\Big(m+Nt+\frac{M}{R^2}\big(|x|^2+CRt\big)\Big)-N-\frac{M}{R}C\pm f\le$$

$$-N\pm f-\frac{M}{R^2}\Big[CR-2\sum_{i=1}^n a_{ii}-2\sum_{i=1}^n b_ix_i\big)\Big]. \tag{2.4}$$

Επλέγοντας το $C>0$ αρκετά μεγαλο (ανεξάρτητο του R !) θα έχουμε

$$CR-2\sum_{i=1}^n a_{ii}-2\sum_{i=1}^n b_ix_i\ge 0.$$

συνεπως απο (2.4) έχουμε οτι

$$L\,v\le -N\pm f\le 0\ \text{ στο }\ Q_T.$$

Θεωρουμε τωρα τη v στο παραβολικό σύνορο του Q_T:

$$v(0,x)=m+\frac{M}{R^2}|x|^2\pm\phi(x)\ge m\pm\phi(x)\ge 0,$$

$$v\Big|_{|x|=R}=m+Nt+M+\frac{CMt}{R}\pm u\ge M\pm u\ge 0.$$

Δηλαδη

$$L\,v \le 0 \ \text{ στο } \ Q_T, \quad v\Big|_{\Gamma_T} \ge 0,$$

αρα

$$v \ge 0 \ \text{ στο } \ \overline{Q}_T,$$

συνεπώς

$$|u(t,x)| \le m + Nt + \frac{M}{R^2}\big(|x|^2 + CRt\big) \ \text{ για κάθε } \ (t,x) \in Q_T.$$

Περνάμε στο όριο καθώς $R \to 0$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

2. Στον κύλινδρο $Q_R = (0,T) \times \{|x| < R\}$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v(t,x) = m + Nt + \frac{M}{R^2}\big(|x|^2 + CRt\big) \pm u(t,x)e^{-\gamma t}.$$

Οπως και πρίν θα έχουμε

$$v\Big|_{\Gamma_T} \ge 0.$$

Ορίζουμε τον τελεστή

$$\tilde{L} \equiv L - \gamma.$$

Έχουμε

$$\tilde{L}\,v = \tilde{L}\Big(m + Nt + \frac{M}{R^2}\big(|x|^2 + CRt\big)\Big) \pm \tilde{L}(ue^{-\gamma t}).$$

Προφανώς

$$\tilde{L}(ue^{-\gamma t}) = e^{-\gamma t}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu - u_t + \gamma u\Big) - \gamma e^{-\gamma t}u =$$

$$e^{-\gamma t}L\,u = e^{-\gamma t}f,$$

και

$$\tilde{L}\Big(m + Nt + \frac{M}{R^2}\big(|x|^2 + CRt\big)\Big) \le -N \ \text{ για αρκετά μεγάλο } \ C$$

(οπως και πριν το C μπορούμε να το επιλέξουμε να είναι ανεξάρτητο του R). Συνεπώς

$$\tilde{L}\,v \le -N \pm fe^{-\gamma t} \le 0 \ \text{ στο } \ Q_T.$$

Αρα

$$v \ge 0 \ \text{ στο } \ \overline{Q}_T,$$

δηλαδή

$$|u| \le e^{\gamma t}\Big(m + Nt + \frac{M}{R^2}\big(|x|^2 + CRt\big)\Big) \ \text{ στο } \ \overline{Q}_T,$$

Απο εδω ευκολα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 2.2 (μοναδικότητας για το πρόβλημα $Cauchy$). *Υπάρχει μονο μία λύση του προβλήματος* $Cauchy$.

Το Θεωρημα 2.2 είναι αμεση συνέπεια των εκτιμήσεων (2.2), (2.3).

Παρατήρηση. 1. Το πρόβλημα (1.1) (στο $(0,T) \times \mathbf{R}^n$), (2.1) μπορεί να έχει και άλλες λύσεις οι οποίες ομως δεν είναι φραγμένες.

Πρόβλημα $Cauchy$ για την εξίσωση θερμότητας.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση $u(t,x)$ της εξίσωσης

$$u_t = \Delta\, u \ \text{ στο } \ (0,T)\times \mathbf{R}^n \tag{2.5}$$

$\forall T>0$, η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u = \phi(x) \ \text{ για } \ x\in \mathbf{R}^n. \tag{2.6}$$

Προφανώς υποθέτουμε ότι η $u(t,x)$ είναι μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς t και δυο φορές ως προς x ($u\in C^{1,2}_{t,x}$).

Για $t>\tau$ θεωρούμε την εξής συνάρτηση

$$\Gamma(t-\tau, x-\xi) = \frac{1}{2^n[\pi(t-\tau)]^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}$$

εδω $x,\xi\in\mathbf{R}^n$, $|x-\xi|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i-\xi_i)^2$.

Η συνάρτηση αυτη ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας (2.5) και είναι ευκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για $t\neq\tau$ έχουμε οτι

$$\Gamma_t - \Delta_x\Gamma = 0 \ \text{ για σταθεροποιημένα } \ \tau \ \text{ και } \ \xi$$

και

$$\Gamma_\tau + \Delta_\xi\Gamma = 0 \ \text{ για σταθεροποιημένα } \ t \ \text{ και } \ x.$$

Θα δείξουμε τωρα ότι

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t, x-\xi)d\xi = 1 \ \ \forall t\geq 0.$$

Πράγματι, κάνοντας την αντικατάσταση $\xi - x = 2\sqrt{t}\,\sigma$ (δηλαδή $\xi_i - x_i = 2\sqrt{t}\sigma_i$, $i=1,...,n$) θα έχουμε

$$\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)d\xi = \pi^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\sigma|^2}d\sigma =$$

$$\pi^{-n/2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_1^2}d\sigma_1\Big)^n = 2^n\pi^{-n/2}\Big(\int_0^{\infty} e^{-\sigma_1^2}d\sigma_1\Big)^n =$$

$$2^n\pi^{-n/2}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)^n = 1.$$

Θεώρημα 2.5. *Έστω οτι η $\phi(x)$ είναι συνεχής και φραγμένη στον $\mathbf{R}^n$, τότε η λύση του προβλήματος $Cauchy$ (2.5), (2.6) δίνεται απο τον τύπο*

$$u(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)\phi(\xi)d\xi. \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$|u(t,x)| \leq \int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)|\phi(\xi)|d\xi \leq \max_{\mathbf{R}^n}|\phi(\xi)| = M<\infty.$$

αρα η $u(t,x)$ υπάρχει και είναι φραγμένη.

