Δευτέρα 30 Σεπτεμβρίου 2019

3º ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Διδάσκων: κ. Φίλιππας Στάθης (ΤΜΗΜΑ Β)

Αίθουσα: Α 203

"Όρια ακολουθιών"

(Υπενθύμιση)

Ορισμός: $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ τ.ω. $|x_n - x| < \varepsilon$ όταν $n \geq n_0$

Όσο μικρό αριθμό κι αν σκεφτούμε (ε), μπορώ να βρω δείκτη n_0 ούτως ώστε:...

Ορισμός: Η x_n αποκλίνει (ή τείνει) στο $+\infty$

αν για $\forall\ M > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_n > M$ για $n \geq n_0$.

1.π.χ. $a_n = n^{\alpha},\ \alpha > 0$

Έστω $M > 0$, θέλω να έχω $n^{\alpha} > M \Longleftrightarrow n > M^{1/\alpha}$

↝ Μπορώ να πω ότι $n_0 = M^{1/\alpha}$?

↝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: "ΌΧΙ" διότι δεν γνωρίζω ότι $M^{1/\alpha} \in \mathbb{N}$

οπότε επιλέγω $n_0 = [M^{1/\alpha}] + 1$

Τώρα έχω ότι αν $n \geq n_0 = [M^{1/\alpha}] + 1 > M^{1/\alpha} \Longrightarrow n^{\alpha} > M$

άρα σύμφωνα με τον ορισμό έχω ότι $n^{\alpha} \xrightarrow{\text{(πάει στο)}} +\infty$.

2.π.χ. $a_n = \ln n$, Έστω $M > 0$

Θέλω να δείξω ότι από κάποιο n_0 και μετά

$\ln n > M \Longleftrightarrow n > e^M$

Επιλέγω $n_0 = [e^M] + 1$

30/09/2019

Παρόμοιο: Η $x_n \to -\infty$, $\forall M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_n < -M$, $n \geq n_0$

π.χ. $x_n = \frac{n^2+n}{n+3}$ ⤳ μεγαλώνει, αφού το n είναι στο τετράγωνο και το n^2 μεγαλώνει γρηγορότερα τον αριθμό.

$$\frac{n^3+n}{n+3} > \frac{n^2}{n+3} > \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n}{4}$$

Επιλέγω λοιπόν n_0 τ.ω. $\frac{n_0}{4} > M$

π.χ. $n_0 = [4M]+1$

"ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ"

▷ Αν δύο ακολουθίες από έναν όρο και μετά είναι ίσες, τότε έχουν το ίδιο όριο (εφόσον συγκλίνουν). π.χ. $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$y_n = \begin{cases} n, & \text{για } n = 1, 2, \dots, 10^6 \\ \frac{1}{n}, & \text{για } n \geq 10^6+1 \end{cases}$$

"ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ" (κομμάτι των ιδιοτήτων)

$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

Έστω άπειροι αριθμοί $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$

Τότε η (x_{n_k}) λέγεται υπακολουθία

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $n_k \geq k$

π.χ. ακολ. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

επακολ. x_2, x_5, x_7, x_{11}, κ.λπ.

x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3}

$n_1 = 2$ $n_2 = 5$ $n_3 = 7$ → $n_1 = 2 \geq 1$, $n_2 = 5 \geq 2$, $n_3 = 7 \geq 3$

30/09/2019

Πρόταση: Αν μια ακολουθία έχει όριο τότε όλες οι υπακολουθίες της έχουν το ίδιο όριο.

Πόρισμα: Αν μία ακολουθία έχει 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια τότε δεν συγκλίνει.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Η υπακολουθία μιας ακολουθίας είναι με τη σειρά της ακολουθία.

(Παράδειγμα στο ΠΟΡΙΣΜΑ) $a_n = (-1)^n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω η υπακολουθίες $a_{2n} = 1$ και $a_{2n+1} = -1$

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n} \to 1 \\ a_{2n+1} \to -1 \end{array}\right\} 1 \neq -1$$

Άρα η a_n δεν συγκλίνει.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ

1) Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ (όχι ∞), τότε $(-x_n) \to -x$

2) Αν $x_n \to x$, $y_n = y$ τότε $x_n + y_n \to x + y$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ (2): Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, επειδή $x_n \to x$ υπάρχει n_0' τ.ω. $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ όταν $n \geq n_0'$.
Επειδή $y_n \to y$ $\exists\, n_0''$ τ.ω. $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ όταν $n \geq n_0''$.

Έστω $n \geq \max\{n_0', n_0''\} = n_0$

Τότε για $n \geq n_0$ έχω ότι:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)|$$
$$\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα από ορισμό ορίου $x_n + y_n \to x + y$.

30/09/2019

3) $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $y_n \to \pm\infty$ τότε $x_n + y_n \to \pm\infty$

4) $\left.\begin{array}{l} x_n \to +\infty \\ y_n \to +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n + y_n \to +\infty$

Αν $x_n \to +\infty$ και $y_n \to -\infty$ τότε $x_n + y_n$ = απροσδιόριστη μορφή.

