Μιχάλης Παπαδημητράκης

Απειροστικός Λογισμός

Πραγματικές Συναρτήσεις μίας Μεταβλητής

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Προκαταρκτικά

1. Οι σημειώσεις αυτές ασχολούνται με τον **απειροστικό λογισμό**, δηλαδή τον λογισμό των απειροστών μεγεθών, δηλαδή τον λογισμό των ορίων. Περιορίζονται στο πλαίσιο των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικές τιμές. Αφού αναφερθούν οι κυριότερες ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης καθώς και η συγγενική έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Κατόπιν, ο απειροστικός λογισμός χωρίζεται στον **διαφορικό λογισμό** (τον λογισμό των παραγώγων) και στον **ολοκληρωτικό λογισμό** (τον λογισμό των ολοκληρωμάτων). Τους δύο αυτούς λογισμούς ενώνει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Οι σημειώσεις τελειώνουν με τα θέματα των σειρών αριθμών και των γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

2. Στο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης υπάρχουν τρία μαθήματα σχετικά με τα παραπάνω θέματα. Το ένα είναι το μάθημα πρώτου εξαμήνου *Απειροστικός Λογισμός Ι*, ένα “υπολογιστικό” μάθημα με έμφαση στον χειρισμό των ορίων, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων, και τα άλλα δύο είναι τα μαθήματα τρίτου και τέταρτου εξαμήνου *Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι και ΙΙ*, δύο “θεωρητικά” μαθήματα με έμφαση στην θεμελίωση των εννοιών και στις θεωρητικές αποδείξεις. Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται στους φοιτητές του πρώτου μαθήματος. Αυτός ο χωρισμός καθορίζει και το επίπεδο αυτών των σημειώσεων. Πιο συγκεκριμένα, το επίπεδο των σημειώσεων είναι στοιχειώδες. Δηλαδή δεν ασχολούνται με την βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την λεγόμενη ιδιότητα supremum, οπότε και δεν αποδεικνύουν κανένα από τα αποτελέσματα τα οποία στηρίζονται στην ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, δεν αποδεικνύεται η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών ούτε τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις ούτε η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, δεν αναφέρονται καν διάφορα μη-στοιχειώδη αποτελέσματα, όπως το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες.

3. Μία προειδοποίηση. Το επίπεδο των σημειώσεων αυτών είναι στοιχειώδες αλλά *όχι εύκολο*: οι σημειώσεις είναι αρκετά πυκνογραμμένες και απαιτούν συγκέντρωση, επιμονή και, κυρίως, γρήγορη προσαρμογή των φοιτητών του πρώτου εξαμήνου σε τρόπο εργασίας αρκετά διαφορετικό από αυτόν τον οποίο έμαθαν στο λύκειο.

4. Οι σημειώσεις δίνουν μεγάλη έμφαση στην έννοια του ορίου (ακολουθίας και συνάρτησης). Αναλύονται διεξοδικά οι ορισμοί των ορίων σε όλες τις περιπτώσεις και υπάρχουν πάρα πολλά παραδείγματα υπολογισμού του n_0 και του δ από το ϵ. Οι φοιτητές πρέπει να εξασκηθούν αρκετά με τέτοιους υπολογισμούς *ακριβώς σε ένα “υπολογιστικό” μάθημα*, πριν αντιμετωπίσουν πιο θεωρητικές καταστάσεις σε κατοπινότερα μαθήματα. Είναι αρκετοί οι φοιτητές οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση του ρόλου των ποσοτήτων δ και ϵ (και των ανάλογων ποσοτήτων στις άλλες περιπτώσεις) αλλά υπάρχουν και πολλοί άλλοι οι οποίοι, με κάποια εξάσκηση, ξεπερνούν σχετικά εύκολα τις όποιες αρχικές δυσκολίες.

5. Από πολύ νωρίς (από το πρώτο μόλις κεφάλαιο) δίνονται κάποιοι μη-τετριμμένοι ορισμοί: ο ορισμός της ρίζας θετικού αριθμού και ο συνακόλουθος ορισμός της δύναμης με ρητό εκθέτη, ο ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη, ο ορισμός του λογαρίθμου και οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών και των αντιστρόφων τους. Οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών είναι γεωμετρικοί και βασίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο. Αυτό κρίνεται απαραίτητο διότι αφ’ ενός μεν οι αναλυτικοί ορισμοί μπορούν να δοθούν μόνο σε πολύ κατοπινότερο στάδιο αφ’ ετέρου δε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι τόσο βασικές ώστε δεν είναι (και παιδαγωγικά) σωστό να μαθαίνει κάποιος τις έννοιες του απειροστικού λογισμού χωρίς ταυτόχρονα να τις εφαρμόζει στις συναρτήσεις αυτές. Οι άλλοι τρεις ορισμοί είναι αναλυτικοί ορισμοί (δηλαδή βασίζονται μόνο στις ιδιότητες των αριθμών) χωρίς όμως πλήρη αιτιολόγηση, αφού αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα supremum. Ίσως υπάρξει κάποια ένσταση διότι σε διάφορα βιβλία επιλέγεται διαφορετική σειρά παρουσίασης αυτών των ορισμών. Για παράδειγμα, ο ορισμός της ρίζας προκύπτει ως εφαρμογή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής στην συνάρτηση $y = x^n$, ο ορισμός του λογαρίθμου

γίνεται με το ολοκλήρωμα $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ και ο ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη γίνεται μέσω της εκθετικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως αντίστροφη της λογαριθμικής. Η παρουσίαση αυτή, παρά το ότι είναι πολύ βολική, μάλλον δεν είναι "φυσιολογική" εννοιολογικά.

6. Ο ορισμός του ολοκληρώματος περιγράφεται βάσει των αθροισμάτων Riemann και όχι βάσει των αθροισμάτων Darboux. Ο λόγος είναι διπλός. Αφ' ενός μεν ο ορισμός του ολοκληρώματος μέσω των αθροισμάτων Darboux απαιτεί μεγαλύτερη προετοιμασία αλλά και την έννοια του supremum αφ' ετέρου δε τα αθροίσματα Riemann συνδέονται πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων.

7. Οι αποδείξεις οι οποίες περιέχονται στις σημειώσεις αυτές είναι πολλές. Ας αποφασίσει ο εκάστοτε διδάσκων ποιές από αυτές τις αποδείξεις θα παρουσιάσει στον πίνακα: η πίεση χρόνου δεν αφήνει πολλά περιθώρια! Οι φοιτητές από την μεριά τους καλά θα κάνουν να προσπαθήσουν (με την καθοδήγηση, ίσως, και του διδάσκοντος ως προς την επιλογή) να δοκιμάσουν τις δυνάμεις τους μελετώντας κάποιες τουλάχιστον από τις αποδείξεις: όσο περισσότερες τόσο το καλύτερο.

8. Η μεγαλύτερη ωφέλεια για τους φοιτητές θα προκύψει από την επίλυση όσο το δυνατόν περισσότερων ασκήσεων. Στις σημειώσεις αυτές δεν υπάρχουν (συνειδητά, τουλάχιστον) πολύ δύσκολες ασκήσεις. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε όχι για να δυσκολευτεί ο εξαιρετικός φοιτητής αλλά μάλλον για να ανεβάσει το επίπεδό του ο επιμελής μέτριος φοιτητής.

9. Μετά από πολλές αλλαγές η παρούσα μορφή των σημειώσεων είναι αποτέλεσμα πολύχρονης διδασκαλίας. Επειδή είναι σαφές ότι κι αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι απείρως ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στυλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων.

Σεπτέμβριος 2018.

Βιβλιογραφία

Calculus ή, σε μετάφραση, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, T. Apostol.

Differential and Integral Calculus, R. Courant.

Introduction to Calculus and Analysis, R. Courant, F. John.

A Course of Pure Mathematics, G. Hardy.

A Course of Higher Mathematics, V. Smirnov.

Advanced Calculus (Schaum's Outline Series), M. Spiegel.

The Calculus, A Genetic Approach, O. Toeplitz.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

1.1 Η πραγματική ευθεία.

Όλοι έχουμε στοιχειώδη γνώση των **πραγματικών αριθμών** και των ιδιοτήτων τους. Τους πραγματικούς αριθμούς θα τους λέμε, απλώς, *αριθμούς*.

Το άθροισμα $x+y$, η διαφορά $x-y$, το γινόμενο xy και ο λόγος $\frac{x}{y}$ ($y \neq 0$) αριθμών x, y είναι αριθμοί. Οι ιδιότητες των πράξεων (μεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα κ.τ.λ.) είναι γνωστές από το γυμνάσιο.

Α. Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι.

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι **φυσικοί** $1, 2, 3, \ldots$, οι **ακέραιοι** $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ και οι **ρητοί**, δηλαδή οι λόγοι $\frac{m}{n}$, όπου m, n είναι ακέραιοι και $n \neq 0$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο των φυσικών είναι υποσύνολο του συνόλου των ακεραίων και, επειδή κάθε ακέραιος m είναι ίσος με τον ρητό $\frac{m}{1}$, το σύνολο των ακεραίων είναι υποσύνολο του συνόλου των ρητών.

Το άθροισμα και το γινόμενο φυσικών είναι φυσικοί. Το άθροισμα, το γινόμενο και η διαφορά ακεραίων είναι ακέραιοι. Τέλος, το άθροισμα, το γινόμενο, η διαφορά και ο λόγος ρητών είναι ρητοί.

Οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί χαρακτηρίζονται **άρρητοι**. Τέτοιοι αριθμοί ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε τετράγωνο τότε ο λόγος του μήκους της διαγωνίου του προς το μήκος της πλευράς του είναι άρρητος.

Με το σύμβολο $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των αριθμών. Με τα σύμβολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ συμβολίζουμε τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών, αντιστοίχως.

Β. Ανισότητες, απόλυτες τιμές.

Οι ιδιότητες των ανισοτήτων είναι γνωστές από το γυμνάσιο. Να οι πιο βασικές.

Πρόταση 1.1. *(i) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια τότε και η τελική ανισότητα είναι γνήσια.*
(ii) Αν $x \leq y$ τότε $x + z \leq y + z$ και $x - z \leq y - z$.
(iii) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$ τότε $x + z \leq y + w$. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια τότε και η τελική ανισότητα είναι γνήσια.
(iv) Αν $x \leq y$ και $z > 0$ τότε $xz \leq yz$ και $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$.
(v) Αν $x \leq y$ και $z < 0$ τότε $xz \geq yz$ και $\frac{x}{z} \geq \frac{y}{z}$.
(vi) Αν $0 < x \leq y$ και $0 < z \leq w$ τότε $0 < xz \leq yw$. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια τότε και η τελική ανισότητα είναι γνήσια.

Η **απόλυτη τιμή** ενός αριθμού x συμβολίζεται $|x|$ και ορίζεται να είναι

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Προφανώς, η απόλυτη τιμή κάθε αριθμού είναι μη-αρνητικός αριθμός. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού εκφράζει το *μέγεθος* του αριθμού.

Οι ιδιότητες της απόλυτης τιμής στην πρόταση 1.2 είναι γνωστές από το γυμνάσιο.

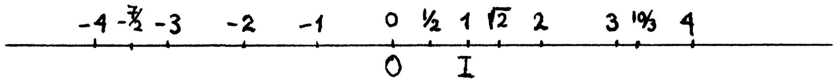
Πρόταση 1.2. *(i)* $|xy| = |x||y|$.
(ii) **Τριγωνική ανισότητα**: $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
(iii) Αν $y \neq 0$ *τότε* $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
(iv) $|x| \leq a$ *αν και μόνο αν* $-a \leq x \leq a$.
(v) $|x| < a$ *αν και μόνο αν* $-a < x < a$.

Ορισμός. *Ο μεγαλύτερος των αριθμών* $x_1, \dots, x_n$ *συμβολίζεται* $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ *και ο μικρότερος* $\min\{x_1, \dots, x_n\}$. *Γενικότερα, αν ένα υποσύνολο* A *του* $\mathbb{R}$ *έχει* **μέγιστο στοιχείο**, *δηλαδή στοιχείο του* A *μεγαλύτερο από κάθε άλλο στοιχείο του* A, *τότε το στοιχείο αυτό ονομάζεται και* **maximum** *του* A *και συμβολίζεται* $\max A$. *Επίσης, αν το* A *έχει* **ελάχιστο στοιχείο** *τότε αυτό ονομάζεται και* **minimum** *του* A *και συμβολίζεται* $\min A$.

Γ. Η γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε αυθαίρετη ευθεία, αυθαίρετο σημείο O της ευθείας το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 0 και δεύτερο αυθαίρετο σημείο I της ευθείας το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 1. Η απόσταση του I από το O παίζει τον ρόλο της *μονάδας μέτρησης αποστάσεων* πάνω στην ευθεία. Τώρα, κάθε αριθμός $x > 0$ αναπαρίσταται από το αντίστοιχο σημείο X της ευθείας το οποίο βρίσκεται στην ίδια μεριά του O στην οποία βρίσκεται και το I και του οποίου η απόσταση από το O είναι ίση με $|x| = x$. Επίσης, κάθε αριθμός $x < 0$ αναπαρίσταται από το αντίστοιχο σημείο X της ευθείας το οποίο βρίσκεται στην αντίθετη μεριά του O από την οποία βρίσκεται το I και του οποίου η απόσταση από το O είναι ίση με $|x| = -x$. Επομένως κάθε σημείο της ευθείας αναπαριστά ακριβώς έναν αριθμό και κάθε αριθμός αναπαρίσταται από ακριβώς ένα σημείο της ευθείας. Δηλαδή τα σημεία της ευθείας είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους αριθμούς.

Κάθε ευθεία την οποία χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς την ονομάζουμε **πραγματική ευθεία** και στο εξής δεν θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα στο οποιοδήποτε ση-



Σχήμα 1.1: Η πραγματική ευθεία.

μείο X μίας πραγματικής ευθείας και στον αριθμό x ο οποίος αναπαρίσταται από το σημείο αυτό. Θα μιλάμε για *το σημείο* x καθώς και για *τον αριθμό* x.

Είναι φανερό από τον κανόνα αντιστοίχισης αριθμών και σημείων ότι η απόσταση κάθε σημείου x της πραγματικής ευθείας από το σημείο 0 είναι ίση με $|x|$. Επίσης, γενικότερα, γνωρίζουμε ότι η απόσταση οποιωνδήποτε σημείων x, y της πραγματικής ευθείας είναι ίση με $|x - y|$.

Στις σημειώσεις αυτές, για την γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών θα χρησιμοποιούμε *οριζόντια ευθεία με το σημείο* 1 *δεξιά του σημείου* 0. Εναλλακτικά, όταν χρειαζόμαστε και δεύτερη ευθεία (για παράδειγμα, όταν σχεδιάζουμε γραφήματα συναρτήσεων) θα χρησιμοποιούμε και *κατακόρυφη ευθεία με το σημείο* 1 *πάνω από το σημείο* 0.

Δ. Διαστήματα και τα σύμβολα $\pm\infty$.

Κάποια χαρακτηριστικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα **διαστήματα**. Αν $a < b$ τότε ορίζουμε $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b\}$, $(a,b] = \{x \,|\, a < x \leq b\}$ και $[a,b) = \{x \,|\, a \leq x < b\}$. Αν $a \leq b$ τότε ορίζουμε $[a,b] = \{x \,|\, a \leq x \leq b\}$. Όλα αυτά χαρακτηρίζονται **φραγμένα** διαστήματα με άκρα a,b. Από αυτά το (a,b) χαρακτηρίζεται **ανοικτό** διάστημα και το $[a,b]$ **κλειστό** διάστημα. Κατόπιν ορίζουμε $(a,+\infty) = \{x \,|\, x > a\}$, $(-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\}$, $[a,+\infty) = \{x \,|\, x \geq a\}$ και $(-\infty,b] = \{x \,|\, x \leq b\}$. Αυτά χαρακτηρίζονται **μη-φραγμένα** διαστήματα (ή *ημιευθείες*) και τα δύο πρώτα χαρακτηρίζονται **ανοικτά** διαστήματα (ή *ανοικτές* ημιευθείες) ενώ τα δύο τελευταία **κλειστά** διαστήματα (ή *κλειστές* ημιευθείες). Φυσικά ορίζεται και το μη-φραγμένο διάστημα $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, δηλαδή ολόκληρη η πραγματική ευθεία.

Πρέπει να τονίσουμε ότι τα σύμβολα $+\infty$, $-\infty$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά *σκέτα σύμβολα*. Τα $\pm\infty$ δεν είναι αριθμοί. Μπορούμε να *σκεφτόμαστε* το $+\infty$ ως ένα “σημείο” το οποίο είναι δεξιά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μία “θετική ποσότητα” με μέγεθος μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό και το $-\infty$ ως ένα “σημείο” το οποίο είναι αριστερά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μία “αρνητική ποσότητα” με μέγεθος μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο επεκτείνουμε την χρήση των συμβόλων $<$ και $>$ των ανισοτήτων γράφοντας για κάθε αριθμό x:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Είναι ίσως περιττό να αναφέρουμε ότι τα “σημεία” ή οι “ποσότητες” $+\infty$ και $-\infty$ δεν έχουν υλική υπόσταση και ότι είναι δημιουργήματα της φαντασίας. Είναι όμως δημιουργήματα *πολύ φυσιολογικά και χρήσιμα*.

Θα ξανασυζητήσουμε για τα σύμβολα $\pm\infty$ όταν θα μελετήσουμε την έννοια του *ορίου*.

Πρέπει να έχουμε συνεχώς κατά νου ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι διαστήματα. Για παράδειγμα, τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Όταν διαβάζουμε κάτι (πρόταση, θεώρημα, άσκηση κ.τ.λ.) το οποίο αναφέρεται σε κάποια σύνολα δεν πρέπει να θεωρούμε δεδομένο ότι τα σύνολα αυτά είναι διαστήματα. Το να σχηματίζουμε την συγκεκριμένη εικόνα διαστήματος για ένα αφηρημένο σύνολο πολλές φορές βοηθά την σκέψη μας αλλά, επίσης, πολλές φορές είναι παραπλανητικό και οδηγεί σε εσφαλμένες απλοϊκές “αποδείξεις”.

Προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε τον χαρακτηρισμό *φραγμένα* για κάποια διαστήματα. Ο χαρακτηρισμός αυτός χρησιμοποιείται γενικότερα για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Λέμε ότι το A είναι* **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει u ώστε να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$ και κάθε τέτοιο u χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *του A. Λέμε ότι το A είναι* **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει l ώστε να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$ και κάθε τέτοιο l χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *του A. Τέλος, λέμε ότι το A είναι* **φραγμένο** *αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l,u ώστε να ισχύει $l \leq x \leq u$ για κάθε $x \in A$.*

Είναι προφανές ότι αν το u είναι άνω φράγμα του A τότε κάθε $u' \geq u$ είναι κι αυτό άνω φράγμα του A. Επίσης, αν το l είναι κάτω φράγμα του A τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτό κάτω φράγμα του A.

Παράδειγμα. Το a είναι κάτω φράγμα των $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$. Ομοίως, το b είναι άνω φράγμα των $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$.

Παράδειγμα. Τα διαστήματα $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα διαστήματα $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

Παράδειγμα. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο. Το 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$.

Ε. Η Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Αν έχουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη 1 και b και πάρουμε έναν *αρκετά μεγάλο* αριθμό αντιγράφων του πρώτου και τα κολλήσουμε το ένα μετά το άλλο πάνω στην ίδια ευθεία τότε το ευθ.

τμήμα το οποίο θα προκύψει θα έχει μήκος μεγαλύτερο από το μήκος του δεύτερου ευθ. τμήματος. Το *πόσο μεγάλο* αριθμό αντιγράφων χρειαζόμαστε εξαρτάται από το μέγεθος του δεύτερου ευθ. τμήματος σε σχέση με την μονάδα μέτρησης αποστάσεων. Η μαθηματική διατύπωση αυτής της

Σχήμα 1.2: Υπάρχει κάποιος φυσικός $n > b$.

εμπειρικά προφανούς ιδιότητας είναι: *για κάθε* $b > 0$ *υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n1 > b$. Είναι φανερό ότι αυτό ισχύει και για $b \leq 0$ και επομένως:

Θεώρημα 1.1. *Για κάθε* b *υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n > b$.

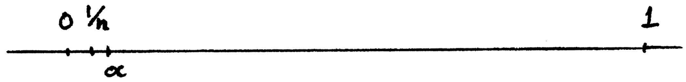
Το θεώρημα 1.1 συμπληρώνεται ως εξής. Αφού υπάρχει κάποιος φυσικός n μεγαλύτερος του b, τότε *και όλοι οι επόμενοι φυσικοί* $n+1, n+2, n+3, \ldots$ *είναι μεγαλύτεροι του* b. Δηλαδή

Όσο μεγάλος κι αν είναι ένας αριθμός όλοι οι φυσικοί από κάποιον και πέρα είναι μεγαλύτεροί του.

Το θεώρημα 1.1 μας λέει ότι *το σύνολο* $\mathbb{N}$ *δεν είναι άνω φραγμένο*. Πράγματι, κανένα b δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ διότι όποιο κι αν είναι το b υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{N}$ μεγαλύτερο του b.

Αρχιμήδεια ιδιότητα. *Για κάθε* $a > 0$ *υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\frac{1}{n} < a$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 1.1 με $b = \frac{1}{a}$. □



Σχήμα 1.3: Υπάρχει φυσικός n ώστε $\frac{1}{n} < a$.

Παρατηρούμε πάλι ότι, αφού υπάρχει κάποιο $\frac{1}{n}$ μικρότερο του a, συνεπάγεται ότι *και όλοι οι επόμενοι αριθμοί* $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots$ *είναι μικρότεροι του* a. Άρα η Αρχιμήδεια ιδιότητα συμπληρώνεται ως εξής.

Όσο μικρός κι αν είναι ένας θετικός αριθμός όλοι οι αντίστροφοι φυσικών από κάποιον και πέρα είναι μικρότεροί του.

Το θεώρημα 1.1 και η ισοδύναμη Αρχιμήδεια ιδιότητα θα παίξουν σημαντικό ρόλο αργότερα στην μελέτη της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

ΣΤ. Ακέραιο μέρος.

Πρόταση 1.3. *Για κάθε* x *υπάρχει μοναδικό* $k \in \mathbb{Z}$ *ώστε* $k \leq x < k+1$.

Το αποτέλεσμα αυτό λέει με άλλα λόγια ότι *κάθε* αριθμός x ανήκει σε *ένα ακριβώς* διάστημα $[k, k+1)$, όπου k είναι ακέραιος. Αυτό σημαίνει ότι τα διαδοχικά διαστήματα $\ldots, [-3,-2)$, $[-2,-1), [-1,0), [0,1), [1,2), [2,3), \ldots$ είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους ισούται με ολόκληρη την πραγματική ευθεία $(-\infty, +\infty)$.

Ορισμός. *Ο ακέραιος* k *ο οποίος έχει την ιδιότητα* $k \leq x < k+1$ *ονομάζεται* **ακέραιο μέρος** *του* x *και συμβολίζεται*

$$[x].$$

Επομένως

$$[x] \in \mathbb{Z} \qquad \text{και} \qquad [x] \le x < [x] + 1.$$

Παράδειγμα. $[3] = 3$, $[-4] = -4$, $[\frac{8}{5}] = 1$, $[\frac{2}{3}] = 0$, $[-\frac{8}{5}] = -2$.

Ζ. Η πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων.

Μία βασική ιδιότητα των ρητών είναι η λεγόμενη *πυκνότητά* τους ανάμεσα στους αριθμούς.

Πυκνότητα των ρητών. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$.*

Με άλλα λόγια, ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Ή αλλιώς: κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό.

Την ίδια ιδιότητα πυκνότητας έχουν και οι άρρητοι.

Πυκνότητα των αρρήτων. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει άρρητος x ώστε $a < x < b$.*

Είδαμε ότι η Αρχιμήδεια ιδιότητα προκύπτει αμέσως από το θεώρημα 1.1. Όμως το θεώρημα 1.1, η πρόταση 1.3 και η πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων δεν θα αποδειχθούν σ' αυτές τις σημειώσεις.

Ασκήσεις.

1.1.1. Έστω $w_1, \ldots, w_n > 0$, $w_1 + \cdots + w_n = 1$. Αν $l \le x_1, \ldots, x_n \le u$ τότε αποδείξτε ότι $l \le w_1x_1 + \cdots + w_nx_n \le u$.

1.1.2. Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης αιτιολογήστε την εξής πρόταση: αν $a \le x \le b$ και $a \le y \le b$ τότε $|x - y| \le b - a$. Κατόπιν αποδείξτε την με μαθηματικό τρόπο.

1.1.3. (i) Για καθεμία από τις ανισότητες

$$|x + 1| > 2, \quad |x - 1| \le |x + 1|, \quad \tfrac{x}{x+2} > \tfrac{x+3}{3x+1}, \quad \tfrac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)} > 0, \quad \tfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \le 0$$

γράψτε ως διάστημα ή ως ένωση διαστημάτων το σύνολο των x για τα οποία αυτή είναι αληθής.
(ii) Για καθένα από τα σύνολα

$$(-\infty, 3], \quad (3, 7), \quad [-1, 4) \cup (4, 8], \quad (-\infty, -2] \cup [1, 4) \cup [7, +\infty)$$

βρείτε *μία* ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τα οποία η ανισότητα είναι αληθής.

1.1.4. (i) Αν ισχύει $l \le a + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$ αποδείξτε ότι $l \le a$.
(ii) Αν ισχύει $l \le a + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε με την Αρχιμήδεια ιδιότητα ότι $l \le a$.

1.1.5. Αποδείξτε ότι τα σύνολα (a, b), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν έχουν ελάχιστο στοιχείο και ότι τα (a, b), $[a, b)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ δεν έχουν μέγιστο στοιχείο.

1.1.6. (i) Αν $0 < x \le 1$ αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$ και γράψτε τύπο για το n συναρτήσει του x.
(ii) Γνωρίζουμε ότι για κάθε b υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > b$. Πώς θα εκφράσετε το *ελάχιστο* τέτοιο n συναρτήσει του b;
(iii) Πώς θα εκφράσετε συναρτήσει του b το *ελάχιστο* $n \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $n \ge b$;
(iv) Έστω $a > 0$. Η Αρχιμήδεια ιδιότητα λέει ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < a$. Πώς θα εκφράσετε το *ελάχιστο* τέτοιο n συναρτήσει του a;

1.2 Δυνάμεις και ρίζες.

Α. Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες.

Είναι γνωστό ότι η δύναμη a^n με εκθέτη $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται με τον τύπο

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}.$$

Αν $a \neq 0$ τότε ορίζεται η δύναμη a^0 καθώς και η a^n με εκθέτη $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ με τους τύπους

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = 1/(\underbrace{a \cdots a}_{-n}).$$

Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού προσήμων προκύπτει ότι $(-a)^n = a^n$ αν το n είναι άρτιο και ότι $(-a)^n = -a^n$ αν το n είναι περιττό. Επίσης, αν το n είναι άρτιο τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$. Τέλος, αν το n είναι περιττό τότε $a^n > 0$ για κάθε $a > 0$ καθώς και $a^n < 0$ για κάθε $a < 0$.

Η πρόταση 1.4 είναι γνωστή από το γυμνάσιο.

Πρόταση 1.4. *Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ τότε*

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Απόδειξη. Εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας στο δεξιό μέρος. □

Ορισμός. *Ονομάζουμε* **παραγοντικό** *του $n \in \mathbb{N}$ το γινόμενο των φυσικών από το 1 μέχρι και το n και το συμβολίζουμε $n!$. Δηλαδή*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Επίσης, ορίζουμε $0! = 1$.

Παράδειγμα. $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$n! = (n-1)!\, n.$$

Ορισμός. *Ορίζουμε τους* **δυωνυμικούς συντελεστές** $\binom{n}{m}$ *για οποιαδήποτε $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq n$ με τον τύπο*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Παράδειγμα. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Αν $1 \leq m \leq n$ τότε απλοποιώντας βρίσκουμε $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$.

Δυωνυμικός τύπος του Newton. *Για κάθε x, y και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή. Για $n = 1$ ο τύπος είναι απλός. Κατόπιν υποθέτουμε ότι ο τύπος είναι σωστός για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και τον πολλαπλασιάζουμε με το $x + y$. Συνδυάζουμε όμοια μονώνυμα χρησιμοποιώντας την σχέση $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$ (η οποία αποδεικνύεται εύκολα) και καταλήγουμε στον τύπο για το $n + 1$. □

Η πρόταση 1.5 καταγράφει τις γνωστές μας βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με *ακέραιους* εκθέτες. Η απόδειξή της είναι πολύ απλή (και γνωστή από το γυμνάσιο) και την παραλείπουμε.

Πρόταση 1.5. *(i) Οι παρακάτω ισότητες ισχύουν αρκεί μόνο να ορίζονται τα συστατικά τους μέρη.*

$$a^x b^x = (ab)^x, \qquad a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}.$$

(ii) Έστω $0 < a < b$. Τότε ισχύει $a^x < b^x$ αν $x > 0$ και ισχύει $a^x > b^x$ αν $x < 0$.
(iii) Έστω $x < y$. Τότε ισχύει $a^x < a^y$ αν $a > 1$ και ισχύει $a^x > a^y$ αν $0 < a < 1$.

Όλες οι ισότητες και οι ανισότητες οι οποίες περιέχονται στην πρόταση 1.5 ισχύουν γενικότερα με πραγματικούς εκθέτες. Επομένως θα ξανααναφέρουμε την πρόταση αυτή άλλες δύο φορές στις επόμενες υποενότητες: μία φορά αφού θα έχουμε ορίσει τις δυνάμεις με ρητούς εκθέτες και μία φορά αφού θα έχουμε μιλήσει για τις δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Β. Ρίζες.

Το θεώρημα 1.2 είναι σημαντικό διότι εξασφαλίζει ότι κάποιες απλές αλγεβρικές εξισώσεις, όπως οι εξισώσεις δεύτερου βαθμού, έχουν λύση. Δεν θα αποδείξουμε το θεώρημα 1.2 σ' αυτές τις σημειώσεις.

Θεώρημα 1.2. *Αν $n \in \mathbb{N}$ και $a \geq 0$ τότε η εξίσωση $x^n = a$ με άγνωστο το x έχει μοναδική μη-αρνητική λύση.*

Το θεώρημα 1.2 αναφέρεται στην εξίσωση $x^n = a$ μόνο στην περίπτωση $a \geq 0$ και μόνο σε σχέση με την μη-αρνητική λύση της. Η πρόταση 1.6, γνωστή κι αυτή από το γυμνάσιο, καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Η απόδειξή της, αν δεχτούμε το θεώρημα 1.2, είναι στοιχειώδης.

Πρόταση 1.6. *(i) Έστω άρτιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία θετική και την αντίθετη αρνητική, αν $a > 0$, έχει ακριβώς μία λύση, το 0, αν $a = 0$ και δεν έχει καμία λύση αν $a < 0$.*
(ii) Έστω περιττό $n \in \mathbb{N}$. Τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει ακριβώς μία λύση, θετική, αν $a > 0$, έχει ακριβώς μία λύση, το 0, αν $a = 0$ και έχει ακριβώς μία λύση, αρνητική, αν $a < 0$.

Είναι γνωστό ότι αν $n \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $a \geq 0$ την μοναδική *μη-αρνητική* λύση της εξίσωσης $x^n = a$ την ονομάζουμε **n-οστή ρίζα** του a και την συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a}.$$

Άρα $\sqrt[n]{0} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $\sqrt[n]{a} > 0$ για κάθε $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Τέλος, αν $a < 0$ τότε δεν ορίζεται το $\sqrt[n]{a}$ για κανένα $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Αν $n = 2, 3, 4, \ldots$ τότε το $\sqrt[n]{a}$ ονομάζεται **δεύτερη, τρίτη, τέταρτη,** $\ldots$ **ρίζα** του a. Στην περίπτωση $n = 2$ το $\sqrt[2]{a}$ συμβολίζεται και $\sqrt{a}$ και ονομάζεται και **τετραγωνική ρίζα** ή, πιο απλά, **ρίζα** του a. Στην περίπτωση $n = 3$ το $\sqrt[3]{a}$ ονομάζεται και **κυβική ρίζα** του a.

Παράδειγμα. Η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει δύο λύσεις, το $\sqrt[4]{16} = 2$ και το $-\sqrt[4]{16} = -2$. Όμως η $x^4 = -16$ δεν έχει καμία λύση.

Παράδειγμα. Η εξίσωση $x^5 = 32$ έχει μία λύση, το $\sqrt[5]{32} = 2$. Η $x^5 = -32$ έχει μία λύση, το $-\sqrt[5]{32} = -2$. Προσέξτε: δεν ορίζεται το $\sqrt[5]{-32}$.

Ας δούμε τώρα ένα χρήσιμο κριτήριο για το αν μία ρίζα είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

Πρόταση 1.7. *Έστω $n, k \in \mathbb{N}$. Τότε: $\sqrt[n]{k} \in \mathbb{Q}$ αν και μόνο αν το k είναι n-οστή δύναμη φυσικού.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι εύκολη. Έστω ότι το k είναι n-οστή δύναμη φυσικού, δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $k = m^n$. Τότε $\sqrt[n]{k} = m \in \mathbb{N}$ και επομένως $\sqrt[n]{k} = m \in \mathbb{Q}$.
Αντιστρόφως, έστω $\sqrt[n]{k} = r \in \mathbb{Q}$ και έστω $r = \frac{m}{l}$ όπου $m, l \in \mathbb{N}$ και $\gcd(m, l) = 1$.
Υποθέτουμε ότι $l > 1$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένας *πρώτος* αριθμός p ο οποίος διαιρεί το l. Από $\gcd(m, l) = 1$ συνεπάγεται ότι το p δεν διαιρεί το m. Ισχύει $k = r^n = \frac{m^n}{l^n}$ οπότε $l^n k =$

m^n. Το p διαιρεί το l οπότε διαιρεί το $l^n k$ και επομένως διαιρεί το m^n. Γνωρίζουμε ότι αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί το γινόμενο κάποιων φυσικών τότε διαιρεί τουλάχιστον έναν από αυτούς τους αριθμούς. Άρα από το ότι το p διαιρεί το $m^n = m \cdots m$ συνεπάγεται ότι διαιρεί το m και καταλήγουμε σε αντίφαση.
Επομένως $l = 1$ οπότε $r = m$ και άρα το $k = r^n = m^n$ είναι n-οστή δύναμη φυσικού. □

Παράδειγμα. Το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος διότι δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m^2 = 2$. Ομοίως, το $\sqrt[3]{5}$ είναι άρρητος διότι δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m^3 = 5$.

Παράδειγμα. Έστω ότι το $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι ρητός. Υψώνουμε στο τετράγωνο και βρίσκουμε $\sqrt{6} = \frac{x^2-5}{2}$ και άρα το $\sqrt{6}$ είναι ρητός. Αυτό είναι λάθος διότι δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m^2 = 6$.

Γ. Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Σ' αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε την δύναμη a^r όταν $r \in \mathbb{Q}$.

Λήμμα 1.1. *Έστω $a > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$ και $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. Τότε $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[l]{a})^k$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $x = (\sqrt[n]{a})^m$ και $y = (\sqrt[l]{a})^k$ και βλέπουμε ότι $x^{nk} = a^{mk}$ και $y^{ml} = a^{mk}$. Άρα $x^{nk} = y^{ml}$ και, επειδή $nk = ml$ και $x, y > 0$, συνεπάγεται $x = y$. □

Ορισμός. *Έστω $a > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$. Υπάρχουν άπειρα ζεύγη (m, n) έτσι ώστε $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ και $r = \frac{m}{n}$. Όμως, σύμφωνα με το λήμμα 1.1, το $(\sqrt[n]{a})^m$ είναι το ίδιο για κάθε τέτοιο ζεύγος. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε και ορίζουμε*

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Τέλος, για $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ ορίζουμε

$$0^r = 0.$$

Είναι σαφές από τον ορισμό του 0^r ότι $0^r = (\sqrt[n]{0})^m$ αν $r = \frac{m}{n} > 0$, δηλαδή αν $m, n \in \mathbb{N}$. Επίσης, είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

για κάθε $a \geq 0$. Τέλος, σχετικά με το πρόσημο του a^r, είναι προφανές ότι $a^r > 0$ για κάθε $a > 0$.

Παρατηρήστε ότι αν $a < 0$ τότε δεν ορίζεται το a^r παρά μόνο όταν $r \in \mathbb{Z}$ (όπως περιγράφεται στην υποενότητα Α).

Συνοψίζουμε:

Το a^r ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$, $r > 0$ και (iii) αν $a < 0$, $r \in \mathbb{Z}$.
Το a^r δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$, $r \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$, $r \notin \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα. Τα $0^{-3/4}$, $0^{-3/5}$, 0^0, $(-2)^{5/3}$, $(-2)^{5/2}$ δεν ορίζονται.

Ξεκινώντας από τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες, όπως αυτές περιγράφονται στην πρόταση 1.5, μπορούμε να αποδείξουμε τις ίδιες ιδιότητες και για ρητούς εκθέτες. Για παράδειγμα, η $a^x a^y = a^{x+y}$ αποδεικνύεται ως εξής. Παίρνουμε $a > 0$ και ρητούς $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{k}{l}$ με $m, k \in \mathbb{Z}$ και $n, l \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $z = a^x a^y = (\sqrt[n]{a})^m (\sqrt[l]{a})^k$ και $w = a^{x+y} = a^{(ml+nk)/(nl)} = (\sqrt[nl]{a})^{ml+nk}$. Χρησιμοποιώντας τις $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $(\sqrt[l]{a})^l = a$, $(\sqrt[nl]{a})^{nl} = a$ έχουμε:

$$z^{nl} = \left((\sqrt[n]{a})^m\right)^{nl} \left((\sqrt[l]{a})^k\right)^{nl} = a^{ml} a^{nk} = a^{ml+nk}, \qquad w^{nl} = \left((\sqrt[nl]{a})^{ml+nk}\right)^{nl} = a^{ml+nk}.$$

Άρα $z^{nl} = w^{nl}$ και, επειδή $z, w > 0$, συνεπάγεται $z = w$. Οι αποδείξεις όλων των άλλων ιδιοτήτων είναι το ίδιο ή και περισσότερο απλές και τις παραλείπουμε.

Δ. Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Τώρα θα *περιγράψουμε, όχι με αυστηρά μαθηματικό τρόπο,* πώς ορίζεται το σύμβολο a^x όταν $a \geq 0$ και το x είναι άρρητος αριθμός. Ο μαθηματικά αυστηρός ορισμός δεν θα διατυπωθεί σ' αυτές τις σημειώσεις.

Κατ' αρχάς θεωρούμε την περίπτωση $a > 1$.

Παρατηρούμε ότι αν για τα $r', r'' \in \mathbb{Q}$ ισχύει $r' < r''$ τότε, βάσει των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, συνεπάγεται $a^{r'} < a^{r''}$. Δηλαδή το a^r αυξάνεται όταν αυξάνεται το $r \in \mathbb{Q}$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα (σταθερό) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και το μεταβλητό $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$. Όταν το μεταβλητό r αυξάνεται και *προσεγγίζει* το x τότε *αποδεικνύεται* ότι το επίσης μεταβλητό και αυξανόμενο a^r *προσεγγίζει* έναν αριθμό τον οποίο συμβολίζουμε

$$a^x.$$

Αν $a = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε ορίζουμε:

$$1^x = 1.$$

Αν $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε $\frac{1}{a} > 1$ οπότε έχει μόλις ορισθεί το $(\frac{1}{a})^x$ και το χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε:

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}.$$

Τέλος, αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x > 0$ τότε ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε το σύμβολο a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και (ii) αν $a = 0$, $x > 0$. Το σύμβολο a^x δεν ορίζεται (i) αν $a < 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και (ii) αν $a = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x < 0$. Συνυπολογίζοντας και τα συμπεράσματα των προηγούμενων υποενοτήτων για την περίπτωση κατά την οποία $x \in \mathbb{Q}$ βλέπουμε ότι:

Το a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$, $x > 0$ και (iii) αν $a < 0$, $x \in \mathbb{Z}$.
Το a^x δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$, $x \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$.

Ας πούμε μερικά λόγια για το πρόσημο του a^x. Αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 1$ τότε, βάσει του ορισμού του a^x, ισχύει $a^x > a^s$ για κάθε $s \in \mathbb{Q}$, $s < x$ οπότε, επειδή $a^s > 0$, συνεπάγεται $a^x > 0$. Αν $0 < a < 1$ τότε $a^x = 1/(1/a)^x > 0$ από την προηγούμενη περίπτωση. Τέλος, $1^x = 1 > 0$. Η περίπτωση $a < 0$ δεν υφίσταται αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων, αυτές δηλαδή οι οποίες καταγράφονται στην πρόταση 1.5, ισχύουν για οποιουσδήποτε πραγματικούς εκθέτες. Όμως την απόδειξή τους στην γενική περίπτωση πραγματικών εκθετών δεν θα την δούμε σ' αυτές τις σημειώσεις.

Ασκήσεις.

1.2.1. Αποδείξτε ότι τα $\sqrt[7]{129}$, $3\sqrt{5+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

1.2.2. (i) Ποιά από τα $(-2)^0, 0^0, (-3)^{7/3}, (-2)^{16/4}, (-2)^{-10/12}$ ορίζονται;
(ii) Ορίζονται οι δύο μεριές της ισότητας $\big((-1)^2\big)^{5/2} = (-1)^{2(5/2)}$; Είναι σωστή αυτή η ισότητα; Υπάρχει αντίφαση με την πρόταση 1.5;

1.2.3. Για ποιά $r \in \mathbb{Q}$ ισχύει $(-2)^r < 0$;

1.2.4. Ορίζονται τα $2^{-\sqrt{2}}, (-2)^{\sqrt{2}}, 0^{-\sqrt{2}}, 0^{\sqrt{2}}$;

1.2.5. (i) Ισχύει $\big((-1)^2\big)^{\sqrt{3}} = (-1)^{2\sqrt{3}}$; Υπάρχει αντίφαση με την πρόταση 1.5;
(ii) Για ποιά x ισχύει $\big((-1)^x\big)^{\sqrt{3}} = (-1)^{x\sqrt{3}}$;

1.3 Λογάριθμοι.

Θεωρούμε $a > 0$, $a \neq 1$ και διατυπώνουμε το εξής ερώτημα: *για ποιά y η εξίσωση $a^x = y$ (με άγνωστο το x) έχει λύση;* Γνωρίζουμε ότι για κάθε x ισχύει $a^x > 0$ οπότε για να έχει λύση η εξίσωση $a^x = y$ πρέπει να είναι $y > 0$. Το θεώρημα 1.3, το οποίο δεν θα αποδείξουμε σ' αυτές τις σημειώσεις, μας λέει ότι αυτός είναι ο μοναδικός περιορισμός για το y.

Θεώρημα 1.3. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικό x ώστε $a^x = y$.*

Η περίπτωση $a = 1$ σε σχέση με την εξίσωση $a^x = y$ δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον. Πράγματι, επειδή ισχύει $1^x = 1$ για κάθε x, το μοναδικό y για το οποίο έχει λύση η εξίσωση είναι το 1 και σ' αυτήν την περίπτωση η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις: όλους τους αριθμούς. Για τον ίδιο λόγο ούτε η περίπτωση $a = 0$ έχει ενδιαφέρον. Η εξίσωση $0^x = y$ έχει λύση μόνο όταν $y = 0$ και σ' αυτήν την περίπτωση έχει άπειρες λύσεις: όλους τους θετικούς αριθμούς. Η περίπτωση $a < 0$ δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης λόγω του ότι το a^x δεν ορίζεται παρά μόνο όταν $x \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $y > 0$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$ ονομάζεται* **λογάριθμος** *του y με* **βάση** *a και συμβολίζεται*

$$\log_a y.$$

Με άλλα λόγια, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y.$$

Πρόταση 1.8. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$.*
(i) $\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z$ για κάθε $y, z > 0$.
(ii) $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$ για κάθε $y, z > 0$.
(iii) $\log_a(y^z) = z \log_a y$ για κάθε $y > 0$ και κάθε z.
(iv) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
(v) Έστω $0 < y < z$. Τότε $\log_a y < \log_a z$ αν $a > 1$ καθώς και $\log_a y > \log_a z$ αν $0 < a < 1$.

Απόδειξη. (i) Ορίζουμε $x = \log_a y$, $w = \log_a z$ οπότε $a^x = y$, $a^w = z$. Τότε $a^{x+w} = a^x a^w = yz$ οπότε $\log_a(yz) = x + w = \log_a y + \log_a z$.
(ii) Από την $\log_a \frac{y}{z} + \log_a z = \log_a(\frac{y}{z} z) = \log_a y$ συνεπάγεται $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$.
(iii) Ορίζουμε $x = \log_a y$ οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και άρα $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.
(iv) Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.
(v) Έστω $0 < y < z$. Ορίζουμε $x = \log_a y$, $w = \log_a z$ οπότε $y = a^x$, $z = a^w$ και άρα $a^x < a^w$. Αν $a > 1$ συνεπάγεται $x < w$ ενώ αν $0 < a < 1$ συνεπάγεται $x > w$. □

Πρόταση 1.9. *Έστω $a, b > 0$, $a, b \neq 1$. Τότε $\log_b y = \frac{1}{\log_a b} \log_a y$ για κάθε $y > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $a, b > 0$, $a, b \neq 1$. Ορίζουμε $x = \log_b y$, $w = \log_a b$ οπότε $b^x = y$, $a^w = b$. Συνεπάγεται $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$. □

Ασκήσεις.

1.3.1. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^{\log_a y} = y$ για κάθε $y > 0$.

1.3.2. Αποδείξτε ότι το $\log_2 3$ είναι άρρητος.

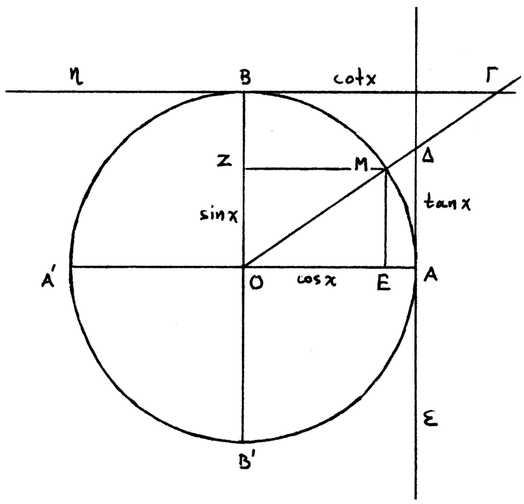
1.3.3. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$.
(i) Αποδείξτε ότι $\log_{1/a} y = -\log_a y$ για κάθε $y > 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\log_{a^z}(y^z) = \log_a y$ για κάθε $y > 0$, $z \neq 0$.

1.4 Τριγωνομετρικοί και αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Α. Τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1 και δύο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους, την οριζόντια $A'OA$ (το A δεξιά του O) και την κατακόρυφη $B'OB$ (το B πάνω από το O). Θεωρούμε οποιοδήποτε x και γράφουμε πάνω στον κύκλο τόξο AM μήκους $|x|$, αρχίζοντας από το A και πηγαίνοντας προς την κατεύθυνση την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού αν $x > 0$ ή προς την αντίθετη κατεύθυνση (την κατεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) αν $x < 0$. Καθώς το x μεταβάλλεται το σημείο M μεταβάλλεται αναλόγως: όταν το x αυξάνεται το σημείο M περιστρέφεται πάνω στον κύκλο προς την κατεύθυνση την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Είναι γνωστό ότι το γράμμα π χρησιμοποιείται για να συμβολίσει το μισό του μήκους οποιουδήποτε κύκλου με ακτίνα 1. Επομένως, το $\frac{\pi}{2}$ αντιστοιχεί στο σημείο B, το π στο σημείο A', το $\frac{3\pi}{2}$ στο σημείο B' και το 2π στο σημείο A. Καθώς το x αυξάνεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ το σημείο M διατρέχει τον κύκλο $ABA'B'A$ προς την κατεύθυνση την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και όταν το x ξεπεράσει το 2π το M ξαναρχίζει να διατρέχει τον κύκλο. Ακριβώς το ίδιο πράγμα γίνεται όταν το x αυξάνεται στο διάστημα $[k2\pi, (k+1)2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$: η κίνηση του σημείου M είναι **περιοδική** με περίοδο 2π. Αυτό οφείλεται στο ότι αν ένα σημείο M αντιστοιχεί σε κάποιο x τότε το ίδιο M αντιστοιχεί και σε όλα τα $x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 1.4: Ο τριγωνομετρικός κύκλος.

Κατόπιν ζωγραφίζουμε την ευθεία ε η οποία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο A και την ευθεία η η οποία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο B.

Ορισμός. *Για κάθε x προσδιορίζουμε το αντίστοιχο σημείο M και φέρνουμε:*
(i) κάθετη ME στη διάμετρο $A'OA$. Συμβολίζουμε $\cos x$ *και ονομάζουμε* **συνημίτονο** *του x το*

$$\cos x = \pm \,\textit{μήκος του}\, OE$$

με $+$ αν το E είναι δεξιά του O και με $-$ αν το E είναι αριστερά του O.
(ii) κάθετη MZ στη διάμετρο $B'OB$. Συμβολίζουμε $\sin x$ *και ονομάζουμε* **ημίτονο** *του x το*

$$\sin x = \pm \,\textit{μήκος του}\, OZ$$

με $+$ αν το Z είναι πάνω από το O και με $-$ αν το Z είναι κάτω από το O.
(iii) την προέκταση της OM μέχρι να συναντήσει την ευθεία ε στο σημείο D. Συμβολίζουμε $\tan x$

και ονομάζουμε **εφαπτομένη** *του x το*

$$\tan x = \pm \textit{μήκος του } AD$$

με $+$ αν το D είναι πάνω από το A και με $-$ αν το D είναι κάτω από το A.
(iv) την προέκταση της OM μέχρι να συναντήσει την ευθεία η στο σημείο C. Συμβολίζουμε $\cot x$ και ονομάζουμε **συνεφαπτομένη** *του x το*

$$\cot x = \pm \textit{μήκος του } BC$$

με $+$ αν το C είναι δεξιά του B και με $-$ αν το C είναι αριστερά του B.
Οι αριθμοί $\cos x, \sin x, \tan x, \cot x$ ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** *του x. Επίσης, ο κύκλος βάσει του οποίου ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ονομάζεται* **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\tan x$ *δεν ορίζεται* αν το M ταυτίζεται με το B ή με το B' ή, ισοδύναμα, αν $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ομοίως, ο αριθμός $\cot x$ *δεν ορίζεται* αν το M ταυτίζεται με το A ή με το A' ή, ισοδύναμα, αν $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Είναι φανερό ότι το $(\cos x, \sin x)$ είναι το ζεύγος συντεταγμένων του M στο επίπεδο του κύκλου με την ευθεία της διαμέτρου $A'OA$ ως άξονα πρώτων συντεταγμένων και την ευθεία της διαμέτρου $B'OB$ ως άξονα δεύτερων συντεταγμένων.

Παράδειγμα. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\tan 0 = 0$. Δεν ορίζεται το $\cot 0$.

Παράδειγμα. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cot \frac{\pi}{2} = 0$. Δεν ορίζεται το $\tan \frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα. $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\tan \pi = 0$. Δεν ορίζεται το $\cot \pi$.

Παράδειγμα. $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cot \frac{3\pi}{2} = 0$. Δεν ορίζεται το $\tan \frac{3\pi}{2}$.

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ είναι φανερό ότι ισχύει $\cos x > 0$ αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$ και ότι ισχύει $\cos x < 0$ αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$. Επίσης, ισχύει $\sin x > 0$ αν $k2\pi < x < \pi + k2\pi$ και ισχύει $\sin x < 0$ αν $\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$.

Είναι, επίσης, φανερό ότι

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$$

για κάθε x. Η πρόταση 1.10 συγκεντρώνει μερικές βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών.

Πρόταση 1.10. *(i)* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
(ii) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
(iii) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$.
(iv) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$.
(v) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.
(vi) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
(vii) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.
(viii) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε ισχύει $\cos x > \cos x'$ αν $k2\pi \leq x < x' \leq \pi + k2\pi$ και ισχύει $\cos x < \cos x'$ αν $\pi + k2\pi \leq x < x' \leq 2\pi + k2\pi$.
(ix) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε ισχύει $\sin x < \sin x'$ αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ και ισχύει $\sin x > \sin x'$ αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

Απόδειξη. (i) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OEM.
(ii) Για τα όμοια τρίγωνα OAD, OEM ισχύει $\frac{\text{μήκος του } AD}{\text{μήκος του } OA} = \frac{\text{μήκος του } EM}{\text{μήκος του } OE}$ οπότε $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Για τα όμοια τρίγωνα OBC, OZM ισχύει $\frac{\text{μήκος του } BC}{\text{μήκος του } OB} = \frac{\text{μήκος του } ZM}{\text{μήκος του } OZ}$ οπότε $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
(iii) Τα σημεία του κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς $x, -x$ είναι συμμετρικά ως προς την διάμετρο $A'OA$.

(iv) Τα σημεία του κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς $x, \frac{\pi}{2} - x$ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της γωνίας AOB.
(v) Τα σημεία του κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς $x, x + \pi$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο O.
(vi) Έστω M, N και K τα σημεία του κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στα x, $-y$ και $x + y$. Τα τόξα AK (αυτό το οποίο περιέχει το M) και NM (αυτό το οποίο περιέχει το A) έχουν ίδιο μήκος. Επομένως και οι χορδές AK και NM έχουν ίδιο μήκος οπότε

$$\big((\cos(x+y)-1)^2 + (\sin(x+y)-0)^2\big)^{1/2} = \big((\cos x - \cos(-y))^2 + (\sin x - \sin(-y))^2\big)^{1/2}.$$

Κάνοντας πράξεις και χρησιμοποιώντας τις (i), (iii), προκύπτει η πρώτη ισότητα στην (vi). Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη, χρησιμοποιώντας τις (iii), (iv):

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - (x+y)) = \cos((\tfrac{\pi}{2} - x) + (-y)) \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)\cos(-y) - \sin(\tfrac{\pi}{2} - x)\sin(-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.\end{aligned}$$

(vii) Από την (vi) έχουμε

$$\cos x = \cos(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}) = \cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} - \sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2},$$

$$\cos y = \cos(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}) = \cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} + \sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}.$$

Επομένως $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η δεύτερη ισότητα.
(viii) Αν $k2\pi \leq x < x' \leq \pi + k2\pi$ τότε τα σημεία M, M' του κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x, x' είναι στο πάνω ημικύκλιο και το M είναι δεξιά του M' οπότε $\cos x > \cos x'$. Αν $\pi + k2\pi \leq x < x' \leq 2\pi + k2\pi$ τότε τα ίδια σημεία M, M' είναι στο κάτω ημικύκλιο και το M είναι αριστερά του M' οπότε $\cos x < \cos x'$.
(ix) Αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ τότε τα σημεία M, M' του κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x, x' είναι στο δεξιό ημικύκλιο και το M είναι κάτω από το M' οπότε $\sin x < \sin x'$. Αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ τότε τα ίδια σημεία M, M' είναι στο αριστερό ημικύκλιο και το M είναι πάνω από το M' οπότε $\sin x > \sin x'$. $\square$

B. Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Τώρα θα ορίσουμε τους λεγόμενους *αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς*. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τριγωνομετρικό κύκλο τον οποίο χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών.

Ορισμός. *(i) Έστω $y \in [-1, 1]$. Στην διάμετρο $A'OA$ προσδιορίζουμε το σημείο E το οποίο αντιστοιχεί στο y και από το E φέρνουμε κάθετη στην $A'OA$ μέχρι να συναντήσει το ημικύκλιο $A'BA$ στο σημείο M. Ονομάζουμε* **τόξο συνημιτόνου y** *και συμβολίζουμε*

$$\arccos y$$

τον αριθμό στο $[0, \pi]$ ο οποίος αντιστοιχεί στο M.
(ii) Έστω $y \in [-1, 1]$. Στην διάμετρο $B'OB$ προσδιορίζουμε το σημείο Z το οποίο αντιστοιχεί στο y και από το Z φέρνουμε κάθετη στην $B'OB$ μέχρι να συναντήσει το ημικύκλιο $B'AB$ στο σημείο M. Ονομάζουμε **τόξο ημιτόνου y** *και συμβολίζουμε*

$$\arcsin y$$

τον αριθμό στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ο οποίος αντιστοιχεί στο M.
(iii) Έστω $y \in \mathbb{R}$. Στην ευθεία ε προσδιορίζουμε το σημείο D το οποίο αντιστοιχεί στο y. Έστω M το σημείο τομής της OD με το ημικύκλιο $B'AB$. Ονομάζουμε **τόξο εφαπτομένης y** *και συμβολίζουμε*

$$\arctan y$$

τον αριθμό στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ο οποίος αντιστοιχεί στο* M.
(iv) Έστω $y \in \mathbb{R}$. *Στην ευθεία η προσδιορίζουμε το σημείο* C *το οποίο αντιστοιχεί στο* y. *Έστω* M *το σημείο τομής της* OC *με το ημικύκλιο* $A'BA$. *Ονομάζουμε* **τόξο συνεφαπτομένης y** *και συμβολίζουμε*

$$\operatorname{arccot} y$$

τον αριθμό στο $(0, \pi)$ *ο οποίος αντιστοιχεί στο* M.
Οι αριθμοί $\arccos y$, $\arcsin y$, $\arctan y$, $\operatorname{arccot} y$ *ονομάζονται* **αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί** *του* y.

Παράδειγμα. $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$.

Παράδειγμα. $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα. $\arctan 0 = 0$, $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Είναι φανερό ότι για κάθε $y \in [-1, 1]$ το $\arccos y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $[0, \pi]$ ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $\cos x = y$. Δηλαδή

$$x = \arccos y \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = y,\ 0 \le x \le \pi.$$

Υπάρχει μία ακόμη λύση της $\cos x = y$ στο $[-\pi, 0]$, το $-\arccos y$. Οι λύσεις της $\cos x = y$ στο $\mathbb{R}$ είναι τα $\arccos y + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ καθώς και τα $-\arccos y + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της $\cos x = y$ στο $\mathbb{R}$.

Είναι, επίσης, φανερό ότι για κάθε $y \in [-1, 1]$ το $\arcsin y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $\sin x = y$. Δηλαδή

$$x = \arcsin y \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = y,\ -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2}.$$

Υπάρχει μία ακόμη λύση της $\sin x = y$ στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, το $\pi - \arcsin y$. Οι λύσεις της $\sin x = y$ στο $\mathbb{R}$ είναι τα $\arcsin y + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ καθώς και τα $\pi - \arcsin y + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της $\sin x = y$ στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε y το $\arctan y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $\tan x = y$. Δηλαδή

$$x = \arctan y \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = y,\ -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}.$$

Οι λύσεις της $\tan x = y$ στο $\mathbb{R}$ είναι τα $\arctan y + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της $\tan x = y$ στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε y το $\operatorname{arccot} y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $(0, \pi)$ ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $\cot x = y$. Δηλαδή

$$x = \operatorname{arccot} y \quad \Leftrightarrow \quad \cot x = y,\ 0 < x < \pi.$$

Οι λύσεις της $\cot x = y$ στο $\mathbb{R}$ είναι τα $\operatorname{arccot} y + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της $\cot x = y$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.11. *(i) Έστω* $-1 \le y < y' \le 1$. *Τότε* $\arccos y > \arccos y'$ *και* $\arcsin y < \arcsin y'$.
(ii) Έστω $y < y'$. *Τότε* $\arctan y < \arctan y'$ *και* $\operatorname{arccot} y > \operatorname{arccot} y'$.

Απόδειξη. (i) Έστω E, E' τα σημεία της διαμέτρου $A'OA$ τα οποία αντιστοιχούν στα y, y' και έστω M, M' τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου $A'BA$. Το E είναι αριστερά του E' οπότε το M είναι αριστερά του M' και άρα $\arccos y > \arccos y'$.
Ομοίως, έστω Z, Z' τα σημεία της διαμέτρου $B'OB$ τα οποία αντιστοιχούν στα y, y' και έστω M, M' τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου $B'AB$. Το Z είναι κάτω από το Z' οπότε το M είναι κάτω από το M' και επομένως $\arcsin y < \arcsin y'$.
(ii) Έστω D, D' τα σημεία της ευθείας ε τα οποία αντιστοιχούν στα y, y' και έστω M, M' τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου $B'AB$. Το D είναι κάτω από το D' οπότε το M είναι κάτω από το M' και επομένως $\arctan y < \arctan y'$.

Έστω C, C' τα σημεία της ευθείας η τα οποία αντιστοιχούν στα y, y' και έστω M, M' τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου $A'BA$. Το C είναι αριστερά του C' οπότε το M είναι αριστερά του M' και άρα $\text{arccot}\, y > \text{arccot}\, y'$. $\square$

Ασκήσεις.