Οι άμεσοι υπολογισμοί δίνουν (για $\kappa = 2^{-n}\pi^{-n/2}$)

$$\Gamma_t(t,x-\xi) = \kappa e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} t^{\frac{-n-2}{2}}\Big(-\frac{n}{2}+\frac{|x-\xi|^2}{4t}\Big)$$

και
$$\Gamma_{x_ix_i}(t,x-\xi) = \kappa e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} t^{\frac{-n-2}{2}}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4t}\Big).$$
Αντικαθιστώντας αυτους τους τύπους στην σχέση (2.7) καταλήγουμε στο οτι
$$u_t - \Delta\, u = \int_{\mathbf{R^n}} \Big[\Gamma_t(t,x-\xi) - \Delta_x\Gamma(t,x-\xi)\Big]\phi(\xi)d\xi = 0, \quad \forall t>0.$$

Έμεινε να αποδείξουμε την επαλήθευση της σχέσης (2.6). Θεωρούμε τη διαφορά $u(t,x)-\phi(x)$, προφανώς
$$u(t,x)-\phi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t,x-\xi)[\phi(\xi)-\phi(x)]d\xi.$$
Κάνοντας την αντικατάσταση $\xi_i - x_i = 2\sqrt{t}\sigma_i,\ i=1,...,n$ θα έχουμε
$$u(t,x)-\phi(x) = \pi^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\sigma|^2}[\phi(x+2\sqrt{t}\sigma)-\phi(x)]d\sigma.$$
Έστω
$$Q_R = \{|\sigma|<R\},$$
τότε
$$u(t,x)-\phi(x) = \pi^{-n/2}\int_{Q_R} e^{-|\sigma|^2}[\phi(x+2\sqrt{t}\sigma)-\phi(x)]d\sigma +$$
$$\pi^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n\setminus Q_R} e^{-|\sigma|^2}[\phi(x+2\sqrt{t}\sigma)-\phi(x)]d\sigma. \tag{2.8}$$
Απο τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος $\forall\,\varepsilon>0$ υπάρχει $R>0$ τ.ω.
$$\pi^{-n/2}\Big|\int_{\mathbf{R}^n\setminus Q_R} e^{-|\sigma|^2}[\phi(x+2\sqrt{t}\sigma)-\phi(x)]d\sigma\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$
Επειδή η $\phi(x)$ είναι συνεχής για δεδομένο R υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. για $0<t<\delta$ ισχύει
$$\pi^{-n/2}\int_{Q_R} e^{-|\sigma|^2}|\phi(x+2\sqrt{t}\sigma)-\phi(x)|d\sigma \le \frac{\varepsilon}{2}.$$
Συνεπώς επιστρέφοντας στην (2.8) θα έχουμε οτι για κάθε$\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ε.ω.
$$|u(t,x)-\phi(x)|\le\varepsilon$$
αν $0<t<\delta$, δηλαδή
$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \phi(x).$$
□

Ο τυπος (2.7) ονομάζεται τυπος $Poisson$.

Για το μη ομογενές προβλημα $Cauchy$
$$u_t - \Delta\, u = f(t,x) \ \text{ στο } \ (0,T)\times\mathbf{R}^n$$
$$u = \phi(x) \ \text{ για } \ x\in\mathbf{R}^n$$

η λύση δίνεται απο τον τύπο

$$u(t,x)=\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)\phi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi d\tau \tag{2.9}$$

αν η συνάρτηση f είναι $H\ddot{o}lder$ συνεχής σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $(0,T)\times\mathbf{R}^n$ και φραγμένη στο $(0,T)\times\mathbf{R}^n$. Για $f\in C^1$ αυτο αποδεικνύεται παρομοίως με την αποδειξη του (5.2) στο πρώτο κεφάλαιο.

Η μοναδική φραγμένη λύση του προβλήματος (2.5), (2.6) δίνεται απο τον τυπο (2.9).

§3. Εκτιμήσεις $Schauder$, προβλημα $Cauchy-Dirichlet$

Έστω Ω φραγμένο χωρίο στον $\mathbf{R}^n$ τ.ω. $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$. Θεωρούμε στο $Q_T=(0,T)\times\Omega$ το εξής πρόβλημα $Cauchy-Dirichlet$:

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(t,x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)u_{x_i}+c(t,x)u-u_t=f(t,x), \tag{3.1}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ \ x\in\Omega,\ \ u\Big|_{S_T}=\phi, \tag{3.2}$$

όπου $S_T=(0,T)\times\partial\Omega$.

Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (1.2) και οτι

$$a_{ij}(t,x),\, b_i(t,x),\, c(t,x)\, f(t,x)\,\in C^{\alpha/2,\alpha}_{t,x}(\overline{Q}_T). \tag{3.3}$$

Επίσης θεωρούμε οτι

$$\phi\in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{t,x}(S_T),\ \ u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\Omega) \tag{3.4}$$

και

$$u_0(x)=\phi(0,x),\ \ x\in\partial\Omega, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(0,x)u_{0x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(0,x)u_{0x_i}+c(0,x)u_0-\phi_t\Big|_{\partial\Omega}=f(0,x)\Big|_{\partial\Omega}. \tag{3.6}$$

Τότε λαμβάνει χώρα η ακόλουθη εκτίμηση της λύσης του προβλήματος (3.1), (3.2):

$$\|u\|_{C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{t,x}(\overline{Q}_T)}\le C\big(\|f\|_{C^{\alpha/2,\alpha}_{t,x}(\overline{Q}_T)}+\|\phi\|_{C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{t,x}(S_T)}+\|u_0\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}\big).$$

η οποια ονομάζεται $a\ priori$ εκτίμηση $Schauder$. Η σταθερά C εξαρτάται απο τις νόρμες των a_{ij}, b_i, c στο $C^{\alpha/2,\alpha}_{t,x}$, απο το χωρίο Q_T και απο την σταθερά ελλειπτικότητας λ, δηλαδή απο τα δεδομένα του προβλήματος.

Παρομοιως με την ελλειπτική περίπτωση μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 3.1. *Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (1.2) και οι (3.3) - 3(6). Τότε υπάρχει μοναδική λύση $u\in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{t,x}(\overline{Q}_T)$ του προβλήματος (3.1), (3.2).*

Αν η f είναι μόνο συνεχής συνάρτηση,τότε το πρόβλημα (3.1), (3.2) μπορεί να μην έχει κλασική λύση (το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές).

Ασκήσεις

1. Έστω $u(t,x)$ λύση της εξίσωσης θερμότητας ($u_t - \Delta\, u = 0$) στο $(0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$. Αποδείξτε οτι και η $u_\kappa \equiv u(\kappa^2 t, \kappa x)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης θερμότητας στο $(0,+\infty)\times\mathbf{R}^n$ $\forall\kappa\in\mathbf{R}$.

2. Θεωρούμε το εξής προβλημα $Cauchy$

$$u_t - \Delta\, u + c\, u = f(t,x) \ \text{ στο } \ (0,T)\times\mathbf{R}^n$$

$$u = \phi(x) \ \text{ για } \ t=0, \ \ x\in\mathbf{R}^n,$$

οπου $c\in\mathbf{R}$ κάποια σταθερα. Να βρεθεί τυπος (αντίστοιχος στον (2.9)) που θα μας δώσει τη λύση σε ¨κλειστή μορφή¨.

3. Διαπιστώστε ότι αν οι $v_i(t,x_i)$ $i=1,...,n$ είναι λύσεις των εξισώσεων

$$v_{ix_ix_i} - v_{it} = 0 \ \ i=1,...,n$$

αντιστοιχως, τότε η $v\equiv v_1 v_2 ... v_n$ ($v=v(t,x)$) είναι λύση της

$$\Delta\, v - v_t = 0.$$

4. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$

$$u_t = u_{xx} \ \text{ στο } \ (0,T)\times\mathbf{R},$$

$$u(0,x) = \phi(x) \ \text{ οπου } \ \phi(x) = -\phi(-x) \ \ x\in\mathbf{R}.$$

Αποδείξτε οτι $u(t,0)=0$ $\forall t\geq 0$.

5. Εστω $n=1$ και $u(t,x)=v(x^2/t)$ αποδείξτε οτι

$$u_t = u_{xx}$$

αν και μονο αν

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, \ \ z = x^2/t, \ \ t>0.$$

Στις ασκήσεις 6 - 10 προσδιορίστε τις σταθερές c_1 και c_2 ετσι ώστε

$$c_1 \leq u(t,x) \leq c_2 \ \text{ στο } \ Q_T.$$

Υποθέτουμε οτι ισχύει η συνθήκη (1.2).

6. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i}^{n} b_i u_{x_i} - u - u_t = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$

$$u\Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

7. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i}^{n} b_i u_{x_i} + u - u_t = f \ \text{ στο } \ Q_T,$$

$$u\Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

8. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i}^{n} b_i u_{x_i} + u - u_t = 0 \;\text{ στο }\; Q_T,$$

$$u\Big|_{\Gamma_T} = \phi(x).$$

9. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i}^{n} b_i u_{x_i} + c\,u - u_t = 0 \;\text{ στο }\; Q_T,$$

$$u(0,x) = \phi, \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu} + u\Big|_{S_T} = \chi$$

για $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ (ν εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\partial\Omega$).

10. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i}^{n} b_i u_{x_i} - u_t = 0 \;\text{ στο }\; Q_T,$$

$$u(0,x) = \phi, \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_T} = 0.$$

Βιβλιογραφία:

[1] *A.Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice–Hall, Inc., Engelewood Cliffs, N.J.* 1964.

[2] *L.C.Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V.* 19, *AMS.*

[3] *V.P.Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir,* 1978.

Κεφάλαιο III. Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

§1. Προβλημα $Cauchy$ για την κυματική εξίσωση

Η εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u - u_{tt} = f(t,x)$$

ονομάζεται υπερβολικού τύπου αν ισχύει η (1.2) απο το Κεφαλαιο II.

Θα περιοριστούμε με την κυματική εξίσωση.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$

$$u_{tt} = \Delta u + f(t,x), \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad n > 1, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

Τη λύση την κατασκευάζουμε ως άθροισμα λύσεων των ακόλουθων τριών προβλημάτων $Cauchy$:

1.

$$u_{tt} = \Delta u, \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.3}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.4}$$

2.

$$u_{tt} = \Delta u, \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.5}$$

$$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.6}$$

3.

$$u_{tt} = \Delta u + f(t,x), \quad |t| < T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.7}$$

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.8}$$

Θα συμβολίσουμε τη λύση του προβλήματος (1.3), (1.4) με $\tilde{u}$, τη λύση του προβλήματος (1.5), (1.6) με $\tilde{v}$ και τη λύση του προβλήματος (1.7), (1.8) με $\tilde{w}$. Δηλαδή η λύση του αρχικού μας προβλήματος (1.1), (1.2) θα είναι

$$u = \tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w}.$$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$L_k u \equiv u_{tt} + \frac{k}{t}u_t - \Delta u = 0, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1.9}$$

Πιο κάτω (Λήμμα 1.2) θα δούμε πως η λήση του προβλήματος (1.9), (1.4) σχετίζεται με την λύση του προβλήματος (1.3), (1.4).

Θα διατυπώσουμε καποιες ιδιότητες της (1.9). Έστω u_k λύση της

$$L_k u = 0$$

τότε

I) η $u = t^{k-1}u_k$ είναι λύση της

$$L_{2-k}u = 0,$$

και

II) η $u = t^{-1}u_{kt}$ είναι λύση της

$$L_{2+k}u = 0.$$

Πράγματι, η πρωτη ιδιότητα προκύπτει απο το εξής:

$$(t^{k-1}u_k)_{tt} + \frac{2-k}{t}(t^{k-1}u_k)_t - \Delta(t^{k-1}u_k) = t^{k-1}\Big(u_{ktt} + \frac{k}{t}u_{kt} - \Delta u_k\Big) = 0.$$

Η δευτερη απο

$$(t^{-1}u_{kt})_{tt} + \frac{2+k}{t}(t^{-1}u_{kt})_t - \Delta(t^{-1}u_{kt}) =$$

$$t^{-1}\Big(u_{kttt} + kt^{-1}u_{ktt} - kt^{-2}u_{kt} - \Delta u_{kt}\Big) = t^{-1}\Big(u_{ktt} + \frac{k}{t}u_{kt} - \Delta u_k\Big)_t = 0.$$

Πρώτο βήμα.

Ξεκινάμε με το πρόβλημα (1.3), (1.4).

Λήμμα 1.1. *Έστω οτι η $h(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στον $\mathbf{R}^n$ συνάρτηση. Τότε η μέση τιμή της $h(x)$ στη σφαίρα με ακτίνα t και κέντρο στο x, την οποία την συμβολίζουμε με $M(t,x,h)$, είναι λύση του προβλήματος*

$$L_{n-1}M = 0, \quad M(0,x,h) = h(x), \quad M_t(0,x,h) = 0.$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη για $n = 2$. Παρατηρούμε οτι για $n = 2$

$$M(t,x,h) = \frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|=t} h(\xi)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x_1 + t\cos\phi, x_2 + t\sin\phi)d\phi$$

οπου

$$\xi_1 = x_1 + t\cos\phi, \quad \xi_2 = x_2 + t\sin\phi, \quad ds = td\phi.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι λύση του προβλήματος:

$$M_{tt} + \frac{1}{t}M_t - \Delta M = 0, \quad M(0,x,h) = h, \quad M_t(0,x,h) = 0.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h_{\xi_1}\cos\phi + h_{\xi_2}\sin\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nabla_\xi h\cdot(\cos\phi,\sin\phi)d\phi =$$

$$\frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|=t}\nabla_\xi h\cdot\nu ds = \frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi.$$

Υπολογίζουμε την παραγωγο δεύτερης τάξης ως προς t:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{-1}{2\pi t^2}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi + \frac{1}{2\pi t}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi.$$

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο του ολοκληρώματος εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{t<|x-\xi|<t+\Delta t}\Delta_\xi h d\xi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_{|x-\xi|=\tau}\Delta_\xi h ds\, d\tau =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{|x-\xi|=\tau^*}\Delta_\xi h ds.$$

για κάποιο $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$. Συνεπώς

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi = \int_{|x-\xi|=t}\Delta_\xi h ds$$

και

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{-1}{2\pi t^2}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi + \frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|=t}\Delta_\xi h ds =$$

$$-\frac{1}{t}\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|=t}\Delta_\xi h ds = -\frac{1}{t}\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|=t}\Delta_x h ds$$

(αφου $h_{x_i x_i}(\xi) = h_{\xi_i\xi_i}(\xi)$).

Συνεπώς

$$M_{tt} + \frac{1}{t}M_t - \Delta M = 0 \;\; (\Delta = \Delta_x).$$

Προφανώς

$$M(0,x,h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x_1,x_2)d\phi = h(x).$$

Επίσης

$$M_t(0,x,h) = 0.$$

Πράγματι

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,x,h) = \frac{1}{2\pi t}\int_{|x-\xi|\le t}\Delta_\xi h d\xi \le$$

$$\frac{1}{2\pi t}\left|\Delta_\xi h\Big|_{\xi=\xi^*}\right|\int_{|x-\xi|\le t} d\xi = \frac{1}{2\pi t}\left|\Delta_\xi h\Big|_{\xi=\xi^*}\right|\pi t^2 = \frac{t}{2}\left|\Delta_\xi h\Big|_{\xi=\xi^*}\right|$$

γαι κάποιο ξ^* τ.ω. $|x-\xi^*| \le t$. Αρα

$$M_t(0,x,h) \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; t \to 0.$$

Για $n = 3$ έχουμε

$$M(t,x,h) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-\xi|=t} h(\xi)ds.$$

Χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες

$$\xi_1 = x_1 + t\sin\phi\cos\theta,$$
$$\xi_2 = x_2 + t\sin\phi\sin\theta,$$
$$\xi_3 = x_3 + t\cos\phi,$$
$$ds = t^2\sin\phi d\phi d\theta,\ \phi\in[0,\pi),\ \theta\in[0,2\pi).$$

παίρνουμε

$$M(t,x,h)=\frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-\xi|=t}h(\xi)ds=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}h(x_1+t\sin\phi\cos\theta,x_2+t\sin\phi\sin\theta,x_3+t\cos\phi)\sin\phi\,d\theta d\phi.$$

Πρέπει να αποδείξουμε οτι η συνάρτηση αυτή είναι λύση του προβλήματος:

$$M_{tt}+\frac{2}{t}M_t-\Delta M=0,\quad M(0,x,h)=h,\quad M_t(0,x,h)=0$$

(βλ. Ασκηση 3).

