Δευτέρα 16 Δεκεμβρίου 2019.

*** Πρόταση** Αν $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c |f(x)|\,dx$ υπάρχει τότε και το $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)\,dx$ υπάρχει.

*απόδειξη

$$\left|\int_1^c f(x)\,dx\right| \le \int_1^c |f(x)|\,dx \Longrightarrow -\int_1^c |f(x)|\,dx \le \int_1^c f(x)\,dx \le \int_1^c |f(x)|\,dx$$

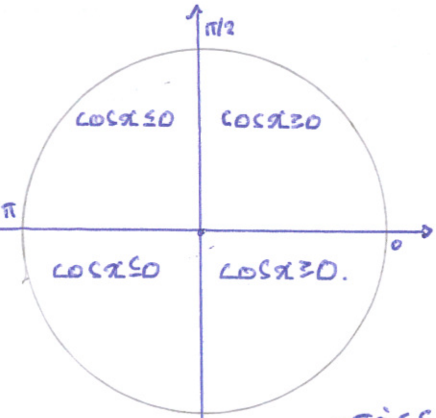
$$\Longrightarrow 0 \le \underbrace{\int_1^c f(x)\,dx + \int_1^c |f(x)|\,dx}_{} \le 2\int_1^c |f(x)|\,dx$$

Η ποσότητα $\int_1^c (f(x)+|f(x)|)\,dx$ είναι αύξουσα ως προς c., ≥ 0 και φραγμένη από το $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$

Συνεπώς το όριο $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c (f(x)+|f(x)|)\,dx$ υπάρχει

Αφού $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c |f(x)|\,dx$ υπάρχει, από ιδιότητες ορίων, σχηματίζω τη διαφορά και έχω ότι $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)\,dx$ υπάρχει. ∎

~ Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ δεν συγκλίνει απολύτως.



Έχουμε $\cos x > 0$ $x\in(2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2})$ και

$$\int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x}\,dx \ge \int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\pi/2} \frac{\cos x}{2\kappa\pi+\pi/2}\,dx = \frac{1}{2\kappa\pi+\pi/2}\cdot \sin x\Big|_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi(2\kappa+\frac{1}{2})}$$

οπότε:

$$\int_1^c \frac{|\cos x|}{x}\,dx \ge \sum_{\kappa=1}^{\kappa_c}\int_{2\kappa\pi}^{2(\kappa+1)\pi} \frac{|\cos x|}{x}\,dx \ge \sum_{\kappa=1}^{\kappa_c}\int_{2\kappa\pi}^{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x}\,dx$$

$$\ge \sum_{\kappa=1}^{\kappa_c} \frac{1}{\pi(2\kappa+1/2)} = \frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\kappa_c}\frac{1}{2\kappa+1/2} = +\infty$$

όπου $2(\kappa+1)\pi < c$

$(\kappa+1) < \frac{c}{2\pi}$

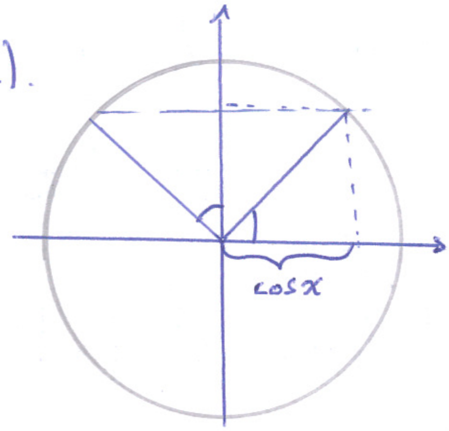
$\kappa < \frac{c}{2\pi} - 1$ $\quad \kappa_c = \left[\frac{c}{2\pi}\right] - 1$

Επομένως $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Ερώτηση Αν γνωρίζουμε ότι $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = +\infty$ δείξτε ότι

$$\int_{10}^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x}dx = +\infty = I$$

$|\cos x| = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.



$$\int_{10}^{+\infty}\frac{|\sin(x+\frac{\pi}{2})|}{x}dx$$ Έστω $y = x+\frac{\pi}{2}$, $dy = dx$

τότε $$\int_{10+\pi/2}^{+\infty}\frac{|\sin y|}{y-\pi/2} \geq \int_{10+\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{|\sin y|}{y}dy = +\infty.$$

Άσκηση 3, φυλ/3.