1.4.1. Υπολογίστε με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και απλών γεωμετρικών ιδιοτήτων τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

1.4.2. Λύστε τις εξισώσεις $\cos x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x = 0$, $\cot x = -1$, $\tan x = -\sqrt{3}$, $\cot x = \sqrt{3}$.

1.4.3. Αποδείξτε ότι $|a \cos x + b \sin x| \leq (a^2 + b^2)^{1/2}$.

1.4.4. (i) Αποδείξτε με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ότι για κάθε a, b με την ιδιότητα $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε $\cos\theta = a$, $\sin\theta = b$.
(ii) Έστω $a^2 + b^2 > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $p > 0$ και θ τα οποία εξαρτώνται από τα a, b ώστε να ισχύει $a \cos x + b \sin x = p \cos(x - \theta)$ για κάθε x.
(Υπόδειξη: $a \cos x + b \sin x = (a^2 + b^2)^{1/2}\big(\frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}} \cos x + \frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}} \sin x\big)$.)

1.4.5. Αποδείξτε τα παρακάτω.
(i) $\cos y = \cos x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = -x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\sin y = \sin x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = \pi - x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) $\tan y = \tan x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
(iv) $\cot y = \cot x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.4.6. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.10 αποδείξτε τα παρακάτω.
(i) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.
(ii) $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$, $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$.
(iii) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.
(iv) $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$, $\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$, $\tan x = \frac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)}$, $\cot x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{2\tan(x/2)}$.
(v) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x - y) - \frac{1}{2}\cos(x + y)$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\cos(x - y) + \frac{1}{2}\cos(x + y)$, $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x - y) + \frac{1}{2}\sin(x + y)$.

1.4.7. Χρησιμοποιώντας το (v) της άσκησης 1.4.6 αποδείξτε τα παρακάτω.
(i) $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cdots + \cos(nx) = \big(\sin\frac{nx}{2} \cos\frac{(n+1)x}{2}\big) / \big(\sin\frac{x}{2}\big)$.
(ii) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx) = \big(\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}\big) / \big(\sin\frac{x}{2}\big)$.
(Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε με το $\sin\frac{x}{2}$.)

1.4.8. Βρείτε με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου τους αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ± 1.

1.4.9. (i) Αποδείξτε ότι $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y \in [-1, 1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\arctan y + \text{arccot}\, y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε y.

1.4.10. (i) Αποδείξτε ότι $y = \cos(\arccos y)$ και $y = \sin(\arcsin y)$ για κάθε $y \in [-1, 1]$. Επίσης, αποδείξτε ότι $y = \tan(\arctan y)$, $y = \cot(\text{arccot}\, y)$ για κάθε y.
(iii) Αποδείξτε ότι $\arccos(\cos x) = x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.
Γενικότερα, έστω $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι $\arccos(\cos x) = x - k\pi$ αν το k είναι άρτιο και $\arccos(\cos x) = (k+1)\pi - x$ αν το k είναι περιττό.
Τί ανάλογο ισχύει για καθεμία από τις παραστάσεις $\arcsin(\sin x)$, $\arctan(\tan x)$, $\text{arccot}(\cot x)$;

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

2.1 Ορισμοί.

Ορισμός. *Ονομάζουμε* **ακολουθία** *(πραγματικών αριθμών) οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος αριθμός, δεύτερος αριθμός, τρίτος αριθμός κ.τ.λ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί ονομάζονται* **όροι** *της ακολουθίας και συμβολίζονται με ένα γράμμα κοινό για όλους και με έναν* **δείκτη** *ο οποίος δείχνει την σειρά επιλογής και διατρέχει το σύνολο των φυσικών: πρώτα το 1, μετά το 2, μετά το 3 κ.τ.λ. Για παράδειγμα:*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots , \qquad y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, \qquad z_1, z_2, \dots, z_n, \dots .$$

Για τις ακολουθίες χρησιμοποιούμε και τα συνοπτικότερα σύμβολα: (x_n), (y_n), (z_n).

Μερικές φορές ο δείκτης αρχίζει από το 0 οπότε έχουμε ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \dots$.

Μπορούμε να φανταστούμε ότι ο δείκτης n εκφράζει *χρονικές στιγμές* (δευτερόλεπτα, για παράδειγμα) και ότι σε κάθε χρονική στιγμή επιλέγουμε έναν αριθμό φτιάχνοντας μία ακολουθία αριθμών: ο δεύτερος αριθμός *ακολουθεί* τον πρώτο, ο τρίτος *ακολουθεί* τον δεύτερο και ούτω καθ' εξής. Λέμε ότι ο όρος x_{n+1} είναι ο **επόμενος** του x_n και ότι ο x_{n-1} είναι ο **προηγούμενος** του x_n.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$, δηλαδή η $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία (n), δηλαδή η $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία (1), δηλαδή η $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$, δηλαδή η $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $(\frac{1}{10^n})$, δηλαδή η $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots$.

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι μία ακολουθία είναι *οποιαδήποτε* επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά. Φανταστείτε μία "μηχανή" η οποία κάθε δευτερόλεπτο επιλέγει έναν αριθμό με τελείως αυθαίρετο τρόπο: οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να είναι η πρώτη επιλογή, οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να είναι η δεύτερη επιλογή και ούτω καθ' εξής. Πάντως, τα παραδείγματα τα οποία έχουν ενδιαφέρον συνήθως παρουσιάζουν κάποια "κανονικότητα": υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διαδικασία (συνήθως κάποιος μαθηματικός τύπος) με την οποία υπολογίζεται ο n-οστός όρος μίας τέτοιας ακολουθίας.

Μία ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών, *δεν* είναι το σύνολο με στοιχεία αυτούς τους αριθμούς. Στο τρίτο παράδειγμα το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία όμως δεν είναι το μονοσύνολο αυτό: είναι η διαδοχική επιλογή $1, 1, 1, \dots$. Με άλλα λόγια, το πλήθος των όρων μίας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο ενώ το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι άλλοτε άπειρο (πρώτο, δεύτερο, πέμπτο και έκτο παράδειγμα) και άλλοτε πεπερασμένο (τρίτο και τέταρτο παράδειγμα).

Κάθε όρος μίας ακολουθίας ακολουθεί τον προηγούμενό του *σε σειρά επιλογής* (χρονική, σύμφωνα με το μοντέλο των χρονικών στιγμών) και *όχι σε μέγεθος*.

Ορισμός. *Λέμε ότι η (x_n) είναι* **αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n και* **γνησίως αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} > x_n$ για κάθε n. Λέμε ότι η (x_n) είναι* **φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n και* **γνησίως φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} < x_n$ για κάθε n. Μία ακολουθία λέμε ότι είναι* **μονότονη** *αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και* **γνησίως μονότονη** *αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Στα προηγούμενα παραδείγματα: οι ακολουθίες του πρώτου και του πέμπτου παραδείγματος είναι γνησίως φθίνουσες, του δεύτερου παραδείγματος είναι γνησίως αύξουσα και οι ακολουθίες του τέταρτου και του έκτου παραδείγματος δεν είναι ούτε αύξουσες ούτε φθίνουσες.

Λέμε ότι η (x_n) είναι **σταθερή** αν όλοι οι όροι της ειναι ίσοι με τον ίδιο αριθμό, δηλαδή αν υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για κάθε n. Είναι προφανές ότι μία σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα. Τέτοια είναι η ακολουθία του τρίτου παραδείγματος.

Ορισμός. *Λέμε ότι η (x_n) είναι* **άνω φραγμένη** *αν υπάρχει* **άνω φράγμα** *της, δηλαδή κάποιο u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Ομοίως, λέμε ότι η (x_n) είναι* **κάτω φραγμένη** *αν υπάρχει* **κάτω φράγμα** *της, δηλαδή κάποιο l ώστε να ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n. Λέμε ότι η (x_n) είναι* **φραγμένη** *αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n.*

Παράδειγμα. Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι προφανώς φραγμένη.

Παράδειγμα. Η $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα. $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ είναι φραγμένη διότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[-\frac{1}{2}, 1]$.

Παράδειγμα. Η $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ είναι φραγμένη διότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα. Η $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[-1, 1]$.

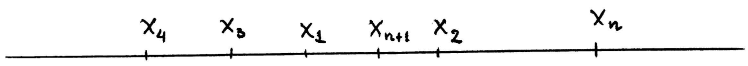
Παράδειγμα. Η $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$, δηλαδή η ακολουθία $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots$, είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Ο αριθμός 0 είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u της ακολουθίας αυτής. Αυτό θα σήμαινε ότι κάθε περιττός φυσικός είναι μικρότερος ή ίσος του u. Από αυτό θα συνεπαγόταν ότι και κάθε άρτιος φυσικός είναι μικρότερος ή ίσος του u (αφού κάθε άρτιος είναι μικρότερος του αμέσως επόμενου περιττού). Άρα όλοι οι φυσικοί θα ήταν μικρότεροι ή ίσοι του u το οποίο αντιφάσκει με το θεώρημα 1.1.
Με την ίδια λογική, η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Παράδειγμα. Η $((-1)^{n-1}n)$, δηλαδή η ακολουθία $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$, δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.

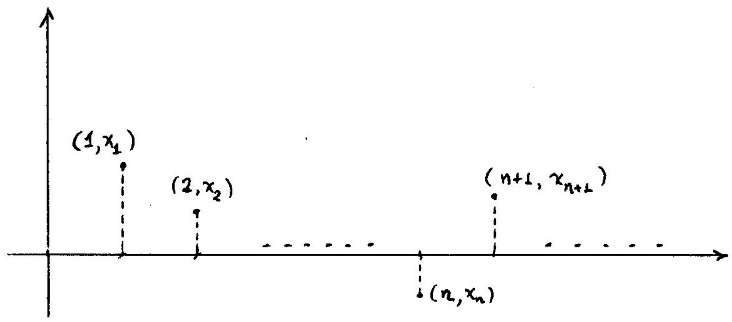
Έστω ότι η (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή όλα τα x_n ανήκουν σε ένα φραγμένο διάστημα $[l, u]$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τότε όλα τα x_n ανήκουν και σε κάποιο διάστημα συμμετρικό ως προς το σημείο 0. Χρειάζεται μόνο να βρούμε κάποιο διάστημα $[-M, M]$ αρκετά μεγάλο ώστε να είναι υπερσύνολο του $[l, u]$: αρκεί να θεωρήσουμε $M = \max\{u, -l\}$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι αν η (x_n) είναι φραγμένη τότε υπάρχει κάποιο M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n.

Αν το u είναι άνω φράγμα της (x_n) τότε κάθε $u' > u$ είναι κι αυτό άνω φράγμα της (x_n). Ομοίως, αν το l είναι κάτω φράγμα της (x_n) τότε κάθε $l' < l$ είναι επίσης κάτω φράγμα της (x_n).

Χρησιμοποιούμε δυο τρόπους για να *απεικονίσουμε* μία ακολουθία. Ο πιο συνηθισμένος είναι με την απλή αναπαράσταση των όρων της ακολουθίας από σημεία της πραγματικής ευθείας. Ο



Σχήμα 2.1: Αναπαράσταση ακολουθίας στην πραγματική ευθεία.



Σχήμα 2.2: Αναπαράσταση ακολουθίας στο επίπεδο.

δεύτερος τρόπος γεωμετρικής αναπαράστασης μίας ακολουθίας (x_n) χρησιμοποιεί δυο κάθετες πραγματικές ευθείες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη, με κοινό το σημείο 0. Στην οριζόντια ευθεία τοποθετούμε τις τιμές του n και στην κατακόρυφη τις τιμές του αντίστοιχου x_n. Κατόπιν σχεδιάζουμε τα σημεία (n, x_n) του επιπέδου και λέμε ότι αυτά τα σημεία αναπαριστούν την ακολουθία (x_n).

Ασκήσεις.

2.1.1. Βρείτε τους τρεις πρώτους όρους των ακολουθιών με n-οστό όρο:

$$\tfrac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad \tfrac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n}, \quad \tfrac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 4\cdots(2n)}, \quad \tfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}, \quad \tfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}.$$

2.1.2. Μας δίνουν τους έξι πρώτους όρους μίας άγνωστης ακολουθίας: $1, 4, 9, 16, 25, 36$. Αν ζητηθεί να μαντέψουμε τον έβδομο όρο ποιά από τις επόμενες τρεις είναι η σωστή απάντηση; (i) Το 49. (ii) Το 24. (iii) Οποιοσδήποτε αριθμός είναι πιθανός έβδομος όρος.

2.1.3. (i) Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών με n-οστό όρο:

$$n, \quad (-1)^{n-1}, \quad \tfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}, \quad \tfrac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\tfrac{a-b}{2}.$$

(ii) Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών $\big(n-2[\frac{n}{2}]\big)$, $\big(n-3[\frac{n}{3}]\big)$ και $\big(n-4[\frac{n}{4}]\big)$. Γενικότερα, αν το m είναι φυσικός βρείτε το σύνολο των όρων της $\big(n - m[\frac{n}{m}]\big)$.

2.1.4. Γραμμικοί αναδρομικοί τύποι. Έστω αριθμοί a, b, p, q, όπου τα p, q δεν είναι και τα δύο 0. Θεωρούμε ακολουθία (x_n) η οποία ορίζεται από τους δύο πρώτους όρους της και από *αναδρομικό τύπο* ως εξής:

$$x_1 = a, x_2 = b \qquad \text{και} \qquad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \quad n \geq 1.$$

Θα περιγράψουμε γενική μέθοδο υπολογισμού του n-οστού όρου x_n.
Περίπτωση 1: $p \neq 0, q = 0$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.
Περίπτωση 2: $p = 0, q \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$ αν το n είναι περιττό και ότι $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$ αν το n είναι άρτιο.
Περίπτωση 3: $p \neq 0, q \neq 0$. Θεωρήστε την πολυωνυμική εξίσωση $x^2 = px + q$.

(i) Αν $\Delta = p^2 + 4q > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο (διαφορετικές) λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ ώστε $\kappa + \lambda = a$ και $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = b$ και βρείτε τα. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$x_n = \kappa\rho_1^{n-1} + \lambda\rho_2^{n-1}$$

για κάθε $n \geq 1$.
(ii) Αν $\Delta = p^2 + 4q = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια λύση, την $\rho = \frac{p}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ ώστε $\kappa = a$ και $\kappa\rho + \lambda\rho = b$ και βρείτε τα. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$$

για κάθε $n \geq 1$.
(iii) Αν $\Delta = p^2 + 4q < 0$ (οπότε $q < 0$) τότε η εξίσωση έχει δύο (διαφορετικές) συζυγείς μιγαδικές λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{p-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Πάρτε $\rho = \sqrt{-q} > 0$ και παρατηρήστε ότι $\left(\frac{p}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}\right)^2 = 1$ οπότε υπάρχει μοναδικό θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ ώστε $\cos\theta = \frac{p}{2\rho}$ και $\sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}$. Συνεπάγεται $\rho_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $\rho_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$. Αποδείξτε ότι $\rho^2\cos(2\theta) = p\rho\cos\theta + q$ και $\rho^2\sin(2\theta) = p\rho\sin\theta$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ ώστε $\kappa = a$ και $\kappa\rho\cos\theta + \lambda\rho\sin\theta = b$ και βρείτε τα. Τέλος, αποδείξτε ότι ισχύει

$$x_n = \kappa\rho^{n-1}\cos((n-1)\theta) + \lambda\rho^{n-1}\sin((n-1)\theta)$$

για κάθε $n \geq 1$.
Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να υπολογίσετε τον n-οστό όρο καθεμίας από τις τέσσερις ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από τους (κοινούς και για τις τέσσερις) πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. Η δεύτερη ακολουθία ονομάζεται **ακολουθία Fibonnaci** και οι επτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

2.1.5. Ποιοί αρχικοί όροι (και με τί περιορισμούς) χρειάζονται για να ορισθεί η ακολουθία (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για καθέναν από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$ και $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$.

2.1.6. (i) Αν η (x_n) είναι αύξουσα και φθίνουσα αποδείξτε ότι είναι σταθερή.
(ii) Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα αν και μόνο αν η $(-x_n)$ είναι φθίνουσα ή αύξουσα, αντιστοίχως.

2.1.7. (i) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.
(ii) Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη αν και μόνο αν η $(-x_n)$ είναι κάτω φραγμένη ή άνω φραγμένη, αντιστοίχως.

2.1.8. Θεωρήστε τις ακολουθίες με n-οστό όρο:

$$(-1)^{n-1}n, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad 2^n, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \frac{n^{30}}{2^n}, \quad \frac{8n-1}{n^2+n+1}, \quad \binom{n+15}{16}, \quad \frac{8^n}{n!}, \quad 2\left[\frac{n}{2}\right], \quad n - 3\left[\frac{n}{3}\right].$$

Ποιές από αυτές είναι μονότονες; γνησίως μονότονες; Παρατηρήστε ότι μερικές από τις ακολουθίες αυτές, ενώ δεν είναι μονότονες, έχουν την ιδιότητα να είναι μονότονες *από κάποια τιμή του δείκτη και πέρα*: προσδιορίστε τις. Ποιές από τις ακολουθίες είναι άνω φραγμένες; κάτω φραγμένες; φραγμένες;

2.2 Όριο ακολουθίας.

Παράδειγμα. Ας παρατηρήσουμε τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$. Αυτοί είναι οι

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \ldots, \frac{1}{100000}, \ldots, \frac{1}{100000000}, \ldots .$$

Είναι σαφές ότι καθώς *αυξάνεται* ο δείκτης n ο αντίστοιχος όρος $\frac{1}{n}$ της ακολουθίας μικραίνει. Μάλιστα, όχι μόνο μικραίνει το $\frac{1}{n}$, αλλά είναι φανερό ότι πλησιάζει το 0 ή, με άλλα λόγια, ότι το $\frac{1}{n}$ γίνεται *απεριόριστα* μικρό.

Παράδειγμα. Ας δούμε τώρα τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $(\frac{n-1}{n})$:

$$0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \ldots, \tfrac{99}{100}, \tfrac{100}{101}, \ldots, \tfrac{99999}{100000}, \ldots, \tfrac{99999999}{100000000}, \ldots .$$

Καθώς *αυξάνεται* το n ο αντίστοιχος όρος $\frac{n-1}{n}$ επίσης αυξάνεται και μάλιστα πλησιάζει το 1. Πράγματι, η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από το 1 είναι ίση με $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$ και, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, γίνεται *απεριόριστα* μικρή.

Στα παραδείγματα αυτά είδαμε δύο ακολουθίες (x_n) με την εξής κοινή ιδιότητα:

Καθώς αυξάνεται ο δείκτης n η απόσταση του x_n από κάποιον αριθμό x γίνεται απεριόριστα μικρή.

Επειδή η ιδιότητα της προσέγγισης των όρων μίας ακολουθίας σε κάποιον αριθμό είναι εξαιρετικά σημαντική θα την μελετήσουμε διεξοδικά ώστε *να την περιγράψουμε/ορίσουμε με αυστηρή μαθηματική γλώσσα*. Στα προηγούμενα παραδείγματα οι ακολουθίες ήταν αρκετά απλές και μπορέσαμε εύκολα να διακρίνουμε (ακόμη και από την απλή αναπαράσταση των όρων τους από σημεία της πραγματικής ευθείας) ότι αυτές έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Υπάρχουν όμως πολύ πιο περίπλοκες ακολουθίες για τις οποίες δεν αρκεί (και δεν είναι εφικτή) η γεωμετρική αναπαράστασή τους οπότε χρειαζόμαστε έναν αυστηρό ορισμό ο οποίος θα επιτρέψει έναν “αναλυτικό” έλεγχο για το αν αυτές έχουν την ιδιότητα για την οποία μιλάμε.

Όταν λέμε ότι η απόσταση του x_n από το x γίνεται *απεριόριστα* μικρή εννοούμε ότι η παράσταση $|x_n - x|$ γίνεται *μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό*. Άρα η κοινή ιδιότητα των δύο ακολουθιών επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Η $|x_n - x|$ γίνεται μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό όταν το n αυξάνεται.

Φτάσαμε στο κρίσιμο σημείο. Ας δούμε ξανά το:

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Η απόσταση του $\frac{1}{n}$ από το 0 είναι ίση με $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ και, όπως έχουμε ήδη πει, γίνεται μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό όταν το n αυξάνεται. Τί ακριβώς σημαίνει αυτό;
Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό, για παράδειγμα το 0.000132. Πότε θα γίνει η απόσταση $\frac{1}{n}$ μικρότερη από το 0.000132; Δηλαδή πότε θα γίνει $\frac{1}{n} < 0.000132$ ή, ισοδύναμα (λύνοντας ως προς n), πότε θα γίνει $n > \frac{1000000}{132}$; Ποιοί φυσικοί αριθμοί n είναι $> \frac{1000000}{132}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 7576 είναι $> \frac{1000000}{132}$ (ενώ ο φυσικός 7575 είναι $\leq \frac{1000000}{132}$). Άρα όταν ο δείκτης n γίνει ≥ 7576 τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.000132. Ας πάρουμε τώρα, ως δεύτερο παράδειγμα, τον μικρό θετικό αριθμό 0.0000000000132. Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι όταν ο δείκτης n γίνει ≥ 75757575758 τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.0000000000132.
Αυτήν την διαδικασία μπορούμε να την επαναλάβουμε πολλές φορές: κάθε φορά επιλέγουμε έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό (όπως τα 0.000132 και 0.0000000000132) και μετά βρίσκουμε έναν αντίστοιχο φυσικό αριθμό (όπως τα 7576 και 75757575758) έτσι ώστε όταν το n αυξανόμενο ξεπεράσει αυτόν τον φυσικό αριθμό το $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερο από τον μικρό θετικό αριθμό τον οποίο επιλέξαμε αρχικά.
Βέβαια εμείς θέλουμε να ελέγξουμε αν το $\frac{1}{n}$ γίνεται μικρότερο από *οποιονδήποτε* θετικό αριθμό. Οι θετικοί αριθμοί είναι άπειροι και όσες φορές κι αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία ποτέ δεν θα τελειώσουμε. Γι αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς αλλά τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, το σύμβολο ϵ για παράδειγμα, και να δούμε αν και πότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερη από το ϵ. Απλώς επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα: θα γίνει $\frac{1}{n} < \epsilon$ όταν θα γίνει $n > \frac{1}{\epsilon}$ και αυτό, *πράγματι*, θα συμβεί όταν το n αυξανόμενο ξεπεράσει κάποιον κατάλληλο φυσικό αριθμό. Αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος 1.1: *για κάθε $\epsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε όλοι οι $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ να είναι $> \frac{1}{\epsilon}$.*

Είναι φανερό (και με τα δύο συγκεκριμένα ϵ τα οποία εξετάσαμε) ότι η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του ϵ. Μπορούμε άραγε να υπολογίσουμε το n_0 (συναρτήσει του ϵ) από το οποίο και πέρα ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$; Θα κάνουμε ό,τι κάναμε για τα συγκεκριμένα παραδείγματα. Γράφουμε την $\frac{1}{n} < \epsilon$ ως $n > \frac{1}{\epsilon}$ (δηλαδή λύνουμε ως προς n) και σκεφτόμαστε ότι:

Αν $a \geq 0$ τότε ο πιο μικρός φυσικός $> a$ είναι το $n_0 = [a] + 1$. Αν $a < 0$ τότε ο πιο μικρός φυσικός $> a$ είναι το $n_0 = 1$.

Για παράδειγμα: ο πιο μικρός φυσικός $> \frac{25}{3}$ είναι (επειδή $8 < \frac{25}{3} < 9$) το $9 = [\frac{25}{3}] + 1$ και ο πιο μικρός φυσικός > 8 είναι και πάλι το $9 = 8 + 1 = [8] + 1$. Ο πιο μικρός φυσικός > -4 είναι το $n_0 = 1$.
Άρα (επειδή $\frac{1}{\epsilon} > 0$) το n_0 το οποίο ψάχνουμε είναι το $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Εργαζόμενοι με το γενικό θετικό ϵ (εκτός από το ότι αυτό είναι το σωστό) έχουμε καταφέρει να βρούμε και έναν γενικό τύπο για το n_0 συναρτήσει του ϵ οπότε για κάθε συγκεκριμένο ϵ μπορούμε να υπολογίζουμε αμέσως το αντίστοιχο κατάλληλο n_0.

Όσα είπαμε στο τελευταίο παράδειγμα για την ακολουθία $(\frac{1}{n})$ επαναλαμβάνονται απαράλλακτα για την ακολουθία $(\frac{n-1}{n})$, αφού η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από το 1 είναι ίση με την απόσταση του $\frac{1}{n}$ από το 0. Επαναδιατυπώνουμε λοιπόν (τρίτη φορά) με *ποσοτικούς όρους* την κοινή ιδιότητα των δύο ακολουθιών ως εξής:

Η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό ϵ όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού αριθμού n_0.

Διατυπώνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. *Λέμε ότι η (x_n)* **συγκλίνει** *στο x ή* **τείνει** *στο x ή ότι το x είναι το* **όριο** *της (x_n) αν η απόσταση $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού n_0 ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ όταν $n \geq n_0$. Το ότι η (x_n) συγκλίνει στο x το συμβολίζουμε*

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim_n x_n = x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Αν μία ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό τότε λέμε ότι η (x_n) **αποκλίνει**.

Ας επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους. Η (x_n) συγκλίνει στο x αν *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$* ή, ισοδύναμα, *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$* ή, ισοδύναμα, *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $|x_n - x| < \epsilon$.*

Σχήμα 2.3: $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο του ορίου $x_n \to x$; Σε συνδυασμό με το χρονικό μοντέλο για τον δείκτη n, δηλαδή αν δεχτούμε ότι το n μετρά χρόνο, το $x_n \to x$ σημαίνει ότι *το σημείο x_n μετακινούμενο πάνω στην πραγματική ευθεία πλησιάζει το σημείο x όταν αυξάνεται ο χρόνος n.*

Παράδειγμα. Σύμφωνα με τα δύο προηγούμενα παραδείγματα: $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{n-1}{n} \to 1$.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, δηλαδή η $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$. Η απόσταση του n-οστού όρου από το 0 είναι $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ οπότε και πάλι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σταθερή ακολουθία (c), δηλαδή την $c, c, c, c, \ldots$. Τότε

$$c \to c.$$

Πράγματι, οι αποστάσεις *όλων* των όρων της ακολουθίας από το c είναι $|c - c| = 0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε το $n_0 = 1$ και τότε ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία $((-1)^{n-1})$. Οι διαδοχικοί όροι της είναι οι

$$1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

Καθώς κυλά ο χρόνος n το σημείο $(-1)^{n-1}$ "πηδά" από το σημείο 1 στο σημείο -1 και ξανά πίσω στο σημείο 1 και ούτω καθ' εξής χωρίς να πλησιάζει κάποιο συγκεκριμένο σημείο. Επομένως η $((-1)^{n-1})$ δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι "μισοί" όροι της ακολουθίας πλησιάζουν (και μάλιστα ταυτίζονται με) το σημείο 1 και οι άλλοι "μισοί" πλησιάζουν (και μάλιστα ταυτίζονται με) το σημείο -1.

Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αποκλίνει.

Ας δούμε λοιπόν μία μαθηματική απόδειξη του ότι η $((-1)^{n-1})$ δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η $((-1)^{n-1})$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό x. Τότε για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|(-1)^{n-1} - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Όποιο κι αν είναι το n_0 υπάρχουν και άρτια $n \geq n_0$ και περιττά $n \geq n_0$. Επομένως από τα άρτια $n \geq n_0$ θα προκύψει ότι ισχύει $|-1 - x| < \epsilon$ και από τα περιττά $n \geq n_0$ θα προκύψει ότι ισχύει $|1 - x| < \epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι για *κάθε* $\epsilon > 0$ ισχύει $|-1 - x| < \epsilon$ *και* $|1 - x| < \epsilon$. Επομένως με $\epsilon = 1$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $|-1 - x| < 1$ *και* $|1 - x| < 1$. Άρα ισχύει $x < 0$ *και* $x > 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατο όποιο κι αν είναι το x.

Για να αποδείξουμε ένα όριο $x_n \to x$ *χρησιμοποιώντας τον ορισμό* θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Θα παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θα δημιουργούμε μία "αλυσίδα" από ανισότητες, αρχίζοντας από την $|x_n - x| < \epsilon$ και καταλήγοντας σε μία ανισότητα της μορφής $n > a$ προσέχοντας ώστε *κάθε ανισότητα να συνεπάγεται την προηγούμενή της*. Αυτό σε κάθε βήμα εκφράζεται ως εξής: "η ανισότητα$_1$ συνεπάγεται από την ανισότητα$_2$" ή, συμβολικά, "ανισότητα$_1$ $\Leftarrow$ ανισότητα$_2$". Δηλαδή

$$|x_n - x| < \epsilon \Leftarrow \ldots \Leftarrow \ldots \Leftarrow \ldots \Leftarrow n > a.$$

Όταν φτάνουμε στην ανισότητα $n > a$ θα θεωρούμε τον *φυσικό* αριθμό $n_0 = [a] + 1$ αν $a \geq 0$ ή τον $n_0 = 1$ αν $a < 0$ και τότε θα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > a$ οπότε, *λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών*, ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Ας δούμε μία γενίκευση της $(\frac{1}{n})$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $a > 0$ και την ακολουθία $(\frac{1}{n^a})$, δηλαδή την $1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, \ldots$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{n^a} \to 0 \qquad (a > 0).$$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$.
Σκεφτόμαστε ότι η $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{n^a} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n^a > \frac{1}{\epsilon}$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > (\frac{1}{\epsilon})^{1/a}$. Τώρα, επειδή $(\frac{1}{\epsilon})^{1/a} > 0$, θεωρούμε το $n_0 = [(\frac{1}{\epsilon})^{1/a}] + 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > (\frac{1}{\epsilon})^{1/a}$ και επομένως ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία (a^n), δηλαδή την $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$. Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο και ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος** με λόγο a.
Αν $a = 1$ τότε προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στο 1. Επίσης, αν $a = 0$

τότε προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στο 0.
Αν $0 < |a| < 1$ θα δούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο 0. Τυπικά παραδείγματα είναι τα $a = \pm\frac{1}{2}$ και τα $a = \pm\frac{1}{10}$. Αν $a = \frac{1}{2}$ τότε προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$ και αν $a = -\frac{1}{10}$ τότε προκύπτει η $-\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, -\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \ldots$. Υπολογίζοντας πρόχειρα μερικούς όρους τους για αρκετά μεγάλους δείκτες, καταλαβαίνουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.
Έστω, γενικότερα, $0 < |a| < 1$ και ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Η $|a^n - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|a|^n < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \log_{|a|} \epsilon$. Τώρα, ισχύει $\log_{|a|} \epsilon \geq 0$ αν $0 < \epsilon \leq 1$ και ισχύει $\log_{|a|} \epsilon < 0$ αν $\epsilon > 1$. Άρα θεωρούμε το $n_0 = [\log_{|a|} \epsilon] + 1$ όταν $\epsilon \leq 1$ ή το $n_0 = 1$ όταν $\epsilon > 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_{|a|} \epsilon$ και άρα ισχύει $|a^n - 0| < \epsilon$.
Αν $a \leq -1$ θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Την περίπτωση $a = -1$ την έχουμε ήδη εξετάσει. Ας υποθέσουμε πάλι, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $a^n \to x$ για κάποιο x. Τότε για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|a^n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Για τα περιττά $n \geq n_0$ ισχύει $a^n \leq -1$ (επειδή $a \leq -1$) και από αυτό σε συνδυασμό με το $|a^n - x| < \epsilon$ συνεπάγεται $x < a^n + \epsilon \leq -1 + \epsilon$. Για τα άρτια $n \geq n_0$ ισχύει $a^n \geq 1$ (επειδή $a \leq -1$) και από αυτό σε συνδυασμό πάλι με το $|a^n - x| < \epsilon$ συνεπάγεται $x > a^n - \epsilon \geq 1 - \epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι για *κάθε* $\epsilon > 0$ ισχύει $x < -1 + \epsilon$ *και* $x > 1 - \epsilon$. Με $\epsilon = 1$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $x < 0$ *και* $x > 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση $a > 1$. Αυτό θα γίνει στην επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{1}{n^5+n^2+1} \to 0$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n^5+n^2+1} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $|\frac{1}{n^5+n^2+1} - 0| < \epsilon$.
Τώρα, η $|\frac{1}{n^5+n^2+1} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{n^5+n^2+1} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n^5 + n^2 + 1 - \frac{1}{\epsilon} > 0$. Αυτή η ανίσωση πέμπτου βαθμού δεν λύνεται ως προς n. Σε μία τέτοια περίπτωση κάνουμε κάτι για να απλοποιήσουμε την κατάσταση. Όταν φτάνουμε στην $\frac{1}{n^5+n^2+1} < \epsilon$ αντικαθιστούμε την παράσταση $\frac{1}{n^5+n^2+1}$ με την *μεγαλύτερη και απλούστερη* $\frac{1}{n}$ και χρησιμοποιούμε το ότι:

Αν $a \leq b$ τότε η ανισότητα $a < \epsilon$ συνεπάγεται από την $b < \epsilon$.

Πάμε από την αρχή. Η $|\frac{1}{n^5+n^2+1} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{n^5+n^2+1} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $\frac{1}{n} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{1}{\epsilon}$. Και τώρα, επειδή $\frac{1}{\epsilon} > 0$, θεωρούμε το $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\epsilon}$ και επομένως ισχύει $|\frac{1}{n^5+n^2+1} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την (x_n) όπου $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n} = \begin{cases} 2/n & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο} \\ 1/n & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό} \end{cases}$ Δηλαδή την ακολουθία $1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \ldots$. Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to 0$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Η $|x_n - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται (επειδή $x_n \geq 0$ για κάθε n) από την $x_n < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται (επειδή $x_n \leq \frac{2}{n}$ για κάθε n) από την $\frac{2}{n} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{2}{\epsilon}$. Επειδή $\frac{2}{\epsilon} > 0$, θεωρούμε το $n_0 = [\frac{2}{\epsilon}] + 1$ οπότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{2}{\epsilon}$ και επομένως ισχύει $|x_n - 0| < \epsilon$.
Παρατηρήστε ότι, επειδή είναι λίγο άβολο να χειριστούμε την ανίσωση $x_n < \epsilon$ (λόγω του διπλού τύπου του x_n), αντικαταστήσαμε το x_n με το απλούστερο και μεγαλύτερο $\frac{2}{n}$ εφαρμόζοντας την τεχνική του προηγούμενου παραδείγματος.
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η (x_n) δεν είναι φθίνουσα παρά το ότι όλοι οι όροι της είναι > 0 και συγκλίνει στο 0: δείτε την άσκηση 2.2.1.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{\sin n}{n} \to 0$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Η $|\frac{\sin n}{n} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{|\sin n|}{n} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται (επειδή $\frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$) από την $\frac{1}{n} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{1}{\epsilon}$. Επειδή $\frac{1}{\epsilon} > 0$, επιλέγουμε το $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\epsilon}$ οπότε ισχύει $|\frac{\sin n}{n} - 0| < \epsilon$.
Και πάλι, επειδή η $\frac{|\sin n|}{n} < \epsilon$ δεν λύνεται ως προς n, αντικαταστήσαμε την παράσταση $\frac{|\sin n|}{n}$ με την μεγαλύτερη και απλούστερη $\frac{1}{n}$.

Ασκήσεις.

2.2.1. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό $n \geq 3$.

2.2.2. Βάσει αποτελεσμάτων της ενότητας αυτής και χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα ϵ και n_0 αποδείξτε ότι:

$$n^{-8/3} \to 0, \quad \frac{1}{n\sqrt{n}} \to 0, \quad \frac{3^n}{4^n} \to 0, \quad \frac{(-1)^n 8^n}{3^{2n}} \to 0.$$

2.2.3. Ιδού κάποια προτεινόμενα όρια: $\frac{n-2}{3n+4} \to \frac{1}{3}$, $\frac{3n}{n+3} \to 2$, $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$.
Ποιά από αυτά νομίζετε ότι είναι σωστά; Για να απαντήσετε βρείτε τον τύπο για την απόσταση του n-οστού όρου από το προτεινόμενο όριο και προσπαθήστε να καταλάβετε όσο πιο πειστικά γίνεται αν η απόσταση αυτή γίνεται απεριόριστα μικρή όταν το n αυξάνεται. Προσπαθήστε επίσης να αποκτήσετε *αίσθηση* της προσέγγισης των όρων των ακολουθιών αυτών προς τα *σωστά* όρια υπολογίζοντας όσο το δυνατό περισσότερους αρχικούς όρους τους καθώς και υπολογίζοντας όρους τους επιλέγοντας τυχαία σκόρπιους μεγάλους δείκτες n (για παράδειγμα, $n = 1000, 10000$ κ.τ.λ.). Μην χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα ϵ και n_0.

2.2.4. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $\epsilon > 0$ και, υπολογίζοντας κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του ϵ, όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad \frac{1}{n^5} \to 0, \quad \frac{1}{10^n} \to 0, \quad (-\tfrac{1}{3})^n \to 0, \quad \frac{1}{n^2+5} \to 0, \quad \frac{3n-1}{4n+5} \to \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{n+2\sqrt{n}} \to 0,$$

$$\frac{n^2-n+1}{3n^2+2} \to \frac{1}{3}, \quad \frac{2\sqrt{n}+3}{2-3\sqrt{n}} \to -\frac{2}{3}, \quad \frac{\cos n}{n\sqrt{n}} \to 0, \quad \frac{\cos(2n)+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \to 1, \quad \frac{1}{2^n+3n} \to 0.$$

2.2.5. Η *άρνηση* του $x_n \to x$, δηλαδή το ότι η (x_n) *δεν* συγκλίνει στο x, διατυπώνεται ως εξής: *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n_0 \in \mathbb{N}$ *να υπάρχει* $n \geq n_0$ *τέτοιο ώστε* $|x_n - x| \geq \epsilon$. Συμφωνείτε;

2.2.6. Έστω ότι το σύνολο των όρων της (x_n) είναι πεπερασμένο. Αν $x_n \to x$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι σταθερή από κάποια τιμή του n και πέρα και ότι το x είναι ο σταθερός όρος της.

2.3 Τα $\pm\infty$ ως όρια ακολουθιών.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία (n^2) με διαδοχικούς όρους $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$. Είναι φανερό ότι καθώς *αυξάνεται* ο δείκτης n ο αντίστοιχος όρος n^2 της ακολουθίας γίνεται *απεριόριστα* μεγάλος.

Στο παράδειγμα έχουμε μία ακολουθία (x_n) με την εξής ιδιότητα:

Καθώς αυξάνεται ο δείκτης n *το* x_n *γίνεται απεριόριστα μεγάλο.*

Όταν λέμε ότι το x_n γίνεται *απεριόριστα* μεγάλο εννοούμε ότι το x_n γίνεται *μεγαλύτερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό*. Άρα η ιδιότητα της ακολουθίας στο παράδειγμα επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Το x_n *γίνεται μεγαλύτερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό όταν το* n *αυξάνεται.*

Για να ελέγξουμε αυτό το τελευταίο για οποιαδήποτε συγκεκριμένη ακολουθία κάνουμε το εξής. Θεωρούμε τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο M, και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός αριθμός n_0 ώστε αν το n γίνει $\geq n_0$ τότε το x_n θα γίνει $> M$. Φυσικά η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του M.

Διατυπώνουμε λοιπόν τον εξής ορισμό.

Ορισμός. *Λέμε ότι η (x_n)* **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή* **τείνει** *στο $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ είναι το* **όριο** *της (x_n) αν το x_n θα γίνει μεγαλύτερο από οποιοδήποτε $M > 0$ όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού n_0 ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > M$ όταν $n \geq n_0$. Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ το συμβολίζουμε*

$$x_n \to +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_n x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Ο ορισμός αυτός επαναδιατυπώνεται με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους. Η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν *για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$* ή, ισοδύναμα, *για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n > M$* ή, ισοδύναμα, *για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $x_n > M$.*

Σχήμα 2.4: $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Έχουμε και τον εξής "συμμετρικό" ορισμό.

Ορισμός. *Λέμε ότι η (x_n)* **αποκλίνει** *στο $-\infty$ ή* **τείνει** *στο $-\infty$ ή ότι το $-\infty$ είναι το* **όριο** *της (x_n) αν το x_n θα γίνει μικρότερο από οποιοδήποτε $-M < 0$ όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού n_0 ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n < -M$ αν $n \geq n_0$. Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ το συμβολίζουμε*

$$x_n \to -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_n x_n = -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο των ορίων $x_n \to +\infty$ και $x_n \to -\infty$; Τα $x_n \to +\infty$ και $x_n \to -\infty$ σημαίνουν ότι *το σημείο x_n μετακινούμενο πάνω στην πραγματική ευθεία απομακρύνεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, αντιστοίχως, όταν το n αυξάνεται.*

Παράδειγμα. Γενικεύοντας την περίπτωση της ακολουθίας (n^2) του προηγούμενου παραδείγματος παίρνουμε οποιοδήποτε $a > 0$ και θεωρούμε την ακολουθία (n^a), δηλαδή την $1, 2^a, 3^a, 4^a, \ldots$. Θα δούμε ότι:

$$n^a \to +\infty \qquad (a > 0).$$

Για παράδειγμα: $n\sqrt{n} \to +\infty$, $\sqrt[5]{n} \to +\infty$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $n^a > M$. Σκεφτόμαστε ότι η $n^a > M$ συνεπάγεται από την $n > M^{\frac{1}{a}}$. Επομένως αν θεωρήσουμε το $n_0 = [M^{\frac{1}{a}}] + 1$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > M^{\frac{1}{a}}$ και άρα ισχύει $n^a > M$.

Παράδειγμα. Η ανισότητα $-n^a < -M$ είναι ισοδύναμη με την $n^a > M$. Επομένως από τα προηγούμενα παραδείγματα είναι φανερό ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $-n^a < -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $-n^a \to -\infty$ όταν $a > 0$.

Παράδειγμα. Παίρνουμε $a > 1$ και θεωρούμε την ακολουθία $(\log_a n)$, δηλαδή την $\log_a 1 = 0, \log_a 2, \log_a 3, \log_a 4, \ldots$. Θα δούμε ότι:

$$\log_a n \to +\infty \qquad (a > 1).$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και παρατηρούμε ότι η $\log_a n > M$ συνεπάγεται από την $n > a^M$. Θεωρώντας το $n_0 = [a^M] + 1$ βλέπουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > a^M$ και επομένως ισχύει $\log_a n > M$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε πάλι την περίπτωση $a \leq -1$ για την γεωμετρική πρόοδο (a^n). Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση η (a^n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό και θα δούμε τώρα ότι δεν έχει όριο $+\infty$ ούτε $-\infty$. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $a^n \to +\infty$. Τότε για *κάθε* $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικώτερα, πρέπει να ισχύει $a^n > M$ για κάθε περιττό $n \geq n_0$. Αυτό όμως είναι αδύνατο! Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $a^n \to -\infty$.
Επομένως η (a^n) δεν έχει κανένα όριο: ούτε αριθμό, ούτε το $+\infty$, ούτε το $-\infty$.
Τέλος, παίρνουμε $a > 1$ και θα δούμε ότι στην περίπτωση αυτή η γεωμετρική πρόοδος αποκλίνει στο $+\infty$. Τυπικά παραδείγματα είναι οι ακολουθίες $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ και $10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$.
Παίρνουμε λοιπόν οποιοδήποτε $M > 0$ και παρατηρούμε ότι η $a^n > M$ συνεπάγεται από την $n > \log_a M$. Τώρα, ισχύει $\log_a M \geq 0$ αν $M \geq 1$ και ισχύει $\log_a M < 0$ αν $M < 1$. Άρα αν θεωρήσουμε το $n_0 = [\log_a M] + 1$ αν $M \geq 1$ και το $n_0 = 1$ αν $M < 1$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_a M$ και επομένως ισχύει $a^n > M$.
Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα για την γεωμετρική πρόοδο:

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι $n^7 + 2n^2 - n \to +\infty$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$. Προσπαθώντας να δούμε αν η $n^7 + 2n^2 - n > M$ συνεπάγεται από την $n \geq n_0$ για κάποιο κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι η ανισότητα αυτή δεν λύνεται ως προς n. Όπως σε ένα ανάλογο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, σε μία τέτοια περίπτωση απλοποιούμε την κατάσταση ως εξής. Όταν φτάνουμε στην $n^7 + 2n^2 - n > M$ αντικαθιστούμε το $n^7 + 2n^2 - n$ με το *μικρότερο και απλούστερο* n και χρησιμοποιούμε το ότι:

Αν $a \geq b$ τότε η ανισότητα $a > M$ συνεπάγεται από την $b > M$.

Προχωράμε ως εξής. Η $n^7 + 2n^2 - n > M$ συνεπάγεται από την $n > M$. Άρα θεωρούμε το $n_0 = [M] + 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > M$ οπότε ισχύει $n^7 + 2n^2 - n > M$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την (x_n) όπου $x_n = \frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2} = \begin{cases} n, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό} \\ 2n, & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο} \end{cases}$ Θεωρούμε δηλαδή την ακολουθία $1, 4, 3, 8, 5, 12, 7, 16, \ldots$. Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$. Η $x_n > M$ συνεπάγεται (επειδή $x_n \geq n$) από την $n > M$. Άρα θεωρούμε το $n_0 = [M] + 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > M$ και επομένως ισχύει $x_n > M$.
Και πάλι, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, επειδή είναι άβολο να χειριστούμε την ανίσωση $x_n > M$ (λόγω του διπλού τύπου του x_n) αντικαταστήσαμε το x_n με το απλούστερο και μικρότερο n.
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η (x_n) δεν είναι αύξουσα παρά το ότι αποκλίνει στο $+\infty$. Δείτε την άσκηση 2.3.1.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^2+n}{n+3} \to +\infty$.
Έστω οποιοδήποτε $M > 0$. Η $\frac{n^2+n}{n+3} > M$ συνεπάγεται από την $n^2 + (1-M)n - 3M > 0$. Η ανισότητα αυτή είναι δευτέρου βαθμού και λύνεται ως προς n. Όμως αν το προσπαθήσουμε θα δούμε ότι προκύπτουν αρκετές τεχνικές λεπτομέρειες με τετραγωνικές ρίζες και περιπτώσεις και γι αυτό προτιμάμε να απλοποιήσουμε εξ αρχής την κατάσταση εφαρμόζοντας την τεχνική των προηγουμένων δύο παραδειγμάτων. Αντικαθιστούμε το $\frac{n^2+n}{n+3}$ με κάτι άλλο απλούστερο και μικρότερο. Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\frac{n^2+n}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n}{4}$. Άρα η $\frac{n^2+n}{n+3} > M$ συνεπάγεται από την $\frac{n}{4} > M$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > 4M$. Αν θεωρήσουμε το $n_0 = [4M] + 1$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > 4M$ και επομένως ισχύει $\frac{n^2+n}{n+3} > M$.

Χρησιμοποιούμε την λέξη *όριο* και τα σύμβολα $\to$, $\lim_n$, $\lim_{n\to+\infty}$ όταν μία ακολουθία έχει όριο, είτε η ακολουθία συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Προσέξτε: χρησιμοποιούμε το ρήμα *συγκλίνει* μόνο όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα *αποκλίνει* σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο είναι ένα από τα $\pm\infty$ ή όταν δεν υπάρχει όριο.

Ασκήσεις.

2.3.1. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό n.

2.3.2. Βάσει αποτελεσμάτων της ενότητας αυτής και χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα M και n_0 αποδείξτε ότι:

$$\tfrac{n^2}{\sqrt{n}} \to +\infty, \quad \log_3 n \to +\infty, \quad \tfrac{2^{2n}}{3^n} \to +\infty, \quad (-3)^{2n} \to +\infty, \quad \text{το } (-3)^{3n} \text{ δεν έχει όριο.}$$

2.3.3. Αποδείξτε ότι
(i) το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}$ υπάρχει αν και μόνο αν $x > -1$.
(ii) το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$ υπάρχει αν και μόνο αν $-2-\sqrt{2} < x < -2+\sqrt{2}$ ή $x > -\frac{1}{2}$.

2.3.4. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα M και n_0 βρείτε με πειστικό τρόπο ποιές από τις ακολουθίες με n-οστό όρο

$$n^2 - 18n - 4, \quad 7n - \tfrac{1}{30}n^2, \quad \tfrac{n}{30\sqrt{n}+1}, \quad \tfrac{1-n}{1+\sqrt{n}}, \quad \tfrac{n^2+1}{n+100}$$

αποκλίνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Για να αποκτήσετε *αίσθηση* του πόσο μεγάλοι (θετικοί ή αρνητικοί) γίνονται οι όροι των ακολουθιών αυτών μπορείτε να υπολογίσετε αρκετούς (πόσους;) αρχικούς όρους τους καθώς και να υπολογίσετε όρους τους επιλέγοντας τυχαία σκόρπιους πολύ μεγάλους δείκτες n.

2.3.5. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων, δηλαδή, παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M, όπως κάναμε στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι

$$n^4 \to +\infty, \quad -\sqrt[3]{n} \to -\infty, \quad 3^n \to +\infty, \quad \log_2 \tfrac{1}{n} \to -\infty, \quad n + (-1)^{n-1} \to +\infty,$$

$$n^2 - 3n \to +\infty, \quad \tfrac{n^2-5}{2n+1} \to +\infty, \quad 2^n - n \to +\infty, \quad n(2+\sin n) \to +\infty.$$

2.3.6. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ δεν έχει κανένα όριο.

2.3.7. (i) Η *άρνηση* του $x_n \to +\infty$, δηλαδή το ότι η (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $+\infty$, διατυπώνεται ως εξής: *υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n_0 \in \mathbb{N}$ *να υπάρχει* $n \geq n_0$ *τέτοιο ώστε* $x_n \leq M$. Συμφωνείτε;
(ii) Η *άρνηση* του $x_n \to -\infty$, δηλαδή το ότι η (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $-\infty$, διατυπώνεται ως εξής: *υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n_0 \in \mathbb{N}$ *να υπάρχει* $n \geq n_0$ *τέτοιο ώστε* $x_n \geq -M$. Συμφωνείτε;

2.4 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Α. Ισότητα ορίων.

Παρατηρήστε τις ακολουθίες $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ και $-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$. Η πρώτη είναι η γνωστή μας ακολουθία $(\frac{1}{n})$ η οποία συγκλίνει στο 0. Η δεύτερη ακολουθία ταυτίζεται από τον τρίτο όρο της και πέρα με την πρώτη από τον τέταρτο όρο της και πέρα και είναι φανερό ότι και η δεύτερη ακολουθία συγκλίνει στο 0.

Αυτό ισχύει γενικότερα και η αιτιολόγηση είναι απλή. Το αν μία ακολουθία (x_n) έχει όριο και το ποιά είναι η τιμή αυτού του ορίου εξαρτάται από την συμπεριφορά του όρου x_n όταν ο δείκτης

n είναι αρκετά μεγάλος και επομένως δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της ακολουθίας. Αν λοιπόν αλλάξουμε κάποιους αρχικούς όρους μίας ακολουθίας ή αν παραλείψουμε ή επισυνάψουμε κάποιους αρχικούς όρους (πεπερασμένου πλήθους, οπωσδήποτε) τότε η καινούργια ακολουθία θα έχει το ίδιο όριο με την πρώτη ακολουθία ή δεν θα έχει όριο αν δεν έχει η πρώτη ακολουθία.

Πρόταση 2.1. *Αν δύο ακολουθίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα και η μία από αυτές έχει κάποιο όριο τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Δηλαδή υπάρχουν $N, M \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_N = y_M$, $x_{N+1} = y_{M+1}$, $x_{N+2} = y_{M+2}$ κ.τ.λ. Έστω, επίσης, ότι $x_n \to \rho$. Θα αποδείξουμε ότι $y_n \to \rho$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0'$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $n_0' \leq N$ τότε ισχύει $|x_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$ οπότε ισχύει $|y_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq M$.
Αν $n_0' > N$ τότε γράφουμε $n_0' = N + p_0$ και έχουμε ότι ισχύει $|x_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N + p_0$.
Άρα ισχύει $|y_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq M + p_0$.
Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει $n_0'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|y_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0''$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $n_0'' = M$ και στην δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $n_0'' = M + p_0$.
Άρα $y_n \to \rho$.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι αν $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ τότε $y_n \to +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως. □

Παράδειγμα. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει κάποιο όριο x ή $+\infty$ ή $-\infty$.
Η (x_n) γράφεται και $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$. Θεωρούμε την $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$, δηλαδή την (x_{n+1}). Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως, η νέα ακολουθία έχει το ίδιο όριο x ή $+\infty$ ή $-\infty$. Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για την $x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$, δηλαδή την (x_{n+2}). Γενικότερα, αν $k \in \mathbb{N}$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+k} = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{n+13} \to 0$, $\log_2(n+8) \to +\infty$ και $\frac{1}{2^{n+23}} \to 0$.

Β. Υπακολουθίες.

Ορισμός. *Έστω ακολουθία (x_n). Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots$ του δείκτη n ώστε αυτές να αυξάνουν γνησίως: $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Μετά επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n), δηλαδή τους $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μία άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1}, δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθ' εξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί σχηματίζουν μία νέα ακολουθία, την (x_{n_k}). Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται* **υπακολουθία** *της (x_n).*

Μερικά πιο συγκεκριμένα παραδείγματα υπακολουθιών.

Παράδειγμα. Επιλέγοντας $n_k = 2k$ για κάθε k ορίζεται η **υπακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υπακολουθία (x_{2k}) ή $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots$.

Παράδειγμα. Επιλέγοντας $n_k = 2k - 1$ για κάθε k ορίζεται η **υπακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υπακολουθία (x_{2k-1}) ή $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \ldots$.

Παράδειγμα. Επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k παίρνουμε την ίδια την αρχική ακολουθία (x_k) ή $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$. Άρα μία από τις υπακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n).

Παράδειγμα. Με $n_k = 2^{k-1}$ για κάθε k έχουμε την υπακολουθία $(x_{2^{k-1}})$ ή $x_1, x_2, x_4, x_8, \ldots$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι *ο δείκτης μίας υπακολουθίας (x_{n_k}) είναι το k*. Καθώς το k μεταβάλλεται διατρέχοντας *όλους* τους φυσικούς $1, 2, 3, \ldots$ το αντίστοιχο n_k μεταβάλλεται *γνησίως αυξανόμενο* διατρέχοντας *κάποιους* από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n).

Λήμμα 2.1. *Έστω $n_k \in \mathbb{N}$ και $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k. Τότε ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k.*

Απόδειξη. Η $n_1 \geq 1$ είναι σωστή διότι $n_1 \in \mathbb{N}$. Έστω ότι ισχύει $n_k \geq k$ για κάποιο k. Επειδή $n_{k+1} > n_k$ και $n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $n_{k+1} \geq n_k + 1$ και επομένως $n_{k+1} \geq k+1$. Άρα ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k. □

Πρόταση 2.2. *Αν μία ακολουθία έχει όριο τότε κάθε υπακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$ και υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα για κάθε $k \geq n_0$ ισχύει $n_k \geq n_0$ (επειδή $n_k \geq k$) και άρα ισχύει $|x_{n_k} - x| < \epsilon$. Επομένως $x_{n_k} \to x$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι $x_{n_k} \to +\infty$ αν $x_n \to +\infty$ και ότι $x_{n_k} \to -\infty$ αν $x_n \to -\infty$. □

Η πρόταση 2.2 εφαρμόζεται συνήθως ως εξής: *αν μία ακολουθία έχει δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*

Παράδειγμα. Αν $a \leq -1$ η ακολουθία (a^n) δεν έχει όριο.
Πράγματι, αν $a = -1$ τότε για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{2k-1} = -1 \to -1$ και για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{2k} = 1 \to 1$.
Αν $a < -1$ τότε για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $a^{2k-1} = -|a|^{2k-1} \to -\infty$ (γιατί;) και για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $a^{2k} = |a|^{2k} \to +\infty$ (γιατί;).

Παράδειγμα. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ δεν έχει όριο.
Για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k-1)-1}(2k-1) = 2k-1 \to +\infty$ και για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k)-1}2k = -2k \to -\infty$.

Η πρόταση 2.3 είναι χρήσιμη σε αρκετές περιπτώσεις.

Πρόταση 2.3. *Αν οι υπακολουθίες (x_{2k}) και (x_{2k-1}) της (x_n) έχουν το ίδιο όριο τότε και η (x_n) έχει το ίδιο όριο με αυτές.*

Απόδειξη. Έστω $x_{2k} \to x$ και $x_{2k-1} \to x$. Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $x_{2k} \to x$ συνεπάγεται ότι ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε άρτιο n από κάποιον άρτιο δείκτη n' και πέρα. Επίσης, επειδή $x_{2k-1} \to x$ συνεπάγεται ότι ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε περιττό n από κάποιον περιττό δείκτη n'' και πέρα. Τώρα είναι φανερό ότι ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε n από κάποιον δείκτη (τον μεγαλύτερο από τους n' και n'') και πέρα.
Άρα $x_n \to x$.
Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση $x_{2k} \to +\infty$ και $x_{2k-1} \to +\infty$ καθώς και στην περίπτωση $x_{2k} \to -\infty$ και $x_{2k-1} \to -\infty$. □

Παράδειγμα. Έστω η (x_n) όπου $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n} = \begin{cases} 2/n & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο} \\ 1/n & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό} \end{cases}$ την οποία ξαναείδαμε στην ενότητα 3.2. Τότε $x_{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k} \to 0$ και $x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \to 0$. Άρα $x_n \to 0$.

Γ. Όρια και αλγεβρικές πράξεις.

Ορισμός. *Ορίζουμε τα συμβολικά αντίθετα των συμβόλων $\pm\infty$ ως εξής:*

$$-(+\infty) = -\infty, \qquad -(-\infty) = +\infty.$$

Ονομάζουμε **αντίθετη** της ακολουθίας (x_n) την $(-x_n)$ της οποίας ο n-οστός όρος είναι ο αντίθετος του n-οστού όρου της αρχικής ακολουθίας.

Κανόνας αντιθέτου. *Αν η (x_n) έχει όριο τότε και η $(-x_n)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}(-x_n) = -\lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Παρατηρούμε ότι $|(-x_n) - (-x)| = |x - x_n| = |x_n - x|$. Άρα ισχύει $|(-x_n) - (-x)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $-x_n \to -x$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $-x_n < -M$ για κάθε $n \geq n_0$ οπότε $-x_n \to -\infty = -(+\infty)$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν $x_n \to -\infty$ τότε $-x_n \to +\infty = -(-\infty)$. $\square$

Ορισμός. *Ορίζουμε τα συμβολικά αθροίσματα των συμβόλων $\pm\infty$ μεταξύ τους αλλά και με τους αριθμούς ως εξής:*

$$(+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) + x = -\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Όμως τα αθροίσματα

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad (-\infty) + (+\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Ονομάζουμε **άθροισμα** των $(x_n), (y_n)$ την ακολουθία $(x_n + y_n)$ της οποίας ο n-οστός όρος προκύπτει αθροίζοντας τους n-οστούς όρους των δύο αρχικών ακολουθιών.

Κανόνας αθροίσματος. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το $\lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$, δηλαδή το άθροισμα των δύο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε και η $(x_n + y_n)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0'$ και $n_0'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0''$. Ορίζουμε το $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ οπότε είναι $n_0 \geq n_0'$ και $n_0 \geq n_0''$. Άρα ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > \frac{M}{2}$ για κάθε $n \geq n_0'$ και $n_0'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $y_n > \frac{M}{2}$ για κάθε $n \geq n_0''$. Ορίζουμε το $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ οπότε είναι $n_0 \geq n_0'$ και $n_0 \geq n_0''$. Άρα ισχύει $x_n > \frac{M}{2}$ και $y_n > \frac{M}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται

$$x_n + y_n > \tfrac{M}{2} + \tfrac{M}{2} = M$$

για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $x_n + y_n \to +\infty = (+\infty) + (+\infty)$.
Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < 1$ για κάθε $n \geq n_0'$ και $n_0'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $y_n > M - x + 1$ για κάθε $n \geq n_0''$. Από την $|x_n - x| < 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n > x - 1$ για κάθε $n \geq n_0'$. Ορίζουμε το $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ οπότε είναι $n_0 \geq n_0'$ και $n_0 \geq n_0''$. Άρα ισχύει $x_n > x - 1$ και $y_n > M - x + 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$x_n + y_n > (x - 1) + (M - x + 1) = M$$

για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $x_n + y_n \to +\infty = (+\infty) + y$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση. $\square$

Παράδειγμα. $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$. Άρα $\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \to 0 + 0 = 0$.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$ και $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $n + \frac{1}{n} \to (+\infty) + 0 = +\infty$.