□

Θα δώσουμε τωρα τον τύπο που συνδέει τις λύσεις του προβλήματος (1.3), (1.4) και του προβλήματος (1.9), (1.4). Παρατηρούμε οτι τη λύση του προβλήματος (1.9), (1.4) την ξέρουμε.

Λήμμα 1.2. *Αν η $\tilde{u}(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος (1.3), (1.4), τότε η*

$$u_{n-1}(t,x)=\gamma_{n-1}\int_0^1\tilde{u}(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha$$

είναι λύση του προβλήματος (1.9), (1.4) με

$$\gamma_{n-1}=\Big(\int_0^1(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha\Big)^{-1}$$

Απόδειξη. Προφανώς

$$\Delta u_{n-1}=\gamma_{n-1}\int_0^1\Delta\tilde{u}(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha,\quad(\Delta=\Delta_x).\tag{1.10}$$

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο ως προς t:

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}=\gamma_{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1\tilde{u}(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha.$$

Θέτουμε $\xi=\alpha t$ και ολοκληρωνουμε κατα μέρη:

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}=\gamma_{n-1}\int_0^1\tilde{u}_\xi(\alpha t,x)\alpha(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha=\tag{1.11}$$

$$\frac{\gamma_{n-1}}{2}\int_0^1\tilde{u}_\xi(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}d\alpha^2=-\frac{\gamma_{n-1}}{n-1}\int_0^1\tilde{u}_\xi(\alpha t,x)d(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}=$$

$$-\frac{\gamma_{n-1}}{n-1}\tilde{u}_\xi(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1}+\frac{\gamma_{n-1}}{n-1}t\int_0^1\tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}d\alpha=$$

$$\frac{\gamma_{n-1}}{n-1}\tilde{u}_t(0,x)+\frac{\gamma_{n-1}}{n-1}t\int_0^1\tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}d\alpha=$$

(λόγω αρχικών συνθηκών)

$$\frac{\gamma_{n-1}}{n-1}t\int_0^1\tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t,x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}d\alpha.$$

Δηλαδή

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = \frac{\gamma_{n-1}}{n-1} t \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha \tag{1.12}$$

και (απο την εξίσωση $\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi, x) = \Delta_x \tilde{u}(\xi, x)$)

$$\frac{n-1}{t}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = \frac{\gamma_{n-1}}{n-1} \int_0^1 \Delta\tilde{u}(\alpha t, x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha \quad (\Delta = \Delta_x). \tag{1.13}$$

Θα υπολογίσουμε την δευτερη παράγωγο ως προς t, παραγωγίζουμε την (1.11):

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} = \gamma_{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \tilde{u}_\xi(\alpha t, x)\alpha(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha =$$

$$\gamma_{n-1} \int_0^1 \tilde{u}_{\xi\xi}(\alpha t, x)\alpha^2(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha = \gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta\tilde{u}(\alpha t, x)\alpha^2(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha.$$

Προφανώς ισχύει οτι

$$\alpha^2(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} = (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} - (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

αρα

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} =$$

$$\gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta\tilde{u}(\alpha t, x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha - \gamma_{n-1} \int_0^1 \Delta\tilde{u}(\alpha t, x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} d\alpha. \tag{1.14}$$

Απο (1.10), (1.13), (1.14) έχουμε οτι

$$\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} - \Delta u_{n-1} = 0.$$

Έμεινε να διαπιστώσουμε οτι η u_{n-1} επαληθευει τις αρχικές συνθήκες (1.4). Η δεύτερη επαληθευεται λόγω της (1.12) και η πρώτη επειδή

$$u_{n-1}(0, x) = \gamma_{n-1} \int_0^1 \varphi(x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha =$$

$$\varphi(x)\gamma_{n-1} \int_0^1 (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha = \varphi(x).$$

□

Συνοψίζοντας έχουμε το εξής: απο την σχέση

$$u_{n-1}(t, x) = \gamma_{n-1} \int_0^1 \tilde{u}(\alpha t, x)(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha$$

όπου η u_{n-1} είναι γνωστή, θέλουμε να προσδιορίσουμε την $\tilde{u}$ οποια είναι η ζητούμενη λύση του προβλήματος (1.3), (1.4). Κάνουμε την αντικατάσταση

$$\alpha = \frac{\sqrt{\tau}}{t}, \quad d\alpha = \frac{1}{2t}\tau^{-1/2} d\tau, \quad 1-\alpha^2 = \frac{t^2-\tau}{t^2}$$

και έχουμε

$$u_{n-1}(t,x) = \gamma_{n-1}\frac{1}{2t}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)^{\frac{n-3}{2}}\int_0^{t^2}\tilde{u}(\sqrt{\tau},x)(t^2-\tau)^{\frac{n-3}{2}}\tau^{-1/2}d\tau.$$

Συμβολίζοντας $t=\sqrt{y}$ παίρνουμε

$$\frac{2}{\gamma_{n-1}}y^{\frac{n-2}{2}}u_{n-1}(\sqrt{y},x) = \int_0^{y}\tilde{u}(\sqrt{\tau},x)(y-\tau)^{\frac{n-3}{2}}\tau^{-1/2}d\tau. \tag{1.15}$$

Απο την σχέση (1.15) μπορούμε να προσδιορίσουμε την $\tilde{u}$ για καθε n. Θα περιοριστούμε με $n=2$ και $n=3$.

Για $n=3$ ($\gamma_2=1$) η (1.15) γράφεται ως

$$2y^{\frac{1}{2}}u_2(\sqrt{y},x) = \int_0^{y}\tilde{u}(\sqrt{\tau},x)\tau^{-1/2}d\tau.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y παίρνουμε

$$\tilde{u}(\sqrt{y},x) = 2\sqrt{y}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sqrt{y}u_2(\sqrt{y},x)\Big) =$$

$$2\sqrt{y}\,\sqrt{y}u_{2\sqrt{y}}(\sqrt{y},x)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}u_2(\sqrt{y},x).$$

Θέτοντας $\sqrt{y}=t$ παίρνουμε

$$\tilde{u}(t,x) = tu_{2t}(t,x) + u_2(t,x),$$

δηλαδή η ζητούμενη συνάρτηση για $n=3$ είναι η

$$\tilde{u}(t,x) = tM_t(t,x,\varphi) + M(t,x,\varphi). \tag{1.16}$$

Για $n=2$ ($\gamma_1 = 2/\pi$) η (1.15) γράφεται ως

$$u_1(\sqrt{y},x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{y}\frac{\tilde{u}(\sqrt{\tau},x)}{\sqrt{(y-\tau)}\sqrt{\tau}}d\tau.$$

Για σταθεροποιημένο x αυτη είναι η γνωστή ολοκληρωτική εξίσωση $Abel$

$$\int_0^{y}\frac{\Phi(\tau)d\tau}{\sqrt{y-\tau}} = \Psi(y)$$

η οποία έχει μοναδική λύση

$$\Phi(y) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^{y}\frac{\Psi(\tau)d\tau}{\sqrt{y-\tau}}.$$