Έστω ακολουθία (x_n), $x_n>0$ και $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell>1$. Δείξτε ότι $x_n\to+\infty$.

Για μεγάλα n
$$x_{n+1}\sim x_n\cdot\ell$$
$$x_{n+2}\sim x_{n+1}\cdot\ell\sim x_n\cdot\ell^2$$
$$\vdots$$
$$x_{n+k}\sim x_n\ell^k.$$

Επιλέγουμε $\varepsilon>0$ τ.ω. $\ell-\varepsilon>1$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-\ell\right|<\varepsilon \quad \forall n\geq n_0 \quad \text{δηλαδή}$$

$$1<\ell-\varepsilon<\frac{x_{n+1}}{x_n}<\ell+\varepsilon. \quad \text{οπότε έχουμε}$$

$$x_{n+k} = \underbrace{\frac{x_{n+k}}{x_{n+k-1}}\cdot\frac{x_{n+k-1}}{x_{n+k-2}}\cdots\frac{x_{n+1}}{x_n}}_{n-k \text{ φορές}}\cdot x_n = \frac{(\ell-\varepsilon)^n x_n}{(\ell-\varepsilon)^k} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

Άρα $x_{n+k}\to+\infty$ τότε και $x_n\to+\infty$.

Άσκηση 3, φυλ/5.

Αν $P(x)$ πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές υπολογίστε το όριο.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[P(x)]}{P([x])}.$$

πολυώνυμο βαθμού ≥ 1.

Γνωρίζουμε ότι $x-1<[x]\leq x$ | Έστω

$\vdots$ | $P(x)=a_n\cdot x^n+\dots+a_1\cdot x+a_0$

$(x-1)^k<[x]^k\leq x^k$ | $P([x])=a_n[x]^n+\dots+a_1\cdot[x]+a_0$

τότε $P(x-1)<P[[x]]\leq P(x)$ και $P(x)-1\leq[P[x]]\leq P(x)$.

Άρα $$\frac{P(x)-1}{P(x)}\leq\frac{[P(x)]}{P([x])}\leq\frac{P(x)}{P(x-1)}$$

$$\frac{P(x)-1}{P(x)} = 1-\frac{1}{P(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{P(x-1)}=\frac{a_n\cdot x^n+\dots+a_1\cdot x+a_0}{a_n(x-1)^n+\dots a_1(x-1)+a_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\left(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\dots+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^n\left(a_n\frac{(x-1)^n}{x^n}+\dots+a_1\frac{(x-1)}{x^n}+\frac{a_0}{x^n}\right)}=\frac{a_n}{a_n}=1$$

και $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{P(x)}\right)=1$$

Συνεπώς $$\lim_{x\to+\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}=1$$

Άσκηση 3, φυλ/11.

Έστω η ακολουθία (x_n) με $x_n\geq 0$.

a) Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ συγκλίνει.

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty}x_n<+\infty$ τότε $x_n\longrightarrow 0$ και x_n φραγμένη δηλαδή

$|x_n|\leq M$ $\forall n$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\sum_{n=1}^{\infty}(M\cdot x_n)\leq M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<+\infty$

b) Ισχύει το αντίστροφο;

π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<+\infty$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)^2<+\infty$ ενώ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}=+\infty$

γ) Αν η (x_n) αλλάξει πρόσημο ισχύει το συμπέρασμα του a;

Εάν $x_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n<+\infty$ όμως $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$

Άρα δεν μπορεί να ισχύει.

Άσκηση 5, φυλ/6.

Έστω $f(\sqrt{x}) = 1 + 2(f(x))^2$ $(*)$ για $x > 1$. Δείξτε ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δεν μπορεί να είναι αριθμός.

Έστω $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$. από $(*)$ παίρνοντας όριο $x \to +\infty$ έχω.

$a = 1 + 2a^2 \implies 2a^2 - a + 1 = 0$ $\Delta = -7 < 0$ Άρα $\nexists$ πραγματική ρίζα τριωνύμου. άτοπο.