Παράδειγμα. $-n \to -\infty$ και $-\sqrt{n} \to -\infty$. Άρα $-n - \sqrt{n} \to (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Ιδού μερικά παραδείγματα όπου δύο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, -\infty$ και το άθροισμά τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο. Η ύπαρξη τέτοιων παραδειγμάτων αιτιολογεί τον χαρακτηρισμό "απροσδιόριστη μορφή" στην παράσταση $(+\infty) + (-\infty)$: το αποτέλεσμά της είναι απροσδιόριστο.

Παράδειγμα. $n + 3 \to (+\infty) + 3 = +\infty$, $-n \to -\infty$ και $(n + 3) + (-n) = 3 \to 3$.
Προφανώς, στη θέση του 3 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Παράδειγμα. $2n \to +\infty$, $-n \to -\infty$ και $2n + (-n) = n \to +\infty$.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$, $-2n \to -\infty$ και $n + (-2n) = -n \to -\infty$.

Παράδειγμα. Οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών της $(n+(-1)^{n-1})$ έχουν και οι δύο όριο $+\infty$. Άρα $n+(-1)^{n-1} \to +\infty$. Επίσης, $-n \to -\infty$ αλλά το $(n+(-1)^{n-1})+(-n) = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε μία χρήσιμη τεχνική παρατήρηση. Στην απόδειξη του κανόνα αθροίσματος συναντήσαμε τρεις φορές την εξής κατάσταση. Υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει κάποια ιδιότητα του x_n για κάθε $n \geq n_0'$ και υπάρχει $n_0'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει κάποια ιδιότητα του y_n για κάθε $n \geq n_0''$. Τότε ορίσαμε το $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ οπότε είναι $n_0 \geq n_0'$ και $n_0 \geq n_0''$ και συμπεράναμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα η ιδιότητα του x_n και η ιδιότητα του y_n για κάθε $n \geq n_0$. Αυτή η κατάσταση περιγράφεται πιο απλά ως εξής:

Αν οι όροι της (x_n) έχουν μία ιδιότητα από έναν δείκτη και πέρα και αν οι όροι της (y_n) έχουν μία ιδιότητα (όχι αναγκαστικά την ίδια) από έναν δείκτη και πέρα τότε ταυτόχρονα οι όροι της (x_n) έχουν την ιδιότητά τους και οι όροι της (y_n) έχουν την ιδιότητά τους από έναν κοινό δείκτη και πέρα.

Αυτό το επιχείρημα θα το χρησιμοποιούμε στο εξής σιωπηρά χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε την απόδειξη με τα n_0', n_0'' και $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$.

Ορισμός. *Ορίζουμε τις συμβολικές διαφορές*

$$(+\infty) - x = +\infty, \qquad x - (-\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) - x = -\infty, \qquad x - (+\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty,$$

έχοντας υπ' όψη τα συμβολικά αντίθετα και τα συμβολικά αθροίσματα που έχουν ήδη ορισθεί. Δεν ορίζονται οι διαφορές

$$(+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Η περίπτωση της **διαφοράς** των $(x_n), (y_n)$, δηλαδή της ακολουθίας $(x_n - y_n)$, ανάγεται εύκολα στις περιπτώσεις του αθροίσματος ακολουθιών και της αντίθετης ακολουθίας παρατηρώντας απλώς ότι $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$.

Κανόνας διαφοράς. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το $\lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} y_n$, δηλαδή η διαφορά των δυο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε και η $(x_n - y_n)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Ορισμός. *Τώρα θα ορίσουμε τα συμβολικά γινόμενα των συμβόλων $\pm\infty$ μεταξύ τους αλλά και με τους αριθμούς:*

$$(\pm\infty)\, x = \pm\infty, \quad x\,(\pm\infty) = \pm\infty \qquad (x > 0),$$

$$(\pm\infty)\, x = \mp\infty, \quad x\,(\pm\infty) = \mp\infty \qquad (x < 0),$$

$$(\pm\infty)\,(\pm\infty) = +\infty, \qquad (\pm\infty)\,(\mp\infty) = -\infty.$$

Τα γινόμενα

$$(\pm\infty)\,0, \qquad 0\,(\pm\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Ονομάζουμε **γινόμενο** των $(x_n), (y_n)$ την ακολουθία $(x_n y_n)$ της οποίας ο n-οστός όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους n-οστούς όρους των αρχικών ακολουθιών.

Κανόνας γινομένου. *Αν οι* (x_n), (y_n) *έχουν όριο και αν το* $\lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$, *δηλαδή το γινόμενο των δυο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε και η* $(x_n y_n)$ *έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{3|y|+1}$ και $|y_n - y| < \min\{\frac{\epsilon}{3|x|+1}, \frac{1}{3}\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x)| \\ &\leq |x_n - x||y_n - y| + |x||y_n - y| + |y||x_n - x| \\ &< \tfrac{\epsilon}{3|y|+1}\tfrac{1}{3} + |x|\tfrac{\epsilon}{3|x|+1} + |y|\tfrac{\epsilon}{3|y|+1} < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $x_n y_n \to xy$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > \sqrt{M}$ και $y_n > \sqrt{M}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $x_n y_n > \sqrt{M}\sqrt{M} = M$ για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $x_n y_n \to +\infty = (+\infty)(+\infty)$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y > 0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > \frac{2M}{y}$ και $|y_n - y| < \frac{y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την $|y_n - y| < \frac{y}{2}$ συνεπάγεται $y_n > y - \frac{y}{2} = \frac{y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n y_n > \frac{2M}{y}\frac{y}{2} = M$ για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $x_n y_n \to +\infty = (+\infty)y$.
Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν ουσιαστικά την ίδια αιτιολόγηση. Οι μόνες αλλαγές έχουν να κάνουν με τον γνωστό κανόνα γινομένου προσήμων. □

Παράδειγμα. $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$. Άρα $\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^n}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα. $\frac{n-1}{n} \to 1$ και $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $\frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} \to 1 \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$ και $1 - n \to -\infty$. Άρα $n - n^2 = n(1-n) \to (+\infty)(-\infty) = -\infty$. Παρατηρήστε ότι δεν εφαρμόζεται ο κανόνας της διαφοράς στο $n - n^2$ διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$.

Παράδειγμα. Μία ειδική περίπτωση του κανόνα γινομένου είναι η εξής. Έστω ακολουθία (x_n) και αριθμός c. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} x_n$ και αν το γινόμενο $c \lim_{n\to+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε

$$\lim_{n\to+\infty} c x_n = c \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad (c \neq 0 \text{ αν } \lim_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty).$$

Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου στην (x_n) και στην σταθερή ακολουθία (c) η οποία έχει όριο c.

Παράδειγμα. Έστω $a > 0$. Αν $c > 0$ τότε $cn^a \to c\,(+\infty) = +\infty$. Αν $c < 0$ τότε $cn^a \to c\,(+\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα. Αν $a > 0$ τότε $cn^{-a} \to c\,0 = 0$.

Παράδειγμα. Έστω πολυώνυμο $a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού οπότε $a_N \neq 0$ και $N \geq 1$. Τότε

$$a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0 \to a_N(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } a_N > 0 \\ -\infty & \text{αν } a_N < 0 \end{cases}$$

Για να το αποδείξουμε βγάζουμε το $a_N n^N$ ως κοινό παράγοντα,

$$a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0 = a_N n^N \big(1 + \tfrac{a_{N-1}}{a_N} \tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{a_1}{a_N} \tfrac{1}{n^{N-1}} + \tfrac{a_0}{a_N} \tfrac{1}{n^N}\big),$$

και τότε το όριο της παρένθεσης είναι 1 διότι κάθε όρος της εκτός του πρώτου έχει όριο 0. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim_{n\to+\infty} a_N n^N 1 = a_N(+\infty)$. Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου πολυωνυμικής παράστασης του n εξαρτάται *μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο*. Δηλαδή

$$\lim_{n\to+\infty}(a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim_{n\to+\infty} a_N n^N.$$

Για παράδειγμα: $3n^2 - 5n + 2 \to +\infty$ και $-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3 \to -\infty$.

Έχοντας ήδη ορίσει τα συμβολικά γινόμενα των $\pm\infty$, είναι τώρα απλό να ορίσουμε τις *συμβολικές δυνάμεις* $(\pm\infty)^k$ για κάθε φυσικό k :

$$(+\infty)^k = \underbrace{(+\infty)\cdots(+\infty)}_{k} = +\infty, \qquad (-\infty)^k = \underbrace{(-\infty)\cdots(-\infty)}_{k} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } k \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε την

Πρόταση 2.4. *Αν υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} x_n$ *και* $k \in \mathbb{N}$ *τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^k = \big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big)^k.$$

Απόδειξη. Απλή εφαρμογή του κανόνα γινομένου. □

Παράδειγμα. $\frac{n-1}{n} \to 1$. Άρα $(\frac{n-1}{n})^3 \to 1^3 = 1$.

Παράδειγμα. $n^5 - 2n^2 + n - 7 \to +\infty$. Άρα $(n^5 - 2n^2 + n - 7)^8 \to (+\infty)^8 = +\infty$.

Παράδειγμα. $-2n^3 + n^2 + 2n - 7 \to -\infty$. Άρα $(-2n^3 + n^2 + 2n - 7)^4 \to (-\infty)^4 = +\infty$.

Παράδειγμα. $-n^3 + 2n - 1 \to -\infty$. Άρα $(-n^3 + 2n - 1)^5 \to (-\infty)^5 = -\infty$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου δύο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, 0$ ενώ το γινόμενό τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο. Όπως στην περίπτωση του αθροίσματος, η ύπαρξη τέτοιων παραδειγμάτων αιτιολογεί τον χαρακτηρισμό "απροσδιόριστη μορφή" στις παραστάσεις $(\pm\infty)0$: το αποτέλεσμά τους είναι απροσδιόριστο.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$, $\frac{7}{n} \to 0$ και $n\,\frac{7}{n} = 7 \to 7$.
Φυσικά θα μπορούσαμε να έχουμε οποιονδήποτε αριθμό στη θέση του 7.

Παράδειγμα. $n^2 \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $n^2\,\frac{1}{n} = n \to +\infty$.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$, $\frac{1}{n^2} \to 0$ και $n\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$ αλλά το $n\,\frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Ορισμός. *Ορίζουμε τα συμβολικά αντίστροφα*

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Το αντίστροφο

$$\frac{1}{0}$$

δεν ορίζεται και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**.

Η **αντίστροφη** ακολουθία της (x_n) είναι η $(\frac{1}{x_n})$ και, φυσικά, ορίζεται αρκεί να ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n.

Κανόνας αντιστρόφου, Ι. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n. Αν η (x_n) έχει όριο και αν το $\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$, δηλαδή το αντίστροφο του ορίου, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή αν $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$) τότε και η $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to x > 0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \min\{\frac{x^2\epsilon}{2}, \frac{x}{2}\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $|x_n - x| < \frac{x^2\epsilon}{2}$ και $|x_n - x| < \frac{x}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την $|x_n - x| < \frac{x}{2}$ συνεπάγεται $x_n > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα

$$\left|\tfrac{1}{x_n} - \tfrac{1}{x}\right| = \tfrac{|x_n - x|}{x_n x} < \tfrac{x^2\epsilon/2}{(x/2)x} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $0 < \frac{1}{x_n} < \epsilon$ και επομένως $\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\frac{1}{x_n} \to 0 = \frac{1}{+\infty}$.
Η αιτιολόγηση του κανόνα όταν το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα. Αν $a > 1$ τότε $\log_a n \to +\infty$ οπότε $\frac{1}{\log_a n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα. Ο κανόνας διαφοράς δεν εφαρμόζεται στην $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ διότι προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Όμως

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \tfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to \tfrac{1}{+\infty} = 0.$$

Παράδειγμα. Ο κανόνας αντιστρόφου δεν ισχύει όταν $x_n \to 0$. Για παράδειγμα, $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$ αλλά το $\frac{n}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n-1} n$ δεν έχει όριο.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα ακολουθίας είναι η ύπαρξη όρων διαφορετικού προσήμου. Αν δεν υφίστανται όροι διαφορετικού προσήμου τότε έχουμε θετικό αποτέλεσμα: η κατάσταση αυτή περιγράφεται στον δεύτερο κανόνα αντιστρόφου.

Κανόνας αντιστρόφου, ΙΙ. *(i) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.*
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι αρνητικοί τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $0 < x_n < \frac{1}{M}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $\frac{1}{x_n} > M$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Ορισμός. *Οι παρακάτω συμβολικοί λόγοι ορίζονται βάσει των συμβολικών πολλαπλασιασμών και των συμβολικών αντιστρόφων.*

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \quad (x > 0), \qquad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \quad (x < 0), \qquad \frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

Οι λόγοι

$$\frac{x}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Το $\frac{x}{0} = x\,\frac{1}{0}$ και το $\frac{\pm\infty}{0} = (\pm\infty)\,\frac{1}{0}$ δεν ορίζονται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Επίσης, δεν ορίζεται το $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = (\pm\infty)\,\frac{1}{\pm\infty} = (\pm\infty)\,0$ διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή γινομένου.

Τα αποτελέσματα για τον **λόγο** των (x_n) και (y_n), δηλαδή για την ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$, προκύπτουν από τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων για το γινόμενο ακολουθιών και για την αντίστροφη ακολουθία παρατηρώντας ότι $\frac{x_n}{y_n} = x_n\,\frac{1}{y_n}$.

Κανόνας λόγου. *Έστω $y_n \neq 0$ για κάθε n. Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το $\frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}$, δηλαδή ο λόγος των δυο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε και η $\big(\frac{x_n}{y_n}\big)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}.$$

Παράδειγμα. (i) Θεωρούμε ρητή παράσταση $\frac{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \cdots + b_1 x + b_0}$ όπου $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$. Τότε

$$\frac{a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \cdots + b_1 n + b_0} \to \begin{cases} (a_N/b_M)\,(+\infty) & \text{αν } N > M \\ a_N/b_M & \text{αν } N = M \\ 0 & \text{αν } N < M \end{cases}$$

Πράγματι, γράφουμε

$$\tfrac{a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \cdots + b_1 n + b_0} = \tfrac{a_N}{b_M} n^{N-M} \big(1 + \tfrac{a_{N-1}}{a_N}\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{a_0}{a_N}\tfrac{1}{n^N}\big) \big/ \big(1 + \tfrac{b_{M-1}}{b_M}\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{b_0}{b_M}\tfrac{1}{n^M}\big)$$

και, όπως έχουμε δει, τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι ίσα με 1. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{a_N}{b_M} \lim_{n\to+\infty} n^{N-M}$ και από αυτό προκύπτει το τελικό συμπέρασμα. Βλέπουμε ότι, όπως και στην περίπτωση πολυωνυμικής παράστασης, η τιμή του ορίου ρητής παράστασης του n εξαρτάται *μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους των πολυωνύμων* στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Δηλαδή

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_N n^N}{b_M n^M}.$$

Για παράδειγμα, έχουμε: $\frac{n^3 - 2n^2 + n + 1}{2n^2 - 3n - 1} \to +\infty$, $\frac{-n^2 + n}{n + 2} \to -\infty$, $\frac{n^4 - n^3 - 7}{n^4 + n + 1} \to 1$, $\frac{-n^2 + n + 4}{n^3 + n^2 + 5n + 6} \to 0$.

Παράδειγμα. $\big(\frac{-2n^3 + n^2 + n + 1}{2n + 3}\big)^7 \to (-\infty)^7 = -\infty$.

Παράδειγμα. $\big(\frac{n^3 + n + 7}{-3n^3 + n^2 + 1}\big)^3 \to (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

Τέλος, θα δούμε παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.

Παράδειγμα. $\frac{-2}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{-2/n}{1/n} = -2 \to -2$.
Στη θέση του -2 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Παράδειγμα. $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$ και $\frac{1/n}{1/n^2} = n \to +\infty$.

Παράδειγμα. $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0$.

Παράδειγμα. $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$ αλλά το $\frac{(-1)^{n-1}/n}{1/n} = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Παράδειγμα. $5n \to +\infty$, $n \to +\infty$ και $\frac{5n}{n} = 5 \to 5$.
Στη θέση του 5 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

Παράδειγμα. $n^2 \to +\infty$, $n \to +\infty$ και $\frac{n^2}{n} = n \to +\infty$.

Παράδειγμα. $n \to +\infty$, $n^2 \to +\infty$ και $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$.

Παράδειγμα. $(2+(-1)^{n-1})n \to +\infty$ (γιατί;) και $n \to +\infty$ αλλά το $\frac{(2+(-1)^{n-1})n}{n} = 2+(-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο (γιατί;).

Ορισμός. *Ορίζουμε τις συμβολικές απόλυτες τιμές*

$$|+\infty| = +\infty, \qquad |-\infty| = +\infty.$$

Ορίζουμε, επίσης, την **απόλυτη** ακολουθία $(|x_n|)$ μιας ακολουθίας (x_n).

Κανόνας απολύτου. *Αν η (x_n) έχει όριο τότε και η $(|x_n|)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \Big|\lim_{n\to+\infty} x_n\Big|.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $|x_n| \to |x|$.
Έστω $x_n \to +\infty$ ή $x_n \to -\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > M$ ή $x_n < -M$, αντιστοίχως, για κάθε $n \geq n_0$. Και στις δύο περιπτώσεις συνεπάγεται $|x_n| > M$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $|x_n| \to +\infty = |\pm\infty|$. □

Παράδειγμα. Η ακολουθία $(5-n)$ είναι η $4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$ και άρα $5 - n \to -\infty$. Η ακολουθία $(|5-n|)$ είναι η $4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ και άρα $|5-n| \to |-\infty| = +\infty$.

Παράδειγμα. Το αντίστροφο του κανόνα απολύτου δεν ισχύει. Για παράδειγμα, $\big|(-1)^{n-1}\big| = 1 \to 1$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$.

Δ. Όρια και ανισότητες.

Πρόταση 2.5. *Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n.*
(i) Αν $x_n \to +\infty$ τότε $y_n \to +\infty$.
(ii) Αν $y_n \to -\infty$ τότε $x_n \to -\infty$.

Απόδειξη. (i) Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$. Επειδή $x_n \to +\infty$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$ και επειδή ισχύει $y_n \geq x_n$ για κάθε n συνεπάγεται ότι ισχύει $y_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $y_n \to +\infty$.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα. Από την ανισότητα $n+(-1)^{n-1} \geq n-1$ και από το όριο $n-1 \to +\infty$ συνεπάγεται το όριο $n + (-1)^{n-1} \to +\infty$.

Παράδειγμα. Από την $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ και από το $n \to +\infty$ συνεπάγεται $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \to +\infty$.

Παράδειγμα. Από την $[\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1$ και από το $\sqrt{n} - 1 \to +\infty$ συνεπάγεται $[\sqrt{n}] \to +\infty$.

Παράδειγμα. Από την $n! \geq n$ και από το $n \to +\infty$ συνεπάγεται $n! \to +\infty$.

Πρόταση 2.6. *Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $x > y$. Παίρνοντας $\epsilon = \frac{x-y}{2} > 0$, από το ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{x-y}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{x-y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n > x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$ και $y_n < y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως ισχύει $x_n > \frac{x+y}{2} > y_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n. □

Παράδειγμα. Αν ισχύει $x_n \geq a$ για κάθε n και $x_n \to x$ τότε συνεπάγεται $x \geq a$. Πράγματι, θεωρούμε την σταθερή ακολουθία (a) και επειδή ισχύει $a \leq x_n$ για κάθε n και $a \to a$ και $x_n \to x$ συνεπάγεται $a \leq x$.
Αν ισχύει $x_n \leq b$ για κάθε n και $x_n \to x$ συνεπάγεται $x \leq b$. Η αιτιολόγηση είναι παρόμοια με την προηγούμενη.
Αν όλοι οι όροι μίας ακολουθίας (x_n) ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $x_n \to x$ τότε και το x ανήκει στο $[a, b]$. Αυτό είναι συνδυασμός των δύο προηγουμένων.

Αν ισχύει $x_n < y_n$ για κάθε n και $x_n \to x$, $y_n \to y$ τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x < y$. Σκεφτόμαστε ότι από την $x_n < y_n$ συνεπάγεται $x_n \leq y_n$ για κάθε n, οπότε (ως συνέπεια της πρότασης 2.6) συνεπάγεται $x \leq y$. Μπορεί λοιπόν να είναι $x = y$.

Παράδειγμα. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε n αλλά και $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$.

Κανόνας παρεμβολής. *Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n. Αν $x_n \to \rho$ και $z_n \to \rho$ τότε $y_n \to \rho$.*

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - \rho| < \epsilon$ και $|z_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n > \rho - \epsilon$ και $z_n < \rho + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $\rho - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < \rho + \epsilon$ και επομένως $|y_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $y_n \to \rho$. □

Παράδειγμα. Από το ότι ισχύει $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$ για κάθε n, από το $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$ και από το $1 \to 1$ συνεπάγεται $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1$.

Ένα χρήσιμο πόρισμα του κανόνα παρεμβολής είναι το εξής:

Αν $x_n \to 0$ και η (y_n) είναι φραγμένη τότε $x_n y_n \to 0$.

Πράγματι, επειδή η (y_n) είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Συνεπάγεται $-M|x_n| \leq x_n y_n \leq M|x_n|$ για κάθε n και, επειδή $M|x_n| \to 0$ και $-M|x_n| \to 0$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι $x_n y_n \to 0$.

Παράδειγμα. Η $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη και $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$.

Παράδειγμα. Η $(\sin n)$ είναι φραγμένη και $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Μέχρι τώρα είδαμε πώς μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για όρια ακολουθιών χρησιμοποιώντας ανισοτικές σχέσεις ανάμεσα στους αντίστοιχους όρους τους. Τώρα θα δούμε ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

Πρόταση 2.7. *(i) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n < u$ τότε ισχύει $x_n < u$ από κάποιον δείκτη και πέρα.*
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n > l$ τότε ισχύει $x_n > l$ από κάποιον δείκτη και πέρα.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n < u$ και ας πάρουμε την περίπτωση $x_n \to x$ οπότε $x < u$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = u - x > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < u - x$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n < x + (u - x) = u$ για κάθε $n \geq n_0$.
Στην περίπτωση $x_n \to -\infty$ εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με οποιοδήποτε $M > 0$ το οποίο είναι $\geq -u$. Για παράδειγμα, το $M = -u$ αν $u < 0$ και το $M = 1$ αν $u \geq 0$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n < -M \leq u$ για κάθε $n \geq n_0$.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i) διακρίνοντας περιπτώσεις $x_n \to x > l$ και $x_n \to +\infty$. □

Παράδειγμα. Για να δούμε αν ισχύει $\frac{24n^7+323n^5-17n^2+135}{n^8-n^6+2n^3-1} < \frac{1}{1000}$ για κάποιους φυσικούς n, βρίσκουμε ότι $\frac{24n^7+323n^5-17n^2+135}{n^8-n^6+2n^3-1} \to 0$ και επειδή $0 < \frac{1}{1000}$ συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο ισχύει η αρχική ανισότητα για κάποιους φυσικούς n αλλά ότι ισχύει *για κάθε n από κάποιο και πέρα*. Δηλαδή υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $n \geq n_0$.
Το ασθενές σημείο αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του n_0. Το ισχυρό σημείο είναι φυσικά ότι η αρχική ανισότητα είναι δύσκολο να λυθεί με αλγεβρικό τρόπο!

Παράδειγμα. Ερώτηση: ισχύει $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} \geq \frac{2}{3}$ για άπειρους φυσικούς n;
Υπολογίζουμε το όριο $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} \to \frac{1}{4}$. Επειδή $\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} < \frac{2}{3}$ για κάθε n από κάποιο και πέρα. Άρα είναι αδύνατο να ισχύει η αντίθετη ανισότητα για άπειρους φυσικούς n.

Η πρόταση 2.8, άμεση συνέπεια της πρότασης 2.7, περιγράφει εκτός των άλλων ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο με το οποίο μπορούμε να διακρίνουμε αν μία ακολουθία *δεν* έχει όριο.

Πρόταση 2.8. *Έστω l, u δυο αριθμοί.*
(i) Αν η (x_n) έχει άπειρους όρους $\geq u$ και υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n \geq u$.
(ii) Αν η (x_n) έχει άπειρους όρους $\leq l$ και υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n \leq l$.
(iii) Αν $l < u$ και η (x_n) έχει άπειρους όρους $\geq u$ και άπειρους όρους $\leq l$ τότε η (x_n) δεν έχει όριο.

Απόδειξη. (i) Αν ήταν $\lim_{n\to+\infty} x_n < u$ τότε θα ίσχυε $x_n < u$ από κάποιον δείκτη και πέρα και επομένως δεν θα είχε η (x_n) άπειρους όρους $\geq u$.
(ii) Ομοίως, αν ήταν $\lim_{n\to+\infty} x_n > l$ τότε θα ίσχυε $x_n > l$ από κάποιον δείκτη και πέρα και επομένως δεν θα είχε η (x_n) άπειρους όρους $\leq l$.
(iii) Αν υπήρχε το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ τότε αυτό θα ήταν $\geq u$ και $\leq l$ και επειδή $l < u$ θα καταλήγαμε σε άτοπο. $\square$

Παράδειγμα. Αν $a \leq -1$ η (a^n) έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1 και άρα δεν έχει όριο.

Παράδειγμα. Η $((-1)^{n-1}n)$ έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1 οπότε δεν έχει όριο.

Παράδειγμα. Η $(n - 3[\frac{n}{3}])$ δεν έχει όριο αφού ισχύει $n - 3[\frac{n}{3}] = 0$ για $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ και $n - 3[\frac{n}{3}] = 1$ για $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ε. Όρια και φραγμένες ακολουθίες.

Έχουμε δει ότι οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $(\frac{(-1)^{n-1}}{n})$ και $(\frac{n-1}{n})$ συγκλίνουν και ταυτόχρονα είναι φραγμένες. Αυτή η παρατήρηση γενικεύεται (προς τη μία κατεύθυνση) στην πρόταση 2.9.

Πρόταση 2.9. *Αν μία ακολουθία συγκλίνει τότε αυτή είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως ισχύει
$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$
για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$ οπότε ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n. $\square$

Παράδειγμα. Δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 2.9. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.

Πρόταση 2.10. *(i) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$ τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*
(ii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ τότε αυτή είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_n \to +\infty$. Βάσει του ορισμού του ορίου υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε $l = \min\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}, 1\}$ και βλέπουμε ότι ισχύει $x_n \geq l$ για κάθε n. Επίσης, για κάθε u υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > u$ για κάθε $n \geq n_0$ οπότε το u δεν είναι άνω φράγμα της (x_n). Άρα η (x_n) δεν έχει κανένα άνω φράγμα.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα. Το αντίστροφο της πρότασης 2.10 δεν ισχύει. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η ακολουθία $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots$ είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$. Ομοίως, η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \ldots$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

ΣΤ. Μερικά χρήσιμα όρια.

Κατ' αρχάς έχουμε μία πολύ βοηθητική ανισότητα.

Ανισότητα του Bernoulli. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \geq -1$ ισχύει $(x+1)^n \geq nx + 1$. Επίσης, ισχύει η ισότητα μόνο αν $x = 0$ ή $n = 1$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το n. □

Ακολουθούν μερικά χρήσιμα παραδείγματα ορίων.

Παράδειγμα. Κατ' αρχάς θα ξαναδούμε με άλλο τρόπο το όριο της γεωμετρικής προόδου (a^n). Εξετάζουμε τις πιο βασικές περιπτώσεις.
Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε $a^n = ((a-1)+1)^n \geq n(a-1)+1$ για κάθε n. Επειδή $n(a-1)+1 \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to +\infty$.
Τώρα, έστω $0 < |a| < 1$. Τότε $\frac{1}{|a|} > 1$ οπότε από την προηγούμενη περίπτωση συνεπάγεται $|a^n| = \frac{1}{(1/|a|)^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$. Τέλος, από την $-|a^n| \leq a^n \leq |a^n|$ και τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $a^n \to 0$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε $a > 0$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad \text{αν } a > 0.$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται $(\frac{a-1}{n} + 1)^n \geq n\frac{a-1}{n} + 1 = a$ και επομένως $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \frac{a-1}{n} + 1$ για κάθε n. Από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Αν $0 < a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$ οπότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to \frac{1}{1} = 1$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται $\big(\frac{\sqrt{n}-1}{n} + 1\big)^n \geq n\frac{\sqrt{n}-1}{n} + 1 = \sqrt{n}$ και επομένως $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \big(\frac{\sqrt{n}-1}{n} + 1\big)^2 < \big(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\big)^2$ για κάθε n. Άρα $\sqrt[n]{n} \to 1$ από τον κανόνα παρεμβολής.

Παράδειγμα. Αν $a > 1$ και $b > 0$ θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n^b} \to +\infty \qquad \text{αν } a > 1, b > 0.$$

Προσέξτε: ο κανόνας λόγου δεν εφαρμόζεται διότι προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Έστω $0 < b < 1$. Τότε $\frac{a^n}{n^b} = \frac{((a-1)+1)^n}{n^b} \geq \frac{(a-1)n+1}{n^b} \geq (a-1)n^{1-b}$ από την ανισότητα του Bernoulli. Επειδή $(a-1)n^{1-b} \to +\infty$, συνεπάγεται $\frac{a^n}{n^b} \to +\infty$.
Τώρα, έστω $b \geq 1$. Παίρνουμε ένα $k \in \mathbb{N}$, $k > b$ (για παράδειγμα το $k = [b] + 1$) και τότε έχουμε $a^{1/k} > 1$ και $0 < \frac{b}{k} < 1$. Από την προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε $\frac{(a^{1/k})^n}{n^{b/k}} \to +\infty$ και επομένως $\frac{a^n}{n^b} = \big(\frac{(a^{1/k})^n}{n^{b/k}}\big)^k \to +\infty$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι
$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > |a|$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει
$$0 \leq \left|\tfrac{a^n}{n!}\right| = \tfrac{|a|^n}{(n_0-1)!n_0(n_0+1)\cdots n} \leq \tfrac{|a|^n}{(n_0-1)!n_0n_0\cdots n_0} = \tfrac{|a|^n}{(n_0-1)!n_0^{n-n_0+1}} = c\big(\tfrac{|a|}{n_0}\big)^n$$
όπου $c = \frac{n_0^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$. Επειδή $0 \leq \frac{|a|}{n_0} < 1$, από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

Ασκήσεις.

2.4.1. Αποδείξτε ότι:
$$\tfrac{(n-1)^2-7n+3\sqrt{n+1}}{n+1} \to +\infty, \quad \big(n+\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\big)^9 \to +\infty, \quad \tfrac{-1+(1/n^2)}{2+((-1)^{n-1}/n)} \to -\tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{-n+(1/n)}{2+((-1)^{n-1}/n)} \to -\infty, \quad \tfrac{1+((-1)^n/n)}{n+3\log_{10} n} \to 0, \quad \tfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} \to \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}} \to \tfrac{1}{3},$$
$$(n^2+n+1)^{1/2}-(n^2+1)^{1/2} \to \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{\log_2 n+3}{-2\log_4 n+15} \to -1, \quad \big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{(-1)^{n-1}}{4}\big)^n \to 0.$$
2.4.2. Αποδείξτε ότι:
$$(1-n)^5+n^4 \to -\infty, \quad \tfrac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6} \to \tfrac{3}{5}, \quad \tfrac{-2n^5+4n^2}{3n^7+n^3-10} \to 0, \quad \tfrac{3n^2+4n}{2n-1} \to +\infty,$$
$$\big(\tfrac{-n^2+1}{3n+1}\big)^{27} \to -\infty, \quad \big(\tfrac{-n^2+1}{3n+1}\big)^{16} \to +\infty, \quad \tfrac{n(n+1)}{n+4}-\tfrac{4n^3}{4n^2+1} \to -3, \quad \tfrac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(n+2)^{106}} \to 1.$$
2.4.3. Αποδείξτε ότι:
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\cdots+\tfrac{1}{2^n} \to 2, \quad \tfrac{1+2+\cdots+2^n}{1+3+\cdots+3^n} \to 0, \quad \tfrac{2^7}{3^7}+\tfrac{2^8}{3^8}+\cdots+\tfrac{2^n}{3^n} \to \tfrac{2^7}{3^6},$$
$$\tfrac{2^n}{3^n}+\tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots+\tfrac{2^{2n}}{3^{2n}} \to 0, \quad \tfrac{2-1}{2+1}\,\tfrac{3-1}{3+1}\cdots\tfrac{n-1}{n+1} \to 0, \quad \tfrac{2^3-1}{2^3+1}\,\tfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\tfrac{n^3-1}{n^3+1} \to \tfrac{2}{3}.$$
2.4.4. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστους όρους:
$$\tfrac{1+(-1)^n(n+2)}{n}, \quad \tfrac{1}{((-1)^{n-1}/n)+(1/n^2)} \quad 2^{(-1)^{n-1}}, \quad 2^{(-1)^{n-1}n},$$
$$\big(1+\tfrac{(-1)^{n-1}}{2}\big)^n, \quad 1-1+1-\cdots+(-1)^n, \quad 1-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3^2}{2^2}-\cdots+(-1)^n\tfrac{3^n}{2^n}.$$
2.4.5. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $-n^5+25n^3+3n < -100$ από κάποιον φυσικό n και πέρα.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $n^7-35n^6+n^3-47n < 84$ μόνο μέχρι κάποια τιμή του φυσικού n.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3}{2} < \frac{7n^3-n+5}{4n^3+n^2+35} < 2$ από κάποιον φυσικό n και πέρα.
(iv) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2n^4-n^3+7}{-n^3+n^2+3} \leq -78$ από κάποιον φυσικό n και πέρα.
(v) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2n^3-n^2-7n+1}{n^3+8n^2+25} \leq 1$ μόνο μέχρι κάποια τιμή του φυσικού n.

2.4.6. (i) Αποδείξτε ότι οι $\big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\big)$, $\big(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\big)$ είναι φραγμένες.
(ii) Αποδείξτε ότι η $\big(\frac{4n^5-2n-1}{7n^4+n^3+2}\big)$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.
(iii) Αποδείξτε ότι η $\big(\frac{3-(\log_2 n)^3}{1+\log_2 n+(\log_2 n)^2}\big)$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.
(iv) Αποδείξτε ότι οι $\big((-2)^n\frac{n^3-3}{2n+1}\big)$, $(2^n+3^n(-1)^{n-1})$, $((2^n+n)(-1)^{n-1}+2^n-n)$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες.

2.4.7. Αν $|x_n| \to 0$ αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

2.4.8. Έστω $x_n \neq -1$ για κάθε n και $x \neq -1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1+x_n} \to \frac{x}{1+x}$.

2.4.9. Αποδείξτε ότι

$$\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \to \begin{cases} 1, & \text{αν } |x|>1 \\ 0, & \text{αν } |x|=1 \\ -1, & \text{αν } |x|<1 \end{cases} \qquad [nx]-[ny] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>y \\ 0, & \text{αν } x=y \\ -\infty, & \text{αν } x<y \end{cases}$$

2.4.10. (i) Αν $\frac{\log_{10} n-2}{2\log_{10} n+4} < x_n < \frac{3+n}{1+2n}$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to \frac{1}{2}$.
(ii) Αν $n^2-2n < n^2x_n \leq n^2+3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.
(iii) Αν $n+1 \leq 2nx_n \leq n+2x_n+3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to \frac{1}{2}$.
(iv) Αν $n^2x_n^2-2n(n-1)x_n+n^2-2n-3 \leq 0$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 2$.

2.4.11. Αποδείξτε ότι $2n+(-1)^{n-1}n \to +\infty$ και $2n+n\sin n \to +\infty$.

2.4.12. Αποδείξτε ότι $\left[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\right] \to +\infty$, $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1$ και $\frac{n+2}{3n^2-n+1}\left[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\right] \to 1$.

2.4.13. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n^3} \to 1$, $\sqrt[n]{n^4+3n^2+n+1} \to 1$.

2.4.14. Έστω $0 \leq a \leq b \leq c$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n+b^n} \to b$, $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \to c$.

2.4.15. Αποδείξτε ότι $(1+\frac{1}{n})^{n^2} \to +\infty$, $(1-\frac{1}{n^2})^n \to 1$, $(1+\frac{1}{n^2})^n \to 1$.

2.4.16. Για κάθε a αποδείξτε ότι $\frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2} \to \frac{a}{2}$.

2.4.17. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-1}+\frac{n}{n^2+n} \to 1$.
(Υπόδειξη: $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ για κάθε k με $1 \leq k \leq n$.)
(ii) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$.

2.4.18. Αποδείξτε ότι $\lim_{m\to+\infty}\big(\lim_{n\to+\infty}(\cos(m!\pi x))^{2n}\big) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

2.4.19. Το **κριτήριο λόγου** για ακολουθίες. Έστω $x_n > 0$ για κάθε n.
(i) Αν $0<a<1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq a$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $0 < x_n \leq a^{n-1}x_1$ για κάθε n.)
Αν $a>1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq a$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(ii) Αν $0 \leq a < 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$ αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Αν $a>1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$ αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(iii) Αν $a>1$ και $b>0$ αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n^b} \to +\infty$.
Αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$ και $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \to +\infty$.

2.4.20. Έστω ότι η άγνωστη ακολουθία (x_n) *έχει* όριο.
(i) Αν $x_{n+1} = -x_n+2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.
(ii) Αν $x_{n+3} = x_n-3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to -\infty$.
(iii) Αν $x_{n+1} = x_n^2-2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to -1$ ή $x_n \to 2$ ή $x_n \to +\infty$.
(iv) Αν $x_{n+2} = -x_n^2+2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$ ή $x_n \to -2$ ή $x_n \to -\infty$.
(v) Αν $x_{n+1} = x_n^2+3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(vi) Αν $x_{n+2} = x_{n+1}+x_n^3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 0$ ή $x_n \to +\infty$ ή $x_n \to -\infty$.
Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις προσπαθήστε να βρείτε συγκεκριμένη ακολουθία η οποία να την υλοποιεί.

2.4.21. (i) Έστω ότι $x_n \to +\infty$ και ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n+y_n \to +\infty$.
(ii) Έστω ότι $x_n \to -\infty$ και ότι η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n+y_n \to -\infty$.
(iii) Έστω $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο *θετικό* κάτω φράγμα. Αποδείξτε ότι $x_ny_n \to +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.
(iv) Έστω $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο *αρνητικό* άνω φράγμα. Αποδείξτε ότι $x_ny_n \to -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

2.4.22. (i) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.
(ii) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.

2.4.23. Βρείτε (x_n), (y_n) με *θετικούς* όρους ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

2.4.24. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ αποδείξτε ότι $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x, y\}$ και $\min\{x_n, y_n\} \to \min\{x, y\}$.

2.4.25. Θεωρήστε την ακολουθία Fibonnaci (x_n), δηλαδή την ακολουθία η οποία ορίζεται με αρχικούς όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n \geq \frac{n}{2}$ για κάθε n. Ποιό είναι το όριο της (x_n);

2.4.26. (i) Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Αν $x < y$ αποδείξτε ότι ισχύει $x_n < y_n$ από κάποια τιμή του n και πέρα.
(ii) Έστω $x_n \to x$, $y_n \to y$ και $x \neq y$. Αν $|x - y| > a$ αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - y_n| > a$ από κάποια τιμή του n και πέρα.

2.4.27. Γνωρίζουμε ότι αν όλοι οι όροι της (x_n) ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $x_n \to x$ τότε και το x ανήκει στο $[a, b]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n) αν όλοι οι όροι της ανήκουν στο ανοικτό διάστημα (a, b); Ποιό γενικό συμπέρασμα υπάρχει για το όριο x της (x_n) αν όλοι οι όροι της ανήκουν στο ανοικτό διάστημα (a, b);

2.4.28. (i) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία αρρήτων (t_n) ώστε $t_n \to x$.
(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) και *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία ρητών (s_n) ώστε $r_n \to x$ και $s_n \to x$. Τα ίδια γίνονται και με ακολουθίες αρρήτων.

2.4.29. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και έστω $x_n \geq 0$ για κάθε n.
(i) Αν $x_n \to x$ αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{x}$.
(ii) Αν $x_n \to +\infty$ αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$.

2.4.30. Έστω ότι ισχύει $|x_n - x_m| \geq 1$ για κάθε n, m με $n \neq m$. Αποδείξτε ότι $|x_n| \to +\infty$. Έχει η (x_n) όριο; Εξετάστε ως παραδείγματα τις ακολουθίες (n), $(-n)$, $((-1)^{n-1}n)$.

2.4.31. (i) Αποδείξτε το **θεώρημα του Cesáro**: *Αν $x_n \to x$ τότε $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$. Το ίδιο ισχύει αν στη θέση του x έχουμε $+\infty$ ή $-\infty$.*
Αν $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.
Αν $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} n$ για κάθε n αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to +\infty$.
Και οι δύο προηγούμενες ακολουθίες (x_n) δεν έχουν όριο. Συμπεράνατε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Cesáro.
(ii) Αν $a_{n+1} - a_n \to a$ αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{n} \to a$. Αυτό ισχύει και με $+\infty$ ή $-\infty$ στη θέση του a.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(\frac{a^n}{n})$ και $(\frac{\log_a n}{n})$ με $a > 1$.
(iii) Αποδείξτε την γενίκευση του θεωρήματος του Cesáro: *Έστω ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε να ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$. Αν $\frac{x_n}{y_n} \to l$ τότε $\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \to l$. Το ίδιο ισχύει αν στη θέση του l έχουμε $+\infty$ ή $-\infty$.*
(iv) Αν $x_n > 0$ για κάθε n και $x \geq 0$ και $x_n \to x$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$. Αυτό ισχύει και με $+\infty$ στη θέση του x.
(v) Αν $a_n > 0$ για κάθε n και $a \geq 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$. Αυτό ισχύει και με $+\infty$ στη θέση του a.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{n!})$ και $(\sqrt[n]{(2n)!/(n!)^2})$.

2.4.32. Έστω $a < b < c < d$. Βρείτε μια *πολύ απλή* ακολουθία η οποία να έχει τέσσερις (εκτός των άλλων) υπακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στο a, η δεύτερη στο b, η τρίτη στο c και η τέταρτη στο d. Πρώτα περιγράψτε τον τρόπο επιλογής των διαδοχικών όρων της ακολουθίας και μετά γράψτε τον τύπο της.

2.4.33. Αν η (x_n) έχει όριο και αν υπάρχει (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$ αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

2.4.34. Έστω ότι οι υπακολουθίες (x_{3k}), (x_{3k-1}) και (x_{3k-2}) της (x_n) έχουν το ίδιο όριο. Προσαρμόζοντας την απόδειξη της πρότασης 2.3, αποδείξτε ότι και η (x_n) έχει το ίδιο όριο. Γενικεύστε.

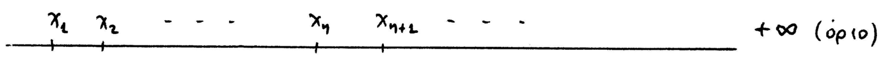
2.4.35. Μία επίπεδη νιφάδα χιονιού υφίσταται διαδοχικές αλλαγές με τον εξής τρόπο. Το αρχικό της σχήμα είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους s. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 12 ισομήκεις πλευρές. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς (της νέας νιφάδας) ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 48 ισομήκεις πλευρές. Αν αυτή η διαδικασία συνεχιστεί επ' άπειρον φανταστείτε το οριακό σχήμα της νιφάδας και υπολογίστε το μήκος της περιφέρειας καθώς και το εμβαδό της "οριακής νιφάδας".

2.4.36. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη A και σε ευθύ δρόμο κατευθύνεται προς την πόλη B με σταθερή ταχύτητα $v\frac{km}{hr}$. Όλοι γνωρίζουμε ότι αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι $d\, km$ τότε το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει την διαδρομή σε χρόνο $\frac{d}{v}\, hr$. Απαντήστε όμως σε κάποιον ο οποίος ισχυρίζεται ότι *το αυτοκίνητο δεν θα φτάσει ποτέ στην πόλη B* και το δικαιολογεί ως εξής:
$<$ Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο καλύπτει την μισή απόσταση και μάλιστα στον προβλεπόμενο γι αυτήν χρόνο. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κατόπιν το αυτοκίνητο καλύπτει την μισή από την εναπομένουσα απόσταση στον προβλεπόμενο γι αυτήν χρόνο. Και ούτω καθ' εξής. Το αυτοκίνητο έχει όμως πάντοτε μπροστά του κάποια εναπομένουσα (έστω και πολύ μικρή) απόσταση μέχρι την πόλη B οπότε δεν θα φτάσει ποτέ εκεί. $>$
Η απάντησή σας για να είναι πειστική πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τα λογικά βήματα του παραπάνω ισχυρισμού.

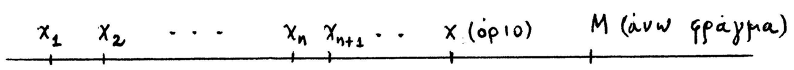
2.4.37. Ποιό λάθος γίνεται στους παρακάτω συλλογισμούς;
(i) $\lim_{n\to+\infty}(n\,\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{1}{n}}_{n}) = \underbrace{0+\cdots+0}_{n} = 0$.
(ii) $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{(1+\tfrac{1}{n})\cdots(1+\tfrac{1}{n})}_{n} = \underbrace{1\cdots1}_{n} = 1$.

2.5 Όρια μονότονων ακολουθιών. Ο αριθμοί e, π.

Α. Γενικά.



Σχήμα 2.5: Αύξουσα ακολουθία χωρίς άνω φράγμα.



Σχήμα 2.6: Αύξουσα ακολουθία με άνω φράγμα.

Έστω ότι η (x_n) είναι *αύξουσα* ακολουθία, το οποίο σημαίνει ότι, καθώς το n αυξάνεται, το x_n κινείται προς τα δεξιά πάνω στην πραγματική ευθεία. Τώρα έχουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη οπότε το x_n απομακρύνεται προς τα δεξιά και άρα η (x_n) έχει όριο το $+\infty$. Στην δεύτερη περίπτωση η (x_n) είναι άνω φραγμένη και τότε το x_n δεν ξεπερνά κάποιο σταθερό σημείο στα δεξιά του το οποίο προφανώς είναι άνω φράγμα της ακολουθίας. Σ' αυτήν την περίπτωση το x_n, κινούμενο προς τα δεξιά, πλησιάζει κάποιο σημείο x και άρα η (x_n) έχει όριο αυτό το x.

Παράδειγμα. Οι ακολουθίες (n) και (n^2) είναι αύξουσες και δεν είναι άνω φραγμένες. Και οι δύο έχουν όριο $+\infty$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $(\frac{n-1}{n})$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Η ακολουθία πλησιάζει το 1, το οποίο είναι το όριό της.

Παρόμοιους συλλογισμούς κάνουμε για μία *φθίνουσα* ακολουθία (x_n). Τώρα, καθώς το n αυξάνεται το x_n κινείται προς τα αριστερά και έχουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη και τότε το x_n απομακρύνεται προς τα αριστερά και η (x_n) έχει όριο το $-\infty$. Στην δεύτερη περίπτωση η (x_n) είναι κάτω φραγμένη οπότε το x_n δεν ξεπερνά κάποιο σταθερό σημείο στα αριστερά του το οποίο είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Τότε το x_n, κινούμενο προς τα αριστερά, πλησιάζει κάποιο σημείο x και άρα η (x_n) έχει όριο αυτό το x.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 2.1. *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
(i) Αν η ακολουθία είναι αύξουσα τότε είτε δεν είναι άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$ είτε είναι άνω φραγμένη και συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.
(ii) Αν η ακολουθία είναι φθίνουσα τότε είτε δεν είναι κάτω φραγμένη και αποκλίνει στο $-\infty$ είτε είναι κάτω φραγμένη και συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Την αυστηρή μαθηματική απόδειξη του θεωρήματος 2.1 δεν θα την δούμε σ' αυτές τις σημειώσεις.

Μπορούμε να συμπληρώσουμε το θεώρημα 2.1 ως εξής. Αν x είναι το όριο μίας αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας (x_n) τότε είναι φανερό ότι όλα τα x_n είναι $\leq x$ και μάλιστα αν η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα τότε όλοι οι όροι είναι $< x$. Βλέπουμε έτσι ότι το όριο x είναι ένα από τα άνω φράγματα της (x_n). Μπορούμε όμως να πούμε κάτι ακόμη. Ας πάρουμε οποιονδήποτε αριθμό $l < x$. Επειδή το x είναι το όριο της (x_n) από την πρόταση 2.7 συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n > l$ από κάποιον δείκτη και πέρα οπότε το l δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα της (x_n). Συμπεραίνουμε ότι το όριο x της (x_n) είναι το *μικρότερο* άνω φράγμα της (x_n). Άρα:

Το όριο αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματά της. Ομοίως, το όριο φθίνουσας και κάτω φραγμένης ακολουθίας είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματά της.

Το θεώρημα 2.1 είναι πολύτιμο. Από θεωρητική σκοπιά: *συμπεραίνουμε ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει οπωσδήποτε όριο*. Από πρακτική σκοπιά: *συμπεραίνουμε για μία δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη χωρίς να χρειάζεται να μαντέψουμε από πριν το πιθανό όριό της*. Προσέξτε: για να αποδείξουμε, με τον ορισμό του ορίου, ότι μία ακολουθία έχει όριο πρέπει να γνωρίζουμε (ή να μαντέψουμε) το υποψήφιο όριό της ώστε κατόπιν να αποδείξουμε με υπολογισμούς ότι η απόσταση του n-οστού όρου της από αυτό θα γίνει (αν ο δείκτης γίνει αρκετά μεγάλος) μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό. Το θεώρημα 2.1 είναι πολύ χρήσιμο (αν η ακολουθία είναι μονότονη) σε περιπτώσεις κατά τις οποίες ούτε μπορούμε να μαντέψουμε το όριο μίας ακολουθίας ούτε μπορούμε να εφαρμόσουμε τους διάφορους κανόνες υπολογισμού ορίων (πράξεις, παρεμβολή κ.τ.λ.).

Το θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μία συγκεκριμένη ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιον τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου. Δείτε για παράδειγμα την άσκηση 2.4.20 της προηγούμενης ενότητας.

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την (x_n) η οποία ορίζεται από τον πρώτο όρο της και από έναν *αναδρομικό τύπο* ως εξής:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad n \geq 1.$$

Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι $1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$. Από αυτούς υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και το αποδεικνύουμε με επαγωγή. Προφανώς ισχύει $x_1 \leq x_2$ και υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$. Κατ' αρχάς όλοι οι όροι είναι μη-αρνητικοί διότι ο πρώτος είναι 1 και όλοι οι άλλοι είναι τετραγωνικές ρίζες. Επομένως έχουμε διαδοχικά: $x_n \leq x_{n+1}$ συνεπάγεται $2x_n \leq 2x_{n+1}$ συνεπάγεται $\sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2x_{n+1}}$ συνεπάγεται $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. Συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ ισχύει για κάθε n οπότε η ακολουθία είναι αύξουσα και άρα έχει όριο.

Από την $x_n \leq x_{n+1}$ και από τον αναδρομικό τύπο έχουμε $x_n \leq \sqrt{2x_n}$ οπότε ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και επομένως συγκλίνει σε αριθμό.

Συμβολίζουμε x το άγνωστο όριο της (x_n). Παίρνοντας όριο των δύο μελών της ισότητας $x_{n+1}^2 = 2x_n$, βρίσκουμε $x^2 = 2x$ οπότε $x = 0$ ή $x = 2$. Η περίπτωση $x = 0$ αποκλείεται διότι η ακολουθία είναι αύξουσα με πρώτο όρο το 1 οπότε όλοι οι όροι της είναι ≥ 1 και επομένως και το όριό της πρέπει να είναι ≥ 1. Καταλήγουμε στο ότι $x_n \to 2$.

Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να αποδειχθεί ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Η ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq \sqrt{2x_n}$ και (επειδή έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n) αυτή είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq 2$. Επομένως αν αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε n θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) είναι αύξουσα αλλά ταυτόχρονα *και* ότι είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα το 2. Αυτό μπορεί να γίνει με επαγωγή. Η $x_1 \leq 2$ είναι προφανώς σωστή. Έστω ότι ισχύει $x_n \leq 2$ για κάποιο n. Τότε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ και άρα ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε n.

Β. Ο αριθμός e.

Το *αποτέλεσμα* του παραδείγματος το οποίο θα δούμε τώρα είναι *θεμελιώδες*!

Κάποιος έχει ένα κεφάλαιο K. Η πρώτη τράπεζα παρέχει επιτόκιο κατάθεσης εκατό τοις εκατό στο τέλος του έτους οπότε ο κεφαλαιούχος θα έχει τελικό κεφάλαιο $(1+1)K = 2K$. Η δεύτερη τράπεζα παρέχει το ίδιο επιτόκιο αλλά με ανατοκισμό στο τέλος του εξαμήνου, δηλαδή πενήντα τοις εκατό στο μισό έτος και πενήντα τοις εκατό στο νέο κεφάλαιο στο υπόλοιπο μισό έτος, οπότε το τελικό κεφάλαιο θα είναι $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})K = (1+\frac{1}{2})^2 K$. Η τρίτη τράπεζα κάνει δυο ενδιάμεσους ανατοκισμούς και παρέχει $\frac{100}{3}$ τοις εκατό επιτόκιο στο ένα τρίτο του έτους, το ίδιο επιτόκιο στο νέο κεφάλαιο στο επόμενο ένα τρίτο του έτους και το ίδιο επιτόκιο στο νέο κεφάλαιο στο τελευταίο ένα τρίτο του έτους. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})K = (1+\frac{1}{3})^3 K$ στην τρίτη τράπεζα. Γενικά, η n-οστή τράπεζα με $n-1$ ενδιάμεσους ανατοκισμούς ανά ίσα χρονικά διαστήματα θα δώσει τελικό κεφάλαιο $(1+\frac{1}{n})^n K$.

Παρατηρώντας τους αριθμούς για τις αρχικές τράπεζες, υποψιαζόμαστε ότι *περισσότεροι ανατοκισμοί δίνουν μεγαλύτερο τελικό κεφάλαιο*. Αποδεικνύεται ότι αυτό είναι αλήθεια, δηλαδή ότι η ακολουθία με τύπο $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ είναι αύξουσα. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν, ξεκινώντας με το ίδιο αρχικό κεφάλαιο K, το τελικό κεφάλαιο αυξάνεται *απεριόριστα* από τράπεζα σε τράπεζα. Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη και μάλιστα το όριό της είναι μικρότερο από 4. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι ο κεφαλαιούχος δεν μπορεί να ελπίζει, όσοι ανατοκισμοί κι αν γίνουν, σε τελικό κεφάλαιο υπερτετραπλάσιο του αρχικού.

Πρόταση 2.11. *Η ακολουθία* $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ *είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και επομένως συγκλίνει.*

Απόδειξη. Η ανισότητα $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ ισοδυναμεί με την $(\frac{n+1}{n})^n < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} < (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} < (1-\frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1}$ η οποία είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bernoulli. Πράγματι,

$$(1-\tfrac{1}{n^2+2n+1})^{n+1} > 1-\tfrac{n+1}{n^2+2n+1} = 1-\tfrac{1}{n+1} = \tfrac{n}{n+1}.$$

Άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

Πάλι από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n &= \left(1-\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq 1-n\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1-n\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\\ &= 1-\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 1-\tfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1-\tfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Από την $\frac{1}{2} < \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n$ συνεπάγεται $(1+\frac{1}{n})^n < 4$. □

Ορισμός. *Συμβολίζουμε με το γράμμα e το όριο της $((1+\frac{1}{n})^n)$. Δηλαδή ορίζουμε*

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ο αριθμός e, όπως και ο π, είναι ένας από τους σημαντικότερους αριθμούς για την επιστήμη.

Το e δεν είναι ρητός αριθμός και μάλιστα ούτε καν **αλγεβρικός** αριθμός. Ένας αριθμός χαρακτηρίζεται αλγεβρικός αν είναι λύση πολυωνυμικής εξίσωσης $a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ με *ακέραιους* συντελεστές. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε ρητός αριθμός είναι αλγεβρικός: το $\frac{m}{n}$ (με ακέραιους m, n) είναι προφανώς λύση της εξίσωσης $nx - m = 0$ η οποία έχει ακέραιους συντελεστές. Από την άλλη μεριά δεν είναι όλοι οι αλγεβρικοί αριθμοί ρητοί. Για παράδειγμα, ο άρρητος $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός διότι είναι λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές $x^2 - 2 = 0$. Οι μη-αλγεβρικοί αριθμοί ονομάζονται και **υπερβατικοί** αριθμοί. Επομένως το e είναι υπερβατικός αριθμός. Στο κεφάλαιο 9 θα αποδείξουμε ότι το e δεν είναι ρητός.

Ορισμός. *Ονομάζουμε* **φυσικούς λογαρίθμους** *τους λογαρίθμους με βάση το e και χρησιμοποιούμε για κάθε $y > 0$ τα απλούστερα σύμβολα*

$$\log y \quad \text{ή} \quad \ln y$$

αντί του $\log_e y$.

Οι προτάσεις οι οποίες ακολουθούν είναι εξειδίκευση των προτάσεων 1.8 και 1.9.

Πρόταση 2.12. *(i)* $\log(yz) = \log y + \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(ii) $\log\frac{y}{z} = \log y - \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(iii) $\log(y^z) = z\log y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
(iv) $\log 1 = 0$ *και* $\log e = 1$.
(v) Αν $0 < y < z$ *τότε* $\log y < \log z$.

Πρόταση 2.13. *Έστω* $a > 0$, $a \neq 1$. *Τότε* $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ *για κάθε* $y > 0$.

Γ. Ο αριθμός π.

Τώρα θα δούμε ένα ιστορικό παράδειγμα. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το γράμμα π συμβολίζει το μισό μήκος οποιουδήποτε κύκλου ακτίνας 1. Τώρα θα δούμε ποιό ακριβώς είναι το *μαθηματικό νόημα* του όρου "μήκος του κύκλου" και πώς μπορεί να προσεγγιστεί η τιμή του, δηλαδή ο αριθμός 2π, από τα μήκη εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων στον κύκλο κανονικών πολυγώνων.

Πιο συγκεκριμένα, έστω Κ ένας κύκλος με ακτίνα 1 και έστω εγγεγραμμένα στον Κ κανονικά πολύγωνα $P_4, P_8, P_{16}, \ldots$ με αντίστοιχα πλήθη πλευρών $4, 8, 16, \ldots$. Γενικά, με P_{2^n} θα συμβολίσουμε ένα εγγεγραμμένο στον Κ κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές. Μπορούμε να κατασκευάσουμε από κάθε P_{2^n} το επόμενο $P_{2^{n+1}}$ ως εξής: θεωρούμε ως κορυφές του $P_{2^{n+1}}$ τις 2^n κορυφές του P_{2^n} καθώς και τα μέσα των 2^n τόξων στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από τις κορυφές του P_{2^n}, δηλαδή συνολικά $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ σημεία. Αν συμβολίσουμε p_n το μήκος του πολυγώνου P_{2^n} τότε φυσικά είναι $p_2 = 4\sqrt{2}$. Δεν είναι δύσκολο να βρούμε έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος να συσχετίζει τα μήκη p_{n+1} και p_n. Ο τύπος αυτός είναι ο

$$p_{n+1} = \frac{2p_n}{\left(2+(4-\frac{p_n^2}{4^n})^{1/2}\right)^{1/2}}$$

και αποδεικνύεται με γεωμετρικό τρόπο (πώς;).