Στην περίπτωση μας

$$\Psi(y) = u_1(\sqrt{y},x), \quad \Phi(\tau) = \tilde{u}(\sqrt{\tau},x)\frac{1}{\pi\sqrt{\tau}}.$$

Απο εδώ

$$\tilde{u}(\sqrt{y},x) = \sqrt{y}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{y}\frac{u_1(\sqrt{\tau},x)d\tau}{\sqrt{y-\tau}}.$$

Θέτοντας $\sqrt{y}=t$ και κάνοντας την αντικατάσταση $\zeta=\sqrt{\tau}$ θα πάρουμε

$$\int_0^y (y-\tau)^{-1/2}u_1(\sqrt{\tau},x)d\tau = 2\int_0^t (t^2-\zeta^2)^{-1/2}\zeta u_1(\zeta,x)d\zeta.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\sqrt{y}=t$ τότε

$$\frac{d}{dy}F(t)=\frac{1}{2t}\frac{d}{dt}F(t)$$

για κάθε παραγωγίσιμη F. Παίρνοντας

$$F(t)=2\int_0^t (t^2-\zeta^2)^{-1/2}u_1(\zeta,x)d\zeta,$$

έχουμε

$$\sqrt{y}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y (y-\tau)^{-1/2}u_1(\sqrt{\tau},x)d\tau = t\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}2\int_0^t (t^2-\zeta^2)^{-1/2}\zeta u_1(\zeta,x)d\zeta.$$

Συνεπώς

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t^2-\zeta^2)^{-1/2}\zeta M(\zeta,x,\varphi)d\zeta.$$

Προφανώς

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t^2-\zeta^2)^{-1/2}\zeta M(\zeta,x,\varphi)d\zeta = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_0^t (1-(\frac{\zeta}{t})^2)^{-1/2}\frac{\zeta}{t}M(t\frac{\zeta}{t},x,\varphi)td\frac{\zeta}{t}\Big] =$$

(κάνοντας την αντικατάσταση $\alpha=\zeta/t$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[t\int_0^1 (1-\alpha^2)^{-1/2}\alpha M(t\alpha,x,\varphi)d\alpha\Big].$$

Αρα για $n=2$ η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\Big[t\int_0^1 \frac{\alpha M(t\alpha,x,\varphi)}{\sqrt{1-\alpha^2}}d\alpha\Big]. \tag{1.17}$$

Δευτερο βήμα.

Θα κατασκευάσουμε τωρα τη λύση του προβλήματος (1.5), (1.6) για $n=3$ και για $n=2$.

Έστω $n=3$. Η συνάρτηση $M(t,x,\psi)$ επαληθευει την εξίσωση

$$L_kM=0 \;\text{ για }\; k=n-1=2$$

αρα (απο την ιδιότητα I.) η συνάρτηση $tM(t,x,\psi)$ επαληθευει την εξίσωση

$$L_{2-k}[tM]=0 \;\Leftrightarrow\; L_0[tM]=0 \;\Leftrightarrow\; (tM)_{tt}=\Delta(tM).$$

Επίσης

$$tM(t,x,\psi)\Big|_{t=0}=0,$$

$$(tM(t,x,\psi))_t\Big|_{t=0}=M(t,x,\psi)\Big|_{t=0}+tM_t(t,x,\psi)\Big|_{t=0}=\psi(x).$$

Αρα για $n=3$ η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\tilde{v}=tM(t,x,\psi). \tag{1.18}$$

Εστω τωρα $n = 2$. Εδω τα πραγματα είναι λιγο πιο πολύπλοκα. Μπορούμε να δείξουμε (με αντικατάσταση της στην εξίσωση) οτι η συνάρτηση

$$\int_0^1 M(ty, x, \psi)(1-y^2)^{-1/2} y dy$$

είναι λύση της εξίσωσης (1.9) με $k = 2$, συνεπώς, όπως και στην περίπτωση $n = 3$, η

$$\tilde{v}(t, x) = t \int_0^1 M(ty, x, \psi)(1-y^2)^{-1/2} y dy \tag{1.19}$$

είναι λύση της εξίσωσης (1.5) για $n = 2$. Επίσης

$$\tilde{v}(0, x) = 0$$

και

$$\tilde{v}_t(0, x) = \psi(x) \int_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} + t\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M(ty, x, \psi) \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Αρα για $n = 2$ αυτη είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

Περνάμε τώρα στο τελευταίο τρίτο βήμα.

Θα κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος (1.7), (1.8).

Λήμμα 1.3 (η αρχή του $Duhamel$). *Αν $\tau \in (0, T)$ η συνάρτηση $V(t, x, \tau)$ είναι λύση της εξίσωσης (1.5) και επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες*

$$V(0, x, \tau) = 0, \;\; V_t(0, x, \tau) = f(\tau, x), \;\; x \in \mathbf{R}^n, \;\; \tau \in (0, T) \tag{1.20}$$

τότε η συνάρτηση

$$\tilde{\omega}(t, x) = \int_0^t V(t-\tau, x, \tau) d\tau \tag{1.21}$$

είναι λύση του προβλήματος (1.7), (1.8).

Απόδειξη. 1. Προφανώς

$$\tilde{\omega}(0, x) = 0.$$

2. Παραγωγίζουμε την (1.20) ως προς t:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = V(0, x, t) + \int_0^t V_t(t-\tau, x, \tau) d\tau = \int_0^t V_t(t-\tau, x, \tau) d\tau,$$

και συνεπώς

$$\tilde{\omega}_t(0, x) = 0.$$

3. Για την δευτερη παράγωγο ως προς t έχουμε

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} = V_t(0, x, t) + \int_0^t V_{tt}(t-\tau, x, \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t V_{tt}(t-\tau, x, \tau) d\tau.$$

4. Λαμβάνοντας υπόψη οτι η V είναι λύση της (1.5) παίρνουμε

$$\Delta \tilde{\omega} = \int_0^t \Delta V(t-\tau, x, \tau) d\tau = \int_0^t V_{tt}(t-\tau, x, \tau) d\tau.$$

Απο τα παραπάνω προφανώς έχουμε οτι

$$\tilde{\omega}_{tt} = \Delta\tilde{\omega} + f(t,x).$$

□

Όπως γνωρίζουμε (απο προπτυχιακό μάθημα) η λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) για $n = 1$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\phi(x+t) + \phi(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\zeta)d\zeta +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\Big(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi\Big)d\tau$$

και αν πάρουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$u(t,x)(=\tilde{w}) = \frac{1}{2}\int_0^t\Big(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi\Big)d\tau.$$

Αρα εδώ

$$V(t-\tau,x,\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi$$

Συνεπώς

$$V(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(\tau,\xi)d\xi. \tag{1.22}$$

Ας διαπιστώσουμε ότι η (1.22) είναι λύση της εξίσωσης (1.5) με αρχικές συνθήκες (1.20). Προφανώς

$$V(0,x,\tau) = 0,$$

$$V_t(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\big[f(\tau,x+t) + f(\tau,x-t)\big]$$

και συνεπώς

$$V_t(0,x,\tau) = f(\tau,x).$$

Υπολογίζουμε τη δευτερη παράγωγο ως προς t:

$$V_{tt}(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\big[f_\xi(\tau,x+t) - f_\eta(\tau,x-t)\big], \ \ \xi = x+t, \ \ \eta = x-t,$$

και

$$V_{xx}(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\big[f_\xi(\tau,x+t) - f_\eta(\tau,x-t)\big], \ \ \xi = x+t, \ \ \eta = x-t.$$

Δηλαδή

$$V_{tt} = V_{xx}.$$

Θα δώσουμε τη λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) για $n = 2$ και $n = 3$.