• Μπορεί να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; από $(*)$ $-\infty = +\infty$ άτοπο

. Μπορεί να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ;

Έστω $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τότε από $(*)$

έχουμε $f(\sqrt{x}) > 2f^2(x) > 4 \cdot f^4(x^2) > \ldots > 2^n \cdot f^{2n}(x^n)$

για $x \geq M$. Αν $x = x_0$ τότε

$2^n \cdot f^{2n}(x_0^n) < f(\sqrt{x_0})$

δηλαδή $f(x_0^n) < \frac{1}{2^n} \cdot f(\sqrt{x_0})^{1/2n}$ $(**)$

$\lim_{n\to+\infty} f(x_0^n) = +\infty$ λόγω υπόθεσης.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot f^{1/2n} \right) = 0$ Άρα από $(**)$ οδηγούμαστε σε <u>άτοπο</u>.
$(+\infty < 0)$

Άσκηση 4, φυλ/9.

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη.
$\exists f^{(n)}(x_0)$ για και $x_0\in[a,b]$.

$\forall x\in[a,b]$ $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)+o(|x-x_0|^n)$

a) * $R_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}-\dots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\dots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

Αν στην $*$ $x=0$ $R_n(x_0)=0$
παραγωγίζοντας ως προς x

$$R_n'(x)=f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)-\dots$$

για $x=x_0$ $R_n'(x_0)=0$
Ανάλογα ... $R^{(n)}(x_0)=0$ (παραγωγίζοντας και $x=x_0$)

b) Θέλουμε να δείξουμε ότι $R_n^{(n-1)}(x)=R_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0)$

Σχηματίζουμε $\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x-x_0]{}R_n^{(n)}(x_0)$.

ή $\frac{R_n^{(n-1)}(x)-\overset{0}{\overset{\parallel}{R^{(n-1)}(x_0)}}}{x-x_0}-\underset{\underset{0}{\parallel}}{R_n^{(n)}(x_0)}=\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$

$\Longrightarrow R^{(n-1)}(x)=R_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)+\underbrace{\varepsilon(x)(x-x_0)}_{o(|x-x_0|)}$ με $\varepsilon(x)\xrightarrow[x-x_0]{}0$

Είπαμε ότι $\frac{g(x)}{h(x)}\longrightarrow 0$ τότε $g=o(h)$

οπότε $g=\varepsilon(x)(x-x_0)$ $\frac{g}{h}=\varepsilon(x)\longrightarrow 0$
$h(x)=(x-x_0)$

Άσκηση 5 φυλ/11

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$ κριτήριο ρίζας

$$(x_n)^{1/n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\longrightarrow\frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$$ κριτήριο ρίζας.

$$(x_n)^{1/n}=\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+1}\longrightarrow\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\ p>0$$ ολοκληρωτικό κριτήριο

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}\quad x>2\quad ,\ f\downarrow$$

η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx<+\infty \qquad \int_2^{c}\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^p}\,dx$$

$$\frac{f'}{f^p}=f'\cdot f^{-p}\qquad (f^{-p+1})'=(1-p)\cdot f^{-p}\cdot f'=\frac{1}{1-p}\left(f^{-p+1}\right)'\ \text{για}\ p\neq 1$$

$$\int_2^{c}\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^p}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{1-p}\int_2^{c}\left((\ln x)^{-p+1}\right)'dx, & p\neq 1\\ \int_2^{c}(\ln(\ln x))'\,dx, & p=1\end{cases}\qquad \frac{(\ln x)'}{\ln x}=(\ln(\ln x))'$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-p}(\ln c)^{-p+1}+A\rightsquigarrow \text{σταθερά} & p\neq 1\\ \ln(\ln c)-B\rightsquigarrow\text{σταθερά} & p=1\end{cases}$$

Για $c\longrightarrow+\infty$ για να υπάρχει το όριο ως πεπερασμένος αριθμός πρέπει $p>1$

Φυλ/5 Άσκηση 5

δ) Χαρακτηρίστε το είδος της ασυνέχειας.

$$y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Δεν υπάρχουν πλευρικά όρια. Έχουμε ουσιώδης ασυνέχεια.