Έστω, επίσης, περιγεγραμμένα στον κύκλο Κ κανονικά πολύγωνα $Q_4, Q_8, Q_{16}, \dots$ με αντίστοιχα πλήθη πλευρών $4, 8, 16, \dots$. Γενικά, με Q_{2^n} θα συμβολίσουμε το περιγεγραμμένο στον Κ κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον Κ στις κορυφές του P_{2^n}. Αν συμβολίσουμε q_n το μήκος του πολυγώνου Q_{2^n} τότε προφανώς είναι $q_2 = 8$ και αποδεικνύεται με γεωμετρικό τρόπο (πώς;) ότι τα μήκη q_n και p_n συνδέονται με την σχέση

$$q_n = \frac{p_n}{(1-\frac{p_n^2}{4^{n+1}})^{1/2}}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται και ο αναδρομικός τύπος

$$q_{n+1} = \frac{4q_n}{2+(4+\frac{q_n^2}{4^n})^{1/2}}.$$

Από την πρώτη σχέση βλέπουμε εύκολα ότι η (p_n) είναι γνησίως αύξουσα, από την τρίτη σχέση ότι η (q_n) είναι γνησίως φθίνουσα και από την δεύτερη σχέση βρίσκουμε ότι ισχύει $q_n > p_n$. Έχουμε λοιπόν το εξής σχήμα:

$$p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots < q_{n+1} < q_n < \cdots < q_3 < q_2.$$

Επειδή η (p_n) είναι αύξουσα και προφανώς άνω φραγμένη (με άνω φράγμα το q_2, για παράδειγμα) συνεπάγεται ότι συγκλίνει. Τώρα, μία από τις παραδοχές της Γεωμετρίας είναι ότι *το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με το όριο των μηκών των εγγεγραμμένων σ' αυτόν κανονικών πολυγώνων με 2^n πλευρές.* Αυτή η παραδοχή αιτιολογείται επειδή καθώς ο δείκτης n αυξάνεται τα πολύγωνα *τείνουν να ταυτιστούν* με τον κύκλο και επομένως είναι "λογικό" να δεχτούμε ότι τα μήκη τους πλησιάζουν το μήκος του κύκλου. Αφού λοιπόν χρησιμοποιούμε το γράμμα π για να συμβολίσουμε το μισό μήκος ενός κύκλου ακτίνας 1 συμπεραίνουμε ότι

$$2\pi = \lim_{n\to+\infty} p_n.$$

Τώρα, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{(1-(p_n{}^2)/(4^{n+1}))^{1/2}} = 2\pi$. Άρα οι δύο ακολουθίες (p_n) και (q_n) έχουν το ίδιο όριο και επομένως

$$2\pi = \lim_{n\to+\infty} q_n.$$

Βλέπουμε επίσης ότι

$$p_2 < p_3 < \cdots < p_n < \cdots < 2\pi < \cdots < q_n < \cdots < q_3 < q_2.$$

Είδαμε ότι ο αριθμός e ορίζεται με αναλυτικό τρόπο ως όριο της ακολουθίας $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$. Θα μπορούσε να ρωτήσει κάποιος αν και ο αριθμός π μπορεί να ορισθεί με αναλυτικό τρόπο, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιηθούν γεωμετρικές έννοιες και κατασκευές. Αυτό, πράγματι, γίνεται και μάλιστα με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος είναι, για παράδειγμα, ο εξής. Θεωρούμε την ακολουθία (q_n) η οποία ορίζεται να έχει $q_2 = 8$ και να ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $q_{n+1} = \frac{4q_n}{2+(4+(q_n{}^2)/(4^n))^{1/2}}$ $(n \geq 2)$, χωρίς να μας απασχολεί αν αυτή έχει οποιαδήποτε σχέση με οποιαδήποτε γεωμετρικά σχήματα. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα (όπως έχουμε ήδη κάνει) και κάτω φραγμένη αφού είναι προφανές με επαγωγή ότι όλοι οι όροι της είναι ≥ 0. Συμπεραίνουμε ότι η (q_n) συγκλίνει σε κάποιον αριθμό και ορίζουμε τον αριθμό π να είναι το μισό του ορίου της (q_n), δηλαδή $\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} q_n$. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία (p_n) αντί της (q_n) αλλά η (q_n) είναι απλούστερη.

Ασκήσεις.

2.5.1. Αν η (x_n) είναι μονότονη και αν υπάρχει (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$ αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

2.5.2. Αποδείξτε ότι:

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+3} \to e, \quad \left(1+\tfrac{1}{n+2}\right)^{n} \to e, \quad \left(1+\tfrac{1}{n+2}\right)^{3n+5} \to e^3,$$

$$\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{n} \to e^{-1}, \quad \left(1+\tfrac{2}{n}\right)^{n} \to e^{2}, \quad \left(1-\tfrac{2}{n}\right)^{n} \to e^{-2}.$$

2.5.3. Έστω $0 < x_1 < 1$ και $x_{n+1} = 1-\sqrt{1-x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to 0$.

2.5.4. Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και ότι $x_n \to +\infty$.

2.5.5. Έστω $x_1 = x_2 = 1$ και $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to 0$.

2.5.6. Έστω $4x_{n+1} = x_n^2 + 3$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αν η (x_n) δεν είναι σταθερή (3) (οπότε έχει όριο 3) τότε τα μόνα πιθανά όριά της είναι τα 1 και $+\infty$.
(Υπόδειξη: Προσπαθώντας να αποδείξετε την μονοτονία της (x_n) θα δείτε ότι οι όροι της πρέπει να ανήκουν σε συγκεκριμένα διαστήματα. Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς την θέση του x_1 σε σχέση με αυτά τα διαστήματα προσδιορίστε με επαγωγή την θέση όλων των όρων της ακολουθίας σε σχέση με αυτά. Κατόπιν αποδείξτε την μονοτονία της ακολουθίας.)

2.5.7. Έστω $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αν η (x_n) δεν είναι σταθερή (-3) ή σταθερή (2) (οπότε έχει όριο -3 ή 2, αντιστοίχως) τότε τα μόνα πιθανά όριά της είναι τα $-\infty$, 1 και $+\infty$.

2.5.8. Έστω $\lambda > 0$, $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \sqrt{\lambda + x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και ότι $x_n \to \frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}$.

2.5.9. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και ότι $x_n \to 2$.

2.5.10. Έστω $a > 0$, $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι από τον δεύτερο όρο της και πέρα φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to \sqrt{a}$.

2.5.11. Θεωρήστε τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$.
(i) Αποδείξτε ότι ορίζεται ακολουθία (x_n) βάσει του παραπάνω αναδρομικού τύπου και με δοσμένο x_1 αν και μόνο αν $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Αν $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι η (x_n) η οποία ορίζεται με τον παραπάνω αναδρομικό τύπο είναι φθίνουσα μετά από κάποια τιμή του n και ότι $x_n \to 1$.

2.5.12. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η μία από τις υπακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n \to 2$.

2.5.13. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η μία από τις υπακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n \to 2$.

2.5.14. Έστω $0 < p < 1$ και $x_{n+2} = (1-p)x_{n+1} + px_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η μία από τις υπακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Βρείτε τύπο για το $y_n = x_{n+1} - x_n$. Κατόπιν βρείτε τύπο για το x_n και αποδείξτε ότι $x_n \to \frac{px_1+x_2}{p+1}$.

2.5.15. Έστω $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ και $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 2$.

2.5.16. Έστω $x_{n+1} = \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φραγμένη και, από τον δεύτερο όρο και πέρα, μονότονη και βρείτε το όριό της.
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε στον τριγωνομετρικό κύκλο ότι ισχύει $0 < \sin x < x$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$.)

2.5.17. Άλλες αποδείξεις για κάποια γνωστά όρια.
(i) Αν $a > 1$ αποδείξτε ότι η (a^n) είναι αύξουσα. Χρησιμοποιώντας την σχέση $a^{n+1} = aa^n$ αποδείξτε ότι $a^n \to +\infty$. Μελετήστε με τον ίδιο τρόπο και την περίπτωση $0 < a < 1$.
(ii) Αν $a > 1$ και $b > 0$ αποδείξτε ότι η $(\frac{a^n}{n^b})$ είναι αύξουσα από κάποια τιμή του n και πέρα. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} = a\frac{n^b}{(n+1)^b}\frac{a^n}{n^b}$ αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n^b} \to +\infty$.
(iii) Αν $a > 1$ αποδείξτε ότι η $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2 = \sqrt[n]{a}$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$. Τί γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$, $0 < a < 1$;
(iv) Αποδείξτε ότι η $(\sqrt[n]{n})$ είναι φθίνουσα από τον τρίτο όρο της και πέρα και κάτω φραγμένη και ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.
(v) Αποδείξτε ότι η $(\frac{a^n}{n!})$ είναι φθίνουσα από κάποια τιμή του n και πέρα. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1}$ αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

2.5.18. Έστω (x_n), (y_n) ώστε $0 < x_1 \leq y_1$ και $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

2.5.19. Έστω (x_n), (y_n) ώστε $0 < x_1 \leq y_1$ και $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ και $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

2.5.20. Αποδείξτε ότι $\frac{2^n n!}{n^n} \to 0$ και $\frac{4^n n!}{n^n} \to +\infty$.

2.5.21. (i) Με επαγωγή ως προς το k αποδείξτε ότι $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) Αποδείξτε ότι $(1 + \frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.
(iv) Αποδείξτε ότι $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ για κάθε x.

2.5.22. (i) Αποδείξτε ότι η $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \to e$.
(ii) Πολλαπλασιάστε τις ανισότητες $(1 + \frac{1}{k})^k < e < (1 + \frac{1}{k})^{k+1}$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και αποδείξτε ότι $\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^{n+1}}{n!}$ για κάθε n.
(iii) Αποδείξτε ότι $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ και $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

2.5.23. Θεωρήστε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$ και $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Το κοινό όριο των δύο αυτών ακολουθιών ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται γ.

2.5.24. Γενίκευση της άσκησης 2.5.10.
Έστω $a > 0$ και $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{1}{k}\frac{a}{x_n^{k-1}}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι από τον δεύτερο όρο της και πέρα φθίνουσα και ότι $x_n \geq \sqrt[k]{a}$ για κάθε $n \geq 2$. Συμπεράνατε ότι $x_n \to \sqrt[k]{a}$.

2.5.25. Έστω $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n. Μία τέτοια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κυρτή**. (Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα για κάθε n τότε η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κοίλη**.)
(i) Έστω, επιπλέον, ότι η (x_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι η $(x_n - x_{n+1})$ είναι φθίνουσα και ότι $x_n - x_{n+1} \to 0$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.
(ii) Αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη αποδείξτε ότι, και πάλι, έχει όριο.

2.5.26. Έστω ότι $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (nx_n^2) είναι αύξουσα και ότι η $((n + \frac{1}{2})x_n^2)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.5.27. Έστω $x > 0$. Αποδείξτε ότι η $(n(\sqrt[n]{x} - 1))$ είναι φθίνουσα και ότι $n(\sqrt[n]{x} - 1) \to \log x$.

Κεφάλαιο 3

Συναρτήσεις.

3.1 Συνάρτηση, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών.

Ορισμός. *Αν η μεταβλητή x παίρνει οποιαδήποτε τιμή μέσα από κάποιο σύνολο A και υπάρχει ένας συγκεκριμένος κανόνας ο οποίος για κάθε τιμή της x καθορίζει μία μοναδική τιμή μίας άλλης μεταβλητής y μέσα από κάποιο άλλο σύνολο B τότε λέμε ότι η μεταβλητή y είναι* **συνάρτηση** *της μεταβλητής x και αυτό το συμβολίζουμε με*

$$y = f(x) \qquad \text{ή} \qquad y = F(x) \qquad \text{ή} \qquad y = g(x),$$

ή με οποιαδήποτε άλλη παρόμοια έκφραση. Γράφουμε, επίσης,

$$f : A \to B \qquad \text{ή} \qquad F : A \to B \qquad \text{ή} \qquad g : A \to B$$

και λέμε ότι η f (ή όποιο άλλο σύμβολο χρησιμοποιήσουμε) είναι **συνάρτηση** *με* **τύπο** *ή* **κανόνα** *$y = f(x)$. Λέμε ακόμη ότι η x είναι η* **ανεξάρτητη μεταβλητή** *και ότι η y είναι η* **εξαρτημένη μεταβλητή** *της συνάρτησης f. Το σύνολο A των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x ονομάζεται* **πεδίο ορισμού** *της συνάρτησης. Το σύνολο των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής $y = f(x)$, το οποίο είναι υποσύνολο του B, το συμβολίζουμε $f(A)$ και το ονομάζουμε* **σύνολο τιμών** *της συνάρτησης:*

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Συνήθως, και οπωσδήποτε στα πλαίσια του απειροστικού λογισμού, εξετάζουμε συναρτήσεις $f : A \to B$ με τα A, B να είναι σύνολα αριθμών: $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Τα πιο συνηθισμένα τέτοια σύνολα είναι διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων. Ο τύπος $y = f(x)$ είναι συνήθως ένας *μαθηματικός τύπος*.

Η γενική έκφραση $y = f(x)$ χρησιμοποιείται ειδικά αν δεν γνωρίζουμε τον συγκεκριμένο τύπο ή κανόνα ο οποίος καθορίζει τις τιμές της y από τις τιμές της x. Μερικές φορές γνωρίζουμε τον τύπο αλλά προτιμάμε να συντομεύουμε κάνοντας χρήση των απλούστερων συμβόλων.

Παράδειγμα. Ο τύπος $y = x^3 \sin(e^{2x} + \log_2(x + 3))$ καθορίζει το y ως συνάρτηση του x αλλά για να μην επαναλαμβάνουμε αυτόν τον κουραστικό τύπο μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι θα γράφουμε $f(x)$ αντί $x^3 + \sin(e^{2x} + \log_2(x + 3))$ και να μιλάμε για την *συνάρτηση* f με *τύπο* $y = f(x)$.

Πολλές φορές, χάριν συντομίας, αντί "*η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$*" λέμε "*η συνάρτηση $y = f(x)$*". Επίσης, αντί "*η συνάρτηση f*" θα λέμε "*η συνάρτηση $y = f(x)$*" όταν θέλουμε να δείξουμε τα σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούμε για την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.

Τα πιο συνηθισμένα σύμβολα είναι το x για την ανεξάρτητη μεταβλητή και το y για την εξαρτημένη μεταβλητή. Δεν είναι όμως τα αποκλειστικά σύμβολα. Οποιαδήποτε σύμβολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμη και για την ίδια συνάρτηση: $u = f(v)$, $t = f(x)$, $x = f(y)$ κ.τ.λ.

Αν δεν προκαθορίζεται το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης (ίσως από την φυσική σημασία της) τότε *θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της το μεγαλύτερο σύνολο το οποίο είναι συμβατό με τον κανόνα ο οποίος καθορίζει την εξαρτημένη μεταβλητή ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής.* Για παράδειγμα, για την συνάρτηση με τύπο $y = \frac{3}{x}$ αν δεν προκαθορίζεται κάποιο σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η x θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ας δούμε πώς καθορίζεται το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης. Έστω συνάρτηση $f : A \to B$ με γνωστό πεδίο ορισμού A και γνωστό σύνολο B. Το ότι ένα $y \in B$ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ της f είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει κάποιο (τουλάχιστον ένα) $x \in A$ ώστε $f(x) = y$. Με άλλα λόγια,

Στο σύνολο τιμών της $f : A \to B$ ανήκουν ακριβώς εκείνα τα $y \in B$ για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού A.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $y = 3x - 1$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και θα βρούμε το σύνολο τιμών της. Θεωρούμε την $3x - 1 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα βρούμε για ποιά y η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση. Όμως για κάθε y λύνουμε εύκολα την εξίσωση και βρίσκουμε ως λύση το $x = \frac{y+1}{3}$. Άρα κάθε y ανήκει στο σύνολο τιμών οπότε το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Έστω η $y = e^{-2x}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Θα βρούμε για ποιά y η εξίσωση $e^{-2x} = y$ με άγνωστο x έχει μία τουλάχιστον λύση. Προφανώς, για κανένα $y \leq 0$ η $e^{-2x} = y$ δεν έχει λύση ενώ για κάθε $y > 0$ έχει την λύση $x = -\frac{1}{2} \log y$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$.

Μερικές φορές έχουμε μία συνάρτηση $f : A \to B$ και μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής οι οποίες αντιστοιχούν σε τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής από κάποιο *υποσύνολο* A' του πεδίου ορισμού A. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο τιμών $f(A') = \{f(x) \,|\, x \in A'\}$ το οποίο αντιστοιχεί σε κάποιο $A' \subseteq A$.

Παράδειγμα. Έστω πάλι η $y = 3x - 1$. Θα βρούμε το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο υποδιάστημα $[-2, 5)$ του πεδίου ορισμού $(-\infty, +\infty)$. Θεωρούμε την $3x - 1 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και τώρα θα βρούμε για ποιά y η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[-2, 5)$. Λύνουμε όπως πριν την εξίσωση βρίσκοντας ως λύση $x = \frac{y+1}{3}$ και πρέπει να ελέγξουμε για ποιά y η λύση ανήκει στο $[-2, 5)$, δηλαδή $-2 \leq \frac{y+1}{3} < 5$ ή, ισοδύναμα, $-7 \leq y < 14$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-2, 5)$ είναι το $[-7, 14)$.

Παράδειγμα. Έστω η $y = \frac{2x}{x-1}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Θεωρούμε την $\frac{2x}{x-1} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα δούμε για ποιά y η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση. Η $\frac{2x}{x-1} = y$ ισοδυναμεί με την $(y - 2)x = y$. Αν $y = 2$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση. Αν $y \neq 2$ η εξίσωση έχει την λύση $x = \frac{y}{y-2}$. *Πρέπει, επίσης, να ελέγξουμε αν αυτή η λύση ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης*, δηλαδή αν $\frac{y}{y-2} \neq 1$. Αυτό όμως ισχύει διότι προφανώς $y \neq y - 2$. Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
Ας δούμε, επίσης, ποιά είναι τα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ του πεδίου ορισμού.
Για το $(1, +\infty)$ θεωρούμε την $\frac{2x}{x-1} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα δούμε για ποιά y η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, +\infty)$. Όπως πριν, αφού αποκλείσουμε το $y = 2$, βρίσκουμε την λύση $x = \frac{y}{y-2}$ και πρέπει να ελέγξουμε αν αυτή ανήκει στο $(1, +\infty)$, δηλαδή αν $\frac{y}{y-2} > 1$. Αυτό ισοδυναμεί με $\frac{2}{y-2} > 0$ κι αυτό με $y > 2$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(1, +\infty)$ είναι το $(2, +\infty)$.
Ομοίως, βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 1)$ είναι το $(-\infty, 2)$.

Ασκήσεις.

3.1.1. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων

$$y = \frac{2x-1}{x+4}, \quad y = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad y = \log_{10} x + 4, \quad y = e^{2x} - 2e^x + 3, \quad y = \frac{e^x+1}{e^x-1}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}.$$

3.1.2. Θεωρήστε τις παρακάτω συναρτήσεις και τα διάφορα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους και βρείτε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.
(i) $y = x^2 - 4x + 3$ και $(-\infty, 1]$, $(1, 3]$, $(3, +\infty)$, $(-\infty, 2]$, $[2, +\infty)$.
(ii) $y = \frac{2x-1}{x+4}$ και $(-\infty, -4)$, $(-4, +\infty)$.
(iii) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ και $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.
(iv) $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
(v) $y = (1 + \frac{1}{x})^{1/2}$ και $(-\infty, -1]$, $(0, +\infty)$.
(vi) $y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ και $[0, 1)$, $(1, +\infty)$.

3.2 Αναλυτικές εκφράσεις.

Πολλές φορές ο κανόνας ο οποίος συσχετίζει την εξαρτημένη μεταβλητή y και την ανεξάρτητη μεταβλητή x μίας συνάρτησης καθορίζεται από μία **αναλυτική έκφραση**. Για παράδειγμα:

$$y = x^2, \qquad y = \sin x, \qquad xy = 2, \qquad y^2 - x^3 = 0.$$

Με τις δύο πρώτες αναλυτικές εκφράσεις το y υπολογίζεται άμεσα από το x: ο μαθηματικός τύπος ο οποίος καθορίζει το y από το x ταυτίζεται με την αναλυτική έκφραση. Με την τρίτη αναλυτική έκφραση το y υπολογίζεται *έμμεσα* από το x: θεωρούμε την έκφραση $xy = 2$ ως εξίσωση με άγνωστο y και λύνουμε ως προς y για να βρούμε τον τύπο ο οποίος καθορίζει το y από το x:

$$y = \tfrac{2}{x}.$$

Με την τέταρτη αναλυτική έκφραση το y υπολογίζεται και πάλι *έμμεσα* από το x. Όμως τώρα η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Λύνοντας την εξίσωση $y^2 - x^3 = 0$ με άγνωστο y βρίσκουμε εν γένει δύο διαφορετικές λύσεις. Τα $x < 0$ δεν προσδιορίζουν κανένα y. Το $x = 0$ προσδιορίζει ακριβώς ένα y, το $y = 0$. Κάθε $x > 0$ προσδιορίζει δύο διαφορετικά y, το $y = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ και το $y = -\sqrt{x^3} = -x^{3/2}$. Μπορούμε να πούμε ότι η αναλυτική έκφραση $y^2 - x^3 = 0$ δεν καθορίζει μία συνάρτηση αλλά δύο συναρτήσεις, τις

$$y = x^{3/2}, \qquad y = -x^{3/2},$$

με κοινό πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Αν θέλουμε να είμαστε πιο προσεκτικοί πρέπει να παρατηρήσουμε ότι καθορίζονται *πολύ περισσότερες* συναρτήσεις διότι μπορούμε να επιλέξουμε κάποια $x \in [0, +\infty)$ σε καθένα από τα οποία θα αντιστοιχίσουμε το $y = x^{3/2}$ ενώ σε καθένα από τα υπόλοιπα $x \in [0, +\infty)$ θα αντιστοιχίσουμε το $y = -x^{3/2}$. Για παράδειγμα, δύο επιπλέον συναρτήσεις οι οποίες καθορίζονται από την αναλυτική έκφραση $y^2 - x^3 = 0$ είναι οι

$$y = \begin{cases} x^{3/2} & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^{3/2} & \text{αν } 1 < x < +\infty. \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^{3/2} & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \text{ ή } 3 < x < +\infty \\ -x^{3/2} & \text{αν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ασκήσεις.

3.2.1. Μελετήστε τις αναλυτικές εκφράσεις

$$x^2 - 2yx + 1 = 0, \quad \tfrac{y-x}{y+x} = -2, \quad (xy)^2 = 1, \quad e^{(x-1)y^2} = x, \quad \sin(x + y) = 1.$$

Ποιές ορίζουν μία μόνο συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y; Ποιές ορίζουν τουλάχιστον δύο συναρτήσεις; Βρείτε σε κάθε περίπτωση τα πεδία ορισμού των οριζόμενων συναρτήσεων.

3.3 Γράφημα συνάρτησης.

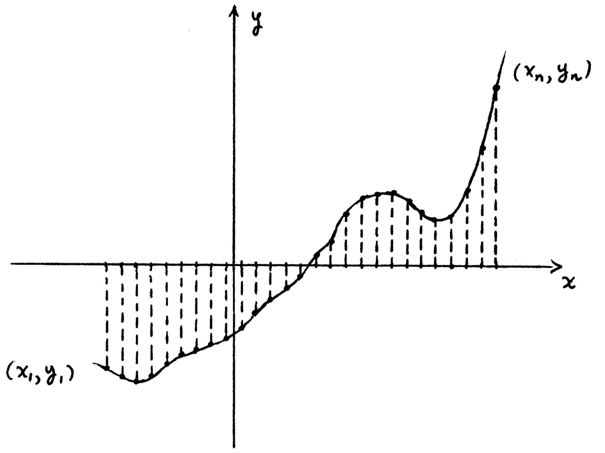
Α. Γράφημα, μονοτονία, φράγματα.

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$. Θεωρούμε δύο κάθετες μεταξύ τους πραγματικές ευθείες στο ίδιο επίπεδο, μία οριζόντια, τον x-άξονα, και μία κατακόρυφη, τον y-άξονα, ώστε το σημείο τομής τους να αναπαριστά το 0 και στις δύο ευθείες (με τα θετικά x προς τα δεξιά και τα θετικά y προς τα πάνω). Στον x-άξονα τοποθετούμε τα στοιχεία του πεδίου ορισμού A και στον y-άξονα τα στοιχεία του συνόλου τιμών $f(A)$. Τέλος, για κάθε x στο πεδίο ορισμού βρίσκουμε το αντίστοιχο $f(x)$ στο σύνολο τιμών και σχεδιάζουμε το σημείο $(x, f(x))$ του επιπέδου.

Ορισμός. *Τα σημεία $(x, f(x))$ σχηματίζουν την* **γραφική παράσταση** *ή* **γράφημα** *της f:*

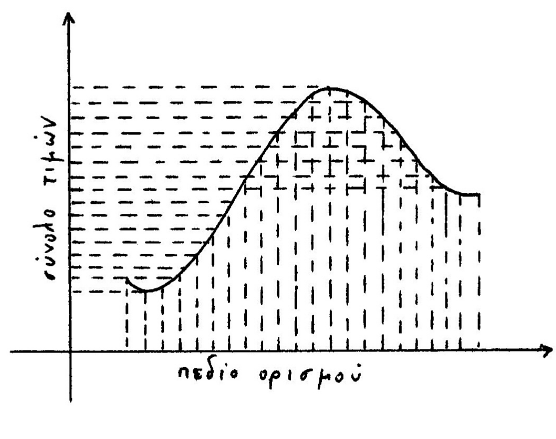
$$\text{γράφημα της } f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}.$$

Συνήθως το γράφημα μίας συνάρτησης έχει την μορφή ένωσης καμπυλών.



Σχήμα 3.1: Προσεγγιστική σχεδίαση γραφήματος.

Πρακτικά είναι αδύνατο να επαναλάβουμε την διαδικασία αυτή για όλα τα $x \in A$, ειδικά αν αυτά είναι άπειρα, όπως όταν το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα ολόκληρο διάστημα. Σχεδιάζουμε σημεία $(x_1, y_1 = f(x_1)), \ldots, (x_n, y_n = f(x_n))$ για όσο το δυνατό περισσότερα $x_1, \ldots, x_n$ τα



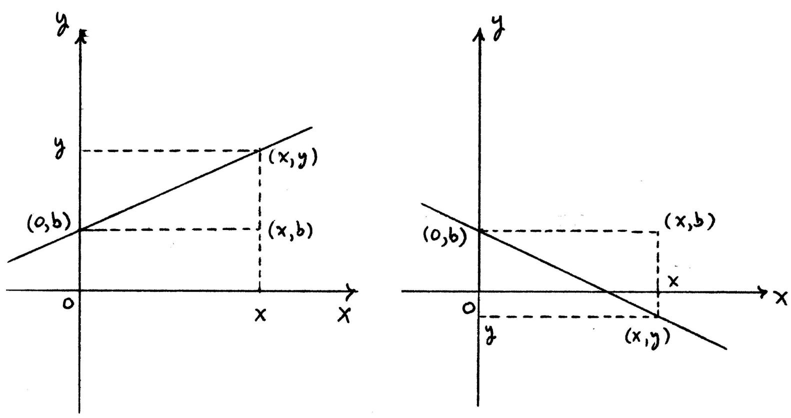
Σχήμα 3.2: Πεδίο ορισμού – σύνολο τιμών.

οποία κατανέμονται όσο το δυνατό πυκνότερα στο A. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, από τα σημεία τα οποία θα σχεδιάσουμε μπορούμε να μαντέψουμε όλα τα ενδιάμεσα σημεία τα οποία λείπουν και να σχεδιάσουμε με καλή προσέγγιση το γράφημα της συνάρτησης.

Αν γνωρίζουμε το γράφημα της $y = f(x)$ μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της με την αντίστροφη διαδικασία από αυτήν με την οποία σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης. Από κάθε σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος φέρνουμε μία κατακόρυφη και μία οριζόντια ευθεία. Η κατακόρυφη ευθεία τέμνει τον x-άξονα στο σημείο x του πεδίου ορισμού και η οριζόντια τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $f(x)$ του συνόλου τιμών. Επομένως,

Το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ είναι η κατακόρυφη προβολή του γραφήματός της πάνω στον x-άξονα και το σύνολο τιμών της είναι η οριζόντια προβολή του γραφήματός της πάνω στον y-άξονα.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y = ax + b$ έχει ως πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.
Ένα από τα σημεία του γραφήματος είναι το $(0, b)$. Για κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος ισχύει $y = ax + b$ και επομένως $y - b = a(x - 0)$. Άρα η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $(0, b)$ και (x, y) είναι ίση με $\frac{y-b}{x-0} = a$. Επομένως κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος ανήκει στην **ευθεία** l η οποία περιέχει το σημείο $(0, b)$ και έχει κλίση a. Το αντίστροφο είναι προφανές: για κάθε σημείο (x, y) της ευθείας l η κλίση $\frac{y-b}{x-0}$ του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $(0, b)$ και (x, y) είναι ίση με a οπότε ισχύει $\frac{y-b}{x-0} = a$, δηλαδή $y = ax + b$, και άρα το σημείο (x, y) ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης. Επομένως το γράφημα της συνάρτησης ταυτίζεται με την ευθεία l.
Αν $a > 0$ η κλίση της l είναι θετική και η l έχει κατεύθυνση από αριστερά και κάτω προς δεξιά και πάνω, ενώ αν $a < 0$ η κλίση της l είναι αρνητική και η l έχει κατεύθυνση από αριστερά και πάνω προς δεξιά και κάτω. Αν $a = 0$ η κλίση της l είναι μηδενική και η l είναι οριζόντια. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις (δηλαδή αν $a \neq 0$) η οριζόντια προβολή της l στον y-άξονα είναι ολόκληρος

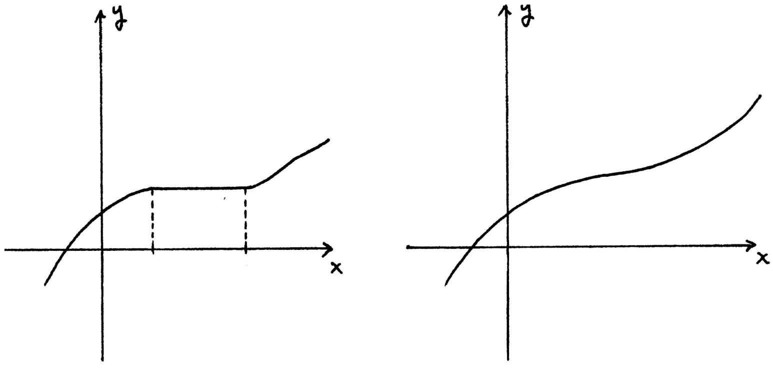


Σχήμα 3.3: Το γράφημα της $y = ax + b$. Οι περιπτώσεις: $a > 0$ και $a < 0$.

ο y-άξονας οπότε το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. (Αυτό αποδεικνύεται και με μαθηματικό τρόπο όπως στο παράδειγμα $y = 3x - 1$ της ενότητας 3.1.) Στην τρίτη περίπτωση (δηλαδή αν $a = 0$) η l είναι οριζόντια οπότε η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι μόνο το σημείο b και άρα το σύνολο τιμών είναι το $\{b\}$.

Ορισμός. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$.*
Η f χαρακτηρίζεται ***αύξουσα*** *στο A' αν για κάθε $x_1, x_2 \in A'$ η ανισότητα $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) \leq f(x_2)$. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A'$ η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f χαρακτηρίζεται* ***γνησίως αύξουσα*** *στο A'.*
Ομοίως, η f χαρακτηρίζεται ***φθίνουσα*** *στο A' αν για κάθε $x_1, x_2 \in A'$ η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) \geq f(x_2)$. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A'$ η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f χαρακτηρίζεται* ***γνησίως φθίνουσα*** *στο A'.*
Η f χαρακτηρίζεται ***μονότονη*** *στο A' αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο A' και* ***γνησίως μονότονη*** *στο A' αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο A'.*

Το γράφημα μίας γνησίως αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει από αριστερά και κάτω προς δεξιά και πάνω. Ενώ το γράφημα μίας αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει αλλά μπορεί και να μένει οριζόντιο σε υποδιαστήματα. Αναλόγως, το γράφημα μίας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης κατε-



Σχήμα 3.4: Γραφήματα αύξουσας και γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

βαίνει από αριστερά και πάνω προς δεξιά και κάτω, ενώ το γράφημα μίας φθίνουσας συνάρτησης κατεβαίνει αλλά μπορεί και να μένει οριζόντιο σε υποδιαστήματα.

Παράδειγμα. Η $y = ax + b$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ αν $a > 0$ και γνησίως φθίνουσα αν $a < 0$. Αν $a = 0$ η συνάρτηση είναι **σταθερή** στο $(-\infty, +\infty)$.

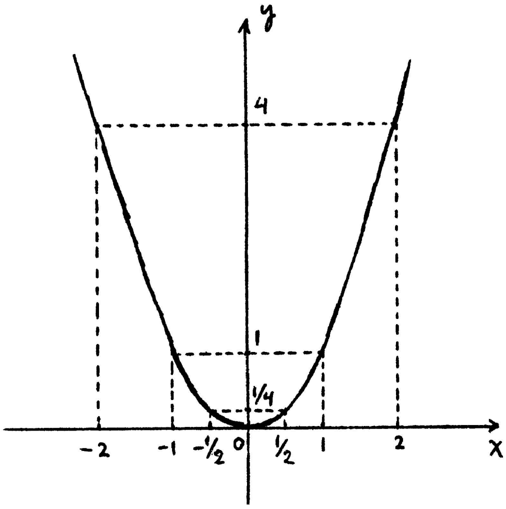
Ορισμός. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$.*
Η f χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** *στο A' αν υπάρχει u ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A'$ και ένα τέτοιο u χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *της συνάρτησης στο σύνολο A'. Η f χαρακτηρίζεται* **κάτω φραγμένη** *στο A' αν υπάρχει l ώστε να ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in A'$ και ένα τέτοιο l χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *της συνάρτησης στο A'. Τέλος, η f χαρακτηρίζεται* **φραγμένη** *στο A' αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη στο A', δηλαδή αν υπάρχουν u, l ώστε να ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A'$.*

Το ότι το u είναι άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο A' σημαίνει ότι το μέρος του γραφήματός της το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = u$. Ομοίως, το ότι το l είναι κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο A' σημαίνει ότι το μέρος του γραφήματός της το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι πάνω από την οριζόντια ευθεία $y = l$. Αν λοιπόν τα u και l είναι άνω φράγμα και κάτω φράγμα, αντιστοίχως, της $y = f(x)$ στο A' τότε το μέρος του γραφήματός της το οποίο αντιστοιχεί στο A' βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες $y = u$ και $y = l$.

Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι το u είναι άνω φράγμα της f στο A' αν και μόνο αν το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι υποσύνολο του $(-\infty, u]$ και ότι το l είναι κάτω φράγμα της f στο A' αν και μόνο αν το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι υποσύνολο του $[l, +\infty)$. Ομοίως, τα u, l είναι άνω φράγμα και κάτω φράγμα της f στο A', αντιστοίχως, αν και μόνο αν το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι υποσύνολο του $[l, u]$.

Παράδειγμα. Η $y = x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Ας δούμε ποιά είναι τα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν στα διαστήματα μονοτονίας $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$ της συνάρτησης.
Θα βρούμε για ποιά y η εξίσωση $x^2 = y$ με άγνωστο x έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[0, +\infty)$. Όλα είναι γνωστά και απλά: αν $y < 0$ δεν υπάρχει λύση και αν $y \geq 0$ υπάρχει η λύση $x = \sqrt{y}$ στο $[0, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[0, +\infty)$.
Ομοίως, η εξίσωση $x^2 = y$ με άγνωστο x δεν έχει καμία λύση αν $y < 0$ και έχει την λύση $x = -\sqrt{y}$ στο $(-\infty, 0]$ αν $y \geq 0$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$ είναι πάλι το $[0, +\infty)$.
Είναι φανερό ότι η $y = x^2$ είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και το 0 είναι κάτω φράγμα της

συνάρτησης αφού το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$. Για τον ίδιο λόγο η $y = x^2$ δεν είναι άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ ούτε και σε κανένα από τα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$.
Το μέρος του γραφήματος της $y = x^2$ το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι μία καμπύλη η οποία αρχίζει από το σημείο $(0, 0)$, ανεβαίνει προς δεξιά και πάνω και περιέχει τα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 1)$, $(2, 4)$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x-άξονα είναι το διάστημα $[0, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$, δηλαδή το $[0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη ανεβαίνει προς *απεριόριστα* δεξιά και πάνω.
Τέλος, το μέρος του γραφήματος της $y = x^2$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$ είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από αριστερά και πάνω, καταλήγει στο σημείο $(0, 0)$ και περιέχει τα σημεία



Σχήμα 3.5: Το γράφημα της $y = x^2$.

$(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης στον x-άξονα είναι το διάστημα $(-\infty, 0]$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$, δηλαδή το $[0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη κατεβαίνει από *απεριόριστα* αριστερά και πάνω.
Το γράφημα της $y = x^2$ είναι η γνωστή μας **παραβολή**. Η παραβολή έχει ένα ακόμη χαρακτηριστικό.

Ορισμός. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **άρτια** *αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.*

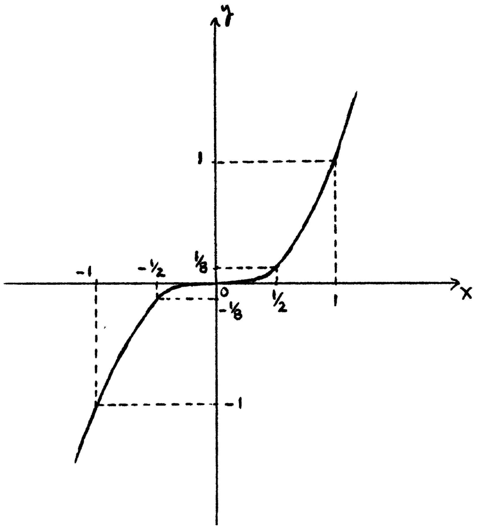
Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι άρτια τότε, σύμφωνα με τον ορισμό, πρέπει για κάθε $x \in A$ να ισχύει $-x \in A$. Με άλλα λόγια, το πεδίο ορισμού A στον x-άξονα πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επίσης, αν το σημείο (x, y) είναι στο γράφημα της f, δηλαδή αν $y = f(x)$, τότε $y = f(-x)$ οπότε και το σημείο $(-x, y)$ ανήκει στο γράφημα της f. Τα σημεία (x, y) και $(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον y-άξονα. Επομένως αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος μίας άρτιας συνάρτησης τότε το συμμετρικό του ως προς τον y-άξονα είναι κι αυτό σημείο του γραφήματος. Αυτό σημαίνει ότι

Το γράφημα άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον y-άξονα.

Η συνάρτηση $y = x^2$ είναι άρτια οπότε η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον y-άξονα.

Παράδειγμα. Η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$. Το γράφημά της είναι μία καμπύλη η οποία ανεβαίνει από αριστερά και κάτω προς δεξιά και πάνω και περιέχει τα σημεία $(-2, -8)$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, $(1, 1)$, $(2, 8)$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $y = x^3$ θεωρώντας την $x^3 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x. Για κάθε $y \geq 0$ η εξίσωση έχει λύση το $x = \sqrt[3]{y}$ και για κάθε $y < 0$ η εξίσωση έχει λύση το $x = -\sqrt[3]{-y}$. Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Η $y = x^3$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ αφού το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Η κατακόρυφη προβολή του γραφήματος στον x-άξονα είναι ίση με το πεδίο ορισμού, δηλαδή

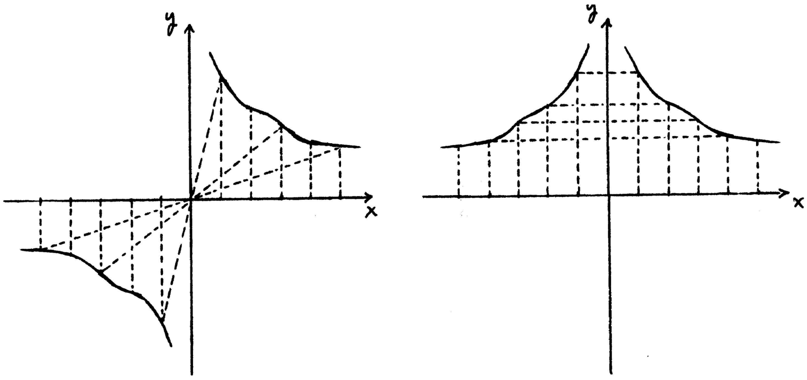


Σχήμα 3.6: Το γράφημα της $y = x^3$.

το $(-\infty, +\infty)$, και η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών, δηλαδή το $(-\infty, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα ανεβαίνει από *απεριόριστα* αριστερά και κάτω προς *απεριόριστα* δεξιά και πάνω.

Ορισμός. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **περιττή** *αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.*

Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι περιττή τότε πρέπει για κάθε $x \in A$ να ισχύει $-x \in A$. Δηλαδή το πεδίο ορισμού A στον x-άξονα πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επίσης, αν το σημείο (x, y)



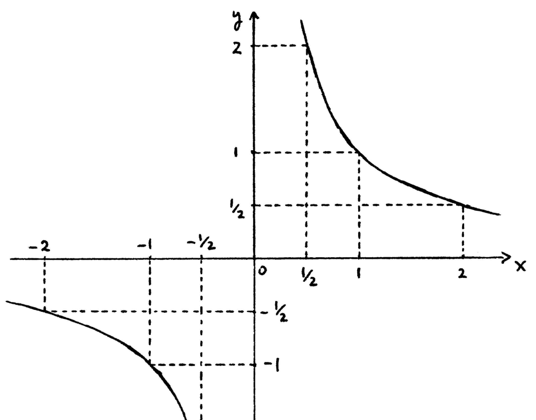
Σχήμα 3.7: Γραφήματα περιττής και άρτιας συνάρτησης.

είναι στο γράφημα της f, δηλαδή αν $y = f(x)$, τότε $-y = f(-x)$ οπότε και το σημείο $(-x, -y)$ ανήκει στο γράφημα της f. Τα σημεία (x, y) και $(-x, -y)$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0, 0)$. Επομένως αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος μίας περιττής συνάρτησης τότε το συμμετρικό του ως προς το σημείο $(0,0)$ είναι κι αυτό σημείο του γραφήματος. Άρα

Το γράφημα περιττής συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0,0)$.

Επειδή η $y = x^3$ είναι περιττή, το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0,0)$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα και στα δύο διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Θα βρούμε τα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν σ' αυτά τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης.
Θεωρούμε την $\frac{1}{x} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x. Αν $y \leq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση στο $(0, +\infty)$ ενώ αν $y > 0$ έχει την λύση $x = \frac{1}{y}$ στο $(0, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$.
Ομοίως, η εξίσωση $\frac{1}{x} = y$ με άγνωστο x δεν έχει καμία λύση στο $(-\infty, 0)$ αν $y \geq 0$ ενώ έχει την λύση $x = \frac{1}{y}$ στο $(-\infty, 0)$ αν $y < 0$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, 0)$.
Η $y = \frac{1}{x}$ είναι κάτω φραγμένη στο $(0, +\infty)$ με κάτω φράγμα το 0 αλλά δεν είναι άνω φραγμένη στο $(0, +\infty)$. Η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη στο $(-\infty, 0)$ με άνω φράγμα το 0 αλλά δεν είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, 0)$.
Το μέρος του γραφήματος της $y = \frac{1}{x}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι μία καμπύλη η οποία κατεβαίνει από αριστερά και πάνω προς δεξιά και κάτω και περιέχει τα σημεία $(\frac{1}{2}, 2)$, $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x-άξονα είναι το $(0, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$, δηλαδή το $(0, +\infty)$. Άρα η καμπύλη κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα.
Τέλος, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από αριστερά και πάνω προς δεξιά και κάτω και περιέχει τα σημεία $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x-άξονα είναι το $(-\infty, 0)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$, δηλαδή το $(-\infty, 0)$. Άρα η καμπύλη κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα κάτω και κοντά στον y-άξονα.

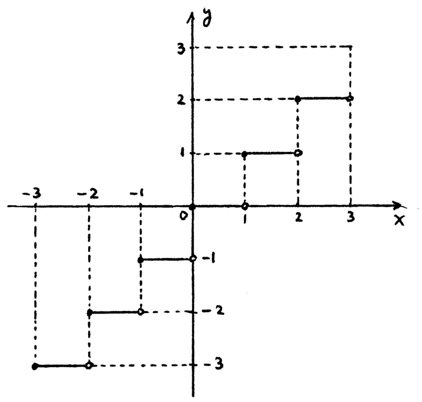


Σχήμα 3.8: Το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$.

Το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$ ονομάζεται **υπερβολή** και όπως είδαμε αποτελείται από δύο καμπύλες οι οποίες ονομάζονται **κλάδοι** της υπερβολής.
Η $y = \frac{1}{x}$ είναι περιττή οπότε η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς το σημείο $(0,0)$: καθένας από τους δύο κλάδους είναι συμμετρικός του άλλου ως προς το σημείο $(0,0)$.
Η υπερβολή έχει κι άλλο ένα χαρακτηριστικό. Αν το σημείο (x, y) ανήκει στην υπερβολή, δηλαδή

αν $y = \frac{1}{x}$, τότε $x = \frac{1}{y}$ οπότε και το σημείο (y, x) ανήκει στην υπερβολή. Τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$, την *κύρια διαγώνιο*. Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής τότε το συμμετρικό του ως προς την κύρια διαγώνιο είναι κι αυτό σημείο της υπερβολής. Δηλαδή *η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς την κύρια διαγώνιο.*

Παράδειγμα. Η $y = [x]$, το ακέραιο μέρος του x, έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι αύξουσα. Η συνάρτηση είναι σταθερή στο διάστημα $[k, k+1)$ όπου k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος: ισχύει $y = k$ για κάθε $x \in [k, k+1)$. Άρα το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[k, k+1)$ είναι ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα (χωρίς το δεξιό άκρο του). Το πλήρες



Σχήμα 3.9: Το γράφημα της $y = [x]$.

γράφημα της $y = [x]$ αποτελείται από ασύνδετα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα.

Β. Απλές τεχνικές σχεδίασης γραφημάτων.

Α. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε μερικά απλά βήματα τα οποία βοηθούν στην σχεδίαση γραφημάτων συναρτήσεων και τα οποία έχουμε ακολουθήσει στα προηγούμενα παραδείγματα. Σε επόμενα κεφάλαια και ειδικά στο κεφάλαιο των παραγώγων θα γνωρίσουμε ισχυρότερα εργαλεία σχεδίασης.

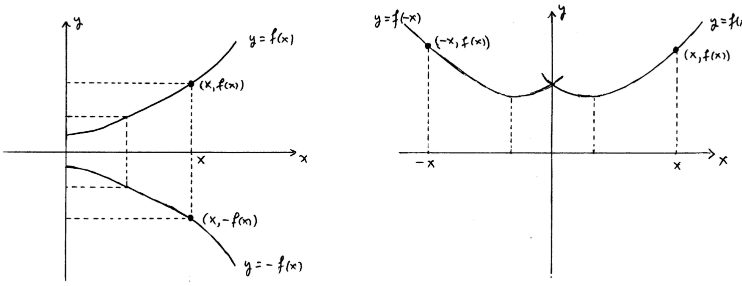
Κατ' αρχάς αναγνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και το χωρίζουμε, αν αυτό είναι δυνατό, σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάστημα μονοτονίας και σχεδιάζουμε το αντίστοιχο μέρος του γραφήματος το οποίο είναι συνήθως μία καμπύλη η οποία είτε ανεβαίνει από αριστερά και κάτω προς δεξιά και πάνω είτε κατεβαίνει από αριστερά και πάνω προς δεξιά και κάτω και προσέχουμε ώστε η κατακόρυφη προβολή της στον x-άξονα να είναι το ίδιο το διάστημα μονοτονίας και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα να είναι το αντίστοιχο σύνολο τιμών. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για κάθε διάστημα μονοτονίας της συνάρτησης.

Αν η $y = f(x)$ είναι άρτια ή περιττή τότε αρκεί να σχεδιάσουμε το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στην τομή του πεδίου ορισμού με το $[0, +\infty)$. Αν η συνάρτηση είναι άρτια το υπόλοιπο μέρος του γραφήματος είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς τον y-άξονα, ενώ αν η συνάρτηση είναι περιττή το υπόλοιπο μέρος του γραφήματος είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Β. Έστω ότι γνωρίζουμε το γράφημα της $y = f(x)$. Θα δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα γραφήματα μερικών άλλων συναρτήσεων οι οποίες σχετίζονται με την συνάρτησή μας.
(i) Τα σημεία $(x, -f(x))$ του γραφήματος της $y = -f(x)$ είναι τα συμμετρικά ως προς τον x-άξονα των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = -f(x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον x-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$.

(ii) Τα σημεία $(-x, f(x)) = (x', f(-x'))$ του γραφήματος της $y = f(-x)$ είναι τα συμμετρικά



Σχήμα 3.10: Τα γραφήματα των $y = -f(x)$ και $y = f(-x)$.

ως προς τον y-άξονα των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Δηλαδή

Το γράφημα της $y = f(-x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$.

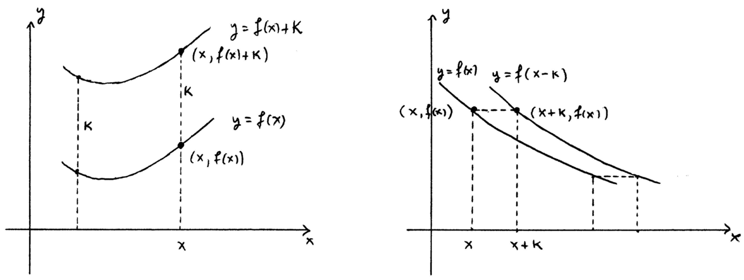
(iii) Έστω αριθμός κ. Η **κατακόρυφη μεταφορά** κατά κ οποιουδήποτε σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(x, y + \kappa)$.

Τα σημεία $(x, f(x) + \kappa)$ του γραφήματος της $y = f(x) + \kappa$ είναι οι κατακόρυφες μεταφορές κατά κ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = f(x) + \kappa$ είναι η κατακόρυφη μεταφορά κατά κ του γραφήματος της $y = f(x)$.

(iv) Έστω αριθμός κ. Η **οριζόντια μεταφορά** κατά κ οποιουδήποτε σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(x + \kappa, y)$.

Τα σημεία $(x+\kappa, f(x)) = (x', f(x'-\kappa))$ του γραφήματος της $y = f(x-\kappa)$ είναι οι οριζόντιες



Σχήμα 3.11: Τα γραφήματα των $y = f(x) + \kappa$ και $y = f(x - \kappa)$.

μεταφορές κατά κ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = f(x - \kappa)$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά κ του γραφήματος της $y = f(x)$.

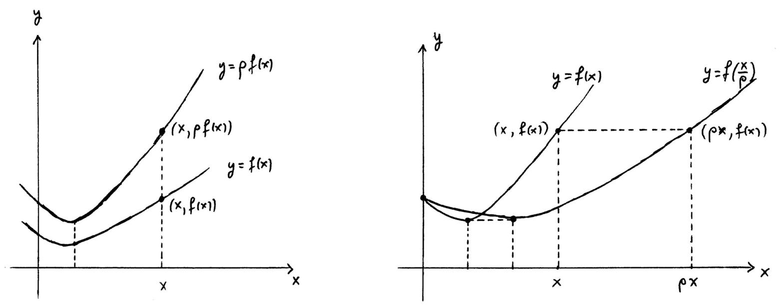
(v) Έστω ρ ένας *θετικός* αριθμός. Το **κατακόρυφο ομοιόθετο** με λόγο ρ οποιουδήποτε σημείου (x, y) είναι το σημείο $(x, \rho y)$.

Τα σημεία $(x, \rho f(x))$ του γραφήματος της $y = \rho f(x)$ είναι τα κατακόρυφα ομοιόθετα με λόγο ρ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Επομένως:

Το γράφημα της $y = \rho f(x)$ είναι το κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο ρ του γραφήματος της $y = f(x)$.

(vi) Έστω ρ ένας θετικός αριθμός. Το **οριζόντιο ομοιόθετο** με λόγο ρ οποιουδήποτε σημείου (x, y) είναι το σημείο $(\rho x, y)$.

Τα σημεία $(\rho x, f(x)) = \big(x', f\big(\frac{x'}{\rho}\big)\big)$ του γραφήματος της $y = f\big(\frac{x}{\rho}\big)$ είναι τα οριζόντια ομοιόθετα με λόγο ρ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:



Σχήμα 3.12: Τα γραφήματα των $y = \rho f(x)$ και $y = f(\frac{x}{\rho})$.

Το γράφημα της $y = f(\frac{x}{\rho})$ είναι το οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο ρ του γραφήματος της $y = f(x)$.

Ασκήσεις.

3.3.1. Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$y = |x|, \quad y = \tfrac{|x|}{x}, \quad y = (-1)^{[x]}, \quad y = x(-1)^{[x]}, \quad y = (-1)^{[1/x]}, \quad y = x(-1)^{[1/x]}.$$

Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους; Σε ποιά διαστήματα είναι οι συναρτήσεις αυτές μονότονες και ποιά είναι τα αντίστοιχα σύνολα τιμών; Είναι οι συναρτήσεις άρτιες ή περιττές; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Είναι τα γραφήματά τους συνεχή; Ποιές από αυτές τις συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες στο πεδίο ορισμού τους;

3.3.2. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = \sqrt{-x^2}$ και $y = \sqrt{-x^2 - 1}$.

3.3.3. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = x^2$, σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = 3x^2, \quad y = x^2 - 4, \quad y = (x+4)^2, \quad y = (3x+4)^2, \quad y = 4 - (3x+4)^2.$$

Από τα γραφήματα των συναρτήσεων να διακρίνετε τα πεδία ορισμού τους, τα σύνολα τιμών τους, τα διαστήματα μονοτονίας τους και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών τους. Να διακρίνετε, επίσης, (αν υπάρχουν) τα άνω φράγματα ή τα κάτω φράγματά τους στο $(-\infty, +\infty)$.

3.3.4. Έστω αριθμοί $a \neq 0$ και b, c. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = x^2$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = ax^2 + bx + c$. Σε ποιά περίπτωση είναι η συνάρτηση άνω φραγμένη και σε ποιά περίπτωση είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$; Ποιό είναι το σύνολο τιμών της;
(Υπόδειξη: Γράψτε $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$.)

3.3.5. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = \tfrac{1}{x} + 2, \quad y = \tfrac{1}{x+2}, \quad y = \tfrac{1}{3x+2}, \quad y = \tfrac{3}{x+2}.$$

3.3.6. Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **γραμμική κλασματική** συνάρτηση.
(Υπόδειξη: Γράψτε $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{(a/c)(cx+d)+b-(ad/c)}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+(d/c)} + \frac{a}{c}$.)
Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να σχεδιάσετε το γράφημα της $y = \frac{2x+3}{3x-1}$. Από το γράφημα να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

3.3.7. Έστω αριθμοί κ και $\rho > 0$. Αν το γράφημα της $y = f(x)$ είναι συνεχές, τί συμπεραίνετε για τα γραφήματα των

$$y = -f(x), \quad y = f(-x), \quad y = f(x) + \kappa, \quad y = f(x - \kappa), \quad y = \rho f(x), \quad y = f(\tfrac{x}{\rho});$$

3.3.8. Συσχετίστε τα γραφήματα των $y = |f(x)|$ και $y = f(|x|)$ με το γράφημα της $y = f(x)$.

3.4 Αντίστροφη συνάρτηση.

Ορισμός. *Έστω συνάρτηση $f : A \to B$.*
(i) Λέμε ότι η f είναι **ένα-προς-ένα** *στο A αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ η ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται την ισότητα $x_1 = x_2$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ η ανισότητα $x_1 \neq x_2$ συνεπάγεται την ανισότητα $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
(ii) Λέμε ότι η f είναι **επί** *του B αν $f(A) = B$, δηλαδή αν για κάθε $y \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ ώστε $f(x) = y$.*

Αν η $f : A \to B$ είναι ένα-προς-ένα στο A και, συγχρόνως, επί του B τότε για *κάθε* $y \in B$ υπάρχει *ακριβώς ένα* $x \in A$ ώστε $f(x) = y$. Σ' αυτήν την περίπτωση οι δύο μεταβλητές μπορούν να αλλάξουν ρόλους, δηλαδή η y να είναι η ανεξάρτητη και η x η εξαρτημένη μεταβλητή ή, με άλλα λόγια, η x να είναι συνάρτηση της y.

Ορισμός. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B. Τότε για κάθε $y \in B$ η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x έχει ακριβώς μία λύση $x \in A$ και έτσι καθορίζεται μία νέα συνάρτηση η οποία ονομάζεται* **αντίστροφη** *συνάρτηση της f, συμβολίζεται $f^{-1} : B \to A$ και έχει τύπο*

$$x = f^{-1}(y).$$

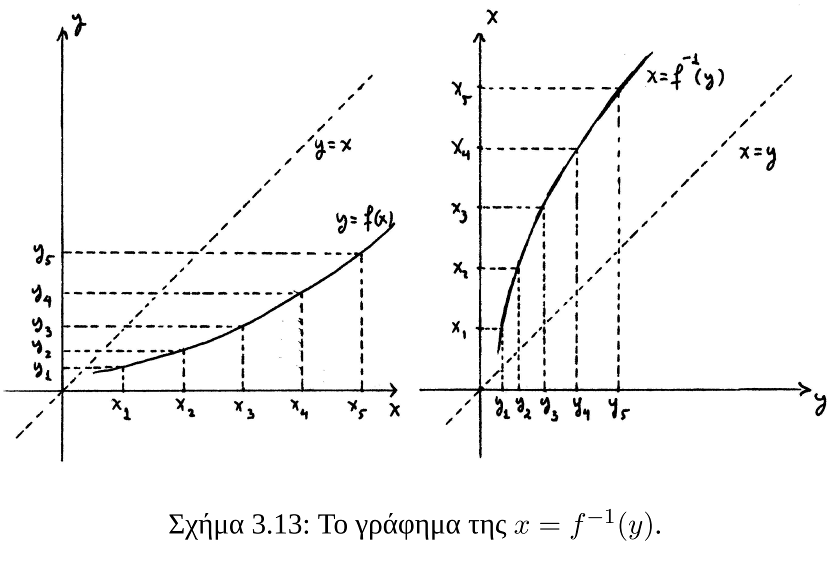
Δηλαδή

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ και } y \in B.$$

Έτσι *το πεδίο ορισμού A της αρχικής συνάρτησης f μετατρέπεται σε σύνολο τιμών της αντίστροφης f^{-1} και το σύνολο τιμών B της αρχικής f μετατρέπεται σε πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.*

Παράδειγμα. Η εξαρτημένη μεταβλητή μίας γνησίως μονότονης συνάρτησης $y = f(x)$ δεν μπορεί να έχει την ίδια τιμή για διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Άρα μία γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα και άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της.

Η ισοδυναμία "$y = f(x)$ *αν και μόνο αν* $x = f^{-1}(y)$" αναδιατυπώνεται ως εξής: *το σημείο (x, y) ανήκει στο γράφημα της $y = f(x)$ αν και μόνο αν το σημείο (y, x) ανήκει στο γράφημα της*



Σχήμα 3.13: Το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$.

$x = f^{-1}(y)$. Και, επειδή τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y = x$, συνεπάγεται:

Τα γραφήματα μίας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο.

Σχηματίζοντας την αντίστροφη $x = f^{-1}(y)$ της $y = f(x)$ οι μεταβλητές αλλάζουν ρόλους. Επομένως όταν σχεδιάζουμε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$ η οριζόντια πραγματική ευθεία πρέπει να είναι ο y-άξονας και η κατακόρυφη πραγματική ευθεία πρέπει να είναι ο x-άξονας. Αυτό επιβεβαιώνει και τον προηγούμενο κανόνα για την σχέση ανάμεσα στα γραφήματα της συνάρτησης και της αντίστροφής της: όταν κάνουμε ανάκλαση ως προς την κύρια διαγώνιο αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όχι μόνο να βρούμε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$ από το γράφημα της $y = f(x)$, αλλά και να μετατραπεί ο x-άξονας από οριζόντια σε κατακόρυφη ευθεία και ο y-άξονας από κατακόρυφη σε οριζόντια ευθεία.

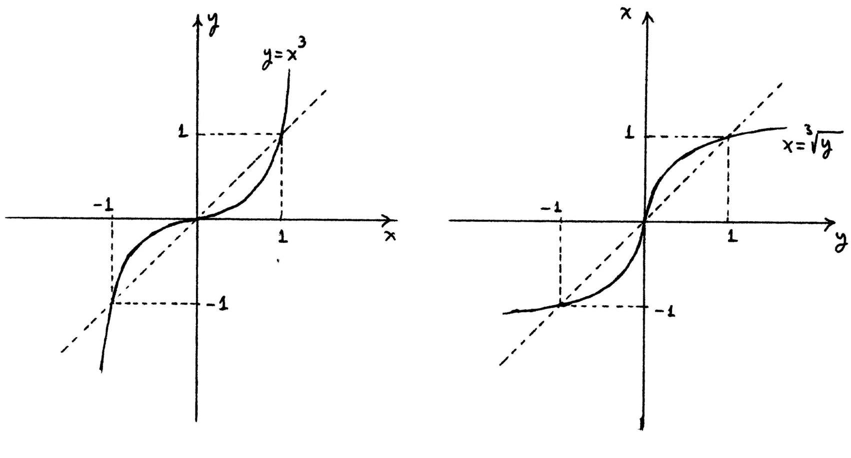
Επειδή είναι πολύ συνηθισμένο η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται x και η εξαρτημένη μεταβλητή να συμβολίζεται y, πολλές φορές μετατρέπουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης σε $y = f^{-1}(x)$, αφού έχει προηγηθεί ο υπολογισμός του στη μορφή $x = f^{-1}(y)$ από τον τύπο $y = f(x)$. Τότε φυσικά πρέπει να γίνει και η ανάλογη αλλαγή στον συμβολισμό των αξόνων: ο x-άξονας είναι η οριζόντια ευθεία και ο y-άξονας η κατακόρυφη ευθεία.