Αν το $n = 2$ η λύση έχει την εξής μορφή (βλ. (1.17), (1.19), (1.21))

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[t\int_0^1 M(t\alpha,x,\varphi)(1-\alpha^2)^{-1/2}\alpha d\alpha\Big] +$$

$$t\int_0^1 M(t\alpha, x, \psi)(1-\alpha^2)^{-1/2}\alpha d\alpha + \int_0^t V(t-\tau, x, \tau)d\tau$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος $Poisson$.

Για $n = 3$ η λύση έχει την μορφή (βλ. (1.16), (1.18), (1.21))

$$u(t,x) = M(t,x,\varphi) + t\frac{\partial}{\partial t}M(t,x,\varphi) + tM(t,x,\psi) + \int_0^t V(t-\tau, x, \tau)d\tau$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος $Kirchhoff$.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας τους τύπους $D'Alembert$, $Poisson$ και $Kirchhoff$ μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την αρχή του $Huygens$.

§2. Πρόβλημα $Cauchy$ για την εξίσωση θερμότητας vs πρόβλημα $Cauchy$ για την κυματκή εξίσωση

Θα δώσουμε εδω έναν τύπο που συνδέει την λύση του προβλήματος $Cauchy$ για την κυματική εξίσωση με την λύση του προβλήματος $Cauchy$ για την εξίσωση θερμότητας,

Λήμμα 2.1. *Έστω $u(t,x)$ φραγμένη λύση του προβλήματος $Cauchy$*

$$u_{tt} = \Delta u, \ \ |t| < T, \ \ x \in \mathbf{R}^n,$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = 0, \ \ x \in \mathbf{R}^n,$$

τότε η $v(t,x)$

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} u(\tau,x)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau$$

είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$v_t = \Delta v, \ \ 0 < t < T, \ \ x \in \mathbf{R}^n,$$

$$v(0,x) = \phi(x), \ \ x \in \mathbf{R}^n.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$v_{x_i x_i} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} u_{x_i x_i}(\tau,x)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau$$

και προφανώς

$$\Delta v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} \Delta u(\tau,x)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau. \tag{2.1}$$

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο v_t:

$$v_t = \int_{\mathbf{R}} u(\tau,x)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big(\frac{\tau^2}{2t} - 1\Big)$$

και
$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big(\frac{\tau^2}{2t}-1\Big)$$
συνεπώς
$$v_t = \int_{\mathbf{R}} u(\tau,x)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} u(\tau,x)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau.$$
Εξ ορισμού
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau,x)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau = \lim_{N_1,N_2\to\infty}\int_{-N_1}^{N_2} u(\tau,x)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau =$$
Θεωρούμε το ολοκλήρωμα
$$\int_{-N_1}^{N_2} u(\tau,x)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau.$$
Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε
$$\int_{-N_1}^{N_2} u(\tau,x)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau =$$
$$u(\tau,x)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)\Big|_{\tau=-N_1}^{\tau=N_2} - \int_{-N_1}^{N_2} u_\tau(\tau,x)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)d\tau =$$
$$u(\tau,x)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big)\Big|_{\tau=-N_1}^{\tau=N_2} - u_\tau(\tau,x))e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\Big|_{\tau=-N_1}^{\tau=N_2} + \int_{-N_1}^{N_2} u_{\tau\tau}(\tau,x)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau \to$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{\tau\tau}(\tau,x)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau \;\text{ καθώς }\; N_1,N_2\to\infty.$$
Άρα έχουμε (βλ. (2.1))
$$v_t - \Delta v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\big[u_{\tau\tau}(\tau,x) - \Delta u(\tau,x)\big]e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = 0.$$
Μας έμεινε να αποδείξουμε ότι $v(0,x)=\phi(x)$. Κάνοντας την αντικατάσταση
$$\tau \to \sigma = \frac{\tau}{2\sqrt{t}}, \quad (d\tau = 2\sqrt{t}d\sigma)$$
παίρνουμε
$$v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} u(\tau,x)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} u(2\sqrt{t}\sigma,x)e^{-\sigma^2}2\sqrt{t}d\sigma =$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}} u(2\sqrt{t}\sigma,x)e^{-\sigma^2}d\sigma \;\;\to\;\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}}\phi(x)e^{-\sigma^2}d\sigma \;\text{ καθώς }\; t\to 0.$$
Άρα
$$v(0,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}}\phi(x)e^{-\sigma^2}d\sigma = \phi(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{-\sigma^2}d\sigma = \phi(x).$$
□

Όπως γνωρίζουμε για $n=1$ η λύση του προβλήματος
$$u_{tt} = u_{xx},\; (t,x)\in\mathbf{R}^2,\;\; u(0,x)=\phi(x),\;\; u_t(0,x)=\psi(x),\; x\in\mathbf{R}$$

δίνεται από τον τύπο $d'Alembert$:

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi.$$

Στη δική μας την περίπτωση

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2}.$$

Ας υπολογίσουμε την v έχουμε

$$v = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\phi(x-\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\phi(x+\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau =$$
$$\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\tau =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

που είναι ο τύπος $Poisson$ για $n=1$ (βλ. (2.7) Κεφάλαιο II).

Σημειώνουμε (χωρίς απόδειξη) οτι η λύση του προβλήματος $Cauchy$ (1.1), (1.2) είναι μοναδική.

§3. Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για κυματική εξίσωση

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Dirichlet$ ($Cauchy - Dirichlet$)

$$u_{tt} = \Delta u + f(t,x), \quad |t| < T, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, \quad n > 1, \tag{3.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$u\Big|_{S_T} = \chi(s), \quad S_T = [-T,T]\times\partial\Omega. \tag{3.3}$$

Υπάρχει μοναδική κλασική λύση του προβλήματος (3.1) - (3.3) υπο προυποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα των f, ϕ, ψ και χ, εμείς θα περιοριστούμε με την απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης. (Για $n=1$ η ύπαρξη αποδεικνύεται με την μέθοδο $Fourier$.)

Εστω u_1 λύση του προβλήματος (3.1) - (3.3) και έστω υπάρχει μια άλλη λύση u_2 του ιδιου προβλήματος. Για

$$v \equiv u_1 - u_2$$

έχουμε

$$v_{tt} = \Delta v, \quad |t| < T, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, \quad n > 1, \tag{3.4}$$

$$v(0,x) = v_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.5}$$

$$v\Big|_{S_T} = 0, \quad S_T = [-T,T]\times\partial\Omega. \tag{3.6}$$

Αρκεί να δείξουμε οτι $v \equiv 0$. Εισάγουμε την συνάρτηση

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \big[v_t^2 + |\nabla v|^2\big] dx.$$

Προφανώς

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \big[v_t v_{tt} + \nabla v \cdot \nabla v_t\big] dx.$$

με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\frac{dE}{dt} = v_\nu v_t\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \big[v_t v_{tt} - v_t \Delta v\big] dx.$$

Λόγω συνοριακής συνθήκης (3.6) και εξίσωσης (3.4) έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη οτι $E(0) = 0$ καταλήγουμε στο

$$E(t) = 0, \quad \forall t.$$

Συνεπώς

$$v_t = |\nabla v| = 0 \quad \Rightarrow \quad v \equiv const$$

και απο (3.5) $v \equiv 0$.

Παρομοίως αποδεικνύουμε την μοναδικότητα του προβλήματος $Neumann$ ($Cauchy - Neumann$).