$\sin\frac{1}{x^2} = 1$ Θα πρέπει $\frac{1}{x^2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ άρα $x_\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}} \rightarrow$ $f(x_\kappa) = 1$.

αντίστοιχα

$\sin\frac{1}{x^2} = 0$

Φυλ/12 Άσκηση 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$ κριτήριο λόγου $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!} = \frac{e(n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$= \frac{e}{\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\to e}} > 1$ $\qquad (1+\frac{1}{n})^n \uparrow e$

$\Longrightarrow x_{n+1} > x_n \Longrightarrow$ Άρα $x_n > x_1 \ \forall n$, $x \not\to 0$ Συνεπώς η σειρά δεν συγκλίνει.

Φυλ/12 Άσκηση 5

$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \cos x}{x+1} dx$ Ελέγχουμε την απόλυτη σύγκλιση.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+1} dx > \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx \rightsquigarrow$ είδαμε ότι $= +\infty$.
Δεν συγκλίνει απολύτως.

Από κριτήριο Dirichlet
$\int_a^b fg$ αν $\int_a^b g < M$ και $0 < f \downarrow$
τότε συγκλίνει.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1} \qquad f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}(x+1)-x^{1/2}}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-x)}{(x+1)^2}<0 \quad \text{για} \quad x>1$$

τι γίνεται όταν $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\cos x}{x+1}dx=\underbrace{\int_{1/2}^{5}\frac{\sqrt{x}\cdot\cos x}{x+1}dx}_{\text{Υπάρχει}}+\underbrace{\int_{5}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\cos x}{x+1}}_{\text{Υπάρχει.}}$

$\rightsquigarrow \displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ με $t=x-1$ $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ που είναι ολοκληρώσιμη

$\rightsquigarrow \displaystyle\int_0^6\frac{1}{\sqrt{|x-1||x-2||x-5|}}dx=\int_0^{3/2}\cdots+\int_{3/2}^{3}\cdots+\int_3^6\cdots$ υπάρχει το ολοκλήρωμα.

$\rightsquigarrow f(x)=\dfrac{\cos x}{\log(x^2+2)}$ Δείξτε ότι η f φραγμένη και λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ Για $\varepsilon=1$, $\exists M_1>0$, $\exists M_2>0$.

για $x<-M_1$, $|f(x)|<1$

για $x>M_2$ $|f(x)|<1$.

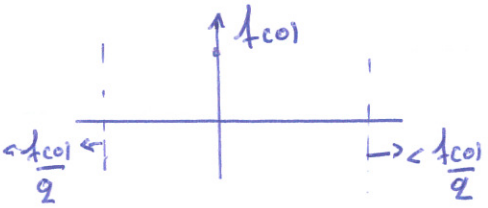
Στο $[-M_1,M_2]$ η f έχει μέγιστη τιμή άρα $|f(x)|<M$

$\forall x\in[-M_1,M_2]$ συνεπώς $|f(x)|<M+1$

$f(0)=\dfrac{1}{\log 2}$ Έστω $\varepsilon=\dfrac{f(0)}{2}>0$ $\exists M_1,M_2>0$ τ.ω.

$|f(x)|<\dfrac{f(0)}{2}$ $x>M_2$, $x>M_2$

$|f(x)|<\dfrac{f(0)}{2}$, $x<-M_1$.



$\exists x_0\in[-M_1,M_2]$ τ.ω $f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x\in[-M_1,M_2]$ άρα

$f(x_0)\geq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 9 Φυλ/12

$f \in C'$

$$\int_a^b f(x)\cdot \underbrace{\cos(nx)}_{\frac{1}{n}(\sin(nx))'}dx = \frac{1}{n}\int_a^b f\,(\sin(nx))'dx$$

$$= -\frac{1}{n}\int_a^b \underbrace{f'(x)\cdot\sin(nx)dx}_{*} + \underbrace{\frac{f\sin(nx)}{n}\Big|_a^b}_{\downarrow\, n\to+\infty \atop 0}$$

$$* \ \frac{1}{n}\left|\int_a^b f'(x)\cdot\sin(nx)dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\cdot|\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$