Είναι απλό να δούμε ότι:

Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε και η αντίστροφή της συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, αντιστοίχως.

Πράγματι, έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και έστω y_1, y_2 οποιαδήποτε στοιχεία του πεδίου ορισμού της $x = f^{-1}(y)$ με την ιδιότητα $y_1 < y_2$. Τα αντίστοιχα στοιχεία $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ στο σύνολο τιμών της $x = f^{-1}(y)$ ικανοποιούν τις ισότητες $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Αν $x_1 = x_2$ τότε, προφανώς, $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Αν $x_1 > x_2$ τότε, επειδή η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως πρέπει να ισχύει $x_1 < x_2$ ή, ισοδύναμα, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Παράδειγμα. Η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{αν } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{αν } y < 0 \end{cases}$ πεδίο ορισμού το



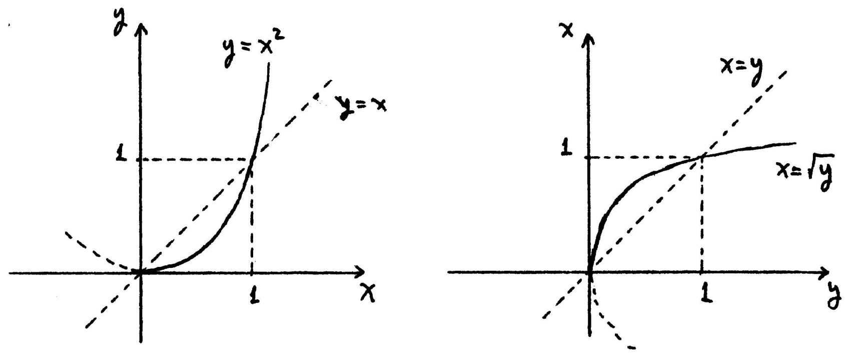
Σχήμα 3.14: Το γράφημα της $x = \sqrt[3]{y}$.

$(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Φυσικά, ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει όταν λύσουμε την εξίσωση $x^3 = y$ με άγνωστο το x. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα.

Μπορούμε φυσικά να αλλάξουμε τα σύμβολα των μεταβλητών και να πούμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

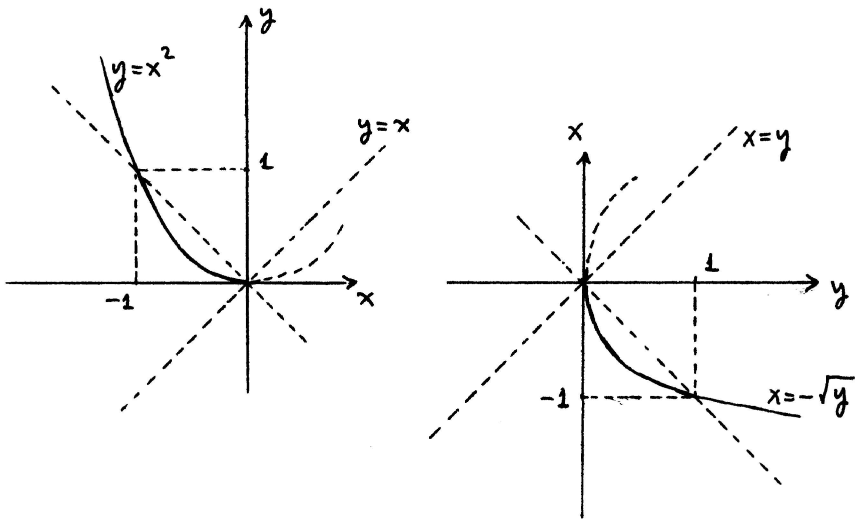
Αν η $f : A \to B$ δεν είναι ένα-προς-ένα στο A ή δεν είναι επί του B τότε *δεν* ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$. Όμως μερικές φορές μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιο $A' \subseteq A$ ώστε η f να είναι ένα-προς-ένα στο A': δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A'$ η ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ να συνεπάγεται την $x_1 = x_2$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο A', δηλαδή το $B' = f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$, και τότε η *περιορισμένη* συνάρτηση $f : A' \to B'$ είναι προφανώς ένα-προς-ένα στο A' και επί του B' και επομένως ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1} : B' \to A'$.

Παράδειγμα. Η $y = x^2$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$, δεν είναι ένα-προς-ένα διότι για κάθε $y > 0$ η εξίσωση $x^2 = y$ έχει ακριβώς δύο λύσεις: $x = \sqrt{y}$ και $x = -\sqrt{y}$.
Όμως στο διάστημα $[0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού της η $y = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα (και



Σχήμα 3.15: Το γράφημα της $x = \sqrt{y}$.

επομένως ένα-προς-ένα) με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \sqrt{y}$, με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή το γράφημα της συνάρτησης (μισή παραβολή) είναι συνεχές, συνεπάγεται ότι και το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι συνεχές.
Ομοίως, στο διάστημα $(-\infty, 0]$ του πεδίου ορισμού της η $y = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα (και



Σχήμα 3.16: Το γράφημα της $x = -\sqrt{y}$.

επομένως ένα-προς-ένα) με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Άρα πάλι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = -\sqrt{y}$, με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, 0]$ και είναι γνησίως φθίνουσα. Το γράφημα της συνάρτησης (μισή παραβολή) είναι συνεχές οπότε και το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι συνεχές.

Ασκήσεις.

3.4.1. Θεωρήστε την $y = \frac{1}{3x+1}$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, καθώς και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.

3.4.2. Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$ και η γραμμική κλασματική συνάρτηση $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ στην άσκηση 3.3.6 της προηγούμενης ενότητας. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.
Σχεδιάστε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης της $y = \frac{2x+3}{3x-1}$.

3.4.3. Θεωρήστε την $y = x^2+4x+1$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση; Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, "μοιράστε" την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

3.5 Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις.

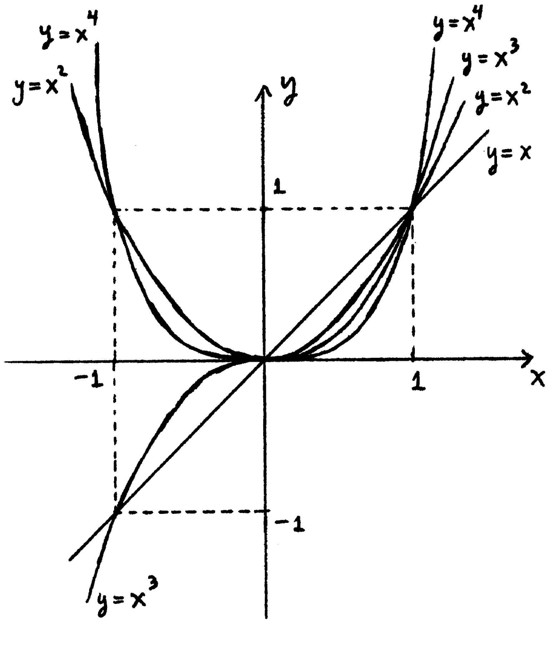
Ορισμός. *Χαρακτηρίζουμε* **πολυωνυμική** *κάθε συνάρτηση με τύπο*

$$y = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Αν $a_N \neq 0$ τότε ο ακέραιος $N \geq 0$ ονομάζεται **βαθμός** *της πολυωνυμικής συνάρτησης.*

Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι, φυσικά, το $(-\infty, +\infty)$. Οι πιο απλές πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι οι δυνάμεις $y = x^n$ με $n \in \mathbb{N}$.

Όπως το παράδειγμα $y = x^3$, αν το n είναι περιττό τότε η $y = x^n$ είναι περιττή, γνησίως



Σχήμα 3.17: Τα γραφήματα των $y = x^n$.

αύξουσα με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη συμμετρική ως προς το σημείο $(0,0)$ η οποία περιέχει τα σημεία $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ και ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Επίσης, όπως η $y = x^2$, αν το n είναι άρτιο τότε η $y = x^n$ είναι άρτια, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη συμμετρική ως προς τον y-άξονα η οποία περιέχει τα σημεία $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και πάνω προς το σημείο $(0,0)$ και μετά ανεβαίνει από το σημείο $(0,0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Όπως είπαμε, τα γραφήματα των $y = x^n$ περιέχουν τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$. Στο διάστημα $(0,1)$ τα γραφήματα των $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3, \ldots$ είναι το καθένα κάτω από το προηγούμενό του ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι το καθένα πάνω από το προηγούμενό του. Αυτό φυσικά συμβαίνει διότι για κάθε $x \in (0,1)$ τα ύψη των γραφημάτων πάνω από το σημείο x του x-άξονα μειώνονται: $x > x^2 > x^3 > \ldots$. Ενώ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ τα ύψη των γραφημάτων πάνω από το σημείο x αυξάνονται: $x < x^2 < x^3 < \ldots$.

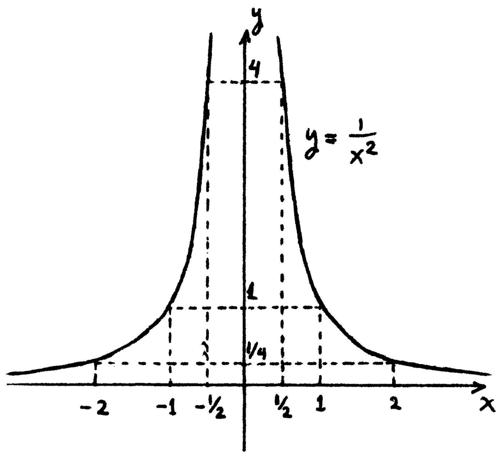
Ορισμός. *Χαρακτηρίζουμε* **ρητή** *κάθε συνάρτηση με τύπο*

$$y = \frac{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Το πεδίο ορισμού μίας ρητής συνάρτησης αποτελείται από όλα τα x εκτός από εκείνα τα οποία μηδενίζουν τον παρονομαστή της.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραδείγματα ρητών συναρτήσεων. Οι πιο απλές ρητές συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές είναι οι δυνάμεις $y = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ με $n \in \mathbb{N}$. Όλες έχουν πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό, η $y = \frac{1}{x^n}$ είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(-1,-1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα κάτω και κοντά στον y-άξονα. Ομοίως, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(1,1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα. Τα δύο αυτά μέρη του γραφήματος είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0,0)$.



Σχήμα 3.18: Το γράφημα της $y = \frac{1}{x^2}$.

Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο, η $y = \frac{1}{x^n}$ είναι άρτια, γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(-1, 1)$ και ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα. Ομοίως, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(1, 1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα. Τα δυο αυτά μέρη του γραφήματος είναι συμμετρικά ως προς τον y-άξονα.

Ασκήσεις.

3.5.1. Είναι ίδιες οι $y = \frac{(1/(x+1))+(1/(x-1))}{(1/x)+(1/(x-2))}$ και $y = \frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2(x+1)}$; Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους; Είναι ίδιες στην τομή των πεδίων ορισμού τους;

3.5.2. Πώς συσχετίζονται τα γραφήματα των $y = \frac{1}{x^n}$ για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$;

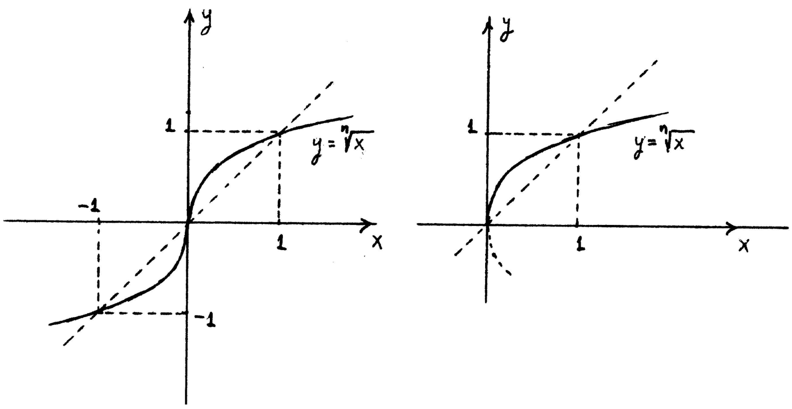
3.5.3. Αρχίζοντας με τα γραφήματα των $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ και $y = \frac{1}{x^4}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, $y = \frac{1}{(2-3x)^3} + 4$, $y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

3.6 Αλγεβρικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα. Έστω περιττό $n \in \mathbb{N}$. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = \begin{cases} \sqrt[n]{y} & \text{αν } y \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-y} & \text{αν } y < 0 \end{cases}$ Αυτήν την μετατρέπουμε σε

$$y = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x} & \text{αν } x < 0 \end{cases} \qquad \text{αν } n \text{ περιττό.}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το



Σχήμα 3.19: Τα γραφήματα των $y = \sqrt[n]{x}$. Περιπτώσεις: περιττός n, άρτιος n.

$(-\infty, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία περιέχει τα σημεία $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή της στον x-άξονα είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι πάλι το $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή η καμπύλη ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Παράδειγμα. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x = \sqrt[n]{y}$ την οποία μετατρέπουμε σε

$$y = \sqrt[n]{x}, \qquad x \geq 0$$

Αυτή είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$. Το γράφημα της $y=\sqrt[n]{x}$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ και η κατακόρυφη προβολή της στον x-άξονα είναι το $[0,+\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι πάλι το $[0,+\infty)$. Άρα η καμπύλη ανεβαίνει από το σημείο $(0,0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Αν το $n\in\mathbb{N}$ είναι περιττό η $y=\sqrt[n]{x}$ είναι μέρος της συνάρτησης $y=\begin{cases}\sqrt[n]{x} & \text{αν } x\geq 0\\ -\sqrt[n]{-x} & \text{αν } x<0\end{cases}$ του προηγούμενου παραδείγματος.

Οι ρητές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις $y=\sqrt[n]{x}$ τις οποίες μόλις αναφέραμε είναι τα απλούστερα παραδείγματα των λεγόμενων **αλγεβρικών** συναρτήσεων. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, γενικά, συναρτήσεις οι οποίες προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης. Για παράδειγμα:

$$y=x^{1/4}+\left(\tfrac{x^2+1+x^{1/2}}{x-1}\right)^{1/3}.$$

Χωρίς να δώσουμε έμφαση, ας δούμε ποιός είναι ο γενικός ορισμός των αλγεβρικών συναρτήσεων. Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής

$$p_N(x)y^N+\cdots+p_2(x)y^2+p_1(x)y+p_0(x)=0$$

με άγνωστο το y, όπου $N\geq 1$, όπου καθένα από τα $p_N(x),\ldots,p_2(x),p_1(x),p_0(x)$ είναι πολυώνυμο και όπου το $p_N(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω, επίσης, μία συνάρτηση $y=g(x)$ με πεδίο ορισμού οποιαδήποτε ένωση διαστημάτων, η οποία "επαληθεύει" την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή ισχύει

$$p_N(x)g(x)^N+\cdots+p_2(x)g(x)^2+p_1(x)g(x)+p_0(x)=0$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=g(x)$. Τότε η $y=g(x)$ χαρακτηρίζεται *αλγεβρική* συνάρτηση. Υπάρχει μία ακόμη προϋπόθεση για να είναι η $y=g(x)$ αλγεβρική: πρέπει να είναι *συνεχής*. Για το τί ακριβώς σημαίνει *συνεχής* συνάρτηση θα μιλήσουμε στο κεφάλαιο 5. Ισχύει όμως ότι το να είναι η $y=g(x)$ συνεχής ισοδυναμεί με το να έχει συνεχές γράφημα.

Παράδειγμα. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y=p(x)$ είναι αλγεβρική συνάρτηση στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Πράγματι, η $y=p(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $y-p(x)=0$ της οποίας οι συντελεστές $1,-p(x)$ είναι πολυώνυμα.

Παράδειγμα. Κάθε ρητή συνάρτηση $y=\frac{p(x)}{q(x)}$, όπου τα $p(x),q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση. Η $y=\frac{p(x)}{q(x)}$ επαληθεύει την εξίσωση $q(x)y-p(x)=0$ της οποίας οι συντελεστές $q(x),-p(x)$ είναι πολυώνυμα.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται **πολυωνυμικές αλγεβρικές** συναρτήσεις και οι ρητές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται **ρητές αλγεβρικές** συναρτήσεις.

Παράδειγμα. Έστω η $y=\begin{cases}\sqrt[n]{x} & \text{αν } x\geq 0\\ -\sqrt[n]{-x} & \text{αν } x<0\end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ αν το n είναι περιττό και η $y=\sqrt[n]{x}$ με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ αν το n είναι άρτιο. Οι συναρτήσεις αυτές είναι αλγεβρικές. Και οι δύο επαληθεύουν την εξίσωση $y^n-x=0$ της οποίας οι συντελεστές $1,0,\ldots,0,-x$ είναι πολυώνυμα.

Κάθε αλγεβρική συνάρτηση η οποία δεν είναι πολυωνυμική ή ρητή χαρακτηρίζεται **άρρητη αλγεβρική** συνάρτηση. Οι συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές** συναρτήσεις. Παραδείγματα υπερβατικών συναρτήσεων είναι οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις τις οποίες θα δούμε στις επόμενες ενότητες.

Ασκήσεις.

3.6.1. Βάσει των γραφημάτων των $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sqrt{x-1}$, $y = -\sqrt[4]{2-3x} + 3$, $y = 2 + \sqrt[3]{2x+1}$, $y = \sqrt[5]{3-x}$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους;

3.6.2. Αποδείξτε ότι οι

$$y = x^{1/2} + x^{1/3}, \quad y = (\tfrac{x}{x-1})^{1/2} + (x+1)^{1/2}, \quad y = \tfrac{x^{1/2}+2}{(3x+1)^{1/2}-4}$$

είναι αλγεβρικές, βρίσκοντας συγκεκριμένες εξισώσεις οι οποίες "επαληθεύονται" από αυτές τις συναρτήσεις. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους;

3.6.3. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$. Αποδείξτε ότι η $y = (\frac{p(x)}{q(x)})^{1/n}$ είναι αλγεβρική.

3.6.4. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ αποδείξτε ότι η αλγεβρική συνάρτηση $y = \sqrt[n]{x}$ δεν είναι ρητή.

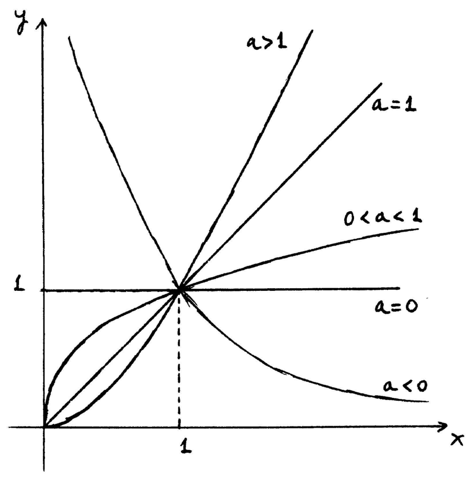
3.7 Δυνάμεις.

Ορισμός. *Θεωρούμε την συνάρτηση*

$$y = x^a$$

με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ *αν* $a > 0$ *και το* $(0, +\infty)$ *αν* $a < 0$. *Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται* **δύναμη** *με εκθέτη* a.

Το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ είναι ακριβώς αυτό το οποίο μόλις αναφέραμε αν το a δεν είναι ακέραιος. Γνωρίζουμε, φυσικά, ότι αν το a είναι ακέραιος τότε η $y = x^a$ ορίζεται και για αρνητικές τιμές του x οπότε το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ περιέχει και το διάστημα $(-\infty, 0)$. Επειδή όμως η περίπτωση κατά την οποία το a είναι ακέραιος έχει ήδη μελετηθεί στις προηγούμενες ενότητες,



Σχήμα 3.20: Τα γραφήματα των $y = x^a$.

για να αποφύγουμε την περιπτωσιολογία σχετικά με τον εκθέτη θα περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ όπως ακριβώς κάναμε παραπάνω.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της $y = x^a$ θεωρούμε την εξίσωση $x^a = y$ με άγνωστο x. Αν $y < 0$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση. Αν $y = 0$ η εξίσωση έχει την λύση $x = 0$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης αν $a > 0$, ενώ δεν έχει καμία λύση αν $a < 0$. Αν $y > 0$ η εξίσωση έχει την λύση $x = y^{\frac{1}{a}}$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Επομένως αν $a > 0$ το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $y = x^a$ είναι και τα δύο ίσα με το $[0, +\infty)$, ενώ αν $a < 0$ το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι και τα δύο ίσα με το $(0, +\infty)$.

Η $y = x^a$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ αν $a > 0$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ αν $a < 0$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του (ii) της πρότασης 1.5.

Αν $a > 0$ το γράφημα της $y = x^a$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή του στον x-άξονα είναι το $[0, +\infty)$ (το πεδίο ορισμού) ενώ η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το $[0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών). Άρα το γράφημα ανεβαίνει από το σημείο $(0, 0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Ομοίως, αν $a < 0$ το γράφημα της $y = x^a$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή του στον x-άξονα είναι το $(0, +\infty)$ ενώ η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το $(0, +\infty)$. Άρα το γράφημα κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα.

Αν αντιπαραβάλουμε τα γραφήματα των $y = x^a$ και $y = x^b$ όταν $a < b$ βλέπουμε ότι και τα δύο γραφήματα περιέχουν το σημείο $(1, 1)$, ότι στο διάστημα $(0, 1)$ το γράφημα της $y = x^a$ είναι πάνω από το γράφημα της $y = x^b$ και ότι στο διάστημα $(1, +\infty)$ το γράφημα της $y = x^a$ είναι κάτω από το γράφημα της $y = x^b$.

Η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^a$ είναι η $x = y^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρήστε ότι οι εκθέτες a και $\frac{1}{a}$ είναι είτε και οι δύο > 0 είτε και οι δύο < 0.

Ασκήσεις.

3.7.1. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών και σχεδιάστε τα γραφήματα των:

$$y = x^0, \quad y = x^{2/3}, \quad y = x^{-2/3}, \quad y = x^{3/2}, \quad y = x^{-3/2}, \quad y = x^{\sqrt{2}}, \quad y = x^{-\sqrt{2}}.$$

3.7.2. Με βάση τα γραφήματα των $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\sqrt{2}}$ σχεδιάστε τα γραφήματα των:

$$y = (2x - 3)^{\sqrt{2}}, \quad y = 2 - (2 - 3x)^{\sqrt{2}}, \quad y = (1 - x)^{-\sqrt{2}}, \quad y = 3 + (2x + 1)^{\sqrt{2}}.$$

Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών.

3.8 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Ορισμός. *Για οποιοδήποτε $a > 0$ η συνάρτηση*

$$y = a^x$$

με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ ονομάζεται **εκθετική** *συνάρτηση με βάση a.*

Αν $a = 1$ η εκθετική συνάρτηση είναι σταθερή, $y = 1^x = 1$, και έχει σύνολο τιμών το $\{1\}$.

Αν $a > 1$ ή $0 < a < 1$ το σύνολο τιμών της $y = a^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Πράγματι, η εξίσωση $a^x = y$ με άγνωστο x δεν έχει καμία λύση αν $y \leq 0$, ενώ έχει την λύση $x = \log_a y$ αν $y > 0$.

Η συνάρτηση $y = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < a < 1$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του (iii) της πρότασης 1.5.

Το γράφημα της $y = a^x$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 1)$, $(1, a)$. Αν $a > 1$ η κατακόρυφη προβολή του γραφήματος στον x-άξονα είναι το $(-\infty, +\infty)$ (το πεδίο ορισμού) ενώ η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το $(0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών). Άρα το γράφημα ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Ομοίως, αν $0 < a < 1$ το γράφημα κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και πάνω προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα.

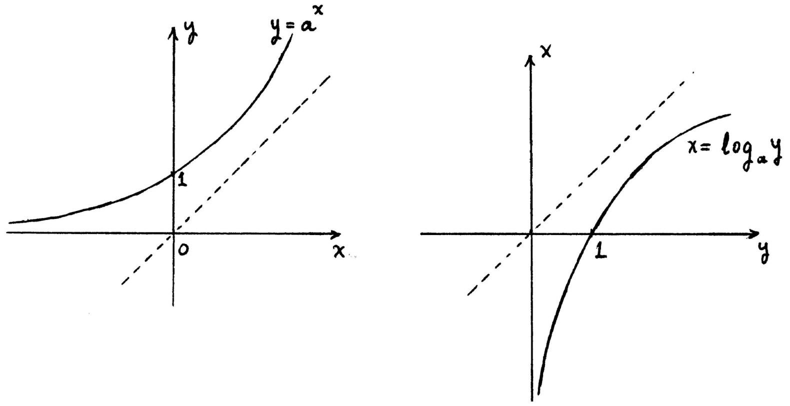
Αν $a = 1$ η $y = a^x$ είναι, όπως είδαμε, σταθερή και επομένως δεν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση. Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$ η $y = a^x$ είναι γνησίως μονότονη οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση. Για να βρούμε τον τύπο της λύνουμε την $a^x = y$ ως προς x και βρίσκουμε $x = \log_a y$. Αφού εναλλάξουμε τα σύμβολα των μεταβλητών, ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$y = \log_a x.$$

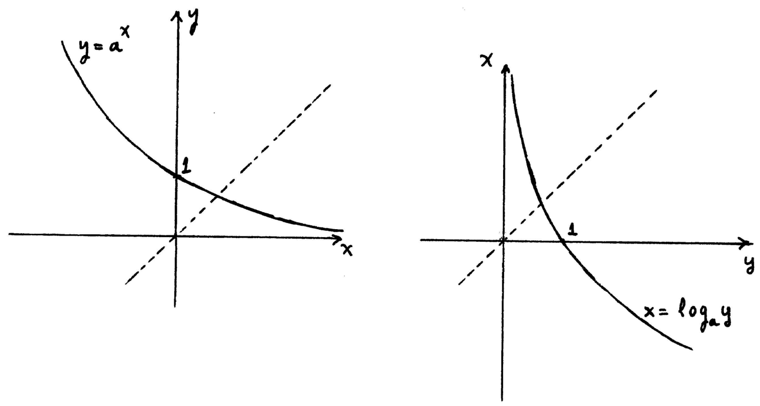
Ορισμός. *Την $y = \log_a x$ την ονομάζουμε* **λογαριθμική** *συνάρτηση με βάση a. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της το $(-\infty, +\infty)$.*

Αν $a > 1$ η $y = \log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό είναι το περιεχόμενο του (v) της πρότασης 1.8.

Το γράφημα της $y = \log_a x$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει τα σημεία $(1, 0)$, $(a, 1)$. Αν $a > 1$



Σχήμα 3.21: Τα γραφήματα των $y = a^x$ και $x = \log_a y$ όταν $a > 1$.



Σχήμα 3.22: Τα γραφήματα των $y = a^x$ και $x = \log_a y$ όταν $0 < a < 1$.

το γράφημα ανεβαίνει από απεριόριστα κάτω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και πάνω, ενώ αν $0 < a < 1$ το γράφημα κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κάτω.

Ασκήσεις.

3.8.1. Σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = 3e^{-x} - 2, \quad y = 1 + 2^{3-x}, \quad y = e^{|x|}, \quad y = e^{-|x|}, \quad y = \log|x|, \quad y = \log_{1/2}(2 - x).$$

3.8.2. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των

$$y = \log \tfrac{x-1}{x+1}, \quad y = \log \tfrac{1-x}{1+x}, \quad y = \log(1 - x^2), \quad y = \log(x^2 - 1).$$

Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας τους και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών και σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Για ποιές από αυτές ορίζονται οι αντίστροφες συναρτήσεις; Για εκείνες τις συναρτήσεις οι οποίες έχουν αντίστροφες βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις και τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Τι μπορείτε να πείτε για εκείνες τις συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν αντίστροφες;

3.9 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους.

Α. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **περιοδική** *αν υπάρχει $T > 0$ ώστε να ισχύει $f(x \pm T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$. Ένας τέτοιος αριθμός T ονομάζεται* **περίοδος** *της f.*

Το να είναι η f περιοδική προϋποθέτει ότι αν το x είναι οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της A τότε και τα $x \pm T$ είναι στοιχεία του A: τότε λέμε ότι το σύνολο A είναι *περιοδικό* με περίοδο T.

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π αφού ισχύει $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ και $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $y = \tan x$ και $y = \cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π αφού ισχύει $\tan(x \pm \pi) = \tan x$ και $\cot(x \pm \pi) = \cot x$.

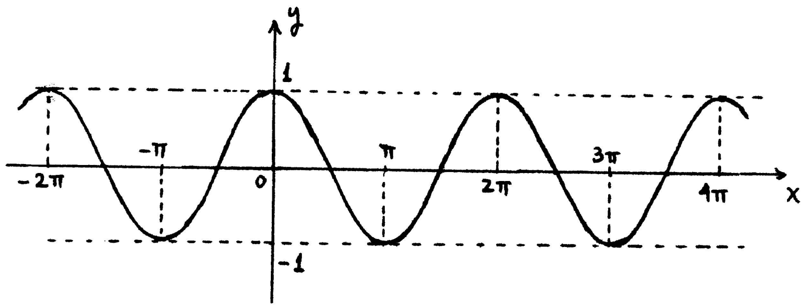
Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο T. Από την $f(x - T) = f(x)$ συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $y = f(x - T)$ και $y = f(x)$ είναι ίδιες και άρα έχουν τα ίδια γραφήματα. Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις $y = f(x + T)$ και $y = f(x)$. Άρα *οι οριζόντιες μεταφορές κατά $\pm T$ του γραφήματος της f ταυτίζονται με το γράφημα της f.* Από αυτό βγάζουμε το εξής χρήσιμο συμπέρασμα. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο T. Παίρνουμε οποιοδήποτε a. Τότε για κάθε ακέραιο k το μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[a + kT, a + (k + 1)T]$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά kT του μέρους του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T]$. Επομένως,

Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο T. Μπορούμε να σχεδιάσουμε ολόκληρο το γράφημα της συνάρτησης αν σχεδιάσουμε το μέρος του το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T]$ και κατόπιν το μεταφέρουμε οριζοντίως κατά όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του T.

Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στις *τριγωνομετρικές* συναρτήσεις.

Ορισμός. *Οι* **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** *είναι: η συνάρτηση* **συνημίτονο** *με τύπο $y = \cos x$, η συνάρτηση* **ημίτονο** *με τύπο $y = \sin x$, η συνάρτηση* **εφαπτόμενη** *με τύπο $y = \tan x$ και η συνάρτηση* **συνεφαπτόμενη** *με τύπο $y = \cot x$.*

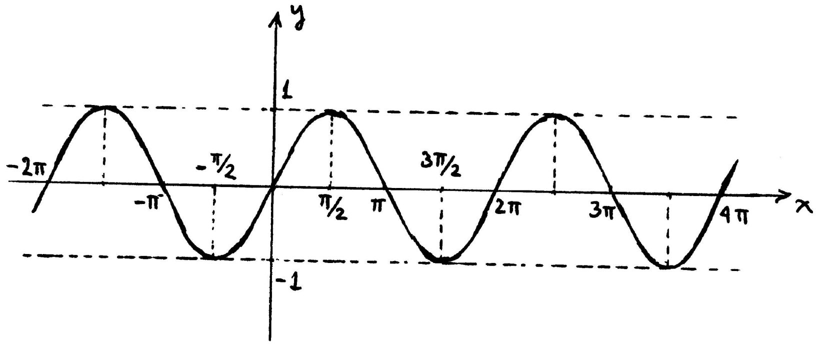
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις περιγράφονται ευθύς αμέσως.
(i) Η $y = \cos x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και είναι περιοδική



Σχήμα 3.23: Το γράφημα της $y = \cos x$.

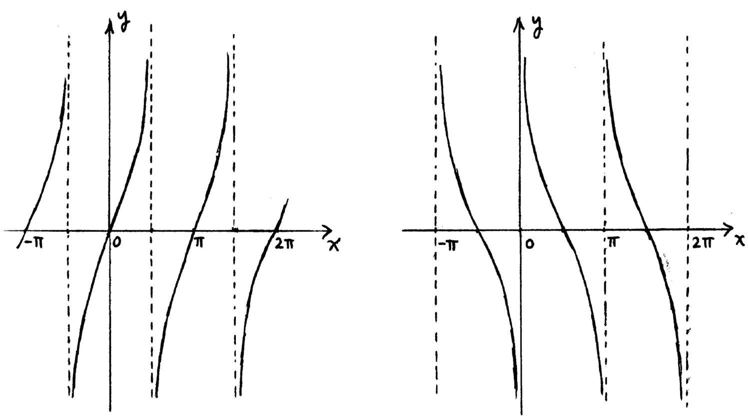
με περίοδο 2π. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Το σύνολο

τιμών το οποίο αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το $[-1,1]$. Στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από το σημείο $(-\pi,-1)$ στο σημείο $(0,1)$ και κατεβαίνει από το σημείο $(0,1)$ στο σημείο $(\pi,-1)$ και περιέχει τα σημεία $(-\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$.
(ii) Η $y=\sin x$ έχει πεδίο ορισμού $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1,1]$ και είναι περιοδική



Σχήμα 3.24: Το γράφημα της $y=\sin x$.

με περίοδο 2π. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. Το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το $[-1,1]$. Στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από το σημείο $(-\frac{\pi}{2},-1)$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2},1)$ και κατεβαίνει από το σημείο $(\frac{\pi}{2},1)$ στο σημείο $(\frac{3\pi}{2},-1)$ και περιέχει τα σημεία $(0,0)$, $(\pi,0)$.
(iii) Η $y=\tan x$ έχει πεδίο ορισμού την ένωση των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty,+\infty)$. Είναι περιοδική με περίοδο π. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty,+\infty)$. Στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από απεριόριστα κάτω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ προς απεριόριστα πάνω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ και περιέχει το σημείο $(0,0)$.
(iv) Η $y=\cot x$ έχει πεδίο ορισμού την ένωση των διαστημάτων $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Το σύνολο



Σχήμα 3.25: Τα γραφήματα των $y=\tan x$ και $y=\cot x$.

τιμών της είναι το $(-\infty,+\infty)$. Είναι περιοδική με περίοδο π. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\pi)$ και το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty,+\infty)$. Στο διάστημα $(0,\pi)$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x=0$ προς απεριόριστα κάτω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x=\pi$ και περιέχει το σημείο $(\frac{\pi}{2},0)$.

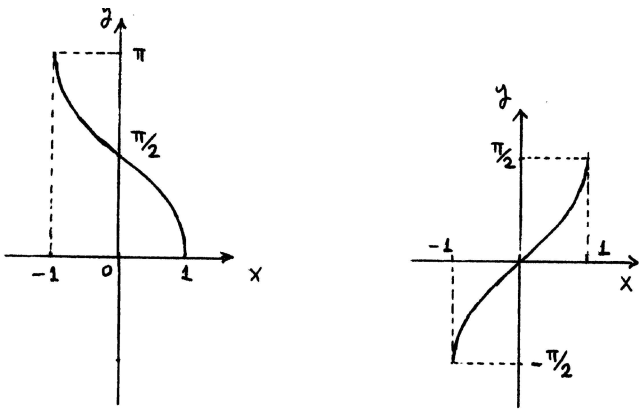
Οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι φραγμένες στο $(-\infty, +\infty)$ και έχουν άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το -1.

B. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Καμία από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση, εκτός αν περιορίσουμε τα πεδία ορισμού σε κατάλληλα διαστήματα όπου οι συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες. Κάνουμε τις εξής επιλογές.

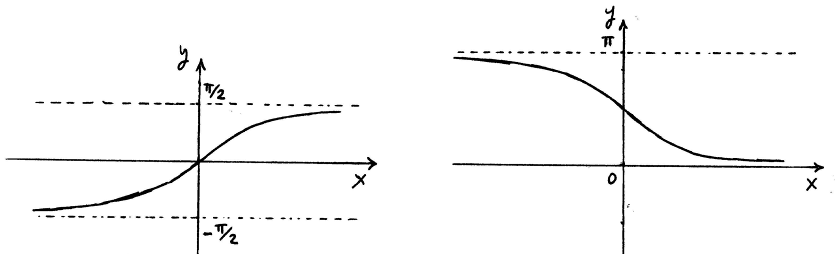
Ορισμός. *Η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση* **τόξο συνημιτόνου** *με τύπο $x = \arccos y$, πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.*
Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο ημιτόνου** *με τύπο $x = \arcsin y$, πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*
Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο εφαπτομένης** *με τύπο $x = \arctan y$, πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.*
Η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο συνεφαπτομένης** *με τύπο $x = \operatorname{arccot} y$, πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$.*

Έχουμε λοιπόν ορίσει τις λεγόμενες **αντίστροφες τριγωνομετρικές** συναρτήσεις οι οποίες, μετά από την συνηθισμένη εναλλαγή των συμβόλων x και y, περιγράφονται ως εξής.
(i) Η $y = \arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από το σημείο $(-1, \pi)$ προς το σημείο $(1, 0)$ και περιέχει το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$.
(ii) Η $y = \arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Είναι γνησίως αύ-



Σχήμα 3.26: Τα γραφήματα των $y = \arccos x$ και $y = \arcsin x$.

ξουσα στο $[-1, 1]$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από το σημείο $(-1, -\frac{\pi}{2})$ προς το σημείο $(1, \frac{\pi}{2})$ και περιέχει το σημείο $(0, 0)$.
(iii) Η $y = \arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = -\frac{\pi}{2}$ προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = \frac{\pi}{2}$ και περιέχει το σημείο $(0, 0)$.
(iv) Η $y = \operatorname{arccot} x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από απεριόριστα



Σχήμα 3.27: Τα γραφήματα των $y = \arctan x$ και $y = \operatorname{arccot} x$.

αριστερά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = \pi$ προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = 0$ και περιέχει το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ασκήσεις.

3.9.1. Σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = \tan\tfrac{x-\pi}{2}, \quad y = 2\sin(\tfrac{\pi}{4} - 3x), \quad y = \cot(\tfrac{\pi}{2} - x), \quad x = 2\arccos(2y+1), \quad x = \arctan\tfrac{y+1}{2}.$$

3.9.2. Δείτε την άσκηση 1.4.4: πώς θα σχεδιάσετε το γράφημα της $y = a\cos x + b\sin x$;
Σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = \cos x + \sin x, \quad y = \sqrt{3}\cos x + \sin x, \quad y = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

3.9.3. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των

$$y = \sqrt{\sin x}, \quad y = \tfrac{1}{1+\sin x}, \quad y = \log(\sin x), \quad y = \arcsin\tfrac{x}{x-1}.$$

3.9.4. Ποιές είναι οι αντίστροφες συναρτήσεις των $y = \arcsin x$ και $y = \arctan x$; Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους;
(Υπόδειξη: *Δεν* είναι οι $x = \sin y$ και $x = \tan y$.)

3.9.5. Σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = \arccos(\cos x), \quad y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arctan(\tan x), \quad y = \operatorname{arccot}(\cot x).$$

3.9.6. Θεωρήστε την συνάρτηση $y = x\sin x$ στο $[0, +\infty)$. Παρατηρήστε ότι, λόγω των ανισοτήτων $-x \leq x\sin x \leq x$, το γράφημα της $y = x\sin x$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = -x$ και $y = x$ και ότι στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 1$, δηλαδή στα $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, το γράφημα της $y = x\sin x$ "ακουμπά" την ευθεία $y = x$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$, δηλαδή στα $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, το γράφημα της $y = x\sin x$ "ακουμπά" την ευθεία $y = -x$. Σε ποιά σημεία το γράφημα της $y = x\sin x$ τέμνει τον x-άξονα; Σχεδιάστε το γράφημα της $y = x\sin x$ το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ και, χρησιμοποιώντας το ότι η $y = x\sin x$ είναι άρτια, σχεδιάστε και το γράφημά της το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$.

3.9.7. Θεωρήστε την $y = \sin\frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Παρατηρήστε ότι το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = -1$ και $y = 1$. Βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων $\sin\frac{1}{x} = 1$ και $\sin\frac{1}{x} = -1$ στο $(0, +\infty)$. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών ορίζουν άπειρα διαδοχικά υποδιαστήματα του $(0, +\infty)$ τα οποία "συσσωρεύονται" στο 0 και στα οποία η $y = \sin\frac{1}{x}$ είναι εναλλάξ γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = 1$ το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ "ακουμπά" την ευθεία $y = 1$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = -1$ το γράφημα "ακουμπά" την ευθεία $y = -1$. Σε ποιά σημεία το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ τέμνει τον x-άξονα; Σχεδιάστε το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ και, χρησιμοποιώντας το ότι η $y = \sin\frac{1}{x}$ είναι περιττή, σχεδιάστε και το γράφημά της το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$.

3.9.8. Συμβουλευόμενοι τις δυο προηγούμενες ασκήσεις, σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = x^2\sin x, \quad y = \sqrt{x}\sin x, \quad y = x\sin\tfrac{1}{x}, \quad y = x^2\sin\tfrac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}\sin\tfrac{1}{x}, \quad y = \tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{x}.$$

3.10 Υπερβολικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους.

Α. Υπερβολικές συναρτήσεις.

Ορισμός. *Για κάθε x συμβολίζουμε*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **υπερβολικό συνημίτονο**, **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολική εφαπτόμενη** *και* **υπερβολική συνεφαπτόμενη** *του x, αντιστοίχως.*

Πρόταση 3.1. *(i)* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
(ii) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.
(iii) $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$, $\coth(-x) = -\coth x$.
(iv) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$, $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.
(v) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x-y}{2}\sinh\frac{x+y}{2}$, $\sinh x - \sinh y = 2\sinh\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}$.
(vi) $1 \leq \cosh x < \cosh x'$ *αν* $0 \leq x < x'$ *και* $1 \leq \cosh x < \cosh x'$ *αν* $x' < x \leq 0$.
(vii) $\sinh x < \sinh x'$ *αν* $x < x'$.

Απόδειξη. Όλα αποδεικνύονται με λίγες πράξεις. □

Είναι εμφανής η ομοιότητα πολλών από τις ιδιότητες στην πρόταση 3.1 με ιδιότητες στην πρόταση 1.10. Πίσω από αυτήν την ομοιότητα κρύβονται δύο ισότητες ανάλογες των $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Αυτές είναι οι $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ και $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ και οι ισοδύναμές τους $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ και $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$. Αυτές οι ισότητες εντάσσονται στο πλαίσιο της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών και δεν θα επεκταθούμε επ' αυτών.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση **υπερβολικό συνημίτονο** με τύπο $y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Είναι σαφές από την πρόταση 3.1 ότι η $y = \cosh x$ είναι άρτια και ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της $y = \cosh x$ θεωρούμε την $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και την γράφουμε $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. Ορίζουμε $t = e^x$ οπότε η εξίσωση γράφεται $t^2 - 2yt + 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 4y^2 - 4$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
(i) Έστω $y^2 < 1$. Τότε η εξίσωση $t^2 - 2yt + 1 = 0$ δεν έχει καμία λύση.
(ii) Έστω $y^2 = 1$. Αν $y = -1$ η $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχει λύση $e^x = t = -1$ η οποία προφανώς απορρίπτεται. Αν $y = 1$ η $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχει λύση $e^x = t = 1$ η οποία δίνει λύση $x = 0$ για την αρχική εξίσωση $\cosh x = 1$.
(iii) Έστω $y^2 > 1$. Τότε η $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχει δύο (διαφορετικές) λύσεις με άθροισμα $2y$ και γινόμενο 1. Αν $y < -1$ οι δύο αυτές λύσεις έχουν αρνητικό άθροισμα και θετικό γινόμενο οπότε είναι *αρνητικές* και απορρίπτονται. Τέλος, αν $y > 1$ οι δύο λύσεις της $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχουν θετικό άθροισμα και θετικό γινόμενο οπότε είναι *θετικές*. Επειδή το γινόμενό τους είναι 1, η μεγαλύτερη είναι μεγαλύτερη από 1 και η μικρότερη είναι ανάμεσα στο 0 και στο 1. Οι δύο αυτές λύσεις είναι οι $t = y \pm \sqrt{y^2-1}$ και ισχύει $0 < y - \sqrt{y^2-1} < 1 < y + \sqrt{y^2-1}$. Αυτές δίνουν δύο λύσεις της αρχικής εξίσωσης, τις $x = \log(y \pm \sqrt{y^2-1})$, οι οποίες είναι αντίθετες. Μάλιστα ισχύει $\log(y - \sqrt{y^2-1}) < 0 < \log(y + \sqrt{y^2-1})$.

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $y = \cosh x$, δηλαδή το σύνολο των y για τα οποία η εξίσωση $\cosh x = y$ έχει τουλάχιστον μία λύση, είναι το $[1, +\infty)$. Μάλιστα είναι φανερό από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου ότι για κάθε $y \in [1, +\infty)$ η εξίσωση $\cosh x = y$ έχει μία λύση στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και μία λύση στο $[0, +\infty)$. Άρα το $[1, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί και στα δύο διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Βάσει των παραπάνω το γράφημα της $y = \cosh x$ είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και πάνω προς το σημείο $(0, 1)$ και κατόπιν ανεβαίνει από το σημείο $(0, 1)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς τον y-άξονα.

Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση **υπερβολικό ημίτονο** με τύπο $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ και με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Η $y = \sinh x$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της $y = \sinh x$ θεωρούμε την $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και την γράφουμε $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Ορίζουμε $t = e^x$ και η εξίσωση γράφεται $t^2 - 2yt - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 4y^2 + 4$. Άρα η $t^2 - 2yt - 1 = 0$ έχει δύο (διαφορετικές) λύσεις με άθροισμα $2y$ και γινόμενο -1 οπότε μία λύση είναι θετική και η άλλη αρνητική. Οι δύο αυτές λύσεις είναι οι $t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ και ισχύει $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 < y + \sqrt{y^2 + 1}$. Η αρνητική λύση απορρίπτεται και από την θετική λύση προκύπτει η λύση $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ της εξίσωσης $\sinh x = y$.

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $y = \sinh x$, δηλαδή το σύνολο των y για τα οποία η εξίσωση $\sinh x = y$ έχει τουλάχιστον μία λύση, είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Άρα το γράφημα της $y = \sinh x$ είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Το γράφημα αυτό περιέχει το σημείο $(0, 0)$ και είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Β. Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Θα μελετήσουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις των $y = \cosh x$ και $y = \sinh x$.

Η $y = \cosh x$ δεν είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$: για κάθε $y > 1$ υπάρχουν δύο (διαφορετικές) λύσεις της εξίσωσης $\cosh x = y$. Όμως στο διάστημα $[0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Για κάθε $y \in [1, +\infty)$ λύνουμε την $\cosh x = y$ και κρατάμε την λύση η οποία ανήκει στο $[0, +\infty)$. Όπως έχουμε δει, η λύση αυτή είναι η $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι, μετά από την συνηθισμένη εναλλαγή των x και y,

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Κατά παράδοση και κατ' αναλογία με την αντίστροφη συνάρτηση της $y = \cos x$ η οποία συμβολίζεται $y = \arccos x$ και ονομάζεται τόξο συνημιτόνου, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. *Η παράσταση* $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ *συμβολίζεται* $\operatorname{arccosh} x$ *και ονομάζεται* **τόξο υπερβολικού συνημιτόνου** *του* x *οπότε ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης του υπερβολικού συνημιτόνου γράφεται*

$$y = \operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Βάσει των προηγουμένων, το γράφημα της $y = \operatorname{arccosh} x$ είναι καμπύλη της οποίας η κατακόρυφη προβολή στον x-άξονα είναι το πεδίο ορισμού $[1, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών $[0, +\infty)$. Δηλαδή η καμπύλη ανεβαίνει από το σημείο $(1, 0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Ομοίως, επειδή η $y = \cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, 0]$ και ο τύπος της είναι $y = \log(x - \sqrt{x^2 - 1})$. Μάλιστα, επειδή είναι $\log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\operatorname{arccosh} x$, ο τύπος αυτής της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται και $y = -\operatorname{arccosh} x$.

Η $y = \sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ και ο τύπος της, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Ορισμός. *Η έκφραση* $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ *συμβολίζεται* $\operatorname{arcsinh} x$ *και ονομάζεται* **τόξο υπερβολικού ημιτόνου** *του* x *οπότε ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης του υπερβολικού ημιτόνου γράφεται*

$$y = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Το γράφημα της $y = \operatorname{arcsinh} x$ είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω και περιέχει το σημείο $(0,0)$.

Ασκήσεις.

3.10.1. Μελετήστε τις συναρτήσεις $y = \tanh x$ και $y = \coth x$. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους, τα διαστήματα μονοτονίας τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις οι οποίες αντιστοιχούν στα διαστήματα μονοτονίας, τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

3.10.2. Αποδείξτε ότι
(i) $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $\coth^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}$.
(ii) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$, $\coth(x+y) = \frac{\coth x \coth y + 1}{\coth x + \coth y}$.
(iii) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$, $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$.
(iv) $\cosh x = \frac{1+\tanh^2(x/2)}{1-\tanh^2(x/2)}$, $\sinh x = \frac{2\tanh(x/2)}{1-\tanh^2(x/2)}$, $\tanh x = \frac{2\tanh(x/2)}{1+\tanh^2(x/2)}$, $\coth x = \frac{1+\tanh^2(x/2)}{2\tanh(x/2)}$.

Κεφάλαιο 4

Όρια συναρτήσεων.

4.1 Ορισμοί, παραδείγματα.

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x πλησιάζει έναν αριθμό ξ χωρίς να είναι ίσο με το ξ. Κυρίως μας ενδιαφέρει αν το $f(x)$ πλησιάζει κάποιον αριθμό ή αν γίνεται απεριόριστα μεγάλο θετικό ή απεριόριστα μεγάλο αρνητικό.

Παράδειγμα. Έστω η $y = 2x + 1$ και έστω ότι το x πλησιάζει το 0. Ας πάρουμε για παράδειγμα ως τιμές του x τις $\pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$ κ.τ.λ. Οι αντίστοιχες τιμές του $2x + 1$ είναι οι $1 \pm 0.2, 1 \pm 0.02, 1 \pm 0.002, 1 \pm 0.0002$ κ.τ.λ. οι οποίες πλησιάζουν τον αριθμό 1.

Παράδειγμα. Έστω η $y = \frac{1}{x}$ και έστω πάλι ότι το x πλησιάζει το 0. Παίρνοντας πάλι για το x τις ενδεικτικές τιμές $\pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$ κ.τ.λ., βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x}$ είναι οι $\pm 10, \pm 100, \pm 1000, \pm 10000$ κ.τ.λ. οι οποίες γίνονται όλο και πιο μεγάλες: αυτές οι οποίες προέρχονται από θετικές τιμές του x γίνονται όλο και πιο μεγάλες θετικές ενώ αυτές οι οποίες προέρχονται από αρνητικές τιμές του x γίνονται όλο και πιο μεγάλες αρνητικές.

Άλλες φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x γίνεται όλο και πιο μεγάλο θετικό ή όλο και πιο μεγάλο αρνητικό, δηλαδή όταν το x “πλησιάζει” το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Παράδειγμα. Έστω η $y = \frac{1}{x^2}$ και ας πάρουμε για το x τις ενδεικτικές τιμές $10, 100, 1000, 10000$ κ.τ.λ. Οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x}$ είναι $0.01, 0.0001, 0.000001, 0.00000001$ κ.τ.λ. οι οποίες πλησιάζουν το 0. Αναλόγως, αν πάρουμε ως τιμές του x τις $-10, -100, -1000, -10000$ κ.τ.λ. τότε οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x^2}$ είναι και πάλι οι $0.01, 0.0001, 0.000001, 0.00000001$ κ.τ.λ. οι οποίες πλησιάζουν το 0.

Στο πρώτο παράδειγμα λέμε ότι το $2x + 1$ έχει όριο το 1 όταν το x τείνει στο 0 και γράφουμε $\lim_{x\to 0}(2x+1) = 1$. Στο δεύτερο παράδειγμα λέμε ότι το $\frac{1}{x}$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο 0 από τα δεξιά του και ότι το $\frac{1}{x}$ έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο 0 από τα αριστερά του και γράφουμε, αντιστοίχως, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Στο τρίτο παράδειγμα λέμε ότι το $\frac{1}{x^2}$ έχει όριο το 0 όταν το x τείνει είτε στο $+\infty$ είτε στο $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, αντιστοίχως.

Θα εξετάσουμε τώρα πιο γενικά αλλά και πιο προσεκτικά την κατάσταση η οποία μας ενδιαφέρει. Π.χ. σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα πήραμε κάποιες πολύ συγκεκριμένες ενδεικτικές τιμές του x οι οποίες πλησιάζουν το 0 ή οι οποίες γίνονται πολύ μεγάλες θετικές ή αρνητικές και είδαμε την συμπεριφορά των αντίστοιχων τιμών του y. Παίρνοντας κάποιες άλλες τιμές του x θα μπορούσε η συμπεριφορά των αντίστοιχων τιμών του y (με την ίδια συνάρτηση) να είναι πολύ διαφορετική.

Α. Σημείο συσσώρευσης συνόλου.

Έστω, γενικά, $f : A \to \mathbb{R}$ και αριθμός ξ. Όταν λέμε ότι μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x πλησιάζει το ξ χωρίς να είναι ίσο με το ξ ή όταν το x πλησιάζει το $+\infty$ ή το $-\infty$, πρέπει να σκεφτούμε ότι το $f(x)$ πρέπει να ορίζεται και άρα οι τιμές του x οι οποίες πλησιάζουν το ξ και είναι $\neq \xi$ ή πλησιάζουν το $+\infty$ ή το $-\infty$ *πρέπει να ανήκουν στο πεδίο ορισμού* A *της συνάρτησης*. Για παράδειγμα, *δεν έχει νόημα* να εξετάσουμε την συμπεριφορά του $y = \sqrt{x}$ όταν το x πλησιάζει το οποιοδήποτε αρνητικό ξ ή πλησιάζει το $-\infty$ ή πλησιάζει το 0 από την αριστερή του μεριά. Με άλλα λόγια, το πεδίο ορισμού A πρέπει να έχει στοιχεία του οσοδήποτε κοντά στο σημείο στο οποίο θέλουμε να πλησιάζει το x και διαφορετικά από το σημείο αυτό: τότε λέμε ότι το ξ ή το $+\infty$ ή το $-\infty$ είναι *σημείο συσσώρευσης* του συνόλου A. Το να έχει το A σημεία του οσοδήποτε κοντά στο ξ και διαφορετικά από αυτό σημαίνει το να υπάρχουν $x \in A$ ώστε η απόσταση $|x - \xi|$ να είναι θετική και μικρότερη από τον οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό δ. Παρομοίως, το να έχει το A σημεία του οσοδήποτε κοντά στο $+\infty$ σημαίνει το να υπάρχουν $x \in A$ τα οποία είναι μεγαλύτερα από τον οποιονδήποτε μεγάλο θετικό αριθμό N. Και το να έχει το A σημεία του οσοδήποτε κοντά στο $-\infty$ σημαίνει το να υπάρχουν $x \in A$ τα οποία είναι μικρότερα από τον οποιονδήποτε μεγάλο αρνητικό αριθμό $-N$. Όλα αυτά, μαζί με την παραλλαγή σχετικά με σημεία οσοδήποτε κοντά στο ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του, τα καταγράφουμε και τα κωδικοποιούμε ως εξής.

Ορισμός. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}$.
Το ξ *είναι* **σημείο συσσώρευσης** *του* A *αν για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $0 < |x - \xi| < \delta$ *ή, ισοδύναμα, υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\xi - \delta < x < \xi$ *ή* $\xi < x < \xi + \delta$.
Το ξ *είναι* **από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης** *του* A *αν για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\xi < x < \xi + \delta$.
Το ξ *είναι* **από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης** *του* A *αν για κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\xi - \delta < x < \xi$.
Το $+\infty$ *είναι* **σημείο συσσώρευσης** *του* A *αν για κάθε* $N > 0$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $x > N$.
Το $-\infty$ *είναι* **σημείο συσσώρευσης** *του* A *αν για κάθε* $N > 0$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $x < -N$.

Παράδειγμα. Περιγράφουμε τις διάφορες καταστάσεις οι οποίες παρουσιάζονται πιο συχνά όταν ένα σύνολο A είναι πεδίο ορισμού συνάρτησης.
Έστω ότι το A περιέχει την ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ δύο διαστημάτων αριστερά *και* δεξιά του ξ. Π.χ. $A = (-1, 1) \cup (1, 4]$ και $\xi = 1$. Τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, είναι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A.
Έστω ότι το A περιέχει ένα διάστημα (ξ, b) δεξιά του ξ αλλά δεν περιέχει κανένα σημείο ενός διαστήματος (a, ξ) αριστερά του ξ. Π.χ. $A = (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$ και $\xi = 3$. Τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, είναι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A αλλά δεν είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A.
Έστω ότι το A περιέχει ένα διάστημα (a, ξ) αριστερά του ξ αλλά δεν περιέχει κανένα σημείο ενός διαστήματος (ξ, b) δεξιά του ξ. Π.χ. $A = [-7, 1] \cup (4, +\infty)$ και $\xi = 1$. Τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A αλλά δεν είναι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
Έστω ότι το A περιέχει ένα διάστημα $(a, +\infty)$. Π.χ. $A = (-3, -1) \cup (4, +\infty)$. Τότε το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Έστω ότι το A περιέχει ένα διάστημα $(-\infty, b)$. Π.χ. $A = (-\infty, -5)$. Τότε το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Είναι φανερό από τον ορισμό αλλά και από το παράδειγμα ότι ένα ξ είναι σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A αν και μόνο αν είναι είτε μόνο από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A είτε μόνο από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A είτε και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A.

Δύο πιο ειδικά παραδείγματα.

Παράδειγμα. Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ και του $\mathbb{Z}$. Και τα δύο σύνολα, $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$, δεν περιέχουν *κανένα* διάστημα $(a, +\infty)$.
Επίσης, το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Z}$, ενώ το $\mathbb{Z}$ δεν περιέχει κανένα διάστημα $(-\infty, b)$.

Παράδειγμα. Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης (και από τα δεξιά του αλλά όχι από τα αριστερά του) σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Το σύνολο αυτό δεν περιέχει κανένα διάστημα $(0, b)$.