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι αν η $u(t,x)$ είναι φραγμένη λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u, \quad |t| < \infty,\, x \in \mathbf{R}^n,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

τότε η

$$v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau, x) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau$$

είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$v_t = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) v_{x_i} + c(x)v, \quad 0 < t < \infty, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

2. Ποιες προυποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις $\phi(x)$, $\psi(x)$, $f(t,x)$ για να είναι νόμιμες οι διαδικασίες που μας οδήγησαν στον τυπο $Kirchhoff$ και $Poisson$.

3. Αποδείξτε το Λήμμα 1.1 για $n = 3$.

4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Poisson$ προσδιορίστε τη λύση $u(t,x)$ $x = (x_1, x_2)$ του προβλήματος $Cauchy$:

I)

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + t \;\text{ στο }\; (-T,T) \times \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = x_1 - x_2, \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

II)

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + t^2 x_2 \;\text{ στο }\; (-T,T) \times \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = 1, \quad u_t(0,x) = x_1 x_2, \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

5. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $Kirchhoff$ προσδιορίστε τη λύση $u(t,x)$ $x = (x_1, x_2, x_3)$ του προβλήματος $Cauchy$:

I)

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + x_3 \;\text{ στο }\; (-T,T) \times \mathbf{R}^3,$$
$$u(0,x) = x_1 + x_2, \quad u_t(0,x) = x_1 x_2, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

II)

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + t^2 x_1 \;\text{ στο }\; (-T,T) \times \mathbf{R}^3,$$
$$u(0,x) = x_3, \quad u_t(0,x) = x_2, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

Βιβλιογραφία:

[1] $L.C.Evans$, $Partial\ \ Differential\ \ Equations$, $Graduate\ \ Studies\ \ in\ \ Mathematics$, $V.$ 19, AMS.

[2] $V.P.Mikhailov$, $PartialDifferentialEquations$, Mir, 1978.

Κεφάλαιο IV. Μη γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης

§1. Προβλημα $Cauchy$ για την εξίσωση $Hopf$

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:
να βρεθέι η λύση $u(t,x)$ της εξίσωσης

$$u_t + u\,u_x = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2, \tag{1.1}$$

η οποια επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x) \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R}. \tag{1.2}$$

Μας ενδιαφέρουν οι κλασικές λύσεις δηλαδή η λύση πρέπει να είναι C^1 συνάρτηση τ.ω.

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \phi(x).$$

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των χαρακτηριστικών.

Στο επίπεδο (t,x) θεωρούμε μια οικογένεια καμπυλών $t(s), x(s)$ που ορίζεται ως

$$\frac{dt(s)}{ds} = 1, \quad \frac{dx(s)}{ds} = u(t(s), x(s)) \tag{1.3}$$

οπου s είναι μια παράμετρος. Αυτές οι καμπύλες ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες ή σκετο χαρακτηριστικές. Θαωρούμε την συνάρτηση u πάνω στην χαρακτηριστική, δηλαδή $u(t(s), x(s))$. Προφανώς η παράγωγως της u κατα μήκος της χαρακτηριστικής ισούται με

$$\frac{du(s)}{ds} \equiv \frac{du(t(s),x(s))}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} = u_t + u\,u_x.$$

Αρα κατα μήκος των χαρακτηριστικών η εξίσωση (1.1) παίρνει την μορφή

$$\frac{du(s)}{ds} = 0.$$

Δηλαδή κατα μήκος των χαρακτηριστικών η $u(t,x)$ παραμένει αμετάβλητη τουτέστιν $u(t(s), x(s)) = Constant$.

Αν θα υποθέσουμε οτι $t(0) = 1$, δηλαδή οι χαρακτηριστικές ξεκινάνε απο τον άξονα $t = 0$ (προς τα πάνω ($t > 0$) ή προς τα κάτω ($t < 0$)), τότε το σύστημα (1.3) παίρνει τη μορφή

$$t = s, \quad \frac{dx(t)}{dt} = u(t, x(t)) \tag{1.4}$$

και το πρόβλημα (1.1), (1.2) ανάγεται στο

$$\begin{gathered} \frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0 \\ \frac{du(t)}{dt} = 0, \quad u(0) = \phi(x_0). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Η ¨u πανω στην χαρακτηριστική¨ πλέον σημαίνει $u(t,x(t))$ ($u(t) \equiv u(t,x(t))$). Η αρχική συνθήκη για u είναι $\phi(x_0)$ και όχι $\phi(x)$ διότη είμαστε πάνω στην χαρακτηριστική και

$$u(t,x(t))\Big|_{t=0} = u(0,x(0)) = \phi(x_0).$$

Πάμε να λύσουμε τωρα το πρόβλημα $Cauchy$ (1.5). Απο την δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$u(t) = \phi(x_0) \tag{1.6}$$

δηλαδη η u κατα μήκος της χαρακτηριστικής ($u(t) = u(t,x(t))$) παραμένει σταθερή και αναγκαστικά ισούται με την τημή της στο $t = 0$. Αντικαθιστώντας την u στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \phi(x_0), \quad x(0) = x_0$$

δηλαδή

$$x(t) = t\,\phi(x_0) + x_0. \tag{1.7}$$

Αυτές είναι οι χαρακτηριστικές της εξίσωσης $Hopf$, παρατηρούμε οτι είναι οικογένεια ευθειών. Συνεπώς βρήκαμε τη λύση σε παραμετρική μορφή (1.6), (1.7). Απο (1.7), (1.6) έχουμε $x = t\,u + x_0$ και ευκολα καταλίγουμε στην σχέση

$$u = \phi(x - t\,u). \tag{1.8}$$

Προφανώς

$$u_t = \phi'(\xi)(-u - t\,u_t), \quad u_x = \phi'(\xi)(1 - t\,u_x)$$

εδω $\xi = x - t\,u$. Συνεπώς

$$u_t + u\,u_x = -t\,\phi'(\xi)(u_t + u\,u_x),$$

δηλαδή

$$(u_t + u\,u_x)(1 + t\,\phi'(\xi)) = 0.$$

Άρα για να είναι η λύση του προβλήματος (1.1), (1.2) πρέπει να ισχύει

$$1 + t\phi'(x - t\,u) \neq 0. \tag{1.9}$$

Στην ίδια συνθήκη καταλήγουμε αν θα προσπαθήσουμε λα λύσουμε την (1.8) ως προς u. Δηλαδή έχουμε μια συνάρτηση δοσμένη σε πεπλεγμένη μορφή:

$$F(t,x,u) = 0 \;\text{ με }\; F(t,x,u) \equiv u - \phi(x - t\,u)$$

και θέλουμε να την λύσουμε ως προς u (να την γράψουμε σε μορφή $u = u(t,x)$). Συμφωνα με το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης αυτό είναι εφικτό αν

$$F_u(t,x,u) \neq 0$$

δηλαδή αν ισχύει η (1.9).

Αυτή η ¨παράξενη συμπεριφορά¨ του προβλήματος οφείλεται στο γεγονός οτι σε αντίθεση με τις γραμμικές εξισώσεις η χαρακτηριστικές εδω εξαρτώνται απο την λύση και μπορούν να τέμνονται φέρνοντας διαφορετικές τιμές. Ας δούμε τρια κατατοπιστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:

$$u_t + u\,u_x = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = x \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (1.5) γραφεται ως

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad u(0) = x_0.$$

Άρα $u(t) = x_0$ και

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_0, \quad x(0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = t\,x_0 + x_0.$$

Συνεπώς $u = x - t\,u$ και

$$u(t,x) = \frac{x}{t+1}.$$

Η (κλασική) λύση αυτη ορίζεται για $t > -1$, δηλαδή ξεκινώντας απο το $t = 0$ η λύση υπάρχει για όλους τους θετικούς χρόνους και για αρνητικούς μέχρι -1.