Τετάρτη 2 Οκτωβρίου 2019

5º ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Διδάσκων: κ. Φίλιππας Στάθης
Αίθουσα: Α203

"ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ" (συνέχεια)

κανόνας γινομένου: Αν $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x, y \in \mathbb{R}$
τότε $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$

π.χ. $x_n \to x$ και $c \in \mathbb{R}$ τότε $c x_n \to c x$
ακόμη $x_n^2 \to x^2$ και παρόμοια το $x_n^k \to x^k$

κανόνας αντιστρόφου: Έστω $x_n \to x$.

- Αν $x_n \neq 0$, $x \neq 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$
- Αν $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\begin{cases} \text{αν } x_n > 0, & \frac{1}{x_n} \to +\infty \\ \text{αν } x_n < 0, & \frac{1}{x_n} \to -\infty \end{cases}$

Συνέπεια των 2 προηγούμενων κανόνων:

$$\left.\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}\right. \quad y_n, y \neq 0 \text{ τότε } \frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ στις απροσδιόριστες μορφές $\left(\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \text{κλπ.}\right)$!!!

όσο το $n \to \infty$ το κλάσμα: $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ

Παράδειγμα 1

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2+2n+5} = \frac{n^2\left(\overset{\to 1}{1} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}\right)}{n^2\left(\underset{\to 3}{3} + \underset{\to 0}{\frac{2}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 2

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{\frac{1}{\infty}} 0 \text{ (συγκλίνει στο μηδέν)}$$

"ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ"

ΠΡΟΤΑΣΗ: $x_n \to +\infty,\ y_n \geq x_n \Rightarrow y_n \to +\infty$

$x_n \to -\infty,\ y_n \leq x_n \Rightarrow y_n \to -\infty$

κανόνας της αστυνομίας
ή
κανόνας παρεμβολής

Αν $\overset{\text{αστυνόμος}}{x_n} \leq \overset{\text{κλέφτης}}{y_n} \leq \overset{\text{αστυνόμος}}{z_n}$

και $x_n \to \ell,\ z_n \to \ell, \Rightarrow y_n \to \ell$

$$a_n = \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1$$

2^{η} ανισ. $\Rightarrow \sqrt{n} \geq [\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1$

$$\Rightarrow \underset{\swarrow 1}{1 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} \geq \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = \underset{\searrow 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

από ορισμό ακεραίου μέρους:

▷ $[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$

▷ $[\sqrt{n}] + 1 > \sqrt{n}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $x_n \to 0$, y_n: φραγμένη $\Rightarrow x_n \cdot y_n \to 0$

Απόδειξη: Έχω ότι $|y_n| < M \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n \to 0$
έχω ότι όταν $n \geq$ κάποιο n_0
$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε όμως έχω

για $n \geq n_0$, $|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} = \varepsilon$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $x_n \to x$ και $x < u$ τότε τελικά (δηλ. από ένα n_0 δείκτη και μετά) $x_n < u$ ($x_n > l$).

Παράδειγμα: Ισχύει $\frac{n^2+3n}{2n^2+5} < \frac{3}{5}$ τελικά? (από 1 n και μετά)

$$\frac{n^2+3n}{2n^2+5} = \frac{\cancel{n^2} \cdot (\overset{\to 1}{1} + \overset{\to 0}{\frac{3}{n}})}{\cancel{n^2} \cdot (\underset{\to 2}{2} + \underset{\to 0}{\frac{5}{n^2}})} \to \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$, άρα τελικά η ανισότητα ισχύει!

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν μία ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Έστω $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Άρα $\exists\, n_0$ τ.ω. $|x_n - x| < 1$ όταν $n \geq n_0$.

$$-1 < x_n - x < 1 \Leftrightarrow -1 + x < x_n < 1 + x$$
$$-1 - |x| < x_n < 1 + |x|$$
$$|x_n| < 1 + |x| \quad \forall n \geq n_0$$

Έστω $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1+|x|\}$
οπότε έχω ότι $|x_n| \leq M \ \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)$ φραγμέν.

Χρήσιμα Όρια

Χρήσιμη ανισότητα: Ανισότητα Bernoulli:

Αν $n = 1, 2, \dots$ και $x \geq -1$

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

ισότητα μόνο αν $x=0$ ή $n=1$

(απόδειξη με επαγωγή)

π1 $x_n = \alpha^n$, $\alpha > 1$

(αποδ.)

$$\alpha^n = (1 + \underbrace{(\alpha-1)}_{\geq 0})^n \geq 1 + (\alpha-1)\cdot n \Rightarrow \alpha^n \to +\infty$$

$\rightsquigarrow$ $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$ άρα $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \to +\infty \Rightarrow \alpha^n \to 0$.

$\alpha = 1$ $\quad x_n = 1 \to 1$

π2 $\alpha > 0$, $\sqrt[n]{\alpha} \to ? \, 1$

Αν $\alpha = 1$, προφανές

Έστω $\alpha > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} > 1$

Άρα έχω ότι $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \theta_n$, $\theta_n > 0$

$\Rightarrow \alpha = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n$

$0 < n \cdot \theta_n < \alpha - 1 \Leftrightarrow \underset{\downarrow \, 0}{0} < \underset{\downarrow \, 0}{\theta_n} < \underset{\downarrow \, 0}{\frac{\alpha-1}{n}}$ (κρ. παρεμβ.)

και $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \theta_n \to 1$