Β. Όριο συνάρτησης.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = 3x + 2$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ το οποίο περιέχει δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του 1 και άρα το 1 είναι σημείο συσσώρευσής του. Η συνάρτηση είναι ορισμένη και στο 1 αλλά αυτό δεν μας ενδιαφέρει.
Η απλή εμπειρία από αριθμητικές πράξεις δείχνει ότι όταν το x πλησιάζει το 1, είτε από τα αριστερά του είτε από τα δεξιά του, το αντίστοιχο $3x + 2$ πλησιάζει το 5. Για παράδειγμα, αν $x = 1 + 0.01$ τότε $y = 5 + 0.03$ και αν $x = 1 + 0.00001$ τότε $y = 5 + 0.00003$ και αν $x = 1 - 0.0000001$ τότε $y = 5 - 0.0000003$. Πιο γενικά, η απόσταση του $3x+2$ από το 5 είναι $|(3x+2)-5| = 3|x-1|$ και είναι φανερό ότι όταν το x πλησιάζει το 1, είτε από τα αριστερά του είτε από τα δεξιά του, τότε η απόσταση $|x-1|$ μικραίνει όλο και περισσότερο οπότε και η απόσταση $|(3x+2)-5| = 3|x-1|$ μικραίνει επίσης και μάλιστα γίνεται *απεριόριστα* μικρή: δηλαδή η απόσταση $|(3x+2)-5|$ γίνεται μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό.
Λέμε λοιπόν ότι το $3x+2$ έχει όριο το 5 όταν το x τείνει στο 1 και γράφουμε $\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$.
Ας δούμε *πώς* γίνεται η απόσταση $|(3x+2)-5|$ μικρότερη από τον οποιονδήποτε θετικό αριθμό.
Θεωρούμε τον γενικό μικρό θετικό αριθμό ϵ και βλέπουμε ότι η απόσταση $|(3x+2)-5|$ γίνεται $< \epsilon$ όταν είναι $3|x-1| < \epsilon$, δηλαδή όταν είναι $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$, δηλαδή όταν το x βρεθεί είτε αριστερά του 1 στο διάστημα $(1 - \frac{\epsilon}{3}, 1)$ είτε δεξιά του 1 στο διάστημα $(1, 1 + \frac{\epsilon}{3})$ ή, ισοδύναμα, στην ένωση $(1 - \frac{\epsilon}{3}, 1) \cup (1, 1 + \frac{\epsilon}{3})$ των δύο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 1. Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός, συγκεκριμένα το $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, έτσι ώστε να γίνεται $|(3x+2)-5| < \epsilon$ όταν το x βρεθεί στην ένωση $(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$ δύο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 1.
Φυσικά, το ότι το x βρίσκεται στην $(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$ γράφεται ισοδύναμα $0 < |x-1| < \delta$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Παρατηρούμε ότι όταν το x πλησιάζει το 1, είτε από τα αριστερά του είτε από τα δεξιά του, το αντίστοιχο $\frac{1}{(x-1)^2}$ παίρνει μεγάλες θετικές τιμές. Για παράδειγμα: αν $x = 1 + 0.01$ τότε $y = 10000$ και αν $x = 1 - 0.00001$ τότε $y = 10000000000$.
Είναι λοιπόν φανερό ότι όταν το x πλησιάζει το 1 το $\frac{1}{(x-1)^2}$ γίνεται μεγαλύτερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό. Τώρα λέμε ότι το $\frac{1}{(x-1)^2}$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο 1 και γράφουμε $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.
Ας δούμε *πώς* γίνεται το $\frac{1}{(x-1)^2}$ μεγαλύτερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό. Θεωρούμε τον γενικό μεγάλο θετικό αριθμό M και βλέπουμε ότι το $\frac{1}{(x-1)^2}$ γίνεται $> M$ όταν είναι $0 < (x-1)^2 < \frac{1}{M}$, δηλαδή όταν είναι $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Δηλαδή υπάρχει ένας θετικός αριθμός, συγκεκριμένα το $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, ώστε να γίνεται $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ όταν $0 < |x-1| < \delta$, δηλαδή όταν το x βρεθεί στην ένωση $(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$ δύο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 1.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = 1 + \frac{1}{x^2}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού και παρατηρούμε ότι όταν το x πλησιάζει το $+\infty$ τότε το αντίστοιχο $1 + \frac{1}{x^2}$ πλησιάζει το 1. Για παράδειγμα: αν $x = 100$ τότε $y = 1 + 0.0001$ και αν $x = 100000$ τότε $y = 1 + 0.0000000001$. Επομένως όταν το x πλησιάζει το $+\infty$ η απόσταση $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ γίνεται μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό. Τώρα λέμε ότι το $1 + \frac{1}{x^2}$ έχει όριο το 1 όταν το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x^2}) = 1$.
Ας δούμε *πώς* γίνεται η απόσταση $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό.
Θεωρούμε τον γενικό μικρό θετικό αριθμό ϵ και βλέπουμε ότι το $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ γίνεται $< \epsilon$ όταν είναι $\frac{1}{x^2} < \epsilon$, δηλαδή όταν είναι $x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Δηλαδή υπάρχει ένας θετικός αριθμός, συγκεκριμένα το $N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, ώστε η απόσταση $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ να γίνεται $< \epsilon$ όταν $x > N$, δηλαδή όταν το x βρεθεί στο διάστημα $(N, +\infty)$.

Μετά από αυτά τα παραδείγματα θα διατυπώσουμε τον ορισμό του ορίου συνάρτησης και μετά θα δούμε κι άλλα παραδείγματα.

Πρώτα έχουμε τον ορισμό του ορίου σε σημείο. Σε παρένθεση έχουμε τις παραλλαγές με το *δεξιό πλευρικό όριο* και το *αριστερό πλευρικό όριο* στο ξ.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης (ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης ή από αριστερά του σημείο συσσώρευσης) του A.*
*(i) Λέμε ότι η f **συγκλίνει** στο η ή **τείνει** στο η ή έχει **όριο** το η καθώς το x τείνει στο ξ (ή στο ξ από τα δεξιά του ή στο ξ από τα αριστερά του) και γράφουμε*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \qquad \Big(\text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta \ \Big)$$

όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi < x < \xi + \delta$ ή την $\xi - \delta < x < \xi$).
*(ii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή **τείνει** στο $+\infty$ ή έχει **όριο** το $+\infty$ καθώς το x τείνει στο ξ (ή στο ξ από τα δεξιά του ή στο ξ από τα αριστερά του) και γράφουμε*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \qquad \Big(\text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi+} f(x) = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi-} f(x) = +\infty \ \Big)$$

όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi < x < \xi + \delta$ ή την $\xi - \delta < x < \xi$).
*(iii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $-\infty$ ή **τείνει** στο $-\infty$ ή έχει **όριο** το $-\infty$ καθώς το x τείνει στο ξ (ή στο ξ από τα δεξιά του ή στο ξ από τα αριστερά του) και γράφουμε*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty \qquad \Big(\text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi+} f(x) = -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi-} f(x) = -\infty \ \Big)$$

όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi < x < \xi + \delta$ ή την $\xi - \delta < x < \xi$).

Ακολουθούν διάφορα παραδείγματα. Για να αποδείξουμε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ *με τον ορισμό*, θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία (παρόμοια με την ανάλογη διαδικασία για το όριο ακολουθίας). Θα παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θα δημιουργούμε μία "αλυσίδα" από ανισότητες, αρχίζοντας από την $|f(x) - \eta| < \epsilon$ και καταλήγοντας στην $0 < |x - \xi| < \delta$, παίρνοντας υπ' όψη ότι το x ανήκει στο πεδίο ορισμού A της συνάρτησης και προσέχοντας ώστε *κάθε ανισότητα να συνεπάγεται την προηγούμενή της*. Δηλαδή θα περνάμε από ανισότητα σε ανισότητα ως εξής: "η ανισότητα$_1$ συνεπάγεται από την ανισότητα$_2$" ή, συμβολικά, "ανισότητα$_1$ $\Leftarrow$ ανισότητα$_2$". Δηλαδή

$$|f(x) - \eta| < \epsilon \Leftarrow \ldots \Leftarrow \ldots \Leftarrow \ldots \Leftarrow 0 < |x - \xi| < \delta.$$

Τότε για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει, *λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών*, $|f(x) - \eta| < \epsilon$.

Τα ίδια με $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$ όταν πρόκειται για το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή το $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ και με $\xi < x < \xi + \delta$ ή $\xi - \delta < x < \xi$ όταν πρόκειται για το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ή το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$.

Παράδειγμα. Σύμφωνα με προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε $\lim_{x\to1}(3x + 2) = 5$.
Ας επαναλάβουμε πολύ σύντομα την αιτιολόγηση. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x - 1| < \delta$ να συνεπάγεται την $|(3x + 2) - 5| < \epsilon$. Όμως η $|(3x + 2) - 5| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $3|x - 1| < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$. Άρα αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ τότε από την $0 < |x - 1| < \delta$ συνεπάγεται $|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|(3x + 2) - 5| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = x^2 + 3$. Αυτή έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και επομένως ορίζεται σε δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του 0. Βλέπουμε, με αριθμητικούς υπολογισμούς, ότι αν το x πλησιάζει το 0, είτε από τα αριστερά του είτε από τα δεξιά του, τότε το αντίστοιχο $y = x^2+3$ πλησιάζει το 3. Για να το αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x - 0| < \delta$ να συνεπάγεται την $|(x^2 + 3) - 3| < \epsilon$. Όμως η $|(x^2 + 3) - 3| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $x^2 < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $|x| < \sqrt{\epsilon}$. Άρα αν επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$ τότε από την $0 < |x| < \delta$ συνεπάγεται $|x| < \sqrt{\epsilon}$ κι από αυτήν συνεπάγεται $|(x^2 + 3) - 3| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε μία σταθερή συνάρτηση $y = c$ και θα αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου ότι για κάθε ξ

$$\lim_{x\to\xi} c = c.$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε x η απόσταση της τιμής c της συνάρτησης από τον αριθμό c είναι $|c - c| = 0$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ (για παράδειγμα, $\delta = 1$) και τότε προφανώς η $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται την $|c - c| = 0 < \epsilon$.

Παράδειγμα. Έστω $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της $y = |x - \xi|^a$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ οπότε η συνάρτηση είναι ορισμένη σε δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του ξ. Από την απλή εμπειρία μας με υπολογισμούς και με τις ιδιότητες των δυνάμεων (τουλάχιστον σε απλές περιπτώσεις, όπως $a = 1$ ή $a = 2$ ή $a = \frac{1}{2}$) καταλαβαίνουμε ότι αν το x πλησιάζει το ξ, είτε από τα αριστερά του είτε από τα δεξιά του, τότε το αντίστοιχο $y = |x - \xi|^a$ πλησιάζει το 0. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^a = 0 \qquad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικότερα: $\lim_{x\to\xi} |x - \xi| = 0$, $\lim_{x\to\xi}(x - \xi)^2 = 0$, $\lim_{x\to\xi} \sqrt{|x - \xi|} = 0$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x - \xi| < \delta$ να συνεπάγεται την $||x - \xi|^a - 0| < \epsilon$. Τώρα, η $||x-\xi|^a - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|x - \xi|^a < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $|x - \xi| < \epsilon^{1/a}$. Άρα αν επιλέξουμε $\delta = \epsilon^{1/a}$ τότε η $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται την $|x - \xi| < \epsilon^{1/a}$ κι αυτή συνεπάγεται την $||x - \xi|^a - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε πάλι την $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ και γενικότερα την $y = |x-\xi|^{-a} = \frac{1}{|x-\xi|^a}$ με $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty)$ οπότε περιέχει δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του ξ. Από την εμπειρία μας, τουλάχιστον στις απλές περιπτώσεις $a = 1$, $a = 2$ (την οποία είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα) και $a = \frac{1}{2}$, γνωρίζουμε ότι όταν το x πλησιάζει το ξ τότε το αντίστοιχο $y = |x - \xi|^{-a}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλο θετικό. Επομένως θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^{-a} = +\infty \qquad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικότερα: $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{|x-\xi|} = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{(x-\xi)^2} = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{\sqrt{|x-\xi|}} = +\infty$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x - \xi| < \delta$ να συνεπάγεται την $|x - \xi|^{-a} > M$. Τώρα, η $|x - \xi|^{-a} > M$ συνεπάγεται από την $0 < |x - \xi| < M^{-1/a}$ οπότε αν επιλέξουμε $\delta = M^{-1/a}$ τότε η $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται την $0 < |x - \xi| < M^{-1/a}$ κι αυτή συνεπάγεται την $|x - \xi|^{-a} > M$.

Παράδειγμα. Η $y = x^2 + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ οπότε είναι ορισμένη σε δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του 1 και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to1}(x^2 + 3) = 4$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x-1| < \delta$ να συνεπάγεται $|(x^2+3)-4| < \epsilon$. Τώρα, η $|(x^2 + 3) - 4| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|x^2 - 1| < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $1-\epsilon < x^2 < 1+\epsilon$. Προσπαθώντας να λύσουμε την τελευταία ανισότητα ως προς x θα εξαγάγουμε τετραγωνικές ρίζες οπότε πρέπει να προσέξουμε το πρόσημο του $1 - \epsilon$ και γι αυτό πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις. Αυτό θα εξελιχθεί σε μία σχετικά περίπλοκη διαδικασία (η οποία σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να γίνει χειρότερη) και γι αυτό θα δούμε μία εναλλακτική διαδικασία.

Γράφουμε $|(x^2+3)-4| = |x^2-1| = |x+1||x-1|$ και σκεφτόμαστε ότι αν υπάρχει κάποιος (σταθερός) αριθμός m ώστε να ισχύει $|x+1| \leq m$ τουλάχιστον για τα x τα οποία είναι σε κάποιο διάστημα γύρω από το 1 τότε σ' αυτό το διάστημα η $|(x^2+3)-4| < \epsilon$ θα συνεπάγεται από την $m|x-1| < \epsilon$ κι αυτή θα συνεπάγεται από την $|x-1| < \frac{\epsilon}{m}$ και θα τελειώσουμε θεωρώντας $\delta = \frac{\epsilon}{m}$. Το να βρούμε ένα τέτοιο m είναι εύκολο. Για παράδειγμα, για κάθε x στο διάστημα $(0,2)$, δηλαδή για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $|x-1| < 1$, ισχύει $|x+1| < 3$ και άρα ισχύει $|(x^2+3)-4| < 3|x-1|$ και επομένως η $|(x^2+3)-4| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$. Τώρα θεωρούμε το $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$ οπότε το δ είναι $\leq \frac{\epsilon}{3}$ και ≤ 1. Τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $|(x^2+3)-4| < 3|x-1|$ (διότι $|x-1| < \delta \leq 1$) και επομένως ισχύει $|(x^2+3)-4| < \epsilon$ (διότι $|x-1| < \delta \leq \frac{\epsilon}{3}$).

Παράδειγμα. Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ είναι η ένωση $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και περιέχει δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του -1. Κάνοντας μερικούς στοιχειώδεις υπολογισμούς με τιμές του x αρκετά κοντά στο -1 βρίσκουμε πολύ μεγάλες θετικές αντίστοιχες τιμές του $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $\lim_{x\to-1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε από την $0 < |x+1| < \delta$ να συνεπάγεται $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$.
Αν $x \neq -1$ τότε η $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$ συνεπάγεται από την $(x+1)^2 < \frac{x+2}{M}$ κι αυτή συνεπάγεται από την $x^2 + (2-\frac{1}{M})x + (1-\frac{2}{M}) < 0$. Το να λύσουμε αυτήν την σχέση ως προς x θα οδηγήσει σε περιπτωσιολογία, οπότε ακολουθούμε απλούστερη διαδικασία. Θα περιορίσουμε το x σε κάποιο κατάλληλο διάστημα γύρω από το -1 έτσι ώστε να ισχύει $x+2 \geq m$ για κάποιο σταθερό $m > 0$. Τότε για τα x σε αυτό το διάστημα θα έχουμε ότι $\frac{x+2}{(x+1)^2} \geq \frac{m}{(x+1)^2}$ οπότε η $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$ θα συνεπάγεται από την $\frac{m}{(x+1)^2} > M$ κι αυτή θα συνεπάγεται από την $|x+1| < (\frac{m}{M})^{1/2}$ και μετά θα επιλέξουμε $\delta = (\frac{m}{M})^{1/2}$. Για να ισχύει $x+2 \geq m > 0$ για τα x σε κάποιο διάστημα γύρω από το -1 πρέπει το διάστημα αυτό να μην είναι κοντά στο -2 οπότε θεωρούμε έναν αριθμό μικρότερο από την απόσταση ανάμεσα στα -1 και -2, για παράδειγμα το $\frac{1}{2}$, και βλέπουμε ότι για κάθε x στο διάστημα $(-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2})$, δηλαδή για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $|x+1| < \frac{1}{2}$, ισχύει $x+2 > \frac{1}{2}$ και άρα ισχύει $\frac{x+2}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{2(x+1)^2}$ οπότε η $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{2(x+1)^2} > M$ κι αυτή συνεπάγεται από την $|x+1| < (\frac{1}{2M})^{1/2}$. Τώρα θεωρούμε $\delta = \min\{\frac{1}{2}, (\frac{1}{2M})^{1/2}\}$ οπότε $\delta \leq \frac{1}{2}$ και $\delta \leq (\frac{1}{2M})^{1/2}$. Τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x+1| < \delta$ ισχύει $\frac{x+2}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{2(x+1)^2}$ (διότι $|x+1| < \delta \leq \frac{1}{2}$) και άρα ισχύει $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$ (διότι $|x+1| < \delta \leq (\frac{1}{2M})^{1/2}$).

Παράδειγμα. $\lim_{x\to-1}\big(-\frac{x+2}{(x+1)^2}\big) = -\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to\xi}(-|x-\xi|^{-a}) = -\infty$ αν $a > 0$.

Αν το ξ είναι και από δεξιά του και από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $y = f(x)$, τότε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι συνδυασμός των πλευρικών ορίων $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$. Αυτό είναι το περιεχόμενο της πρότασης 4.1.

Πρόταση 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι και από δεξιά του και από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ τότε υπάρχουν και τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και τα τρία όρια είναι τα ίδια:*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x).$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι ίδια τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι το ίδιο με τα δύο πλευρικά όρια.

Απόδειξη. Θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση στην οποία τα διάφορα όρια είναι αριθμοί. Οι περιπτώσεις με τα όρια να είναι $+\infty$ ή $-\infty$ είναι παρόμοιες.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, το οποίο

ικανοποιεί είτε την $\xi - \delta < x < \xi$ είτε την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi - \delta < x < \xi$ καθώς και για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$ και έστω οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi - \delta' < x < \xi$. Επίσης, επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi+\delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ οπότε είναι $\delta \le \delta'$ και $\delta \le \delta''$. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί είτε την $\xi - \delta < x < \xi$ είτε την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ και άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. □

Παράδειγμα. Έστω $a > 0$. Για την $y = |x - \xi|^a$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ ισχύει, όπως έχουμε δει, $\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^a = 0$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} |x - \xi|^a = 0$ και $\lim_{x\to\xi-} |x - \xi|^a = 0$.

Παράδειγμα. Έστω $a > 0$. Για την $y = |x-\xi|^{-a}$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, \xi)\cup(\xi, +\infty)$ γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^{-a} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} |x - \xi|^{-a} = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi-} |x - \xi|^{-a} = +\infty$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$ η οποία ορίζεται στο $(-\infty, +\infty)$.
Η $y = f(x)$ ορίζεται σε δύο διαστήματα δεξιά και αριστερά του 0 και θα μελετήσουμε τα πλευρικά της όρια στο 0. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ οπότε θα έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και εργαζόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Η $|f(x) - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται (επειδή $x < 0$) από την $|(x^2 + 1) - 1| < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $x^2 < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $-\sqrt{\epsilon} < x < 0$. Αν τώρα επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$ ισχύει $-\sqrt{\epsilon} < x < 0$ και επομένως ισχύει $|f(x) - 1| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$.
Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και εργαζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$. Η $|f(x) - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται (επειδή $x > 0$) από την $|(2x+1)-1| < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $2|x| < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < x < \delta$ ισχύει $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$ και επομένως ισχύει $|f(x) - 1| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.

Άμεση και χρήσιμη συνέπεια της πρότασης 4.1 είναι η εξής παρατήρηση.

Έστω ότι το ξ είναι και από δεξιά του και από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ δεν υπάρχει ή αν υπάρχουν και τα δύο αλλά είναι διαφορετικά τότε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{|x|}{x}$ ορίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

και άρα ότι *δεν υπάρχει* το $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.
Στο $(0, +\infty)$ ισχύει $\frac{|x|}{x} = 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση είναι σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$, είναι προφανές ότι όποιο $\delta > 0$ κι αν επιλέξουμε θα ισχύει $\left|\frac{|x|}{x} - 1\right| = |1-1| = 0 < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < x < \delta$. Άρα $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$.
Ομοίως, στο $(-\infty, 0)$ ισχύει $\frac{|x|}{x} = -1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση είναι σταθερή -1 στο $(-\infty, 0)$, όποιο $\delta > 0$ κι αν επιλέξουμε θα ισχύει $\left|\frac{|x|}{x} - (-1)\right| = |(-1) - (-1)| = 0 < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$. Άρα $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{1}{x-\xi}$ ορίζεται στο $(-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty)$. Θα δούμε ότι

$$\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{x - \xi} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\xi+} \frac{1}{x - \xi} = +\infty$$

και επομένως ότι *δεν υπάρχει* το $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x-\xi}$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $M>0$ και εργαζόμαστε στο $(\xi,+\infty)$. Η $\frac{1}{x-\xi}>M$ συνεπάγεται από την $\xi<x<\xi+\frac{1}{M}$. Αν επιλέξουμε $\delta=\frac{1}{M}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $\xi<x<\xi+\delta$ ισχύει $\xi<x<\xi+\frac{1}{M}$ και επομένως ισχύει $\frac{1}{x-\xi}>M$. Άρα $\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{x-\xi}=+\infty$.
Πάλι παίρνουμε οποιοδήποτε $M>0$ και εργαζόμαστε στο $(-\infty,\xi)$. Η $\frac{1}{x-\xi}<-M$ συνεπάγεται από την $\xi-\frac{1}{M}<x<\xi$. Αν επιλέξουμε $\delta=\frac{1}{M}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $\xi-\delta<x<\xi$ ισχύει $\xi-\frac{1}{M}<x<\xi$ και επομένως ισχύει $\frac{1}{x-\xi}<-M$. Άρα $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{x-\xi}=-\infty$.

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι από δεξιά του αλλά όχι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αυτό συμβαίνει όταν για παράδειγμα το A περιέχει κάποιο διάστημα (ξ,b) και δεν τέμνει κάποιο διάστημα (a,ξ). Επειδή το x πρέπει να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι προφανές ότι το να πλησιάζει το x το ξ είναι ισοδύναμο με το να πλησιάζει το x το ξ από την δεξιά μεριά του. Δηλαδή, συμβολικά: *το $x\to\xi$ είναι ισοδύναμο με το $x\to\xi+$*. Σ' αυτήν την περίπτωση ο ορισμός του ορίου $\lim_{x\to\xi}f(x)$ είναι ο ίδιος με τον ορισμό του πλευρικού ορίου $\lim_{x\to\xi+}f(x)$ και

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi+}f(x).$$

Τα ανάλογα ισχύουν όταν $f:A\to\mathbb{R}$ με $A\subseteq\mathbb{R}$ και το ξ είναι από αριστερά του αλλά όχι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Επειδή το x πρέπει να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, *το $x\to\xi$ είναι ισοδύναμο με το $x\to\xi-$* και επομένως ο ορισμός του ορίου $\lim_{x\to\xi}f(x)$ είναι ο ίδιος με τον ορισμό του πλευρικού ορίου $\lim_{x\to\xi-}f(x)$ και

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi-}f(x).$$

Παράδειγμα. Σ' αυτό και στο επόμενο παράδειγμα υποθέτουμε ότι το $a>0$ δεν είναι ακέραιος. Η $y=(x-\xi)^a$ είναι ορισμένη μόνο στο $[\xi,+\infty)$ και ισχύει $(x-\xi)^a=|x-\xi|^a$ στο διάστημα αυτό. Είδαμε σε κάποιο προηγούμενο παράδειγμα ότι $\lim_{x\to\xi+}|x-\xi|^a=0$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^a=\lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^a=\lim_{x\to\xi+}|x-\xi|^a=0$.

Παράδειγμα. Η $y=(x-\xi)^{-a}$ ορίζεται μόνο στο $(\xi,+\infty)$ και ισχύει $(x-\xi)^{-a}=|x-\xi|^{-a}$ στο διάστημα αυτό. Γνωρίζουμε από προηγούμενο παράδειγμα ότι $\lim_{x\to\xi+}|x-\xi|^{-a}=+\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^{-a}=\lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^{-a}=\lim_{x\to\xi+}|x-\xi|^{-a}=+\infty$.

Ας δούμε τώρα τον ορισμό του ορίου στο $+\infty$.

Ορισμός. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.*
(i) Λέμε ότι η f **συγκλίνει** *στο η ή* **τείνει** *στο η ή έχει* **όριο** *το η καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta$$

όταν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $N>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x>N$.
(ii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή* **τείνει** *στο $+\infty$ ή έχει* **όριο** *το $+\infty$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

όταν για κάθε $M>0$ υπάρχει $N>0$ ώστε να ισχύει $f(x)>M$ για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x>N$.
(iii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** *στο $-\infty$ ή* **τείνει** *στο $-\infty$ ή έχει* **όριο** *το $-\infty$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

όταν για κάθε $M>0$ υπάρχει $N>0$ ώστε να ισχύει $f(x)<-M$ για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x>N$.

Παράδειγμα. Έστω σταθερή συνάρτηση $y = c$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι όποιο $N > 0$ κι αν επιλέξουμε ισχύει $|y - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} c = c.$$

Παράδειγμα. Έστω $a > 0$. Η $y = x^a$ είναι ορισμένη τουλάχιστον στο $[0, +\infty)$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty \qquad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικώτερα: $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $x^a > M$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $x^a > M$ συνεπάγεται από την $x > M^{1/a}$ οπότε αν επιλέξουμε $N = M^{1/a} > 0$ τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > M^{1/a}$ και επομένως ισχύει $x^a > M$.

Παράδειγμα. Έστω $a > 0$. Η $y = x^{-a}$ είναι ορισμένη τουλάχιστον στο $(0, +\infty)$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-a} = 0 \qquad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικώτερα: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = 0$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|x^{-a} - 0| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $|x^{-a} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $x > \epsilon^{-1/a}$ οπότε αν επιλέξουμε $N = \epsilon^{-1/a} > 0$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$ ισχύει $x > \epsilon^{-1/a}$ και επομένως ισχύει $|x^{-a} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα. Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+3}$ είναι το $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ οπότε περιέχει ένα διάστημα αριστερά του $+\infty$. Μετά από μερικές στοιχειώδεις πράξεις βλέπουμε ότι όταν το x παίρνει μεγάλες θετικές τιμές το αντίστοιχο $y = \frac{x+1}{x+3}$ πλησιάζει το 1. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+3} = 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{x+1}{x+3} - 1| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $|\frac{x+1}{x+3} - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{2}{|x+3|} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $|x+3| > \frac{2}{\epsilon}$ κι αυτή συνεπάγεται από την $x+3 > \frac{2}{\epsilon}$ κι αυτή συνεπάγεται από την $x > \frac{2}{\epsilon}$. Άρα αν επιλέξουμε $N = \frac{2}{\epsilon}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$ ισχύει $x > \frac{2}{\epsilon}$ και επομένως ισχύει $|\frac{x+1}{x+3} - 1| < \epsilon$.

Τέλος, έχουμε τον ορισμό του ορίου στο $-\infty$.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.*
(i) Λέμε ότι η f **συγκλίνει** *στο η ή* **τείνει** *στο η ή έχει* **όριο** *το η καθώς το x τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$$

όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$.
(ii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή* **τείνει** *στο $+\infty$ ή έχει* **όριο** *το $+\infty$ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$.
(iii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** *στο $-\infty$ ή* **τείνει** *στο $-\infty$ ή έχει* **όριο** *το $-\infty$ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$.

Παράδειγμα. Έστω σταθερή συνάρτηση $y = c$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε $N > 0$ ισχύει $|y - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty} c = c.$$

Παράδειγμα. Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{3-x}{7+x}$ είναι το $(-\infty, -7) \cup (-7, +\infty)$ οπότε περιέχει ένα διάστημα δεξιά του $-\infty$. Δοκιμάζοντας μερικές αρκετά μεγάλες αρνητικές τιμές του x, βλέπουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του $y = \frac{3-x}{7+x}$ πλησιάζουν το -1. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{7+x} = -1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{3-x}{7+x} - (-1)| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Τώρα, η $|\frac{3-x}{7+x} - (-1)| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{10}{|7+x|} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $|x + 7| > \frac{10}{\epsilon}$ κι αυτή συνεπάγεται από την $x < -7 - \frac{10}{\epsilon}$. Άρα αν επιλέξουμε $N = 7 + \frac{10}{\epsilon} > 0$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$ ισχύει $x < -7 - \frac{10}{\epsilon}$ και επομένως ισχύει $|\frac{3-x}{7+x} - (-1)| < \epsilon$.

Ασκήσεις.

4.1.1. Αν $a < b < c$ βρείτε τα σημεία συσσώρευσης καθενός από τα σύνολα:

$$\{a\}, \quad (a, b), \quad (a, b], \quad [a, b) \cup \{c\}, \quad [a, +\infty), \quad (a, b) \cup (c, +\infty), \quad (-\infty, a) \cup (a, b) \cup \{c\}.$$

4.1.2. Πεισθήτε ότι δεν έχουν νόημα τα όρια:

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}, \quad \lim_{x\to0-} \frac{1}{x+|x|}, \quad \lim_{x\to0} \sqrt{-x^2}, \quad \lim_{x\to1-} \log(x^2 - 1), \quad \lim_{x\to1+} \sqrt{1 - x^2}.$$

Προσέξτε: δεν εξετάζουμε το αν υπάρχουν τα όρια αυτά ή το ποιά είναι η τιμή τους. Εξετάζουμε, απλώς, αν έχουν νόημα.

4.1.3. Πεισθήτε ότι έχουν νόημα τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sin x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{1}{\sin(1/x)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \log\sin x, \quad \lim_{x\to0} (x \sin \tfrac{1}{x})^{1/2}.$$

Ποιά είναι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων;

4.1.4. Βρείτε τις τιμές των

$$\lim_{x\to1} \frac{x+2}{x+1}, \quad \lim_{x\to1} \frac{2x+1}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x\to1-} \frac{1}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to1+} \frac{1}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3+2x}.$$

Δώστε "απλοϊκή" αλλά όσο το δυνατό πειστικότερη εξήγηση της απάντησής σας χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους αυστηρούς ορισμούς των ορίων. Για να αποκτήσετε *αίσθηση* των ορίων αυτών υπολογίστε αρκετές τιμές των συναρτήσεων επιλέγοντας τυχαία σκόρπιες τιμές της μεταβλητής x αρκετά κοντά στο όριό της.

4.1.5. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι

$$\lim_{x\to1} 3x = 3, \quad \lim_{x\to1} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to1} \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to2} \sqrt{x} = \sqrt{2}, \quad \lim_{x\to0} e^x = 1, \quad \lim_{x\to1} \log x = 0,$$

$$\lim_{x\to-3} (\tfrac{x+1}{x+3})^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to2+} \frac{x}{2-x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x\to0+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x^2}{x+1} = \mp\infty.$$

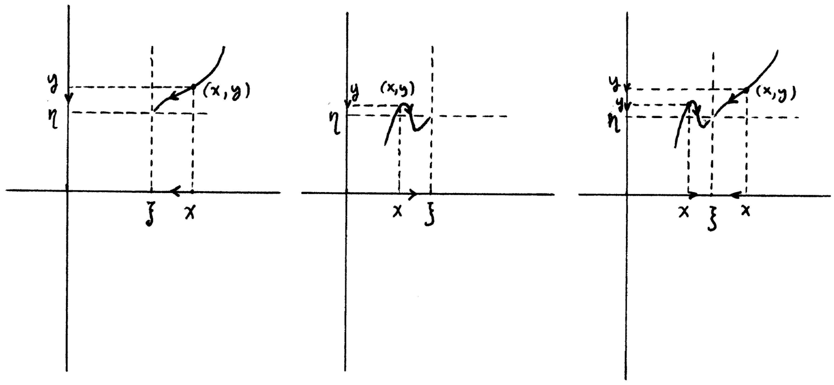
4.1.6. Βρείτε τα πλευρικά όρια στο 1 των παρακάτω συναρτήσεων:

$$y = \begin{cases} 2x + 3 & \text{αν } x > 1 \\ 1 - 2x & \text{αν } x < 1 \end{cases} \quad y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 & \text{αν } x < 1 \end{cases} \quad y = \begin{cases} (2x)/(x - 1) & \text{αν } x > 1 \\ (x - 1)^{-2} & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς για να τα αποδείξετε. Υπάρχουν τα όρια καθώς $x \to 1$ και, αν υπάρχουν, ποιά είναι η τιμή τους;

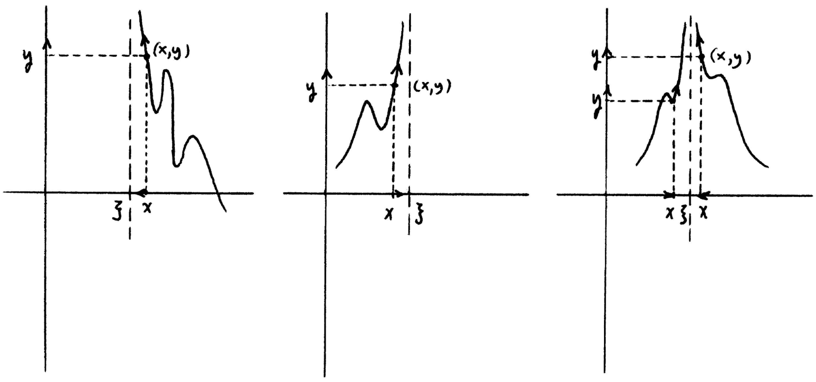
4.2 Όριο και γράφημα.

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του ορίου μίας συνάρτησης $y = f(x)$ αποτυπώνεται στο γράφημά της.



Σχήμα 4.1: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Έστω ότι το x πλησιάζει το ξ. Αυτή η μετακίνηση του x στον x-άξονα συνεπάγεται την αντίστοιχη μετακίνηση του $f(x)$ στον y-άξονα και επομένως την αντίστοιχη μετακίνηση του σημείου $(x, f(x))$ στο επίπεδο. Είναι φανερό ότι η συμπεριφορά του $f(x)$ και η συμπεριφορά του $(x, f(x))$ αλληλοκαθορίζονται. Για παράδειγμα, το $f(x)$ πλησιάζει τον αριθμό η καθώς το x πλησιάζει το ξ, δηλαδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει το σημείο (ξ, η). Ομοίως, το $f(x)$ απομακρύνεται προς τα πάνω στον y άξονα καθώς το x πλησιάζει το ξ, δηλαδή

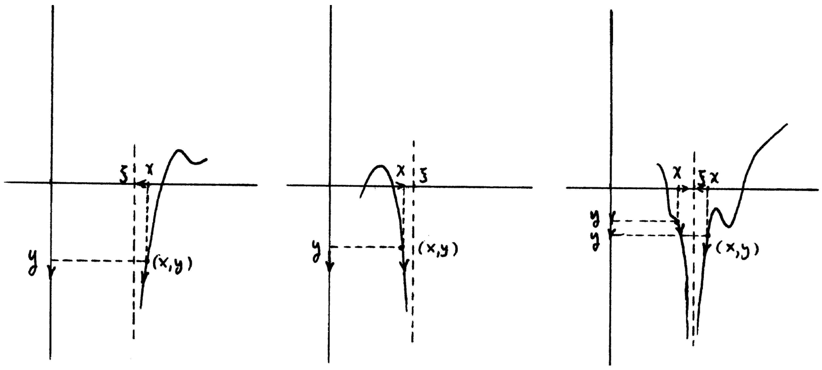


Σχήμα 4.2: $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα πάνω πλησιάζοντας την κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$. Παρομοίως: $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα κάτω πλησιάζοντας την κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$.

Ορισμός. *Όταν* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$, *η κατακόρυφη ευθεία* $x = \xi$ *χαρακτηρίζεται* **κατακόρυφη ασύμπτωτη** *του γραφήματος της* $y = f(x)$.

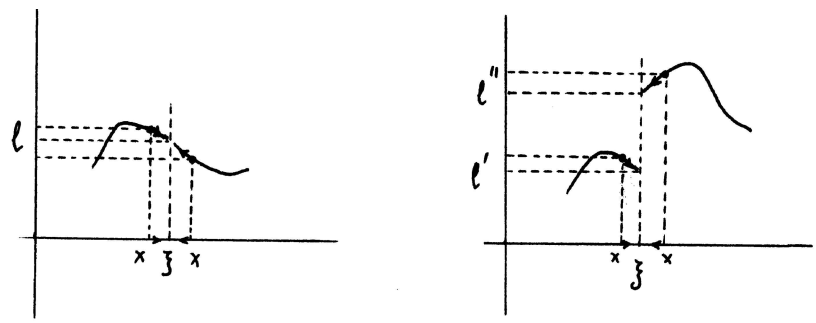
Με τους ίδιους συλλογισμούς καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα για τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi\pm} f(x)$. Στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα είναι ότι το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$ ενώ στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται αριστερά της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$.



Σχήμα 4.3: $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. Κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Ορισμός. *Η ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται* **κατακόρυφη ασύμπτωτη** *του γραφήματος της $y = f(x)$ σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις: $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = \pm\infty$.*

Παρεμπιπτόντως, μπορεί κανείς να δει στο γράφημα της συνάρτησης ότι αν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ είναι διαφορετικά τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.



Σχήμα 4.4: $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x) \neq \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Έστω τώρα ότι το x απομακρύνεται προς τα δεξιά στον x-άξονα. Πάλι η μετακίνηση του $f(x)$ στον y-άξονα και η μετακίνηση του σημείου $(x, f(x))$ στο επίπεδο αλληλοκαθορίζονται. Για παράδειγμα, το $f(x)$ πλησιάζει τον αριθμό η, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα δεξιά πλησιάζοντας την οριζόντια ευθεία $y = \eta$.

Ορισμός. *Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ η οριζόντια ευθεία $y = \eta$ χαρακτηρίζεται* **οριζόντια ασύμπτωτη** *στο $+\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$.*

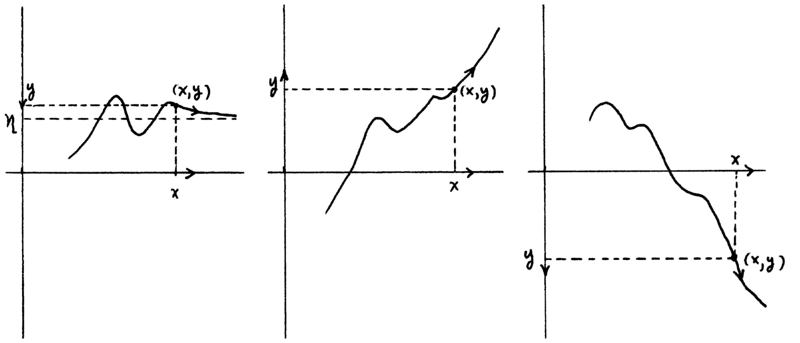
Ομοίως: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα δεξιά και πάνω. Τέλος: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα δεξιά και κάτω.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα αριστερά πλησιάζοντας την ευθεία $y = \eta$.

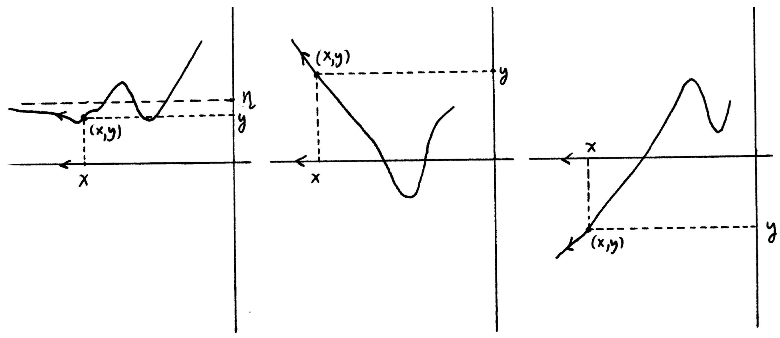
Ορισμός. *Αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$ η οριζόντια ευθεία $y = \eta$ χαρακτηρίζεται* **οριζόντια ασύμπτωτη** *στο $-\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$.*

Ομοίως: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα αριστερά και πάνω. Και: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα αριστερά και κάτω.

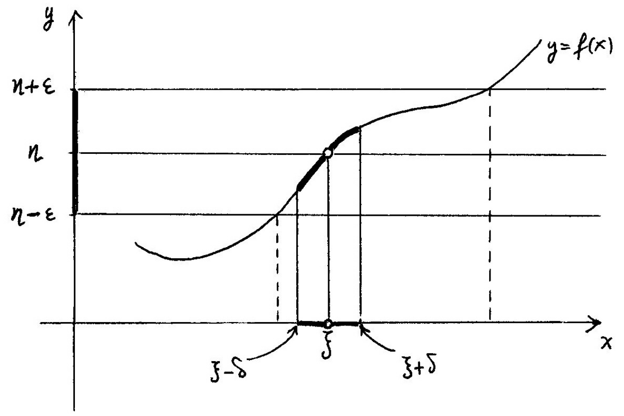
Ένας τρόπος να “αποτυπώσουμε” την ποσοτική έκφραση (με τα ϵ και δ) της έννοιας του ορίου



Σχήμα 4.5: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



Σχήμα 4.6: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



Σχήμα 4.7: $\eta - \epsilon < f(x) < \eta + \epsilon$ για κάθε x με $\xi - \delta < x < \xi$ ή $\xi < x < \xi + \delta$.

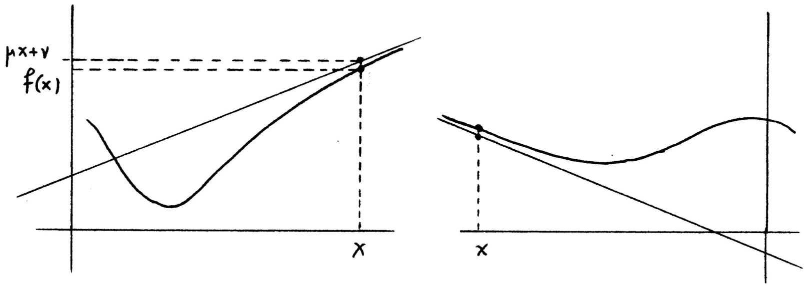
$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι ο εξής. Το να ισχύει το όριο αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης το οποίο βρίσκεται στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ του σημείου $(x, f(x))$ βρίσκεται ανάμεσα στα ύψη $\eta - \epsilon$ και $\eta + \epsilon$ ή, με άλλα λόγια, *το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες $y = \eta - \epsilon$ και $y = \eta + \epsilon$.*

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να "δούμε" κάθε άλλη περίπτωση ορίου. Για παράδειγμα, το να ισχύει το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιο $N > 0$ ώστε *το μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ το οποίο αντιστοιχεί στην ημιευθεία $(N, +\infty)$*

βρίσκεται κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = -M$.

Ορισμός. *Μία ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται* **(πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία** *στο $+\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$.*

Αυτή η ισότητα σημαίνει ότι *το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της συνάρτησης*



Σχήμα 4.8: Πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

και το αντίστοιχο σημείο $(x, \mu x + \nu)$ της ευθείας l πλησιάζουν το ένα το άλλο καθώς τα σημεία αυτά απομακρύνονται προς τα δεξιά. Πιο απλοϊκά: το γράφημα της συνάρτησης προσεγγίζει την ευθεία l κοντά στο $+\infty$.

Ορισμός. *Μία ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται* **(πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία** *στο $-\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$.*

Στην ενότητα 4.3 θα δούμε μία μέθοδο εύρεσης, όταν υπάρχουν, των πλάγιων ασύμπτωτων ευθειών στο γράφημα μίας συνάρτησης.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μία οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι ειδική περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας. Πράγματι, μία οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με κλίση ίση με 0 (δηλαδή $\mu = 0$).

Ασκήσεις.

4.2.1. Αναγνωρίστε τα όρια $\lim_{x\to2\pm} f(x)$, $\lim_{x\to0\pm} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ από τα γραφήματα των

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{αν } x < 2 \\ 1/x & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 2 \\ 1/x & \text{αν } x < 2, x \neq 0 \end{cases}$$

4.2.2. Στο προηγούμενο κεφάλαιο σχεδιάσαμε πρόχειρα τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$y = ax + b, \quad y = x^n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad y = x^a, \quad y = a^x, \quad y = \log_a x, \quad y = [x],$$

$$y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arcsin x,$$

$$y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x, \quad y = \cosh x, \quad y = \sinh x, \quad y = \operatorname{arccosh} x, \quad y = \operatorname{arcsinh} x.$$

Υποθέτοντας ότι η σχεδίαση είναι σωστή, υπολογίστε βάσει των γραφημάτων τα όριά τους (και τα πλευρικά) σε κάθε ξ καθώς και στα $\pm\infty$ (όποια από αυτά έχουν νόημα και υπάρχουν). Ποιές είναι οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτές τους;

4.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια συναρτήσεων.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$.*
(i) Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης (ή από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης) του A. Λέμε ότι η f έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα **κοντά** *στο ξ (ή κοντά στο ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του) αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε η f να έχει αυτήν την ιδιότητα στην τομή του πεδίου ορισμού της A με την ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ (ή με το $(\xi, \xi + \delta)$ ή με το $(\xi - \delta, \xi)$).*
(ii) Έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα **κοντά** *στο $+\infty$ αν υπάρχει κάποιο $N > 0$ ώστε η f να έχει αυτήν την ιδιότητα στην τομή του A με το $(N, +\infty)$.*
(iii) Έστω ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα **κοντά** *στο $-\infty$ αν υπάρχει κάποιο $N > 0$ ώστε η f να έχει αυτήν την ιδιότητα στην τομή του A με το $(-\infty, -N)$.*

Πολλές φορές αυτός ο ορισμός διατυπώνεται για δύο (ή περισσότερες) συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ και για αντίστοιχες ιδιότητές τους.

Παράδειγμα. Ισχύει $0 < \frac{1}{x} < 1$ στο διάστημα $(1, +\infty)$ οπότε λέμε ότι η $y = \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$.

Παράδειγμα. Ισχύει $x(1-x) > 0$ στο διάστημα $(0, 1)$ οπότε λέμε ότι η $y = x(1-x)$ είναι θετική κοντά στο 0 από τα δεξιά του και κοντά στο 1 από τα αριστερά του.
Επίσης, η $y = x(1 - x)$ είναι θετική κοντά στο $\frac{1}{4}$ αφού ισχύει $x(1 - x) > 0$ στο $(0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, 1)$.

Όταν εξετάζουμε κάποιο όριο $\lim_x f(x)$ καθώς $x \to \xi$ ή $x \to \xi+$ ή $x \to \xi-$ ή $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και η f έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα κοντά στο ξ ή στο ξ από τα δεξιά του ή στο ξ από τα αριστερά του ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως, τότε για συντομία λέμε ότι η f έχει την ιδιότητα αυτή *κοντά στο όριο του x*.

Θα δούμε τώρα αρκετές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης. Όλα τα αποτελέσματα θα διατυπώνονται για συντομία με το σύμβολο $\lim_x$ αντί των $\lim_{x\to\xi}$ ή $\lim_{x\to\xi\pm}$ ή $\lim_{x\to\pm\infty}$. Εννοείται ότι τα όρια τα οποία εμφανίζονται στην ίδια διατύπωση είναι όλα του ίδιου τύπου. Επίσης, οι αποδείξεις θα γίνονται συνήθως μόνο στην περίπτωση του ορίου $\lim_{x\to\xi}$. Οι αποδείξεις σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Α. Ισότητα ορίων.

Πρόταση 4.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο όριο του x. Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim_x g(x)$ και τα δύο όρια είναι ίσα.*

Απόδειξη. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θα αποδείξουμε την πρόταση μόνο στην περίπτωση των $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)$ και επομένως όταν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού των δύο συναρτήσεων. Οι αποδείξεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$. Επίσης, επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ οπότε είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ (διότι $0 < |x - \xi| < \delta \leq \delta'$) και ισχύει $g(x) = f(x)$ (διότι $0 < |x - \xi| < \delta \leq \delta''$). Άρα για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $|g(x) - \eta| < \epsilon$ και επομένως $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$.
Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ η απόδειξη του $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$ είναι παρόμοια. Η μοναδική αλλαγή είναι από $|f(x) - \eta| < \epsilon$ σε $f(x) > M$ και από $|g(x) - \eta| < \epsilon$ σε $g(x) > M$. Παρομοίως, αν το όριο είναι $-\infty$. $\square$

Παράδειγμα. Για την $y = f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & \text{αν } 0 < |x| < \frac{1}{10} \\ x & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq \frac{1}{10} \end{cases}$ ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ διότι οι $y = |x|^{-1/2}$ και $y = f(x)$ ταυτίζονται στο $(-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10})$ και διότι γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} |x|^{-1/2} = +\infty$.

Παράδειγμα. Έστω $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ x^{-1} & \text{αν } x > 1 \text{ ή } x < 0 \end{cases}$ Επειδή ισχύει $f(x) = x$ για $0 < x < 1$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0$. Επειδή ισχύει $f(x) = x^{-1}$ για $x < 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x^{-1} = -\infty$.

Παράδειγμα. Έστω $y = f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{αν } x > 100 \\ x & \text{αν } x \leq 100 \end{cases}$ Επειδή ισχύει $f(x) = x^{-1}$ στο διάστημα $(100, +\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^{-1} = 0$. Επειδή ισχύει $f(x) = x$ στο διάστημα $(-\infty, 100)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$.

Στην απόδειξη της πρότασης 4.2 εμφανίστηκε η εξής κατάσταση. Υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει κάποια ιδιότητα για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta'$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να ισχύει κάποια άλλη ιδιότητα για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta''$. Τότε ορίσαμε το $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ οπότε είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$ και συμπεράναμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο ιδιότητες για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Αυτή η κατάσταση περιγράφεται πιο απλά ως εξής:

Αν ισχύει κάποια ιδιότητα κοντά στο ξ και αν ισχύει και μία δεύτερη ιδιότητα κοντά στο ξ τότε ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο ιδιότητες κοντά στο ξ.

Αυτό το επιχείρημα θα το χρησιμοποιούμε στο εξής χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε την απόδειξη με τα δ', δ'' και το $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Και βέβαια αυτό το επιχείρημα μπορεί να προσαρμοστεί στην περίπτωση κατά την οποία το x είναι κοντά στο ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του ή όταν το x είναι κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχει $N' > 0$ ώστε να ισχύει κάποια ιδιότητα για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x > N'$ και ότι υπάρχει $N'' > 0$ ώστε να ισχύει κάποια άλλη ιδιότητα για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x > N''$. Τότε ορίζουμε το $N = \max\{N', N''\}$ οπότε είναι $N \geq N'$ και $N \geq N''$ και συμπεραίνουμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο ιδιότητες για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x > N$.

Β. Όρια και αλγεβρικές πράξεις.

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$. Η **αντίθετη** συνάρτηση $-f : A \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $y = -f(x)$.

Κανόνας αντιθέτου. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A τότε υπάρχει και το $\lim_x(-f(x))$ (στο ίδιο σημείο συσσώρευσης του A) και*

$$\lim_x(-f(x)) = -\lim_x f(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $|(-f(x)) - (-\eta)| = |\eta - f(x)| = |f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ και επομένως $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\eta$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα ισχύει $-f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ οπότε $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\infty = -(+\infty)$.
Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. □

Έστω συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ με τύπους $y = f(x)$ και $y = g(x)$. Το **άθροισμα** $f + g : A \to \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $y = f(x) + g(x)$.

Κανόνας αθροίσματος. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τα $\lim_x f(x)$, $\lim_x g(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A και αν το $\lim_x f(x) + \lim_x g(x)$, δηλαδή το άθροισμα των δύο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε υπάρχει το $\lim_x (f(x) + g(x))$ και*

$$\lim_x (f(x) + g(x)) = \lim_x f(x) + \lim_x g(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα ισχύει

$$|(f(x) + g(x)) - (\eta + \zeta)| \leq |f(x) - \eta| + |g(x) - \zeta| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Επομένως $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \eta + \zeta$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > \frac{M}{2}$ και $g(x) > \frac{M}{2}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Επομένως ισχύει

$$f(x) + g(x) > \tfrac{M}{2} + \tfrac{M}{2} = M$$

για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty = (+\infty) + (+\infty)$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M - \zeta + 1$ και $|g(x) - \zeta| < 1$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Από την $|g(x) - \zeta| < 1$ συνεπάγεται $g(x) > \zeta - 1$ και επομένως ισχύει

$$f(x) + g(x) > (M - \zeta + 1) + (\zeta - 1) = M$$

για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty = (+\infty) + \zeta$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση. $\square$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to 0}(1 + \frac{1}{|x|}) = 1 + (+\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to +\infty}(-1) = -1$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to +\infty}(-1 + \frac{1}{x}) = -1 + 0 = -1$.

Ιδού μερικά παραδείγματα για την περίπτωση απροσδιόριστης μορφής.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x} + 3) = +\infty$, $\lim_{x\to 0+}(-\frac{1}{x}) = -\infty$ και $\lim_{x\to 0+}((\frac{1}{x} + 3) + (-\frac{1}{x})) = 3$. Προφανώς, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός στη θέση του 3.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{|x|}) = -\infty$ και $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{|x|} + (-\frac{1}{|x|})) = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0-}(-\frac{1}{x}) = +\infty$, $\lim_{x\to 0-} \frac{2}{x} = -\infty$ και $\lim_{x\to 0-}(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x}) = -\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0}(-\frac{2}{x^2}) = -\infty$. Θα αποδείξουμε λίγο παρακάτω ότι $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$. Όμως το $\lim_{x\to 0}((\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) + (-\frac{2}{x^2})) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ με τύπους $y = f(x)$ και $y = g(x)$. Η **διαφορά** $f - g : A \to \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $y = f(x) - g(x)$. Η περίπτωση του ορίου της διαφοράς συναρτήσεων ανάγεται στις περιπτώσεις του ορίου του αθροίσματος συναρτήσεων και του ορίου της αντίθετης συνάρτησης, αφού $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$. Επομένως:

Κανόνας διαφοράς. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τα $\lim_x f(x)$, $\lim_x g(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A και αν το $\lim_x f(x) - \lim_x g(x)$, δηλαδή η διαφορά των δύο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε υπάρχει και το $\lim_x(f(x) - g(x))$ και*

$$\lim_x(f(x) - g(x)) = \lim_x f(x) - \lim_x g(x).$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1 - 0 = 1$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to0} x = 0$, $\lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to0}(x - \frac{1}{\sqrt{|x|}}) = 0 - (+\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to0-}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{-x}}) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$.

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ με τύπους $y = f(x)$ και $y = g(x)$. Το **γινόμενο** $fg : A \to \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $y = f(x)g(x)$.

Κανόνας γινομένου. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τα $\lim_x f(x)$, $\lim_x g(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A και αν το $\lim_x f(x) \lim_x g(x)$, δηλαδή το γινόμενο των δύο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε υπάρχει και το $\lim_x(f(x)g(x))$ και*

$$\lim_x(f(x)g(x)) = \lim_x f(x) \lim_x g(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}$ και $|g(x)-\zeta| < \min\{\frac{\epsilon}{3|\eta|+1}, \frac{1}{3}\}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \eta\zeta| &= |(f(x) - \eta)(g(x) - \zeta) + \eta(g(x) - \zeta) + \zeta(f(x) - \eta)| \\
&\leq |f(x) - \eta||g(x) - \zeta| + |\eta||g(x) - \zeta| + |\zeta||f(x) - \eta| \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{3|\zeta|+1}\tfrac{1}{3} + |\eta|\tfrac{\epsilon}{3|\eta|+1} + |\zeta|\tfrac{\epsilon}{3|\zeta|+1} < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = \eta\zeta$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > \sqrt{M}$ και $g(x) > \sqrt{M}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Συνεπάγεται $f(x)g(x) > \sqrt{M}\sqrt{M} = M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = +\infty = (+\infty)(+\infty)$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta > 0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > \frac{2M}{\zeta}$ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\zeta}{2}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Από την $|g(x) - \zeta| < \frac{\zeta}{2}$ συνεπάγεται $g(x) > \zeta - \frac{\zeta}{2} = \frac{\zeta}{2} > 0$ και επομένως ισχύει $f(x)g(x) > \frac{2M}{\zeta}\frac{\zeta}{2} = M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = +\infty = (+\infty)\zeta$.
Οι αποδείξεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες. □

Παράδειγμα. Μία ειδική περίπτωση του κανόνα γινομένου είναι η εξής. Έστω αριθμός c και έστω ότι υπάρχει το $\lim_x f(x)$ και ότι το γινόμενο $c \lim_x f(x)$ δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή. Τότε

$$\lim_x cf(x) = c \lim_x f(x) \qquad (c \neq 0 \text{ αν } \lim_x f(x) = \pm\infty).$$

Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου στην $y = f(x)$ και στην σταθερή συνάρτηση $y = c$ η οποία έχει όριο c.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to1} x = 1$, $\lim_{x\to1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to1} \frac{x}{|x-1|} = 1\,(+\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(x - 1) = +\infty$. Επομένως $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x - 1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η εφαρμογή του κανόνα διαφοράς στο $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to -1-}(x^2-x+1)=\lim_{x\to -1-}(x\,x-x+1)=(-1)(-1)-(-1)+1=3$, $\lim_{x\to -1-}\frac{1}{x+1}=-\infty$. Άρα $\lim_{x\to -1-}\frac{x^2-x+1}{x+1}=3\,(-\infty)=-\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}(2+x)=2$. Άρα $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=(+\infty)\,2=+\infty$. Παρατηρήστε ότι ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για περιπτώσεις απροσδιόριστης μορφής.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to +\infty}\frac{7}{x}=0$ και $\lim_{x\to +\infty}(x\,\frac{7}{x})=7$. Το 7 μπορεί να αντικατασταθεί με οποιονδήποτε αριθμό.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 0+}x=0$ και $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x^2}\,x)=+\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}x^2=0$ και $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{|x|}\,x^2)=0$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}x=0$ αλλά το $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}\,x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 4.3. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $k\in\mathbb{N}$. Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A τότε*

$$\lim_x f(x)^k=(\lim_x f(x))^k\qquad \text{αν } k\in\mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Διότι $\lim_x f(x)^k=\lim_x(\underbrace{f(x)\cdots f(x)}_{k})=\underbrace{\lim_x f(x)\cdots\lim_x f(x)}_{k}=(\lim_x f(x))^k$. □

Παράδειγμα. $\lim_{x\to +\infty}(1-\frac{1}{x})=1-0=1$. Άρα $\lim_{x\to +\infty}\big(1-\frac{1}{x}\big)^3=1^3=1$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0}(3-\frac{1}{x^2})=3-(+\infty)=-\infty$. Άρα $\lim_{x\to 0}(3-\frac{1}{x^2})^4=(-\infty)^4=+\infty$.

Παράδειγμα. Έστω $k\in\mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x\to\xi}x^k=(\lim_{x\to\xi}x)^k=\xi^k$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi}x^k=\xi^k\qquad \text{αν } k\in\mathbb{N}.$$

Αν, επιπλέον, $\xi\neq 0$ τότε $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x^k}=\big(\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x}\big)^k=\big(\frac{1}{\xi}\big)^k=\frac{1}{\xi^k}$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi}x^{-k}=\xi^{-k}\qquad \text{αν } k\in\mathbb{N},\xi\neq 0.$$

Παράδειγμα. Έστω $k\in\mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{(x-\xi)^k}=(\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{x-\xi})^k=(+\infty)^k=+\infty$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^{-k}=+\infty\qquad \text{αν } k\in\mathbb{N}.$$

Αν το $k\in\mathbb{N}$ είναι άρτιο τότε $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^k}=(\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{x-\xi})^k=(-\infty)^k=+\infty$. Αν το $k\in\mathbb{N}$ είναι περιττό τότε $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^k}=(\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{x-\xi})^k=(-\infty)^k=-\infty$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi-}(x-\xi)^{-k}=\begin{cases}+\infty & \text{αν } k\in\mathbb{N} \text{ είναι άρτιο}\\ -\infty & \text{αν } k\in\mathbb{N} \text{ είναι περιττό}\end{cases}$$

Παράδειγμα. Έστω $k\in\mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x\to +\infty}x^k=(\lim_{x\to +\infty}x)^k=(+\infty)^k=+\infty$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to +\infty}x^k=+\infty\qquad \text{αν } k\in\mathbb{N}.$$

Αν το $k\in\mathbb{N}$ είναι άρτιο τότε $\lim_{x\to -\infty}x^k=(\lim_{x\to -\infty}x)^k=(-\infty)^k=+\infty$. Αν το $k\in\mathbb{N}$ είναι περιττό τότε $\lim_{x\to -\infty}x^k=(\lim_{x\to -\infty}x)^k=(-\infty)^k=-\infty$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to -\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{αν } k\in\mathbb{N} \text{ είναι άρτιο}\\ -\infty & \text{αν } k\in\mathbb{N} \text{ είναι περιττό}\end{cases}$$

Παράδειγμα. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = (\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x})^k = 0^k = 0$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-k} = 0 \qquad \text{αν } k \in \mathbb{N}.$$

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Το **αντίστροφο** $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ της συνάρτησης έχει τύπο $y = \frac{1}{f(x)}$.

Κανόνας αντιστρόφου, Ι. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A και αν το $\frac{1}{\lim_x f(x)}$, δηλαδή το αντίστροφο του ορίου, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή αν $\lim_x f(x) \neq 0$) τότε υπάρχει και το $\lim_x \frac{1}{f(x)}$ και*

$$\lim_x \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_x f(x)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta > 0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \min\{\frac{\eta^2\epsilon}{2}, \frac{\eta}{2}\}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα ισχύει $|f(x)-\eta| < \frac{\eta^2\epsilon}{2}$ και $|f(x)-\eta| < \frac{\eta}{2}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Από την $|f(x) - \eta| < \frac{\eta}{2}$ συνεπάγεται $f(x) > \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} > 0$ και επομένως ισχύει

$$\big|\tfrac{1}{f(x)} - \tfrac{1}{\eta}\big| = \tfrac{|f(x)-\eta|}{f(x)\eta} < \tfrac{\eta^2\epsilon/2}{(\eta/2)\eta} = \epsilon$$

για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\eta}$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > \frac{1}{\epsilon}$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Συνεπάγεται $0 < \frac{1}{f(x)} < \epsilon$ και επομένως $\big|\frac{1}{f(x)} - 0\big| = \frac{1}{f(x)} < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = 0 = \frac{1}{+\infty}$.
Η αιτιολόγηση του κανόνα στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα. $\lim_{x\to1}(x + 1) = 2$ οπότε $\lim_{x\to1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x + 1) = +\infty$ οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα. Ο κανόνας δεν ισχύει όταν το όριο μίας συνάρτησης είναι 0.
Για παράδειγμα, $\lim_{x\to0} x = 0$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$.