Εύκολα διαπιστώνουμε οτι η συνθήκη (1.9) έχει τη μορφή $1 + t \neq 0$.

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε οτι οι χαρακτηριστικές $x = t\,x_0 + x_0$ τέμνονται στο σημείο $t = -1$, $x = 0$.

Προφανώς κατα μήκος της $x = tx_0 + x_0$ η u είναι σταθερή. Πράγματι

$$u(t, tx_0 + x_0) = \frac{tx_0 + x_0}{t+1} = x_0 = u(0, x(0)).$$

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:

$$u_t + u\,u_x = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = -x \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (1.5) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad u(0) = -x_0.$$

Άρα $u(t) = -x_0$ και

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x_0, \quad x(0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = -t\,x_0 + x_0.$$

Συνεπώς

$$u = -x + t\,u$$

και

$$u = \frac{x}{t-1}.$$

Η (κλασική) λύση αυτη ορίζεται για $t < 1$, δηλαδή ξεκινώντας απο το $t = 0$ η λύση υπάρχει για τους θετικούς χρόνους μέχρι $t = 1$ και για όλους τους αρνητικούς.

Η συνθήκη (1.9) έχει τη μορφή $1 - t \neq 0$.

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε οτι οι χαρακτηριστικές τέμνονται στο σημείο $t = 1$, $x = 0$.

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:

$$u_t + u\,u_x = 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}^2,$$
$$u(0,x) = x^2 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (1.5) γραφεται ως

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad u(0) = x_0^2.$$

Άρα $u(t) = x_0^2$ και

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_0^2, \quad x(0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = t\,x_0^2 + x_0.$$

Απο $x = tu + x_0$ παίρνουμε $x_0 = x - tu$ και

$$u = (x - t\,u)^2.$$

Δηλαδή

$$t^2u^2 - (2xt+1)u + x^2 = 0.$$

Λύνοντας το τριώνυμο ως προς u παίρνουμε

$$u_\pm = \frac{1 + 2xt \pm \sqrt{4xt+1}}{2t^2}.$$

Επίσης παρατηρούμε οτι το χωρίο οπου ¨ζει¨ η πιθανή λύση είναι $4xt + 1 \geq 0$. Ευκολα διαπιστώνουμε οτι αν $4xt + 1 > 0$ τότε

$$\lim_{t\to 0} u_- = x^2$$

ενω

$$\lim_{t\to 0} u_+ = +\infty,$$

αρα η λύση του προβλήματος είναι η

$$u(t,x) = \frac{1 + 2xt - \sqrt{4xt+1}}{2t^2} = \frac{2\,x^2}{1 + 2xt + \sqrt{4xt+1}}$$

και ορίζεται στο χωρίο

$$4xt + 1 > 0.$$

Προφανώς εδω

$$1 + \phi'\,t = 1 + 2(x - ut)t = 1 + 2xt - 2ut^2,$$

αρα η σχέση (1.9) παίρνει τη μορφή

$$u \neq \frac{1 + 2xt}{2t^2} \quad \Leftrightarrow \quad 4xt + 1 \neq 0.$$

Δηλαδή $4xt + 1 > 0$ ή $4xt + 1 < 0$, επιλέγουμε το χωρίο $4xt + 1 > 0$ αφου θέλουμε να περιέχει τον άξονα $t = 0$.

Οι χαρακτηριστικές εδω είναι
$$x(t) = x_0^2 t + x_0.$$
Κατα μήκος των χαρακτηριστικών η λύση πρέπει να είναι σταθερη. Πράγματι, έχουμε
$$u(t, x(t)) = \frac{1 + 2(x_0^2 t + x_0)t - \sqrt{4(x_0^2 t + x_0)t + 1}}{2t^2} =$$
$$\frac{1 + 2(x_0^2 t + x_0)t - \sqrt{(2x_0 t + 1)^2}}{2t^2} = x_0^2 = u(0, x(0)).$$

§2. Μη ομογενείς εξισώσεις πρώτης τάξης

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:
να βρεθέι η λύση $u(t, x)$ της εξίσωσης

(2.1) $$u_t + a(t, x, u)u_x = f(t, x, u) \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$

η οποια επαληθεύει την αρχική συνθήκη

(2.2) $$u(0, x) = \phi(x) \text{ για } x \in \mathbf{R}.$$

Παρομοιως με το πρόβλημα (1.1), (1.2) καταλήγουμε στο σύστημα

(2.3) $$\frac{dx(t)}{dt} = a(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(0) = \phi(x_0).$$

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:
$$u_t + u\, u_x = 1 \text{ στον } \mathbf{R}^2,$$
$$u(0, x) = \phi(x) \text{ για } x \in \mathbf{R}.$$
Το σύστημα (2.3) γραφεται ως
$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = 1, \quad u(0) = \phi(x_0).$$
Άρα
$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t\phi(x_0) + x_0,$$
$$u(t) = t + \phi(x_0).$$
Συνεπώς
$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t(u - t) + x_0,$$
$$u(t) = t + \phi(x - tu + \frac{1}{2}t^2).$$

Π.χ. για $\phi(x) = x$ έχουμε

$$u(t,x) = \frac{2x + 2t + t^2}{2 + 2t}$$

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy$:

$$u_t + u\,u_x = u \;\text{ στον }\; \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x) \;\text{ για }\; x \in \mathbf{R}.$$

Το σύστημα (2.3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t), \quad u(0) = \phi(x_0).$$

Άρα

$$u(t) = e^t\phi(x_0),$$

$$x(t) = e^t\phi(x_0) + x_0 - \phi(x_0).$$

Συνεπώς

$$u = e^t\phi(x - u + ue^{-t}).$$

Π.χ. για $\phi(x) = -x$ έχουμε

$$u(t,x) = \frac{xe^t}{e^t - 2}.$$

Τέλος θα πουμε δυο λόγια για τις εξισώσεις $Hamilton-Jacobi$ της μορφής:

$$S_t + H(t,x,S_x) = 0.$$

Εδω $S(t,x)$ προσδιοριστέα συνάρτηση, $H(t,x,p)$ δοσμένη C^1 συνάρτηση. Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή ως προς x για

$$u(t,x) = S_x(t,x)$$

παίρνουμε

$$u_t + H_u(t,x,u)u_x = -H_x(t,x,u)$$

που είναι η εξίσωση (2.1).

Ασκήσεις

Προσδιορίστε τη λύση $u(t,x)$ του προβλήματος $Cauchy$:

1.

$$u_t + u\,u_x = f''(t) \;\; \text{στο} \;\; (-T,T)\times\mathbf{R},$$
$$u(0,x) = x, \;\; x\in\mathbf{R}.$$

2.

$$u_t + u\,u_x = -x \;\; \text{στο} \;\; (-T,T)\times\mathbf{R},$$
$$u(0,x) = 0, \;\; x\in\mathbf{R}.$$

3.

$$u_t + u^2\,u_x = 0 \;\; \text{στο} \;\; (-T,T)\times\mathbf{R},$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; x\in\mathbf{R}.$$

4.

$$u_t + u_x^2 = 0 \;\; \text{στο} \;\; (-T,T)\times\mathbf{R},$$
$$u(0,x) = x^2, \;\; x\in\mathbf{R}.$$

Βιβλιογραφία:

[1] Γ. Ακρίβης, Ν. Αλικάκος, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα, 2012 Συγχρονη Εκδοτική ΕΠΕ.

[2] $L.C.Evans$, $Partial\ \ Differential\ \ Equations$, $Graduate\ \ Studies\ in\ \ Mathematics$, $V.$ 19, $AMS.$ § 2.2.