Όπως θα φανεί στο αποτέλεσμα το οποίο ακολουθεί, το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η συνάρτηση έχει και θετικές και αρνητικές τιμές.

Κανόνας αντιστρόφου, ΙΙ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.*
(i) Αν $\lim_x f(x) = 0$ και αν ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο όριο του x τότε $\lim_x \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(ii) Αν $\lim_x f(x) = 0$ και αν ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στο όριο του x τότε $\lim_x \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| = |f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{|f(x)|} > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/x)-(1/x^2)} = +\infty$.

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ με τύπους $y = f(x)$ και $y = g(x)$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Ο **λόγος** $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Τα αποτελέσματα για το όριο του λόγου δύο συναρτήσεων προκύπτουν από τον συνδυασμό του κανόνα γινομένου και του κανόνα αντιστρόφου.

Κανόνας λόγου. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν υπάρχουν τα $\lim_x f(x)$, $\lim_x g(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A και αν το $\frac{\lim_x f(x)}{\lim_x g(x)}$, δηλαδή ο λόγος των δύο ορίων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε υπάρχει και το $\lim_x \frac{f(x)}{g(x)}$ και*

$$\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_x f(x)}{\lim_x g(x)}.$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 1}(x^2 + x) = 2$, $\lim_{x\to 1}(x - 2) = -1$. Άρα $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x^2}) = 1 + 0 = 1$, $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{2}{x}) = 1 + 0 = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} x \, \frac{1+(1/x^2)}{1+(2/x)} = (+\infty)\frac{1}{1} = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Ιδού μερικά παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0+}(-2x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} x = 0$ και $\lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{x} = \lim_{x\to 0+}(-2) = -2$. Στην θέση του -2 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0+} x = 0$, $\lim_{x\to 0+} x^2 = 0$ και $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0+} x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0+} x = 0$ και $\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0+} x = 0$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, αλλά το $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} 5x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 = 5$. Μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός στη θέση του 5.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Θα δούμε τώρα έναν τρόπο να βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης.

Πρόταση 4.4. *(i) Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της συνάρτησης $y = f(x)$ στο $+\infty$. Τότε*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \mu, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x) = \nu.$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ και είναι αριθμός και ορίσουμε το μ να είναι ίσο με το όριο αυτό και αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x)$ και ορίσουμε το ν να είναι ίσο με το όριο αυτό τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της συνάρτησης στο $+\infty$.
(ii) Ισχύουν τα ανάλογα με του (i) για ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ και με όρια $\lim_{x\to-\infty}$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$. Από την $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$ συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\mu x-\nu}{x} = 0$ και επομένως

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\mu x-\nu}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x+\nu}{x} = 0 + \mu = \mu.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x-\nu) + \lim_{x\to+\infty}\nu = 0+\nu = \nu.$$

Αντιστρόφως, έστω $\mu = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\nu = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x)$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x-\nu) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x) - \lim_{x\to+\infty}\nu = \nu-\nu = 0$$

και άρα η η ευθεία με εξίσωση $y=\mu x+\nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$.
(ii) Ομοίως. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = x+\frac{1}{x}$ στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Υπολογίζουμε διαδοχικά τα όρια: $\mu = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x}-1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x+0 = x$. Επίσης: $\mu = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to-\infty}(x+\frac{1}{x}-1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ είναι πάλι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x+0 = x$.

Έστω $f : A\to\mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$. Η **απόλυτη τιμή** $|f| : A\to\mathbb{R}$ της συνάρτησης έχει τύπο $y = |f(x)|$.

Κανόνας απολύτου. *Έστω $f : A\to\mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ σε σημείο συσσώρευσης του A τότε υπάρχει και το $\lim_x |f(x)|$ και*

$$\lim_x |f(x)| = |\lim_x f(x)|.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon>0$ οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$||f(x)|-|\eta|| \leq |f(x)-\eta| < \epsilon$$

για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}|f(x)| = |\eta|$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M>0$ οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $f(x)>M$ ή $f(x)<-M$, αντιστοίχως, για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Και στις δυο περιπτώσεις συνεπάγεται $|f(x)|>M$ για κάθε $x\in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}|f(x)| = +\infty = |\pm\infty|$. □

Παράδειγμα. $\lim_{x\to1}(x-2) = -1$ οπότε $\lim_{x\to1}|x-2| = |-1| = 1$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to0-}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}) = -\infty$ οπότε $\lim_{x\to0-}|\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}| = |-\infty| = +\infty$.

Παράδειγμα. Δεν ισχύει το αντίστροφο του κανόνα απολύτου. Έστω η $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$ με πεδίο ορισμού $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Τότε $\lim_{x\to0}|f(x)| = \lim_{x\to0}\left|\frac{|x|}{x}\right| = \lim_{x\to0}1 = 1$. Όμως γνωρίζουμε ότι το $\lim_{x\to0}f(x)$ δεν υπάρχει.

Γ. Αλλαγή μεταβλητής.

Μερικές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο συνάρτησης $z = g(f(x))$ η οποία παρουσιάζεται ως *σύνθεση* δύο συναρτήσεων: της $y = f(x)$ και της $z = g(y)$. Εννοείται ότι για να ορίζεται η σύνθεση αυτή πρέπει το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$. Πιο τυπικά, υποθέτουμε ότι έχουμε συνάρτηση $f : A\to B$ με τύπο $y = f(x)$ και συνάρτηση $g : B\to\mathbb{R}$ με τύπο $z = g(y)$. Τότε η **σύνθεση** $g\circ f : A\to\mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $z = g(f(x))$.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι ήδη γνωστά τα όρια των δύο απλούστερων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta$, όπου το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και το η είναι σημείο συσσώρευσης του B. Παρατηρήστε τώρα την εξής "αλυσιδωτή διαδικασία". Αν το x πλησιάζει το ξ και είναι $\neq\xi$ τότε το $y = f(x)$ πλησιάζει το η. Αν, επιπλέον, *υποθέσουμε* ότι ισχύει $y = f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ τότε το $y = f(x)$ πλησιάζει το η και είναι $\neq \eta$. Επομένως το $z = g(f(x)) = g(y)$ πλησιάζει το ζ. Ξεκινώντας λοιπόν από το ότι το x πλησιάζει το ξ και είναι $\neq \xi$, καταλήγουμε στο ότι το $z = g(f(x))$ πλησιάζει το ζ. Συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \zeta = \lim_{y\to\eta} g(y)$.

Παρατηρήστε ότι στο αρχικό όριο το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή στο όριο της συνάρτησης $z = g(f(x))$, δεν εμφανίζεται η μεταβλητή y. Την μεταβλητή αυτή την εμφανίζουμε εμείς και συνηθίζεται να λέμε ότι κάνουμε **αλλαγή μεταβλητής** ή **αντικατάσταση**, εννοώντας ότι αλλάζουμε την μεταβλητή x σε μεταβλητή $y = f(x)$ ή ότι αντικαθιστούμε την μεταβλητή $f(x)$ με την μεταβλητή y και ότι μετατρέπουμε το $\lim_x$ σε $\lim_y$.

Το γενικό αποτέλεσμα έχει ως εξής.

Κανόνας αλλαγής μεταβλητής ή κανόνας αντικατάστασης, Ι. *Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_x f(x) = \eta$ και αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο όριο του x και αν υπάρχει το $\lim_{y\to\eta} g(y)$ τότε $\lim_x g(f(x)) = \lim_{y\to\eta} g(y)$.*
Τα ανάλογα ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το η με ένα από τα $\eta\pm$, $\pm\infty$. Συνοπτικά:

$$\lim_x g(f(x)) = \begin{cases} \lim_{y\to\eta} g(y), & \text{αν } f(x)\to\eta \text{ και } f(x)\neq\eta \text{ κοντά στο όριο του } x \\ \lim_{y\to\eta+} g(y), & \text{αν } f(x)\to\eta \text{ και } f(x)>\eta \text{ κοντά στο όριο του } x \\ \lim_{y\to\eta-} g(y), & \text{αν } f(x)\to\eta \text{ και } f(x)<\eta \text{ κοντά στο όριο του } x \\ \lim_{y\to+\infty} g(y), & \text{αν } f(x)\to+\infty \\ \lim_{y\to-\infty} g(y), & \text{αν } f(x)\to-\infty \end{cases}$$

Απόδειξη. Θα δούμε την απόδειξη όταν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta$ και επιπλέον ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \zeta$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(y)-\zeta| < \epsilon$ για κάθε $y \in B$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |y-\eta| < \delta'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < \delta'$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Επειδή ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ, μπορούμε να δεχτούμε ότι ισχύει $0 < |f(x)-\eta| < \delta'$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα ισχύει $|g(f(x))-\zeta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. □

Παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x}+1$, η $z = \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$ γράφεται $z = \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5}$. Επειδή $\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0}(\sqrt{x}+1) = 0+1 = 1$ και επειδή $y = \sqrt{x}+1 > 1$ για κάθε x κοντά στο 0, συνεπάγεται $\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5} = \lim_{y\to1+} \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5} = \frac{1}{7}$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to1+}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\big)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, η $z = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1$ γράφεται $z = y - y^6 + 1$. Επειδή $\lim_{x\to1+} y = \lim_{x\to1+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to1+}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\big) = \lim_{y\to+\infty}(y-y^6+1) = \lim_{y\to+\infty} y^6(-1+y^{-5}+y^{-6}) = (+\infty)(-1+0+0) = -\infty$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$, η $z = (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}$ γράφεται $z = y^{-2}+y^{-4}$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{1-(1/x)}{1+(1/x)+(1/x^2)} = 0$ και επειδή $y = \frac{x-1}{x^2+x+1} > 0$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ (και, συγκεκριμένα, για κάθε $x > 1$), συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big) = \lim_{y\to0+}(y^{-2}+y^{-4}) = +\infty$.

Παράδειγμα. Μερικές χρήσιμες, απλές και κάπως γενικές σχέσεις είναι οι παρακάτω.

$$\lim_{x\to0+} g\big(\tfrac{1}{x}\big) = \lim_{y\to+\infty} g(y), \qquad \lim_{x\to0-} g\big(\tfrac{1}{x}\big) = \lim_{y\to-\infty} g(y),$$

$$\lim_{x\to+\infty} g\big(\tfrac{1}{x}\big) = \lim_{y\to 0+} g(y), \qquad \lim_{x\to-\infty} g\big(\tfrac{1}{x}\big) = \lim_{y\to 0-} g(y),$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(-x) = \lim_{y\to-\infty} g(y), \qquad \lim_{x\to-\infty} g(-x) = \lim_{y\to+\infty} g(y),$$
$$\lim_{x\to\xi} g(ax+b) = \lim_{y\to a\xi+b} g(y).$$

Οι σχέσεις αυτές δικαιολογούνται μέσω των αλλαγών μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$, $y = -x$ και $y = ax+b$.

Δ. Όρια και ανισότητες.

Όπως και στις προηγούμενες υποενότητες, όλα τα αποτελέσματα θα διατυπώνονται για συντομία με το σύμβολο $\lim_x$ αντί των $\lim_{x\to\xi}$ ή $\lim_{x\to\xi\pm}$ ή $\lim_{x\to\pm\infty}$. Επίσης, τα όρια τα οποία εμφανίζονται στην ίδια διατύπωση θα είναι όλα του ίδιου τύπου και οι αποδείξεις θα γίνονται μόνο στην περίπτωση του ορίου $\lim_{x\to\xi}$.

Πρόταση 4.5. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο όριο του x.*
(i) Αν $\lim_x f(x) = +\infty$ τότε $\lim_x g(x) = +\infty$.
(ii) Αν $\lim_x g(x) = -\infty$ τότε $\lim_x f(x) = -\infty$.

Απόδειξη. (i) Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). $\square$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = \frac{x^2+x-1}{x}$. Επειδή ισχύει $\frac{x^2+x-1}{x} \geq \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε x στο $(1,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, προκύπτει $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.

Παράδειγμα. Επειδή ισχύει $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ για κάθε x στο $(-1,0)\cup(0,1)$ και επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$.

Πρόταση 4.6. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_x f(x) = \eta$ και $\lim_x g(x) = \zeta$ και αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο όριο του x τότε $\eta \leq \zeta$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε αντίφαση) ότι $\zeta < \eta$. Παίρνουμε $\epsilon = \frac{\eta-\zeta}{2} > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < \frac{\eta-\zeta}{2}$ και $|g(x)-\zeta| < \frac{\eta-\zeta}{2}$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) > \eta - \frac{\eta-\zeta}{2} = \frac{\eta+\zeta}{2}$ και $g(x) < \zeta + \frac{\eta-\zeta}{2} = \frac{\eta+\zeta}{2}$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Προκύπτει άτοπο διότι από τις δύο πρώτες σχέσεις έχουμε $f(x) > g(x)$. $\square$

Παράδειγμα. Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ και ισχύει $f(x) \leq u$ κοντά στο όριο του x τότε $\lim_x f(x) \leq u$. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε την σταθερή συνάρτηση $y = u$ οπότε, επειδή ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε x κοντά στο όριό του και $\lim_x u = u$, συνεπάγεται $\lim_x f(x) \leq u$.
Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ και ισχύει $f(x) \geq l$ κοντά στο όριο του x τότε $\lim_x f(x) \geq l$. Η αιτιολόγηση είναι παρόμοια με την προηγούμενη.
Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ και αν κοντά στο όριο του x οι τιμές της f ανήκουν σε κάποιο κλειστό διάστημα $[l,u]$ τότε και η τιμή του $\lim_x f(x)$ ανήκει στο $[l,u]$. Αυτό είναι συνδυασμός των δύο προηγουμένων.

Κανόνας παρεμβολής. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_x f(x) = \lim_x h(x) = \rho$ και αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο όριο του x τότε $\lim_x g(x) = \rho$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\rho| < \epsilon$ και $|h(x)-\rho| < \epsilon$ και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα ισχύει $\rho - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \rho + \epsilon$ και επομένως $|g(x)-\rho| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = \rho$. $\square$

Παράδειγμα. Έστω ότι ισχύει $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x \geq 3$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα. Ισχύει $x - 1 < [x] \leq x$ για κάθε x. Άρα ισχύει $1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1 - 0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.

Από τον κανόνα παρεμβολής έχουμε το εξής χρήσιμο:

Αν $\lim_x f(x) = 0$ και η g είναι φραγμένη κοντά στο όριο του x τότε $\lim_x(f(x)g(x)) = 0$.

Πράγματι, επειδή η g είναι φραγμένη κοντά στο όριο του x, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ κοντά στο όριο του x. Συνεπάγεται ότι ισχύει $-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$ κοντά στο όριο του x και, επειδή $\lim_x(M|f(x)|) = 0$ και $\lim_x(-M|f(x)|) = 0$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_x(f(x)g(x)) = 0$.

Παράδειγμα. Επειδή $|\sin x| \leq 1$ για κάθε x και $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, παίρνουμε $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Πρόταση 4.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$.*
(i) Αν $\lim_x f(x) < u$ τότε ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο όριο του x.
(ii) Αν $\lim_x f(x) > l$ τότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο όριο του x.

Απόδειξη. (i) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta < u$ εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = u - \eta > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < u - \eta$ και επομένως $f(x) < \eta + (u - \eta) = u$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ.
Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ θεωρούμε οποιοδήποτε $M > 0$ το οποίο είναι $\geq -u$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με αυτό το M. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M \leq u$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). $\square$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to1} \frac{x^7-2x^6+x^4+3x^2-5x+1}{x^8+6x^5-x^4+22x^2+1} = -\frac{1}{29} > -\frac{1}{28}$. Άρα ισχύει $\frac{x^7-2x^6+x^4+3x^2-5x+1}{x^8+6x^5-x^4+22x^2+1} > -\frac{1}{28}$ κοντά στο 1. Με άλλα λόγια υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει αυτή η ανισότητα για κάθε $x \in (1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$. Το να βρεθεί συγκεκριμένο δ είναι λίγο δύσκολο διότι η παραπάνω ανισότητα δεν είναι και τόσο απλή.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+(1/x)+1}{(x+(1/x))^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+1}{t^2+1} = 0$. Άρα ισχύει $\frac{x+(1/x)+1}{(x+(1/x))^2+1} < \frac{1}{5}$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{x+(1/x)+1}{(x+(1/x))^2+1} < \frac{1}{5}$ για κάθε $x \in (N, +\infty)$. Αν θέλουμε μπορούμε με λίγες πράξεις να υπολογίσουμε μία συγκεκριμένη τιμή του N.

Ε. Όρια και φραγμένες συναρτήσεις.

Πρόταση 4.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν το $\lim_x f(x)$ είναι αριθμός τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο όριο του x.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Θεωρούμε $\epsilon = 1$ και τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < 1$ και άρα $1 - \eta < f(x) < 1 + \eta$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ. $\square$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^{-5}}{2-x^{-2}+x^{-3}+8x^{-4}+x^{-5}} = \frac{1}{2}$. Άρα η $y = \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$ είναι φραγμένη κοντά στο $-\infty$. Δηλαδή υπάρχει κάποιο διάστημα $(-\infty, -N)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι φραγμένη. Όμως το να βρεθεί συγκεκριμένο τέτοιο διάστημα (δηλαδή το N) καθώς και συγκεκριμένο άνω φράγμα και κάτω φράγμα στο διάστημα αυτό δεν είναι τόσο εύκολο αφού η συνάρτηση δεν έχει απλό τύπο.

Πρόταση 4.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$.*
(i) Αν $\lim_x f(x) = +\infty$ τότε η f είναι κάτω αλλά όχι άνω φραγμένη κοντά στο όριο του x.
(ii) Αν $\lim_x f(x) = -\infty$ τότε η f είναι άνω αλλά όχι κάτω φραγμένη κοντά στο όριο του x.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε $M = 1$ και τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > 1$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.
Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ. Δηλαδή υπάρχει u ώστε να ισχύει $f(x) \le u$ κοντά στο ξ. Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) \le u$ το οποίο αντιφάσκει με το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
(ii) Ομοίως. $\square$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0-} \frac{(x+(1/x))^7+1}{3(x+(1/x))^6+(x+(1/x))^2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^7+1}{3t^6+t^2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t(1+t^{-7})}{3+t^{-4}} = +\infty$. Άρα η $y = \frac{(x+(1/x))^7+1}{3(x+(1/x))^6+(x+(1/x))^2}$ είναι κάτω φραγμένη κοντά στο 0 από τα αριστερά του. Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η συνάρτηση να είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα $(-\delta, 0)$. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι απλός, δεν είναι τόσο εύκολο να βρεθεί συγκεκριμένο δ και συγκεκριμένο κάτω φράγμα της συνάρτησης στο διάστημα $(-\delta, 0)$.

Ασκήσεις.

4.3.1. Αποδείξτε ότι για τις

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \ge 0 \\ x^{-1} & \text{αν } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x-1|^{-1/4} & \text{αν } |x| \ge 1 \\ x^{-1} & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

ισχύει $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 0-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

4.3.2. (i) Αν $\xi \in \mathbb{Z}$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi-}[x] = \xi - 1$ και $\lim_{x\to\xi+}[x] = \xi$.
(ii) Αν $\xi \notin \mathbb{Z}$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi-}[x] = \lim_{x\to\xi+}[x] = [\xi]$.
(iii) Για ποιά ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$;

4.3.3. (i) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to-\infty}[1/x] = -1$ και $\lim_{x\to+\infty}[1/x] = 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to-\infty} x[1/x] = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x[1/x] = 0$.

4.3.4. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{1+x}{1+x^3} = 1, \quad \lim_{x\to 1} \tfrac{1-x^2}{1-x^3} = \tfrac{2}{3}, \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x^2-|x|} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0\pm} (\tfrac{1}{x^3} + \tfrac{1}{|x|}) = \pm\infty.$$

4.3.5. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{x^3+1}{x^2+1} = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{2x^2+3x+1}{x^2+1} = 2, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{(2x+1)^3(3x^2+2)^2(x+4)^{13}}{x^{20}} = 72.$$

4.3.6. Έστω $f(x) \ne 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f. Αποδείξτε ότι $\lim_x f(x) = 2$ αν και μόνο αν $\lim_x \frac{f(x)+3}{f(x)-1} = 5$.

4.3.7. Αν $\lim_x (f(x))^2 = 1$ συνεπάγεται ότι είτε $\lim_x f(x) = 1$ είτε $\lim_x f(x) = -1$; Μελετήστε το παράδειγμα της $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$ καθώς $x \to 0$.

4.3.8. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες) των

$$y = x^2, \quad y = -5x + \tfrac{7x+1}{x}, \quad y = \tfrac{2x^3+x^2-3}{x^2+1}, \quad y = \tfrac{x^4-1}{(x-1)(x^2+1)}, \quad y = \tfrac{1}{x} + \tfrac{x}{x-1} + \tfrac{x^2}{x-2}.$$

4.3.9. (i) Βρείτε τις πλάγιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και της αντίστροφής της $x = \frac{y+1}{y-2}$.
(ii) Θεωρήστε την $y = 2x - \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2+8})$. Βρείτε τις πλάγιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των δύο αυτών συναρτήσεων.
(iii) Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι πλάγιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες μίας συνάρτησης $y = f(x)$ και της αντίστροφής της $x = f^{-1}(y)$; Απαντήστε με τη βοήθεια ενός γενικού γραφήματος μίας συνάρτησης και του αντίστοιχου γραφήματος της αντίστροφής της.

4.3.10. Αν $\lim_x f(x) = \eta$ και $\lim_x g(x) = \zeta$ αποδείξτε ότι $\lim_x \max\{f(x), g(x)\} = \max\{\eta, \zeta\}$ και $\lim_x \min\{f(x), g(x)\} = \min\{\eta, \zeta\}$. Δείτε και όλες τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το όριο της μίας ή και των δύο συναρτήσεων είναι $\pm\infty$.

4.3.11. Κάνοντας αλλαγές μεταβλητής, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\Big(\big(\tfrac{x^2+1}{x^5+2}\big)^8 + 3\big(\tfrac{x^2+1}{x^5+2}\big)^4 + 1\Big) = \tfrac{113}{64}, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{(x+1)/(x-1)} - \sqrt[4]{(x+1)/(x-1)} + 1}{\sqrt{(x+1)/(x-1)} + \sqrt[4]{(x+1)/(x-1)} + 1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0-}\Big(\big(|x|^{1/2} + \tfrac{1}{x}\big)^2 + \big(|x|^{1/2} + \tfrac{1}{x}\big)\Big)^{1/3} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+}\Big(\big(\tfrac{x^2}{x^2+1}\big)^{1/3} + \big(\tfrac{x+1}{x^{1/2}+x}\big)^{-1/2}\Big) = 0.$$

4.3.12. Δικαιολογήστε τις σχέσεις

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x^2) = \lim_{y\to+\infty} g(y), \quad \lim_{x\to 0+} g(\sqrt{x}) = \lim_{y\to 0+} g(y), \quad \lim_{x\to 0} g(1/x^2) = \lim_{y\to+\infty} g(y).$$

4.3.13. Έστω ότι ισχύει $f(\sqrt{x}) = -(f(x))^2 + 2$ για κάθε $x > 1$.
(i) Αποδείξτε ότι αν το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός τότε οι μόνες πιθανές τιμές του είναι -2 και 1. Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένες συναρτήσεις f οι οποίες υλοποιούν καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις;
(ii) Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4.3.14. (i) Αν $1-|x|^{1/2} < f(x) \leq 1+|x|^{1/2}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
(ii) Αν $\frac{x+1}{2x-1} < f(x) < \frac{x-1}{2x+1}$ για κάθε $x \leq -7$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.
(iii) Αν $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$.

4.3.15. Χρησιμοποιώντας την $[a] \leq a < [a] + 1$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} [x] = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{[2x]}{x} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{[\sqrt{x}]}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0\pm} \big[\tfrac{1}{x}\big] = \pm\infty \quad \lim_{x\to 0\pm} x\big[\tfrac{1}{x}\big] = 1.$$

4.3.16. (i) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$ αλλά δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.
(ii) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x))$ και όχι τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

4.3.17. (i) Έστω $\lim_x f(x) = +\infty$ και ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim_x(f(x) + g(x)) = +\infty$.
(ii) Έστω $\lim_x f(x) = -\infty$ και ότι η g είναι άνω φραγμένη κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim_x(f(x) + g(x)) = -\infty$.
(iii) Έστω $\lim_x f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim_x(f(x)g(x)) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.
(iv) Έστω $\lim_x f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η g έχει αρνητικό άνω φράγμα κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim_x(f(x)g(x)) = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

4.3.18. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3x^2+7x+1}{x^2-5x+1} < \frac{301}{100}$ κοντα στο $+\infty$.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} < \frac{3}{4}$ κοντά στο 1.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $(x - \frac{1}{x})^5 - (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^3 > 10^7$ κοντά στο $+\infty$.
(iv) Αποδείξτε ότι ισχύει $1 - 10^{-8} < \frac{x^5+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 1 + 10^{-7}$ κοντά στο $-\infty$.

4.3.19. Έστω $\lim_x f(x) < \lim_x g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο όριο του x.

4.3.20. Έστω ότι η f είναι ορισμένη στην ένωση $(-1, 0) \cup (0, 1)$.
(i) Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + \frac{1}{f(x)}\big) = 2$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
(ii) Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\big) = 0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$.

4.3.21. Αφού υπολογίσετε τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιές από τις συναρτήσεις

$$y = \begin{cases} 1/x & \text{αν } x < 0 \\ -1/\sqrt{x} & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1/x & \text{αν } x < 0 \\ x & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1/|x| & \text{αν } x < 0 \\ 1/(x-1) & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στο 0 ή στο 0 από τα δεξιά του ή στο 0 από τα αριστερά του. Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένα διαστήματα $(a, 0)$ ή $(0, b)$ ή ενώσεις $(a, 0) \cup (0, b)$ στα οποία οι παραπάνω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες καθώς και συγκεκριμένα άνω φράγματα ή κάτω φράγματα;

4.3.22. Αφού υπολογίσετε τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιές από τις συναρτήσεις

$$y = x^2, \quad y = -x^3, \quad y = x^{-2}, \quad y = |x|^{1/2}, \quad y = (-x)^{-1/3}, \quad y = -|x|$$

είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένα διαστήματα $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, b)$ στα οποία οι παραπάνω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες καθώς και συγκεκριμένα άνω φράγματα ή κάτω φράγματα;

4.3.23. Έστω ότι η f είναι μονότονη στο $(0, +\infty)$ και έστω $a > 0$. Αν $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

4.3.24. Έστω ότι η f είναι φραγμένη στο $(0, 1]$ και ότι ισχύει $f(2x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

4.4 Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες.

Έστω $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$. Ας θεωρήσουμε και κάποια ακολουθία (x_n) όλοι οι όροι της οποίας περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και είναι διαφορετικοί από το ξ και η οποία συγκλίνει στο ξ. Δηλαδή έστω $x_n \neq \xi$ για κάθε n και $x_n \to \xi$. Σχηματίζουμε την ακολουθία $(f(x_n))$ και θέλουμε να βρούμε το όριό της, αν υπάρχει. Παρατηρήστε την εξής "αλυσιδωτή διαδικασία". Έστω ότι το n τείνει στο $+\infty$. Τότε το x_n πλησιάζει το ξ και είναι $\neq \xi$. Άρα το $f(x_n)$ πλησιάζει το η. Επομένως, από το ότι το n τείνει στο $+\infty$ καταλήγουμε στο ότι το $f(x_n)$ πλησιάζει το η. Συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) \to \eta$.

Με παρόμοιο συλλογισμό βγάζουμε ανάλογα συμπεράσματα σε όλες τις περιπτώσεις ορίου και έχουμε το εξής γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_n \in A$ για κάθε n. Αν $x_n \to \xi$ και αν ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και αν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ τότε $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{x \to \xi} f(x)$.*
Τα ανάλογα ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το ξ με ένα από τα $\xi\pm$ ή $\pm\infty$. Συνοπτικά:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \begin{cases} \lim_{x \to \xi} f(x) & \text{αν } x_n \to \xi \text{ και } x_n \neq \xi \text{ για κάθε } n \\ \lim_{x \to \xi+} f(x) & \text{αν } x_n \to \xi \text{ και } x_n > \xi \text{ για κάθε } n \\ \lim_{x \to \xi-} f(x) & \text{αν } x_n \to \xi \text{ και } x_n < \xi \text{ για κάθε } n \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) & \text{αν } x_n \to +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) & \text{αν } x_n \to -\infty \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$ και $x_n \to \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε n. Θα δούμε ότι $f(x_n) \to \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Επειδή $x_n \to \xi$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - \xi| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επειδή $x_n \neq \xi$ για κάθε n, ισχύει $0 < |x_n - \xi| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $|f(x_n) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $f(x_n) \to \eta$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις έχουν παρόμοια απόδειξη. □

Ως επιβεβαίωση έχουμε τα εξής απλοϊκά παραδείγματα.

Παράδειγμα. Από το $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ προκύπτει το $n^2 \to +\infty$. Για να το αποδείξουμε αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ και όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = x^2$.

Παράδειγμα. Από το $\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$ συνεπάγεται το $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{1}{n}$ η οποία συγκλίνει στο 0, όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ της $y = \sqrt{x}$ και είναι $\neq 0$.

Παράδειγμα. Για το όριο της ακολουθίας $\big(1+(1+\frac{1}{n})^{2n}-3(1+\frac{1}{n})^{3n}\big)$ θεωρούμε την συνάρτηση $y = 1 + x^2 - 3x^3$ και την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Τότε $x_n \to e$ και $x_n \neq e$ για κάθε n. Επίσης, $\lim_{x\to e}(1 + x^2 - 3x^3) = 1 + e^2 - 3e^3$. Άρα $1 + (1+\frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n} = 1 + {x_n}^2 - 3{x_n}^3 \to 1 + e^2 - 3e^3$.

Η πρόταση 4.10 χρησιμοποιείται συνήθως με δύο τρόπους. Είτε, όπως κάναμε στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Είτε μπορούμε να κάνουμε το εξής. Έστω ότι δεν γνωρίζουμε αν η f έχει όριο και ποιό είναι αυτό καθώς το x τείνει στο όριό του. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε *μία* ακολουθία (x_n) η οποία τείνει στο ίδιο όριο με το x, όλοι οι όροι της είναι διαφορετικοί από το όριο αυτό και περιέχονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και *η ακολουθία* $(f(x_n))$ *δεν έχει όριο*. Τότε το συμπέρασμα είναι ότι *ούτε η συνάρτηση έχει όριο* καθώς το x τείνει στο όριό του. Διότι αν η συνάρτηση είχε κάποιο όριο τότε και η $(f(x_n))$ θα είχε το ίδιο όριο.

Παράδειγμα. Η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει στο 0, όλοι οι όροι της είναι $\neq 0$ και περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{x}$. Γνωρίζουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία (y_n) με τύπο $y_n = \frac{1}{x_n} = (-1)^{n-1}n$ δεν έχει όριο. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$.

Παράδειγμα. Για να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ σχεδιάζουμε το γράφημα της $y = (-1)^{[x]}$. Δείτε και την άσκηση 3.3.1.
Σε κάθε διάστημα $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι σταθερή $y = (-1)^{[x]} = (-1)^n$. Καθώς το x απομακρύνεται προς τα δεξιά, περνά από κάθε τέτοιο διάστημα στο επόμενό του με αποτέλεσμα η συνάρτηση να παίρνει εναλλάξ τις τιμές $+1$ και -1. Επομένως οι τιμές τις συνάρτησης δεν πλησιάζουν κάποιον αριθμό και φαίνεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$.
Ιδού η μαθηματική αιτιολόγηση. Σχηματίζουμε μία ακολουθία τιμών του x η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, επιλέγοντας τις τιμές αυτές μία σε καθένα από τα παραπάνω διαδοχικά διαστήματα: έστω, για παράδειγμα, η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$. Τότε $x_n \to +\infty$ και το $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[n]} = (-1)^n$ δεν έχει όριο. Άρα το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.

Ασκήσεις.

4.4.1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to0+}(-1)^{[1/x]}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x - [x])$.
(Υπόδειξη για το $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$: Σχεδιάστε το γράφημα της $y = x-[x]$ και βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $x - [x] = 0$ καθώς και της εξίσωσης $x - [x] = \frac{1}{2}$. Από όλους αυτούς τους αριθμούς δημιουργήστε κατάλληλες ακολουθίες οι οποίες αποκλίνουν στο $+\infty$ και στο $-\infty$.)

4.4.2. (i) Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, δηλαδή ισχύει $f(x \pm T) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.
(ii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x - [x])$.

4.4.3. Έστω ότι η (x_n) τείνει στο όριο του x και ότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και είναι διαφορετικοί από το όριο του x.
(i) Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ και άπειροι όροι της $(f(x_n))$ είναι $\geq u$, αποδείξτε ότι $\lim_x f(x) \geq u$.
(ii) Αν υπάρχει το $\lim_x f(x)$ και άπειροι όροι της $(f(x_n))$ είναι $\leq l$, αποδείξτε ότι $\lim_x f(x) \leq l$.
(iii) Αν άπειροι όροι της $(f(x_n))$ είναι $\geq u$ και άπειροι όροι της είναι $\leq l$ και αν $l < u$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_x f(x)$.
(Υπόδειξη: Συνδυάστε τις προτάσεις 2.8 και 4.10.)

4.5 Ρητές συναρτήσεις.

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$ με $N \geq 1$ και $a_N \neq 0$. Από το $\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k$ και από το $\lim_{x\to\xi} a_k = a_k$ παίρνουμε το $\lim_{x\to\xi} a_k x^k = a_k \xi^k$ οπότε $\lim_{x\to\xi} p(x) = \lim_{x\to\xi}(a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0) = a_N \xi^N + \cdots + a_1 \xi + a_0 = p(\xi)$. Άρα

$$\lim_{x\to\xi} p(x) = p(\xi).$$

Για να βρούμε τα όρια καθώς $x \to \pm\infty$ γράφουμε $p(x) = a_N x^N \big(1 + \frac{a_{N-1}}{a_N}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_N}\frac{1}{x^N}\big)$ οπότε, επειδή το όριο της παρένθεσης καθώς $x \to \pm\infty$ είναι 1, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = a_N\,(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } a_N > 0 \\ -\infty & \text{αν } a_N < 0 \end{cases}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } a_N > 0 \text{ και } N \text{ άρτιο ή αν } a_N < 0 \text{ και } N \text{ περιττό} \\ -\infty & \text{αν } a_N < 0 \text{ και } N \text{ άρτιο ή αν } a_N > 0 \text{ και } N \text{ περιττό} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$ εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου, δηλαδή

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_N x^N.$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3 + x^2 - 4x - 12) = -\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 + x^2 - 12) = +\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to-\infty}(7x^4 + x^3 - x + 5) = +\infty$.

Τα όρια ρητών συναρτήσεων *δεν* είναι αρκετά πιο περίπλοκα. Αν $r(x) = \frac{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι ρητή συνάρτηση με $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$, γράφουμε πάλι

$$r(x) = (a_N/b_M)x^{N-M}\big(1 + \tfrac{a_{N-1}}{a_N}\tfrac{1}{x} + \cdots + \tfrac{a_0}{a_N}\tfrac{1}{x^N}\big)\big/\big(1 + \tfrac{b_{M-1}}{b_M}\tfrac{1}{x} + \cdots + \tfrac{b_0}{b_M}\tfrac{1}{x^M}\big),$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \begin{cases} (a_N/b_M)(+\infty) & \text{αν } N > M \\ a_N/b_M & \text{αν } N = M \\ 0, & \text{αν } N < M \end{cases}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \begin{cases} (a_N/b_M)(+\infty) & \text{αν } N > M \text{ και το } N-M \text{ είναι άρτιο} \\ (a_N/b_M)(-\infty) & \text{αν } N > M \text{ και το } N-M \text{ είναι περιττό} \\ a_N/b_M, & \text{αν } N = M \\ 0, & \text{αν } N < M \end{cases}$$

Παρατηρήστε και πάλι ότι το $\lim_{x\to\pm\infty} r(x)$ εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή, δηλαδή

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_N x^N}{b_M x^M}.$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{2x^3 + 1} = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^5 + 3x^2 + x + 4}{2x^2 - x + 1} = \mp\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^3 + x^2 - 1} = 0$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3-x+5}{2x+1} = -\infty$.

Αν το x τείνει σε αριθμό τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

Αν $b_M\xi^M + \cdots + b_1\xi + b_0 \neq 0$ τότε $\lim_{x\to\xi} r(x) = \frac{a_N\xi^N+\cdots+a_1\xi+a_0}{b_M\xi^M+\cdots+b_1\xi+b_0} = r(\xi)$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi).$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 1} \frac{3x-2}{x^4+2x^3-4} = \frac{3\cdot1-2}{1^4+2\cdot1^3-4} = -1$.

Αν $b_M\xi^M+\cdots+b_1\xi+b_0 = 0$ τότε το $x-\xi$ διαιρεί το πολυώνυμο $b_Mx^M+\cdots+b_1x+b_0$. Αν $(x-\xi)^m$ (με $m\geq 1$) είναι η μέγιστη δύναμη του $x-\xi$ η οποία διαιρεί το $b_Mx^M+\cdots+b_1x+b_0$ τότε μπορούμε να γράψουμε $b_Mx^M+\cdots+b_1x+b_0 = (x-\xi)^m q(x)$, όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x-\xi$ και επομένως $q(\xi)\neq 0$. Τώρα, είτε το $x-\xi$ διαιρεί το $a_Nx^N+\cdots+a_1x+a_0$ είτε όχι, μπορούμε να γράψουμε $a_Nx^N+\cdots+a_1x+a_0 = (x-\xi)^n p(x)$, όπου $n\geq 0$ και το $p(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x-\xi$ και επομένως $p(\xi)\neq 0$. Συνολικά λοιπόν έχουμε ότι $r(x) = (x-\xi)^{n-m}\frac{p(x)}{q(x)}$ και, επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} \neq 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n>m \\ p(\xi)/q(\xi) & \text{αν } n=m \end{cases}$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\,(+\infty),$$

αν $m>n$ και το $m-n$ είναι άρτιο, ενώ

$$\lim_{x\to\xi-} r(x) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\,(-\infty), \qquad \lim_{x\to\xi+} r(x) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\,(+\infty),$$

αν $m>n$ και το $m-n$ είναι περιττό.

Παράδειγμα. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$ παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου x^4-2x^2+1 και επομένως το πολυώνυμο αυτό διαιρείται από το $x-1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης είτε στην περίπτωση αυτή πιο απλά:

$$x^4-2x^2+1 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2.$$

Κατόπιν βλέπουμε ότι το 1 είναι ρίζα και του x^3-x^2-x+1 οπότε το $x-1$ διαιρεί και αυτό το πολυώνυμο. Όπως πριν, υπολογίζουμε:

$$x^3-x^2-x+1 = (x-1)x^2-(x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).$$

Άρα $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} = \frac{1}{x+1}$ για κάθε $x\neq 1,-1$ οπότε $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα. Για το $\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$ βλέπουμε ότι το 1 είναι ρίζα του x^3-x^2-x+1 και, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα: $x^3-x^2-x+1 = (x-1)^2(x+1)$. Το 1 είναι ρίζα και του x^3+4x^2+x-6 και παραγοντοποιούμε το $x-1$ ως εξής:

$$\begin{aligned} x^3+4x^2+x-6 &= x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6 = (x-1)x^2+(x-1)5x+(x-1)6 \\ &= (x-1)(x^2+5x+6). \end{aligned}$$

Το $x-1$ δεν διαιρεί το x^2+5x+6 διότι το 1 δεν είναι ρίζα του. Άρα $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+5x+6}{(x-1)(x+1)}$ για κάθε $x\neq 1,-1$. Επομένως $\lim_{x\to1+}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1} = +\infty$ και $\lim_{x\to1-}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1} = -\infty$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.

Ασκήσεις.

4.5.1. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x+1}{-3x^4+x^2}=-\frac{1}{3},\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^8}{1+2x^2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x+x^5}{1-x^2}=\mp\infty.$$

4.5.2. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}=-\frac{1}{5},\qquad \lim_{x\to 1\pm}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}=\pm\infty.$$

4.5.3. Έστω $f(x)\begin{cases}\leq \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2-x+1} & \text{αν } 0\leq x<1\\ \geq \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2-x+1} & \text{αν } x>1\end{cases}$ Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 1\pm} f(x)=\pm\infty$.

4.5.4. Αν $\frac{x^3+x^2-3x-7}{2x^3+8x^2+x+3}\leq f(x)<\frac{x^5+x^4+7}{2x^5-4x^4-x^3-8x-3}$ για $x>5$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$.

4.5.5. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{11}{8}<\frac{x^3-1}{x^2-1}<\frac{3}{2}+10^{-4}$ κοντά στο 1.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2x^7-14x^6-x^5+3x^4-7x^2-1}{3x^4+x^2+6}<-10^{13}$ κοντά στο $-\infty$.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-2x^2+1}<-10^9$ κοντά στο 1 από τα αριστερά του.

4.5.6. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιές από τις συναρτήσεις

$$y=\frac{x^7+2x^5+5x^2}{-x^6+5x^5+x^4},\qquad y=\frac{3x^5+x^4-5x^3+x^2}{8x^7-x^5-x^4+7x^3},\qquad y=\frac{x^7+x^5+x^3}{-x^7-4x^5+x^3}$$

είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στο 0 ή κοντά στο 0 από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του καθώς και κοντά στο $+\infty$ και κοντά στο $-\infty$.

4.6 Δυνάμεις.

Το πεδίο ορισμού της $y=x^a$, όπου a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, περιέχει το διάστημα $(0,+\infty)$. Το πρώτο όριο το οποίο θα αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{x\to\xi}x^a=\xi^a\qquad \text{αν } \xi>0.$$

Κατ' αρχάς έστω $a>0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon>0$ και θα βρούμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$ το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$.
Τώρα, η $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ συνεπάγεται από την $\xi^a-\epsilon<x^a<\xi^a+\epsilon$.
Στην περίπτωση $0<\epsilon<\xi^a$ η $\xi^a-\epsilon<x^a<\xi^a+\epsilon$ συνεπάγεται από την $(\xi^a-\epsilon)^{1/a}<x<(\xi^a+\epsilon)^{1/a}$. Παρατηρούμε ότι το ξ βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $(\xi^a-\epsilon)^{1/a}$ και $(\xi^a+\epsilon)^{1/a}$ οπότε αν επιλέξουμε $\delta=\min\big\{\xi-(\xi^a-\epsilon)^{1/a},(\xi^a+\epsilon)^{1/a}-\xi\big\}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$ ισχύει $(\xi^a-\epsilon)^{1/a}<x<(\xi^a+\epsilon)^{1/a}$ και επομένως ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$.
Στην περίπτωση $\epsilon\geq\xi^a$ η $\xi^a-\epsilon<x^a<\xi^a+\epsilon$ συνεπάγεται από την $0<x^a<\xi^a+\epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $0<x<(\xi^a+\epsilon)^{1/a}$. Επειδή $0<\xi<(\xi^a+\epsilon)^{1/a}$, αν επιλέξουμε $\delta=\min\{\xi-0,(\xi^a+\epsilon)^{1/a}-\xi\}$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$ ισχύει $0<x<(\xi^a+\epsilon)^{1/a}$ και επομένως ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$.
Άρα σε κάθε περίπτωση μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$ το οποίο ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}x^a=\xi^a$.

Αν $a<0$ (οπότε $-a>0$) τότε γράφουμε $\lim_{x\to\xi}x^a=\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x^{-a}}=\frac{1}{\xi^{-a}}=\xi^a$.

Τέλος, αν $a=0$ τότε έχουμε απλώς: $\lim_{x\to\xi}x^0=\lim_{x\to\xi}1=1=\xi^0$.

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0+}x^a=\begin{cases}0 & \text{αν } a>0\\ 1 & \text{αν } a=0\\ +\infty & \text{αν } a<0\end{cases}$$

καθώς και τα

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{αν } a>0 \\ 1 & \text{αν } a=0 \\ 0 & \text{αν } a<0 \end{cases}$$

έχουν ήδη αποδειχθεί ως παραδείγματα.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x\to\xi} x^a$ με $\xi<0$ καθώς και τα όρια $\lim_{x\to-\infty} x^a$ και $\lim_{x\to 0-} x^a$ θα πρέπει το πεδίο ορισμού της $y=x^a$ να περιέχει και το διάστημα $(-\infty,0)$, δηλαδή το a να είναι ακέραιος. Αλλά αυτή η περίπτωση μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$.

Παράδειγμα. Το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$ εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty)-(+\infty)$. Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\tfrac{1}{(+\infty)+(+\infty)}=0.$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to3}\big(\frac{x+1}{x^2+1}\big)^{1/5}=\lim_{y\to2/5}y^{1/5}=(\frac{2}{5})^{1/5}$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to1}\sqrt[4]{(x^2-2x+1)(x^3+x)}=\lim_{y\to0+}\sqrt[4]{y}=0$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to4-}(\frac{x+1}{4-x})^{1/3}=\lim_{y\to+\infty}y^{1/3}=+\infty$.

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+(1/x)}+\sqrt[3]{x+(1/x)}}{x+(1/x)-\sqrt{x+(1/x)}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}}{y-\sqrt{y}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3+t^2}{t^6-t^3}=0$.

Ασκήσεις.

4.6.1. Έχουν νόημα τα παρακάτω όρια;

$$\lim_{x\to-\infty}x^{6/4},\quad \lim_{x\to-1}x^{-\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to0-}x^{-1/2},\quad \lim_{x\to0-}x^{3+\sqrt{3}}.$$

4.6.2. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to1}(x^{\sqrt{2}}-5x^{-\sqrt{2}})=-4,\quad \lim_{x\to64}(2x^{4/3}+x^{-1/6})=\tfrac{1025}{2},\quad \lim_{x\to0}(\tfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-\tfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}})=-\infty.$$

4.6.3. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^{7/8}-3x^{-2}+2x^{6/5}-4}{x^{6/5}-2x^{9/8}+2}=2,\quad \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^{3/2}-2x^{6/5}+1}{x+4x^{4/3}+2}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^{7/4}-x^{1/3}}{x^2+3x^{15/8}}=0.$$

4.6.4. Έστω $a\neq0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to1}\tfrac{1}{(x^a-1)^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to1}\tfrac{x^{3a}-1}{x^a-1}=3,\quad \lim_{x\to1\pm}\tfrac{1}{x^a-1}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{αν } a>0\\ \mp\infty, & \text{αν } a<0\end{cases}$$

4.6.5. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\tfrac12,\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})=-\tfrac14,\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})=\tfrac13.$$

4.6.6. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(\tfrac{3x^2-7x+1}{x^2+1}\big)^{1/2}=\sqrt{3},\quad \lim_{x\to\pm\infty}(1+\tfrac1x)^{1/3}=1,\quad \lim_{x\to1-}(1-\tfrac{1}{x-1})^{2/3}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0}(\tfrac{1}{x^2}-\tfrac1x)^{1/5}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+}\tfrac{\sqrt{(x+1)/(x-1)}-3\sqrt[7]{(x+1)/(x-1)}+1}{2\sqrt{(x+1)/(x-1)}+7\sqrt[5]{(x+1)/(x-1)}+3}=\tfrac12.$$

4.6.7. Έστω a, b, c με $a > 0$.
Βρείτε A, B συναρτήσει των a, b, c ώστε $\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{ax^2+bx+c} - Ax - B\big) = 0$.
Με τα A, B τα οποία βρήκατε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{ax^2+bx+c} - Ax - B\big) = \frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}$.

4.6.8. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 0$. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι
(i) αν $x_n \to +\infty$ και $x_n > 0$ για κάθε n τότε $x_n^a \to +\infty$.
(ii) αν $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n τότε $x_n^a \to 0$.
Τι γίνεται αν $a < 0$;
Αποδείξτε ότι

$$\Big(\tfrac{n^3+n+1}{2n^2-1}\Big)^{\sqrt{2}} \to +\infty, \quad \Big(\tfrac{n^5+n^3+1}{2n^6+n^2+1}\Big)^{1/4} \to 0, \quad \Big(\tfrac{2^n}{4^n+1}\Big)^{3/4} \to 0, \quad \Big(\tfrac{2^n-4^n}{2^n-3^n+1}\Big)^{1/5} \to +\infty.$$

4.7 Εκθετικές, λογαριθμικές και υπερβολικές συναρτήσεις.

Θα μελετήσουμε τώρα τα όρια της εκθετικής συνάρτησης $y = a^x$, όπου $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της $y = a^x$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Κατ' αρχάς θα δούμε ότι:

$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi.$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Η $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $a^\xi - \epsilon < a^x < a^\xi + \epsilon$.
Αν $0 < \epsilon < a^\xi$ τότε η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται από την $\log_a(a^\xi - \epsilon) < x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$. Επειδή το ξ βρίσκεται ανάμεσα στα $\log_a(a^\xi - \epsilon)$ και $\log_a(a^\xi + \epsilon)$, μπορουμε να επιλέξουμε $\delta = \min\big\{\xi - \log_a(a^\xi - \epsilon), \log_a(a^\xi + \epsilon) - \xi\big\}$ και τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon) < x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$ και επομένως ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.
Αν $\epsilon \geq a^\xi$ τότε η $a^\xi - \epsilon < a^x < a^\xi + \epsilon$ συνεπάγεται (επειδή $0 < a^x$) από την $a^x < a^\xi + \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$. Επειδή $\xi < \log_a(a^\xi + \epsilon)$, αν επιλέξουμε $\delta = \log_a(a^\xi + \epsilon) - \xi$ τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$ και επομένως ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.
Άρα $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Αν $0 < a < 1$ (οπότε $\frac{1}{a} > 1$) τότε $\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^\xi} = a^\xi$.

Τέλος, αν $a = 1$ τότε έχουμε $\lim_{x\to\xi} 1^x = \lim_{x\to\xi} 1 = 1 = 1^\xi$.

Το επόμενο όριο είναι το

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{αν } a > 1 \\ 1 & \text{αν } a = 1 \\ 0 & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $a^x > M$ για κάθε $x > N$. Η $a^x > M$ συνεπάγεται από την $x > \log_a M$. Επιλέγουμε το $N = \log_a M > 0$ αν $M > 1$ και το $N = 1$ αν $0 < M \leq 1$. Τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \log_a M$ και επομένως ισχύει $a^x > M$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$ (οπότε $\frac{1}{a} > 1$) τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Αν $a = 1$ τότε $\lim_{x\to+\infty} 1^x = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

Τέλος:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{αν } a > 1 \\ 1 & \text{αν } a = 1 \\ +\infty & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Τα όρια αυτά μπορούν να αποδειχθούν βάσει των ορισμών, όπως και τα αμέσως προηγούμενα όρια. Προτιμάμε όμως να τα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα όρια και την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$. Για παράδειγμα, αν $a > 1$ τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Η απόδειξη είναι το ίδιο απλή αν $a = 1$ ή $0 < a < 1$.

Για τα όρια της λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Θεωρούμε για οποιοδήποτε $a > 0, a \neq 1$ την $y = \log_a x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Το πρώτο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi \qquad \text{αν } \xi > 0.$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Η $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\log_a \xi - \epsilon < \log_a x < \log_a \xi + \epsilon$ κι αυτή από την $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^{\epsilon}$. Το ξ βρίσκεται ανάμεσα στα $\xi a^{-\epsilon}$ και ξa^{ϵ} οπότε αν επιλέξουμε $\delta = \min\left\{\xi - \xi a^{-\epsilon}, \xi a^{\epsilon} - \xi\right\}$ τότε για κάθε $x > 0$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^{\epsilon}$ και επομένως ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \lim_{x\to\xi}(-\log_{1/a} x) = -\log_{1/a} \xi = \log_a \xi$ διότι $\frac{1}{a} > 1$.

Για το όριο καθώς $x \to +\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{αν } a > 1 \\ -\infty & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $\log_a x > M$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Η $\log_a x > M$ συνεπάγεται από την $x > a^M$ οπότε αν επιλέξουμε $N = a^M > 0$ τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > a^M$ και επομένως ισχύει $\log_a x > M$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty}(-\log_{1/a} x) = -(+\infty) = -\infty$.

Τέλος:

$$\lim_{x\to0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{αν } a > 1 \\ +\infty & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αμέσως προηγούμενα όρια και την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x\to0+} \log_a x = \lim_{y\to+\infty} \log_a \frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty}(-\log_a y) = -\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια αν $0 < a < 1$.

Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για την συνήθη εκθετική και την συνήθη λογαριθμική συνάρτηση:

$$\lim_{x\to\xi} e^x = e^{\xi}, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to\xi} \log x = \log \xi \quad \text{αν } \xi > 0, \qquad \lim_{x\to0+} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Εδώ ταιριάζει να αναφέρουμε και τα όρια των *υπερβολικών συναρτήσεων*.

Για την $y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ παίρνουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \cosh x = \cosh \xi, \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty.$$

Για να αποδείξουμε αυτά τα όρια χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα όρια της εκθετικής συνάρτησης και τους αλγεβρικούς κανόνες ορίων.

Ομοίως, για την $y = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ παίρνουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \sinh x = \sinh \xi, \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty.$$

Για την $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \tanh x = \tanh \xi, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1.$$

Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και το όριο στο $-\infty$.

Τέλος, για την $y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \coth x = \coth \xi \quad \text{αν } \xi \neq 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \coth x = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \coth x = 1.$$

Όταν $\xi = 0$ παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0-} \coth x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \coth x = +\infty.$$

Τα όρια αυτά προκύπτουν από το ότι $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x}) = 1 - 1 = 0$ και ότι $e^x - e^{-x} < 0$ για $x < 0$ και $e^x - e^{-x} > 0$ για $x > 0$.

Ασκήσεις.

4.7.1. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - e^{2x} + 2) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(e^x - e^{2x} + 2) = 2, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x} + e^x + 1}{2e^{2x} - e^x + 2} = \frac{1}{2}.$$

4.7.2. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(\log^2 x - \log x) = \lim_{x\to 0+}(\log^2 x - \log x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 2\log^2 x}{2 + \log^3 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1 + 2\log^2 x}{2 + \log^3 x} = 0.$$

4.7.3. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{e^x - 1} = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = 2, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\log(2x)}{\log(3x)} = 1, \qquad \lim_{x\to 1\pm} \left(\frac{1}{\log^3 x} + \frac{1}{\log^2 x}\right) = \pm\infty.$$

4.7.4. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log^7 |x| - \log^4 |x| + 1}{\log^5 |x| + \log^2 |x| + 1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \log \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \log \frac{1 - \log x}{1 + (\log x)^2} = -\infty.$$

4.7.5. Είναι οι συναρτήσεις

$$y = e^x, \quad y = e^{-|x|}, \quad y = \frac{1}{e^x - 1}, \quad y = \frac{1}{(e^x - 1)^2}, \quad y = \log |x|, \quad y = \frac{1}{\log |x|}, \quad y = \frac{1}{\log |1 + x|}$$

φραγμένες ή άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες κοντά στο 0 ή κοντά στο 0 από τα αριστερά του ή από τα δεξιά του ή κοντά στα $\pm\infty$;

4.7.6. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 1$. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι
(i) αν $x_n \to +\infty$ τότε $a^{x_n} \to +\infty$.
(ii) αν $x_n \to -\infty$ τότε $a^{x_n} \to 0$.
Τί γίνεται αν $0 < a < 1$;
Αποδείξτε ότι

$$e^{\frac{n^3 + 3n - 1}{n^2 + 1}} \to +\infty, \quad e^{-\sqrt{n}} \to 0, \quad 2^{2^n} \to +\infty, \quad 2^{\frac{1 - \sqrt{n} - n}{1 + \sqrt{n}}} \to 0.$$

4.7.7. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 1$. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι
(i) αν $x_n \to +\infty$ και $x_n > 0$ για κάθε n τότε $\log_a x_n \to +\infty$.
(ii) αν $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n τότε $\log_a x_n \to -\infty$.
Τί γίνεται αν $0 < a < 1$;
Αποδείξτε ότι

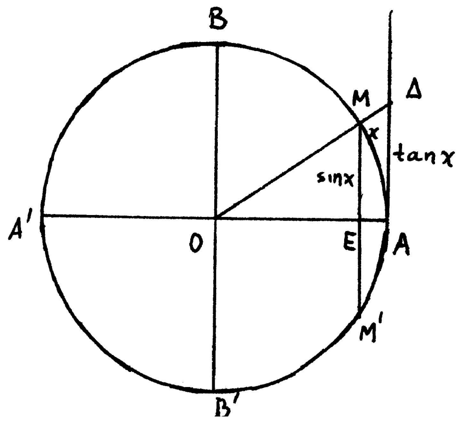
$$\log \frac{n+1}{2n^2 - 1} \to -\infty, \quad \log \frac{e^{2n} + 1}{e^n + 1} \to +\infty, \quad \frac{\log^2 \frac{n}{n^2+1} - \log \frac{n}{n^2+1} + 2}{-\log^2 \frac{n}{n^2+1} + 4\log \frac{n}{n^2+1} - 8} \to -1.$$

4.8 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ιδού μία πολύ χρήσιμη ανισότητα για την συνάρτηση $y = \sin x$.

Πρόταση 4.11. *Για κάθε x ισχύει $|\sin x| \leq |x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και M το σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου το οποίο αντιστοιχεί στο x. (Δείτε πάλι την ενότητα 1.4.) Φέρνουμε την κάθετη ME στην οριζόντια διάμετρο $A'OA$ οπότε το τόξο AM έχει μήκος x και το ευθύγραμμο τμήμα ME έχει μήκος $\sin x$. Θεωρούμε και το συμμετρικό M' του M ως προς την οριζόντια διάμετρο οπότε το μήκος του ευθ. τμήματος MM'



Σχήμα 4.9: μήκος του ΜΕ $<$ μήκος τόξου ΜΑ $<$ μήκος του ΔΑ.

είναι $2\sin x$ και το τόξο MM' έχει μήκος $2x$. Άρα $0 < 2\sin x < 2x$ οπότε $0 < \sin x < x$ και επομένως $|\sin x| < |x|$.
Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ οπότε $0 < \sin(-x) < -x$ οπότε $|\sin x| < |x|$. Αν $x = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.
Τέλος, αν $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ τότε $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$. □

Τώρα, από την γνωστή ισότητα $\cos x - \cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$ συνεπάγεται

$$|\cos x - \cos\xi| = 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big|\,\big|\sin\tfrac{x+\xi}{2}\big| \leq 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big| \leq 2\big|\tfrac{x-\xi}{2}\big| = |x-\xi|.$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε $\delta = \epsilon$. Είναι προφανές ότι για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ συνεπάγεται $|\cos x - \cos\xi| \leq |x-\xi| < \delta = \epsilon$. Άρα

$$\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi.$$

Με τον ίδιο τρόπο από την $\sin x - \sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}$ αποδεικνύεται η $|\sin x - \sin\xi| \leq |x-\xi|$ και επομένως

$$\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi.$$

Από τα δύο αυτά όρια και από τον κανόνα του λόγου ορίων βλέπουμε ότι αν $\cos\xi \neq 0$, δηλαδή αν $\xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\lim_{x\to\xi}\tan x = \tan\xi \qquad \text{αν } \xi \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Επίσης, αν $\sin\xi \neq 0$, δηλαδή αν $\xi \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, τότε

$$\lim_{x\to\xi}\cot x = \cot\xi \qquad \text{αν } \xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ας δούμε τι ισχύει για τα ξ τα οποία εξαιρέθηκαν.

Αν $\xi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε $\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi = 1$. Επίσης, $\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi = 0$ και συγχρόνως $\cos x > 0$ κοντά στο ξ από τα αριστερά του και $\cos x < 0$ κοντά στο ξ από τα δεξιά του. Συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi+} \frac{1}{\cos x} = -\infty$. Και τα τρία όρια τα οποία υπολογίσαμε αλλάζουν πρόσημο αν $\xi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ οπότε από τον κανόνα γινομένου:

$$\lim_{x\to\xi-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x\to\xi+} \tan x = -\infty \qquad \text{αν } \xi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x\to\xi-} \cot x = -\infty, \quad \lim_{x\to\xi+} \cot x = +\infty \qquad \text{αν } \xi = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Αυτά τα όρια συμφωνούν με την περιγραφή των γραφημάτων των $y = \tan x$ και $y = \cot x$ την οποία έχουμε κάνει και ειδικώτερα με το ότι οι ευθείες $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της $y = \tan x$ και οι ευθείες $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της $y = \cot x$.

Παράδειγμα. Είναι απλό να δει κανείς ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ και $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ δεν υπάρχουν. Αν εμπιστευτούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών όπως τα έχουμε σχεδιάσει παρατηρούμε ότι καθώς $x \to \pm\infty$ τα αντίστοιχα $y = \cos x$ και $y = \sin x$ "ταλαντώνονται" περιοδικά, καλύπτοντας όλο το εύρος τιμών ανάμεσα στις τιμές -1 και 1 χωρίς επομένως να πλησιάζουν κάποιον συγκεκριμένο αριθμό.
Ένας αυστηρότερος τρόπος να αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι να πάρουμε την ακολουθία (πn) η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ και όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = \cos x$ και να παρατηρήσουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $(\cos(\pi n)) = ((-1)^n)$ δεν έχει όριο. Σύμφωνα με την πρόταση 4.10, αυτό αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \cos x$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο με την ακολουθία $(\frac{\pi}{2} + \pi n)$, αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ και με τις αντίθετες ακολουθίες αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχουν τα όρια καθώς $x \to -\infty$.

Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δύο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Και τα δύο αυτά όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.

Πρόταση 4.12. *Για κάθε x με $|x| < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $|x| \le |\tan x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.*

Απόδειξη. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ τότε παίρνουμε στον τριγωνομετρικό κύκλο το σημείο M το οποίο αντιστοιχεί στο x και προεκτείνουμε την OM μέχρι να συναντήσει στο σημείο D την ευθεία η οποία είναι κάθετη στην οριζόντια διάμετρο $A'OA$ στο σημείο A. Τότε το μήκος του τόξου AM είναι x και το μήκος του ευθ. τμήματος AD είναι $\tan x$. Το εμβαδόν του τριγώνου OAD είναι ίσο με $\frac{\tan x}{2}$ και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAM είναι ίσο με $\frac{x}{2}$ (διότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με π ενώ το εμβαδόν του τομέα είναι αναλογικά ίσο με $\frac{x}{2\pi}\pi$.) Συγκρίνοντας τα εμβαδά, βλέπουμε ότι $0 < x < \tan x$ οπότε $|x| < |\tan x|$.
Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ οπότε $0 < -x < \tan(-x)$ οπότε $|x| < |\tan x|$.
Τέλος, αν $x = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0 = 0$. □

Συνδυάζοντας τις ανισότητες $|\sin x| \le |x|$ και $|x| \le |\tan x|$, βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Για το δεύτερο όριο γράφουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^2 \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ένας δεύτερος τρόπος να αποδείξουμε το δεύτερο όριο είναι ο εξής:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} (\frac{\sin y}{y})^2 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$.

Παράδειγμα. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ βλέπουμε ότι $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}=\frac{3}{2}\frac{\sin(3x)/(3x)}{\sin(2x)/(2x)}$.
Τώρα, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.
Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}=\frac{3}{2}$.

Ασκήσεις.

4.8.1. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}x\cot x=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

4.8.2. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}=3,\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x}=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(13x)}{\sin^2(7x)}=\frac{169}{98},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(8x)-\cos(15x)}{x^2}=\frac{161}{2},\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=-1,\quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-(\pi/2)}=-1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin(7x)-7\sin(3x)}{x^3}=-140.$$

4.8.3. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin x=\begin{cases}0 & \text{αν } a>-1\\ 1 & \text{αν } a=-1\\ +\infty & \text{αν } a<-1\end{cases}$

4.8.4. Αν $a>0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin\frac{1}{x}=0$.

4.8.5. Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$, αποδείξτε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ότι δεν υπάρχουν ούτε τα $\lim_{x\to 0\pm}\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0\pm}\cos\frac{1}{x}$.

4.8.6. (i) Έστω ακολουθία (x_n). Αν $x_n\to 0$ και ισχύει $x_n\neq 0$ για κάθε n αποδείξτε ότι $\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1$ και $\frac{1-\cos x_n}{{x_n}^2}\to\frac{1}{2}$.
(ii) Αποδείξτε ότι

$$n\sin\frac{\pi}{n}\to\pi,\quad \sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}\to 0,\quad n^2\sin\frac{\pi}{n}\to+\infty,\quad n^2\big(1-\cos\frac{\pi}{n}\big)\to\frac{\pi^2}{2},\quad \frac{\cot(\pi/(2n))}{n}\to\frac{2}{\pi}.$$

4.8.7. Σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y=\frac{1}{x}\sin x,\quad y=\frac{1}{x^2}\sin x,\quad y=x\sin\frac{1}{x},\quad y=x^2\sin\frac{1}{x},\quad y=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x},\quad y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

4.8.8. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα από τα

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin x,\quad \lim_{x\to+\infty}x^2\sin x,\quad \lim_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

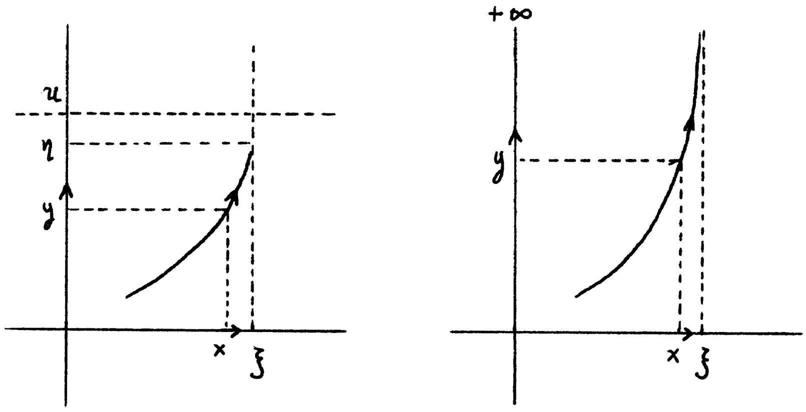
Για καθένα από αυτά τα όρια επινοήστε κατάλληλη ακολουθία (x_n).
Τα δυο τελευταία όρια γενικεύονται: αν $a\leq 0$ αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0+}x^a\sin\frac{1}{x}$. Να αντιπαραβάλετε το αποτέλεσμα αυτό με τα αποτελέσματα των ασκήσεων 4.8.3 και 4.8.4.

4.8.9. Αν ισχύει $|a\sin x+b\sin 3x+c\sin 8x|\leq|\sin x|$ για κάθε x αποδείξτε ότι $|a+3b+8c|\leq 1$.

4.9 Όρια μονότονων συναρτήσεων.

Έστω ότι η f είναι *αύξουσα* σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, ξ). Όταν το x αυξάνεται στο διάστημα (a, ξ) και πλησιάζει το ξ τότε και το αντίστοιχο $f(x)$ αυξάνεται και είναι σαφές (ειδικά αν σχεδιάσουμε πρόχειρα το γράφημα μίας τέτοιας συνάρτησης) ότι υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Το πρώτο ενδεχόμενο είναι να αυξάνεται *απεριόριστα* το $f(x)$, δηλαδή να ισχύει $\lim_{x\to\xi-} f(x) = +\infty$. Το δεύτερο ενδεχόμενο είναι να αυξάνεται αλλά *όχι απεριόριστα* το $f(x)$ κι αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο άνω φράγμα για το $f(x)$, δηλαδή κάποιος αριθμός u ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε x στο (a, ξ). Σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση είναι φανερό ότι το $f(x)$ πλησιάζει κάποιον αριθμό η, δηλαδή ότι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$. Σε κάθε περίπτωση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το αριστερό πλευρικό όριο και είτε $\lim_{x\to\xi-} f(x) = +\infty$ είτε $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$.

Με την βοήθεια πρόχειρων γραφημάτων μπορούμε εύκολα να σκεφτούμε ανάλογα συμπερά-



Σχήμα 4.10: Αύξουσες συναρτήσεις με άνω φράγμα και χωρίς άνω φράγμα.

σματα για κάθε περίπτωση: (i) διάστημα (a, ξ) ή $(a, +\infty)$, συνάρτηση f αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό και αριστερό πλευρικό όριο στο ξ ή όριο στο $+\infty$ και (ii) διάστημα (ξ, b) ή $(-\infty, b)$, συνάρτηση f αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό και δεξιό πλευρικό όριο στο ξ ή όριο στο $-\infty$.

Το θεώρημα 4.1 περιέχει όλα τα συμπεράσματα και σε λίγο γενικότερη μορφή.

Θεώρημα 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$.*
(i) Έστω $A \subseteq (-\infty, \xi)$, ότι το ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και ότι η f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Τότε το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ υπάρχει. Το όριο είναι αριθμός αν η f είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη, ενώ το όριο είναι $+\infty$ (ή $-\infty$) αν η f δεν είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη.
(ii) Έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και ότι η f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Τότε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει. Το όριο είναι αριθμός αν η f είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη, ενώ το όριο είναι $+\infty$ (ή $-\infty$) αν η f δεν είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη.
(iii) Έστω $A \subseteq (\xi, +\infty)$, ότι το ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και ότι η f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Τότε το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ υπάρχει. Το όριο είναι αριθμός αν η f είναι κάτω (ή άνω) φραγμένη, ενώ το όριο είναι $-\infty$ (ή $+\infty$) αν η f δεν είναι κάτω (ή άνω) φραγμένη.
(iv) Έστω ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Τότε το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ υπάρχει. Το όριο είναι αριθμός αν η f είναι κάτω (ή άνω) φραγμένη, ενώ το όριο είναι $-\infty$ (ή $+\infty$) αν η f δεν είναι κάτω (ή άνω) φραγμένη.

Το θεώρημα 4.1 είναι ιδιαίτερα σημαντικό: τόσο όσο και το αντίστοιχο θεώρημα 2.1 για μονότονες ακολουθίες. Μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την *ύπαρξη* πλευρικού ορίου συνάρτησης με μοναδικό δεδομένο την μονοτονία της.

Το θεώρημα 4.1 δεν θα αποδειχθεί σ' αυτές τις σημειώσεις.

Παράδειγμα. Με την βοήθεια του θεωρήματος 4.1 μπορούμε να μελετήσουμε με διαφορετικό τρόπο κάποια ήδη γνωστά όρια.
Για παράδειγμα, αν $a > 0$ μπορούμε να αποδείξουμε τα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ και $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$ με δεδομένο ότι η $y = x^a$ είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εξασφαλίζει την ύπαρξη των δύο ορίων καθώς και ότι το πρώτο όριο είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$ και ότι το δεύτερο όριο είναι είτε αριθμός είτε $-\infty$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το πρώτο όριο είναι αριθμός η, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} x^a = \eta$. Με μία απλή αλλαγή μεταβλητής υπολογίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = \eta$. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{x\to+\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x\to+\infty} x^a = 2^a\eta$. Επομένως $\eta = 2^a\eta$ και άρα $\eta = 0$. Αυτό είναι αδύνατο διότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $x^a \geq 1^a = 1$ και άρα $\eta = \lim_{x\to+\infty} x^a \geq 1$. Επομένως το πρώτο όριο είναι $+\infty$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το δεύτερο όριο είναι 0. Πράγματι, επειδή ισχύει $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} x^a \geq 0$ οπότε το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη-αρνητικός: $\lim_{x\to 0+} x^a = \eta \geq 0$. Με την ίδια αλλαγή μεταβλητής έχουμε $\lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{y\to 0+} y^a = \eta$. Επίσης, $\lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{x\to 0+} 2^a x^a = 2^a\eta$. Επομένως $\eta = 2^a\eta$ και άρα $\eta = 0$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
Η συνάρτηση είναι αύξουσα αλλά είναι αρκετά περίπλοκο να το αποδείξουμε με τις μέχρι τώρα γνώσεις μας. Θα το αποδείξουμε αργότερα με την βοήθεια των παραγώγων. Αν όμως *υποθέσουμε* την μονοτονία της συνάρτησης αυτής τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$ καθώς και το ότι αυτό είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Αν θεωρήσουμε και την ακολουθία (n) τότε, επειδή αυτή αποκλίνει στο $+\infty$, από την πρόταση 4.10 συνεπάγεται ότι η αντίστοιχη ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ έχει το ίδιο όριο με την συνάρτηση. Όμως το όριο της ακολουθίας αυτής είναι αριθμός τον οποίο έχουμε ονομάσει e και επομένως και το όριο της συνάρτησης είναι ο αριθμός e. Δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Υπάρχει *όμως* το εξής λεπτό σημείο το οποίο ακυρώνει τον συλλογισμό μας για την απόδειξη του $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$: δυστυχώς η απόδειξη του ότι η $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ είναι αύξουσα χρησιμοποιεί την παράγωγο της συνάρτησης αυτής και ο τύπος της παραγώγου αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το όριο αυτό!! Για να αποφευχθεί αυτός ο *λογικός κύκλος* είτε πρέπει να αποδειχθεί με άλλον τρόπο η μονοτονία της συνάρτησης (θα το αποφύγουμε) είτε πρέπει να αποδειχθεί με άλλον τρόπο το όριο. Ιδού μία (έγκυρη!) απόδειξη του $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.
Γνωρίζουμε το όριο ακολουθίας: $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$. Από αυτό εύκολα παίρνουμε και τα (επίσης, όρια ακολουθιών)

$$(1 + \tfrac{1}{n+1})^n = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \to \tfrac{e}{1} = e, \qquad (1 + \tfrac{1}{n})^{n+1} = (1 + \tfrac{1}{n})^n(1 + \tfrac{1}{n}) \to e\,1 = e.$$

Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$e - \epsilon < (1 + \tfrac{1}{n+1})^n < e + \epsilon, \qquad e - \epsilon < (1 + \tfrac{1}{n})^{n+1} < e + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε (όχι κατ' ανάγκη φυσικό) $x > n_0$ ισχύει $[x] \geq n_0$ οπότε

$$e - \epsilon < \big(1 + \tfrac{1}{[x]+1}\big)^{[x]} \leq (1 + \tfrac{1}{x})^x \leq \big(1 + \tfrac{1}{[x]}\big)^{[x]+1} < e + \epsilon.$$

Άρα για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$ ώστε να ισχύει $e-\epsilon < (1+\frac{1}{x})^x < e+\epsilon$ ή, ισοδύναμα, $\big|(1 + \frac{1}{x})^x - e\big| < \epsilon$ για κάθε $x > n_0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Ασκήσεις.

4.9.1. (i) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$.
(ii) Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{t}{x})^x = e^t$ για κάθε t, διακρίνοντας περιπτώσεις: $t > 0$, $t = 0$, $t < 0$.
(iii) Χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.10, αποδείξτε τα παρακάτω όρια ακολουθιών

$$(1 + \tfrac{3}{2n})^{4n} \to e^6, \quad (1 - \tfrac{1}{4n})^n \to e^{-1/4}, \quad (1 + \tfrac{1}{n^2})^{n^2} \to e, \quad (1 + \tfrac{3}{2\sqrt{n}})^{\sqrt{n}/4} \to e^{3/8}.$$

4.9.2. Έστω $a > 1$. Από την ισότητα $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ και χρησιμοποιώντας την μονοτονία της $y = \log_a x$, βρείτε με δεύτερο τρόπο τα γνωστά όρια $\lim_{x\to+\infty} \log_a x$ και $\lim_{x\to 0+} \log_a x$.

4.9.3. Έστω $a > 1$. Από την ισότητα $a^{x+1} = aa^x$ και χρησιμοποιώντας την μονοτονία της $y = a^x$ βρείτε με δεύτερο τρόπο τα γνωστά όρια $\lim_{x\to\pm\infty} a^x$.

4.9.4. (i) Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και ότι ισχύει $f(\sqrt{n}) \geq \log n$ για κάθε *φυσικό* n. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(ii) Έστω ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε *φυσικό* n. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.

Κεφάλαιο 5

Συνεχείς συναρτήσεις.

5.1 Ορισμοί, παραδείγματα.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής** *στο ξ (ή στο ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi \leq x < \xi + \delta$ ή την $\xi - \delta < x \leq \xi$).*

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για να είναι η f συνεχής στο ξ απαραίτητη προϋπόθεση είναι το ξ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι η διατύπωση του ορισμού της συνέχειας (με τα ϵ και δ) μοιάζει με την διατύπωση του ορισμού του ορίου. Ας διερευνήσουμε αυτήν την ομοιότητα διακρίνοντας δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν το ξ είναι ή δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A .

Έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τώρα, έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ και ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Αντιστρόφως, έστω ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Όταν $x = \xi$ τότε αυτομάτως ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο ξ. Βλέπουμε λοιπόν ότι η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Τα προηγούμενα μπορούμε να τα επαναλάβουμε και όταν το ξ είναι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Στην περίπτωση αυτή η f είναι συνεχής στο ξ από τα δεξιά του αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$. Μαζί με το ανάλογο αποτέλεσμα για την αριστερή μεριά του ξ, συγκεντρώνουμε όσα είπαμε ως εξής:

Έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A (ή από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A). Τότε η f είναι συνεχής στο ξ (ή στο ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του) αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) \qquad \big(\text{ ή } \quad \lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi) \quad \text{ ή } \quad \lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)\ \big).$$

Τώρα, έστω ότι το $\xi \in A$ *δεν* είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε να μην υπάρχει κανένα $x \in A$ τέτοιο ώστε $0 < |x - \xi| < \delta$ ή με άλλα λόγια να μην υπάρχει κανένα $x \in A$ στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το ξ είναι **μεμονωμένο σημείο** του A. Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε ϵ και παρατηρούμε ότι το μοναδικό $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ είναι το $x = \xi$ και ότι για αυτό το $x = \xi$ ισχύει αυτομάτως $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ και άρα η f είναι συνεχής στο ξ.

Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι όταν το ξ δεν είναι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A τότε η f είναι συνεχής στο ξ από τα δεξιά του. Πάλι, μαζί με το ανάλογο αποτέλεσμα για την αριστερή μεριά του ξ, έχουμε:

Έστω ότι το $\xi \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A (ή από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του μεμονωμένο σημείο του A). Τότε η f είναι αυτομάτως συνεχής στο ξ (ή στο ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του).

Ας επιστρέψουμε στην περίπτωση κατά την οποία το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν το ξ είναι από τα δεξιά του *και* από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A τότε, λόγω της πρότασης 4.1 και βάσει όσων είπαμε προηγουμένως για την σχέση ανάμεσα στο όριο στο ξ και στην συνέχεια στο ξ, συμπεραίνουμε ότι *η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο ξ από τα δεξιά του και από τα αριστερά του*. Ομοίως, αν το ξ είναι από τα δεξιά του αλλά όχι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A τότε *η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο ξ από τα δεξιά του*. Τέλος, αν το ξ είναι από τα αριστερά του αλλά όχι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A τότε *η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο ξ από τα αριστερά του*.

Παράδειγμα. Η $y = x^2$ είναι συνεχής στο 3 διότι $\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = 3^2$.

Παράδειγμα. Η $y = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 0 διότι $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.

Παράδειγμα. Η $y = [x]$ ταυτίζεται με την $y = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$ οπότε $\lim_{x\to 1-}[x] = \lim_{x\to 1-} 0 = 0 \neq 1 = [1]$. Επίσης, η $y = [x]$ ταυτίζεται με την $y = 1$ στο διάστημα $(1, 2)$ οπότε $\lim_{x\to 1+}[x] = \lim_{x\to 1+} 1 = 1 = [1]$. Άρα η $y = [x]$ είναι συνεχής στο 1 από τα δεξιά του αλλά όχι από τα αριστερά του και επομένως δεν είναι συνεχής στο 1.
Η $y = [x]$ ταυτίζεται με την $y = 0$ στην ένωση $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ οπότε $\lim_{x\to 1/2}[x] = \lim_{x\to 1/2} 0 = 0 = [\frac{1}{2}]$. Άρα η $y = [x]$ είναι συνεχής στο $\frac{1}{2}$.

Παράδειγμα. Η $y = \sqrt{-x^2(x + 1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1] \cup \{0\}$. Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης οπότε αυτή είναι συνεχής στο 0.

Παράδειγμα. Η σταθερή συνάρτηση $y = c$ είναι συνεχής σε κάθε ξ. Πράγματι, $\lim_{x\to\xi} c = c$ οπότε το όριο στο ξ είναι ίσο με την τιμή στον ξ.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$ λέμε ότι η f είναι* **συνεχής στο πεδίο ορισμού της** *ή απλώς* **συνεχής**.

Παράδειγμα. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$ είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} p(x) = p(\xi)$.

Παράδειγμα. Κάθε ρητή συνάρτηση $y = r(x) = \frac{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ το οποίο δεν είναι ρίζα του παρονομαστή, δηλαδή για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ισχύει $\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi)$.

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι συνεχείς διότι για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi$.
Ομοίως, οι $y = \tan x$ και $y = \cot x$ είναι συνεχείς: για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού τους, δηλαδή για κάθε $\xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ για την πρώτη και για κάθε $\xi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ για την δεύτερη, ισχύει $\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi$.

Παράδειγμα. Η $y = x^a$ είναι συνεχής: ισχύει $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$ για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή (i) για κάθε ξ αν το a είναι ακέραιος (εξαιρείται το $\xi = 0$ αν $a \leq 0$) και (ii) για κάθε $\xi \geq 0$ αν το a δεν είναι ακέραιος (εξαιρείται πάλι το $\xi = 0$ αν $a < 0$).

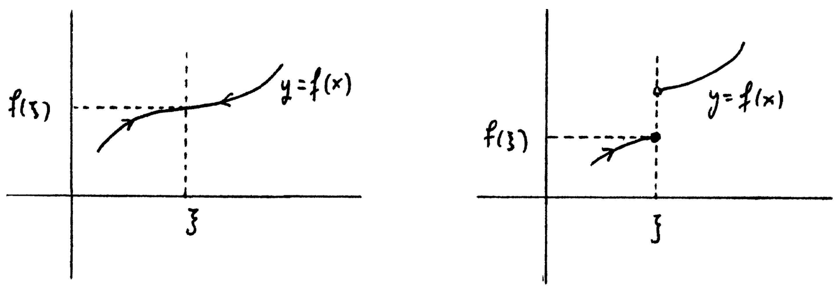
Παράδειγμα. Αν $a > 0$ η $y = a^x$ είναι συνεχής αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Παράδειγμα. Για κάθε $a > 0$, $a \neq 1$ η $y = \log_a x$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $\xi > 0$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

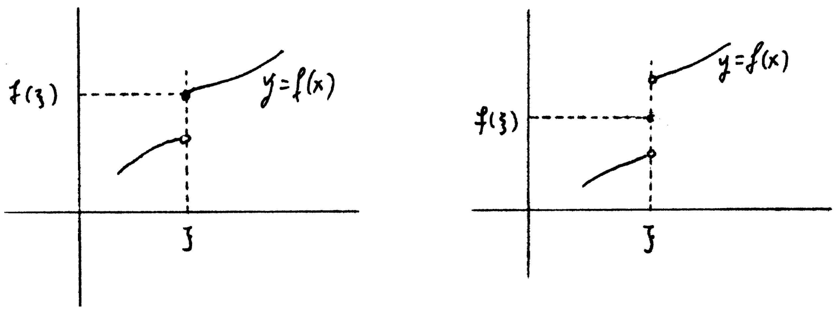
Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$. Αν η $f : A' \to \mathbb{R}$, δηλαδή η f με πεδίο ορισμού το υποσύνολο A' του αρχικού πεδίου ορισμού A, είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A'$ λέμε ότι η f είναι* **συνεχής** *στο A'.*

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x < 0 \\ x+1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Η f είναι ασυνεχής στο 0. Πράγματι: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 \neq 1 = f(0)$ οπότε η f δεν είναι συνεχής στο 0 από τα αριστερά του, ενώ $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x+1) = 1 = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0 από τα δεξιά του. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού στο $[0, +\infty)$ η συνάρτηση έχει τύπο $y = f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[0, +\infty)$. Πράγματι, για κάθε $\xi \in [0, +\infty)$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}(x+1) = \xi + 1 = f(\xi)$. Προσέξτε ότι αφού περιορίσαμε το πεδίο ορισμού στο $[0, +\infty)$ το όριο στο 0 είναι το ίδιο με το δεξιό πλευρικό όριο στο 0 διότι δεν έχει νόημα το αριστερό πλευρικό όριο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Στο γράφημα μίας συνάρτησης φαίνεται καθαρά αν αυτή είναι συνεχής ή όχι σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Για να είναι η f συνεχής στο ξ πρέπει καθώς το x πλησιάζει το ξ το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ να πλησιάζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$. Με απλοϊκότερα (και κάπως ασαφή) λόγια: η συνάρτηση είναι συνεχής στο ξ αν το γράφημά της δεν "σπάει" στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ ή, αλλιώς, είναι "συνεχές" στο σημείο αυτό. (Δείτε όμως και την άσκηση 5.1.10.)



Σχήμα 5.1: Συνεχής στον ξ και συνεχής στον ξ από τα αριστερά του.



Σχήμα 5.2: Συνεχής στον ξ από τα δεξιά του και ασυνεχής στον ξ.

Ένας άλλος τρόπος να "δούμε" την έννοια της συνέχειας στο γράφημα της f είναι ο εξής. Το να είναι συνεχής η $y = f(x)$ στο ξ ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης το οποίο ανήκει στο $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ του σημείου $(x, f(x))$ βρίσκεται ανάμεσα στα ύψη $f(\xi) - \epsilon$ και $f(\xi) + \epsilon$ ή, με άλλα λόγια, *το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο* $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ *βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες* $y=f(\xi)-\epsilon$ *και* $y=f(\xi)+\epsilon$*.*

Ασκήσεις.

5.1.1. Αποδείξτε ότι οι $y=x$, $y=2x-3$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ είναι συνεχείς στο 1 με τον ορισμό της συνέχειας με τα ϵ και δ.

5.1.2. Αποδείξτε ότι είναι συνεχείς στο 0 οι συναρτήσεις:

$$y=\begin{cases}(\sin x)/x & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases}\qquad y=\begin{cases}(1-\cos x)/x^2 & \text{αν } x\neq 0\\ 1/2 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

5.1.3. Βρείτε σε ποιά σημεία είναι συνεχείς ή συνεχείς από δεξιά ή συνεχείς από αριστερά οι συναρτήσεις:

$$y=\begin{cases}x & \text{αν } x\leq 0\\ 1/x & \text{αν } x>0\end{cases}\qquad y=\begin{cases}x^2 & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases}\qquad y=\begin{cases}x^2+1 & \text{αν } x<0\\ \sqrt{x+1} & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

5.1.4. Βρείτε σε ποιά σημεία είναι συνεχείς ή συνεχείς από δεξιά ή συνεχείς από αριστερά οι συναρτήσεις:

$$y=[x],\quad y=[2x],\quad y=x-[x],\quad y=x-[x]-\tfrac{1}{2},\quad y=\big|x-[x]-\tfrac{1}{2}\big|.$$

5.1.5. Σε ποιά σημεία είναι συνεχής η $y=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$; Σχεδιάστε το γράφημά της.

5.1.6. Έστω συνεχής $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $a<\xi<b$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο ξ τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi+h)-f(\xi-h))=0$. Αποδείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρήστε την συνάρτηση $y=f(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x=0\\ 0 & \text{αν } x\neq 0\end{cases}$ και $\xi=0$.

5.1.7. Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$ και έστω $g(x)=(x-\xi)f(x)$ για κάθε $x\in A$. Αν η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στο ξ.

5.1.8. Αποδείξτε ότι η $y=\begin{cases}1 & \text{αν } x\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{Z}$ και συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Αποδείξτε ότι η $y=\begin{cases}1 & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε x.
Αποδείξτε ότι η $y=\begin{cases}0 & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ x & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε κάθε $x\neq 0$.

5.1.9. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$. Αν υπάρχουν $M\geq 0$ και $\rho>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ για κάθε $x\in A$ τότε λέμε ότι η f είναι **Hölder συνεχής** στο ξ. Η μεγαλύτερη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το ρ ονομάζεται **εκθέτης Hölder** της συνάρτησης στο ξ. Στην ειδική περίπτωση $\rho=1$ η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στο ξ.
(i) Αν η f είναι Hölder συνεχής στο ξ αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο ξ.
(ii) Αποδείξτε ότι οι

$$y=x,\quad y=|x|,\quad y=\cos x,\quad y=\sin x,\quad y=\sqrt{|x|},\quad y=x\sqrt{|x|}$$

είναι Hölder συνεχείς στο 0 και βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες Hölder. Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις είναι Hölder συνεχείς και σε κάθε $\xi\neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες Hölder. Παρατηρήστε ότι για τις δυο τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο εκθέτης Hölder για το $\xi=0$ και άλλος για το οποιοδήποτε $\xi\neq 0$.

5.1.10. Είπαμε ότι το να είναι η f συνεχής στο ξ σημαίνει ότι το γράφημά της *δεν "σπάει" στο σημείο* $(\xi, f(\xi))$ *ή, αλλιώς, είναι "συνεχές" στο σημείο αυτό*. Αυτή η διατύπωση είναι κάπως ασαφής και οπωσδήποτε όχι τόσο απλή όσο φαίνεται. Δείτε το εξής παράδειγμα.

Θεωρήστε την συνάρτηση $y = \begin{cases} x(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Δείτε και την άσκηση 3.3.1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής σε άπειρα σημεία τα οποία αποτελούν όρους ακολουθίας η οποία συγκλίνει στο 0.

5.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

Όλα τα αποτελέσματα παρακάτω θα διατυπώνονται για την περίπτωση της συνέχειας σε κάποιο σημείο. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις της πλευρικής συνέχειας.

Πρόταση 5.1. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ. Αν η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι συνεχής στο ξ τότε και η άλλη είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ. Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 4.2, ισχύει $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και, τέλος, επειδή $f(\xi) = g(\xi)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. Άρα η g είναι συνεχής στο ξ. □

Παράδειγμα. Οι $y = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \leq 1 \\ x-1 & \text{αν } 1 < x \end{cases}$ και $y = x + 1$ ταυτίζονται στο $(-\infty, 1]$. Η δεύτερη είναι συνεχής στο 1 και επομένως είναι και συνεχής στο 1 από τα αριστερά του. Άρα και η πρώτη συνάρτηση είναι συνεχής στο 1 από τα αριστερά του.

Παράδειγμα. Οι $y = x^2$ και $y = \begin{cases} 1+x & \text{αν } |x| \geq 10^{-10} \\ x^2 & \text{αν } |x| < 10^{-10} \end{cases}$ ταυτίζονται στο $(-10^{-10}, 10^{-10})$. Η πρώτη είναι συνεχής στο 0 οπότε και η δεύτερη είναι συνεχής στο 0.

Πρόταση 5.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο ξ τότε και οι $f \pm g$, fg και $|f|$ είναι συνεχείς στο ξ. Αν επιπλέον ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A τότε όλες οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως συνεχείς στο ξ. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A τότε όλα τα αποτελέσματα είναι απλά πορίσματα των κανόνων αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου, λόγου και απόλυτης τιμής για όρια συναρτήσεων. Για παράδειγμα, από την συνέχεια των συναρτήσεων στο ξ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ οπότε

$$\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x) = f(\xi) + g(\xi)$$

και επομένως η $f + g$ είναι συνεχής στο ξ. □

Παράδειγμα. $y = \frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της διότι καθεμία από τις $y = \sqrt{x}$, $y = e^x$, $y = \log x$ και $y = x - 2x^2$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Η τομή όλων των πεδίων ορισμού είναι το $(0, +\infty)$ και από αυτό πρέπει να εξαιρέσουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$ στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή σε κάθε $\xi \geq 0$ το οποίο είναι $\neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Πρόταση 5.3. *Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in A$ και $\eta = f(\xi) \in B$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και αν η g είναι συνεχής στο η τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο η, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε $y \in B$ το οποίο ικανοποιεί την $|y - \eta| < \delta'$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < \delta'$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Τώρα, για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - \eta| < \delta'$ και, επειδή $f(x) \in B$, συνεπάγεται $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Άρα ισχύει $|g(f(x)) - g(f(\xi))| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ. □

Η πρόταση 5.3 εξηγείται με την ακόλουθη "αλυσιδωτή διαδικασία": αν το x πλησιάζει το ξ τότε το $y = f(x)$ πλησιάζει το $f(\xi) = \eta$ οπότε και το $g(f(x)) = g(y)$ πλησιάζει το $g(\eta) = g(f(\xi))$. Άρα αν το x πλησιάζει το ξ τότε το $g(f(x))$ πλησιάζει το $g(f(\xi))$. Αυτό φυσικά θυμίζει τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής ή αντικατάστασης στο πλαίσιο της θεωρίας των ορίων.

Παράδειγμα. Η $z = \sin\sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$. Πράγματι, η $y = \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$ και η $z = \sin y$ είναι συνεχής στο $\eta = \sqrt{\xi}$.

Παράδειγμα. Το πεδίο ορισμού της $z = \sqrt{\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $[k2\pi, \pi + k2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ διότι σ' αυτά ακριβώς τα διαστήματα ισχύει $\sin x \geq 0$. Η $y = \sin x$ είναι συνεχής σε κάθε ξ το οποίο ανήκει σ' αυτά τα διαστήματα και η $z = \sqrt{y}$ είναι συνεχής στο αντίστοιχο $\eta = \sin\xi$ αφού αυτό είναι ≥ 0. Άρα η $z = \sqrt{\sin x}$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της.

Ένα θέμα παρεμφερές με την πρόταση 5.3 αλλά και (ίσως πιο πολύ) με τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής ή αντικατάστασης στο πλαίσιο της θεωρίας των ορίων είναι ο υπολογισμός του ορίου συνάρτησης $z = g(f(x))$ η οποία είναι σύνθεση δύο συναρτήσεων, της $y = f(x)$ και της $z = g(y)$, στην περίπτωση κατά την οποία γνωρίζουμε ότι το $\lim_x f(x)$ είναι κάποιος συγκεκριμένος *αριθμός* η και η $z = g(y)$ είναι *συνεχής* στο η. Για παράδειγμα, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και έστω ότι η $z = g(y)$ είναι συνεχής στο η. Τότε έχουμε την "*αλυσιδωτή διαδικασία*": αν το x πλησιάζει το ξ και είναι $\neq \xi$ τότε το $y = f(x)$ πλησιάζει το η οπότε το $g(f(x)) = g(y)$ πλησιάζει το $g(\eta)$. Συμπεραίνουμε τότε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = g(\eta)$.

Κανόνας αλλαγής μεταβλητής ή κανόνας αντικατάστασης, II. *Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ και έστω $\lim_x f(x) = \eta \in B$. Αν (i) η g είναι συνεχής στο η ή (ii) ισχύει $f(x) \geq \eta$ κοντά στο όριο του x και η g είναι συνεχής στο η από τα δεξιά του ή (iii) ισχύει $f(x) \leq \eta$ κοντά στο όριο του x και η g είναι συνεχής στο η από τα αριστερά του, τότε $\lim_x g(f(x)) = g(\eta)$.*

Απόδειξη. Θα δούμε την απόδειξη στην περίπτωση κατά την οποία είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και η g είναι συνεχής στο η. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = g(\eta)$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε $y \in B$ το οποίο ικανοποιεί την $|y - \eta| < \delta'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \delta'$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Τότε για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \delta'$ και, επειδή $f(x) \in B$, ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Επομένως για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Άρα $\lim_x g(f(x)) = g(\eta)$. □

Παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$.
Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x} + 1$ οπότε η συνάρτηση $z = \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$ γράφεται $z = \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5}$. Είναι $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x} + 1) = 1$ και η $z = \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5}$ είναι συνεχής στο 1. Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5} = \frac{1^4}{1^8+1^{13}+5} = \frac{1}{7}$.

Παράδειγμα. Θα βρούμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)/(x^2+x+1)}+(x-1)^2/(x^2+x+1)^2+(x-1)/(x^2+x+1)+1}{3(x-1)^4/(x^2+x+1)^4+2\sqrt{(x-1)/(x^2+x+1)}+1}$.
Η $z = \frac{\sqrt{(x-1)/(x^2+x+1)}+(x-1)^2/(x^2+x+1)^2+(x-1)/(x^2+x+1)+1}{3(x-1)^4/(x^2+x+1)^4+2\sqrt{(x-1)/(x^2+x+1)}+1}$ με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ γράφεται $z = \frac{\sqrt{y}+y^2+y+1}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = 0$ και ότι η $z = \frac{\sqrt{y}+y^2+y+1}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$ είναι συνεχής στο 0.
Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)/(x^2+x+1)}+(x-1)^2/(x^2+x+1)^2+(x-1)/(x^2+x+1)+1}{3(x-1)^4/(x^2+x+1)^4+2\sqrt{(x-1)/(x^2+x+1)}+1} = \frac{\sqrt{0}+0^2+0+1}{3\cdot 0^4+2\sqrt{0}+1} = 1$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \big((\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3\big)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\sin x}{x}$ η $z = (\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3$ γίνεται $z = y^3 + y^2 + 3$. Έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και ότι η $z = y^3 + y^2 + 3$ είναι συνεχής στο 0.
Άρα $\lim_{x\to+\infty} \big((\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3\big) = 0^3 + 0^2 + 3 = 3$.

Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στους δυο κανόνες αλλαγής μεταβλητής. Κατ' αρχάς στον πρώτο κανόνα το όριο της f δεν χρειάζεται να είναι αριθμός αλλά μπορεί να είναι και $\pm\infty$, ενώ στον δεύτερο κανόνα το όριο της f πρέπει να είναι αριθμός. Επομένως ο δεύτερος κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο δεύτερο παράδειγμα μετά τον πρώτο κανόνα. Κατόπιν, αν $\lim_x f(x) = \eta$, στον πρώτο κανόνα μία από τις υποθέσεις είναι ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο όριο του x. Αυτή η υπόθεση δεν υπάρχει στον δεύτερο κανόνα αλλά υπάρχει η υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στο η. Αυτά συνεπάγονται ότι ο δεύτερος κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο τρίτο παράδειγμα μετά τον πρώτο κανόνα και ο πρώτος κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο τρίτο παράδειγμα μετά τον δεύτερο κανόνα (διότι δεν υπάρχει κανένα a ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ για κάθε $x > a$).

Ακολουθούν μερικές πολύ απλές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες αντίστοιχων απλών ιδιοτήτων του ορίου.

Πρόταση 5.4. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ και αν οι f, g είναι συνεχείς στο ξ τότε $f(\xi) \leq g(\xi)$.*

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 4.6 σε συνδυασμό με τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. □

Παράδειγμα. Αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(x) \leq \sin x$ για κάθε x στο $(0, \frac{\pi}{4})$ και ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο 0 από τα δεξιά του, τότε, επειδή και η $y = \sin x$ είναι συνεχής στο 0 από τα δεξιά του, συμπεραίνουμε ότι $f(0) \leq \sin 0 = 0$.

Παράδειγμα. Αν ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ κοντά στο ξ και η f είναι συνεχής στο ξ τότε $l \leq f(\xi) \leq u$.

Πρόταση 5.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ.*
(i) Αν $f(\xi) < u$ τότε ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ.
(ii) Αν $f(\xi) > l$ τότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της πρότασης 4.7 σε συνδυασμό με το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Παράδειγμα. Η $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{3}$ και η τιμή της στο $\frac{\pi}{3}$ είναι ίση με $2 + \sqrt{3}$. Επειδή $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο διάστημα (a, b) με $a < \frac{\pi}{3} < b$ ώστε να ισχύει $3 < \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} < 4$ για κάθε x στο διάστημα αυτό. Αυτό είναι συνέπεια της πρότασης 5.5 με $l = 3$ και $u = 4$.

Πρόταση 5.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στο ξ τότε είναι φραγμένη κοντά στο ξ.*

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή της πρότασης 4.8 ή της πρότασης 5.5. □

Ασκήσεις.

5.2.1. Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς οι $y = \frac{x^2 \log x + xe^x}{(\sin x - \cos x)^2}$, $y = x^{-3/4} \log^2 x \frac{\tan x - \cot x}{\sin^2 x - 2\sin x + 1}$;

5.2.2. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σημεία συνέχειας των συναρτήσεων

$$y = \sin(x^2), \quad y = \log(x^2+2), \quad y = e^{x^3-2x}, \quad y = 2^{2^x}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}, \quad y = \sin(\log x),$$

$$y = \sqrt{1-\cos x}, \quad y = [x^2], \quad y = [\sqrt{x}], \quad y = (x^2-5x+6)^{\sqrt{2}}, \quad y = \log(x^2-5x+6),$$

$$y = \log(\log x), \quad y = \log(\sin x), \quad y = \log(1-\cos x), \quad y = \tan(\sin x - \cos x).$$

5.2.3. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο ξ αποδείξτε ότι η $f^g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)^{g(x)}$ είναι συνεχής στο ξ.
Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα.
(i) $y = x^x$ στο $(0, +\infty)$.
(ii) $y = (x^2-3)^{\frac{x-2}{x+2}}$ στο $(-\infty, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.
(iii) $y = (2-x^2)^{\log x}$ στο $(0, \sqrt{2})$.
(iv) $y = \log^{\log x} x$ στο $(1, +\infty)$.

5.2.4. Βρείτε με αλλαγές μεταβλητής τα

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{[x]/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to-\infty} \cos\frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 1} e^{(x-1)\sin\frac{1}{x-1}}.$$

Σε ποιά από αυτά τα όρια μπορεί να εφαρμοστεί ο πρώτος κανόνας αλλαγής μεταβλητής;

5.2.5. Αποδείξτε ότι υπάρχει $b > 0$ ώστε για κάθε $x \in [0, b)$ να ισχύει $\frac{7}{8} < \frac{\log(1+x) + \cos\sqrt{x}}{e^x + \sin\sqrt{x}} < \frac{11}{12}$.

5.2.6. Αποδείξτε ότι υπάρχουν a, b ώστε $a < 1 < b$ και ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{x^8 - x^5 + 3}{4x^4 - 1} < \frac{3}{2}$ και $\frac{1}{6} < \frac{e^x - 2^x}{7x - 3} < \frac{1}{4}$ για κάθε $x \in (a, b)$.

5.2.7. Έστω $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ και $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) + f(\xi-h) - 2f(\xi)}{|h|} = m \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο ξ.

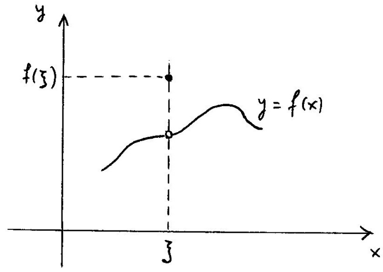
5.3 Είδη ασυνεχειών.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συνέχειας** της f. Υπενθυμίζουμε ότι αν το ξ είναι σημείο συνέχειας της f τότε το ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Αν το ξ *ανήκει* στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και η f δεν είναι συνεχής στο ξ τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο ασυνέχειας** της f ή ότι η f **έχει (ή παρουσιάζει) ασυνέχεια** στο ξ. Θα κατατάξουμε τώρα τα σημεία ασυνέχειας μίας συνάρτησης σε διάφορες κατηγορίες.

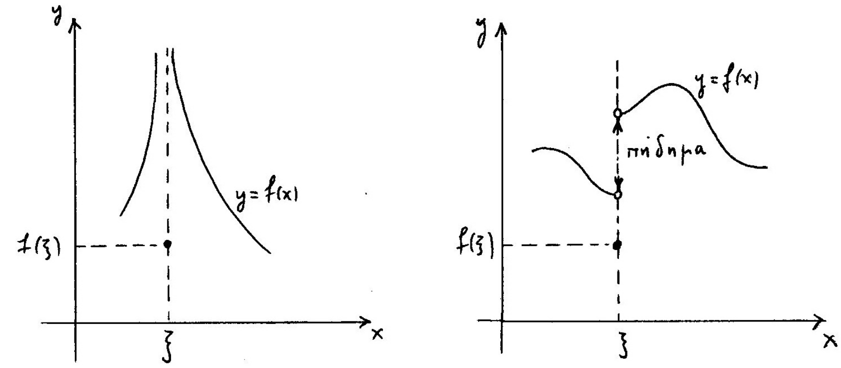
Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι αριθμός $\neq f(\xi)$ λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **άρσιμη ασυνέχεια** *στο ξ.*

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της f στο ξ (και μόνο στο ξ) έτσι ώστε να δημιουργηθεί μία νέα συνάρτηση η οποία να είναι συνεχής στο ξ. Πιο συγκεκριμένα, ας ορίσουμε την συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$ και $g(\xi) = \lim_{x\to\xi} f(x)$. Τότε η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f και διαφέρει από την f μόνο στο ξ. Αν τώρα υπολογίσουμε το όριο της g στο ξ βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = g(\xi)$. (Η πρώτη ισότητα ισχύει διότι ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$ και η δεύτερη ισότητα ισχύει από τον ορισμό του $g(\xi)$.) Άρα η g είναι συνεχής στο ξ.



Σχήμα 5.3: Άρσιμη ασυνέχεια στον ξ.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στο 0 διότι το $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(x+1) = 1$ είναι αριθμός διαφορετικός από την τιμή $f(0) = 0$. Αν αλλάξουμε την τιμή της $y = f(x)$ στο 0 και την ορίσουμε να είναι ίση με το όριο στο 0, δηλαδή ίση με 1 (αντί 0), η συνάρτηση μετατρέπεται στην $y = g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$, δηλαδή στην $y = x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο 0.



Σχήμα 5.4: Ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ: όριο $= +\infty$ ή πήδημα.

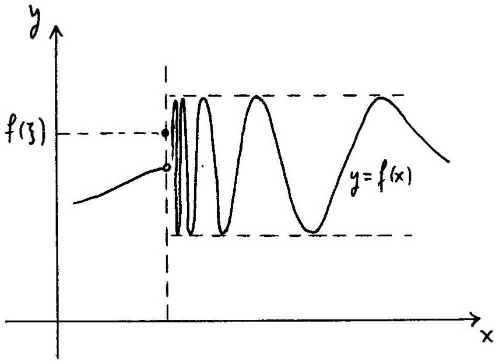
Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν (i) υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ αλλά δεν είναι αριθμός, δηλαδή είναι $+\infty$ ή $-\infty$, ή αν (ii) υπάρχουν τα $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **ασυνέχεια πρώτου είδους** *στο ξ. Στην περίπτωση (ii) η διαφορά $\lim_{x \to \xi+} f(x) - \lim_{x \to \xi-} f(x)$ η οποία είναι $\neq 0$ ονομάζεται* **άλμα** *της f στο ξ.*

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 0 διότι $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Το ίδιο ισχύει και για την $y = f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{-x} & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 0 διότι $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$ οπότε $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$. Το άλμα στο 0 είναι ίσο με $+\infty - (-\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \geq 0 \\ x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 0 διότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$ οπότε $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$. Το άλμα στο 0 είναι ίσο με $1 - 0 = 1$.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** *ή* **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **ασυνέχεια δεύτερου είδους** *ή* **ουσιώδη ασυνέχεια** *στο ξ.*



Σχήμα 5.5: Ασυνέχεια δεύτερου είδους στον ξ: δεν υπάρχει το όριο από δεξιά.

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο 0 διότι το $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty} \sin t$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο 0 διότι δεν υπάρχει κανένα από τα $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \sin t$.

Άρα τα σημεία ασυνέχειας μίας συνάρτησης κατατάσσονται σε σημεία άρσιμης ασυνέχειας, σε σημεία ασυνέχειας πρώτου είδους και σε σημεία ασυνέχειας δεύτερου είδους.

Είναι φανερό ότι αν το ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της f τότε το σημείο αυτό δεν μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$ της συνάρτησης στο ξ. Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση κατά την οποία το ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας.

Αξίζει να δούμε πιο προσεκτικά την περίπτωση κατά την οποία η f είναι *αύξουσα* σε κάποιο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$. Τότε η f είναι προφανώς αύξουσα στο υποδιάστημα (a, ξ) και άνω φραγμένη στο υποδιάστημα αυτό αφού ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 4.1, υπάρχει το πλευρικό όριο $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι αριθμός και μάλιστα $\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi)$. Ομοίως, η f είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο υποδιάστημα (ξ, b) αφού ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Άρα υπάρχει το πλευρικό όριο $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι αριθμός $\geq f(\xi)$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι αυτά είναι αριθμοί και ότι ισχύει $\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x)$. Τώρα διακρίνουμε ακριβώς δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ οπότε αυτομάτως συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και άρα η f είναι συνεχής στο ξ. Στην δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$ οπότε η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο ξ με *θετικό* άλμα $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x) > 0$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και όταν η f είναι φθίνουσα στο διάστημα (a,b) και $a<\xi<b$. Απλώς τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\xi-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Συνοψίζουμε:

Αν η f είναι μονότονη στο διάστημα (a,b) και $a<\xi<b$ τότε η f είτε (i) είναι συνεχής στο ξ είτε (ii) παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο ξ με θετικό άλμα αν είναι αύξουσα και αρνητικό άλμα αν είναι φθίνουσα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μία συνάρτηση η οποία είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα δεν παρουσιάζει άρσιμες ασυνέχειες ούτε ασυνέχειες δεύτερου είδους στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος.

Ασκήσεις.

5.3.1. Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας το οποίο παρουσιάζει στο 0 καθεμιά από τις συναρτήσεις

$$y=\begin{cases}|x|/x & \text{αν } x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases} \qquad y=\begin{cases}x^2 & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases} \qquad y=\begin{cases}1/|x| & \text{αν } x\neq 0\\ -1 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x & \text{αν } x\leq 0\\ 1/x & \text{αν } x>0\end{cases} \qquad y=\begin{cases}\sin(1/x) & \text{αν } x>0\\ 1 & \text{αν } x\leq 0\end{cases} \qquad y=\begin{cases}(\tan x)/x & \text{αν } x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Σε περίπτωση άρσιμης ασυνέχειας αλλάξτε την τιμή της συνάρτησης στο 0 ώστε αυτή να γίνει συνεχής στο 0. Σε περίπτωση άλματος υπολογίστε την τιμή του.

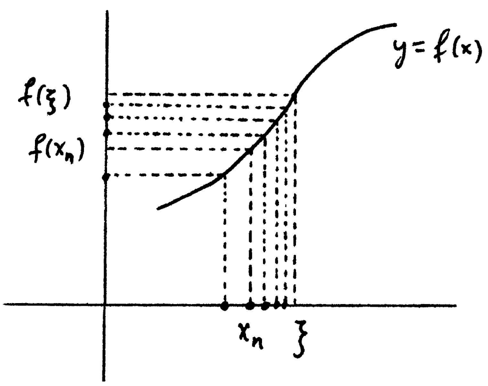
5.3.2. Χαρακτηρίστε τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων των ασκήσεων 5.1.3 και 5.1.4.

5.3.3. Αποδείξτε ότι η $y=\log[x]$ είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[1,+\infty)$ και υπολογίστε τα άλματά της σε όλα τα σημεία ασυνέχειάς της.

5.3.4. Αν η f είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα αποδείξτε ότι σε οποιοδήποτε άκρο (στο οποίο είναι ορισμένη) του διαστήματος η f είτε είναι συνεχής είτε παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια.

5.4 Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ. Έστω και μία ακολουθία (x_n) όλοι οι όροι της οποίας περιέχονται στο πεδίο ορισμού της f και η οποία συγκλίνει στο ξ. Δηλαδή $x_n\to\xi$. Τότε έχουμε



Σχήμα 5.6: $\lim x_n=\xi$ συνεπάγεται $\lim f(x_n)=f(\xi)$.

την εξής "*αλυσιδωτή διαδικασία*": αν το n τείνει στο $+\infty$ τότε το x_n πλησιάζει το ξ οπότε το $f(x_n)$ πλησιάζει το $f(\xi)$. Καταλήγουμε επομένως στο παρακάτω συμπέρασμα.

Πρόταση 5.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, έστω $\xi \in A$ και έστω ότι $x_n \in A$ για κάθε $n \in N$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και $x_n \to \xi$ τότε $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Κατόπιν, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - \xi| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $f(x_n) \to f(\xi)$. □

Παράδειγμα. Αν η $y = p(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση και $x_n \to \xi$ τότε $p(x_n) \to p(\xi)$.

Παράδειγμα. Αν η $y = r(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, αν κανένας όρος της (x_n) ούτε το ξ δεν μηδενίζει τον παρονομαστή της συνάρτησης και αν $x_n \to \xi$ τότε $r(x_n) \to r(\xi)$.

Παράδειγμα. Αν $x_n \to \xi$ τότε $\cos x_n \to \cos \xi$ και $\sin x_n \to \sin \xi$.

Παράδειγμα. Αν $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $\xi > 0$ και αν $x_n \to \xi$ τότε $x_n^a \to \xi^a$.

Παράδειγμα. Αν $a > 0$ και $x_n \to \xi$ τότε $a^{x_n} \to a^{\xi}$.
Ως ειδική περίπτωση, με $x_n = \frac{1}{n}$ για κάθε φυσικό n, ξαναβρίσκουμε το εξής πολύ χρήσιμο όριο ακολουθίας.

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad \text{αν } a > 0.$$

Παράδειγμα. Αν $x_n > 0$ για κάθε n, αν $\xi > 0$ και αν $x_n \to \xi$ τότε $\log_a x_n \to \log_a \xi$.

Οι δυο σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται σε μία:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n).$$

Φυσικά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η "εναλλαγή" ανάμεσα στο σύμβολο $\lim_{n\to+\infty}$ του ορίου ακολουθίας και στο σύμβολο f της συνάρτησης ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο ξ, δηλαδή στο όριο της ακολουθίας.

Η πρόταση 5.7 (για ακολουθίες και συνεχείς συναρτήσεις) σχετίζεται με την πρόταση 4.10 (για ακολουθίες και όρια συναρτήσεων). Παρατηρήστε ότι, ενώ στην πρόταση 5.7 δεν χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας (πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης), στην πρόταση 4.10 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα. Επειδή η $y = \sin x$ είναι συνεχής στο 0 και $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, συνεπάγεται ότι $\sin\big(\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big) \to \sin 0 = 0$. Με άλλη διατύπωση:

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\big(\tfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big) = \sin\big(\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big) = \sin 0 = 0.$$

Παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 4.10 διότι ισχύει $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ για άπειρα n.

Ασκήσεις.

5.4.1. Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:

$$\tan \tfrac{1}{2^n}, \quad 2^{(3n^4+n-4)/(n^4+n^3+4)} \sin(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n^2}), \quad n \log(1 + \tfrac{1}{n}), \quad (\tfrac{n^2+3}{4n^2-3})^{3/2} \log(\cos \tfrac{1}{n}).$$

5.5 Τα τρία βασικά θεωρήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων: το θεώρημα φραγμένης συνάρτησης, το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Οι αποδείξεις τους δεν θα γίνουν σ' αυτές τις σημειώσεις.

Θεώρημα φραγμένης συνάρτησης. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.*

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του θεωρήματος φραγμένης συνάρτησης είναι το εξής. Το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου και, καθώς το x διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ από μικρότερες προς μεγαλύτερες τιμές, το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά με αυξομειώσεις του ύψους του. Είναι φανερό από το σχήμα του γραφήματος (όποιο κι αν είναι αυτό) ότι το ύψος του σημείου $(x, f(x))$, δηλαδή το $f(x)$, *δεν μπορεί να γίνει ούτε απεριόριστα μεγάλο θετικό ούτε απεριόριστα μεγάλο αρνητικό.*

Το συμπέρασμα του θεωρήματος φραγμένης συνάρτησης ισχύει *γενικά* αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με την συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} 1/x & \text{αν } -1 \leq x < 0 \text{ ή } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και δεν είναι φραγμένη στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} x & \text{αν } -1 \leq x < 0 \text{ ή } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και είναι φραγμένη στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$ και δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$.

Παράδειγμα. Η $y = x$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$ και είναι φραγμένη στο $(-1, 1)$.

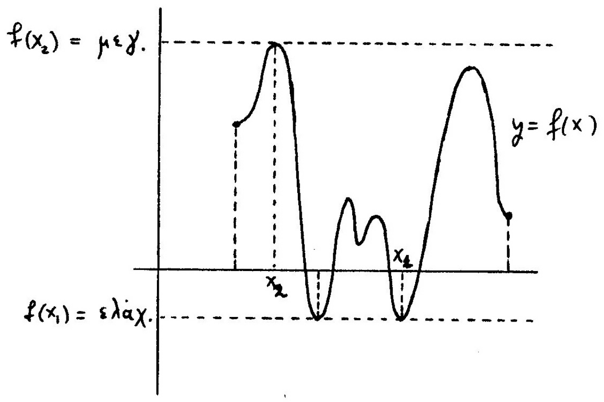
Παράδειγμα. Η $y = x$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και δεν είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$.

Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Όπως παρατηρήσαμε και για το θεώρημα φραγμένης συνάρτησης, το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου. Είναι, επίσης, φανερό από το σχήμα του γραφήματος (όποιο κι αν είναι αυτό) ότι *υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του, $(\zeta, f(\zeta))$, με ελάχιστο ύψος, δηλαδή "πυθμένας", και τουλάχιστον ένα σημείο του, $(\eta, f(\eta))$, με μέγιστο ύψος, δηλαδή "κορυφή".* Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο ζ στο οποίο η f έχει ελάχιστη τιμή και κάποιο η στο οποίο η f έχει μέγιστη τιμή. Οι αριθμοί ζ, η μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα ζ στα οποία η f έχει την (ίδια) ελάχιστη τιμή της και περισσότερα από ένα η στα οποία η f έχει την (ίδια) μέγιστη τιμή της.

Το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των ζ, η στα οποία η συνάρτηση έχει την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και της



Σχήμα 5.7: Το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής.

μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα γνωρίσουμε διάφορες μεθόδους αργότερα στο πλαίσιο της έννοιας της *παραγώγου*.

Το συμπέρασμα του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής ισχύει *γενικά* αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με την συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} x+1 & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ x-1 & \text{αν } 0 < x \le 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1,1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} 0 & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1,1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα. Η $y = x$ είναι συνεχής στό διάστημα $(-1,1)$ και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

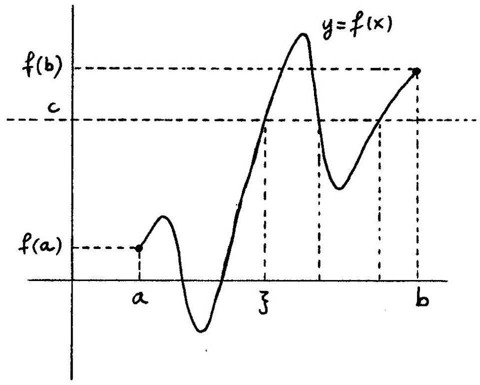
Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} x+2 & \text{αν } -2 < x < -1 \\ -x & \text{αν } -1 \le x \le 1 \\ x-2 & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-2,2)$ και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα. Η $y = x$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} 1/x & \text{αν } |x| > 1 \\ x & \text{αν } |x| \le 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε για κάθε c με την ιδιότητα $f(a) \le c \le f(b)$ ή $f(b) \le c \le f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = c$ ή, με άλλα λόγια, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει (τουλάχιστον μία) λύση $\xi \in [a,b]$.*

Αν $f(a) = f(b)$ τότε αναγκαστικά είναι $c = f(a) = f(b)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει δύο προφανείς λύσεις: τις $\xi = a$ και $\xi = b$. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $c = f(a)$ ή $c = f(b)$ η εξίσωση $f(x) = c$ έχει μία προφανή λύση: την $\xi = a$ ή την $\xi = b$, αντιστοίχως. Επομένως μόνο αν υποθέσουμε ότι $f(a) < c < f(b)$ ή $f(b) < c < f(a)$ το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής αποκτά πραγματικό ενδιαφέρον. Φυσικά, σ' αυτήν την περίπτωση κανένα από τα a, b δεν είναι λύση της $f(x) = c$ οπότε το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση στο *ανοικτό* διάστημα (a, b).



Σχήμα 5.8: Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

Ας δούμε, όπως και στα προηγούμενα δύο θεωρήματα, το γεωμετρικό περιεχόμενο του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Η ευθεία $y = c$ είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα σε ύψος c από αυτόν. Τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχουν ύψη $f(a)$ και $f(b)$, αντιστοίχως, και επομένως βρίσκονται το ένα πάνω από την ευθεία $y = c$ και το άλλο κάτω από αυτήν. Άρα *το γράφημα της συνεχούς $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ το οποίο είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ αναγκαστικά θα έχει τουλάχιστον ένα σημείο κοινό με την ευθεία $y = c$.* Αν το κοινό αυτό σημείο είναι το (ξ, η) τότε $\eta = f(\xi)$ διότι το σημείο ανήκει στο γράφημα της f και, επίσης, $\eta = c$ διότι το σημείο ανήκει στην ευθεία $y = c$. Άρα $f(\xi) = c$.

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δεν υποδεικνύει *πώς* λύνουμε την εξίσωση $f(x) = c$, δηλαδή πώς υπολογίζουμε το ξ. Πρέπει, επίσης, να πούμε ότι ο αριθμός ξ μπορεί να μην είναι μοναδικός. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα ξ στα οποία η f έχει την ίδια τιμή c.

Το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής ισχύει *γενικά* αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με την συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και ο αριθμός $\frac{1}{2}$, όπως και κάθε αριθμός c γνησίως ανάμεσα στα $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, δεν είναι τιμή της συνάρτησης.

Παράδειγμα. Η $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \leq x < 1/2 \\ x - (1/2) & \text{αν } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, 1]$, δεν είναι συνεχής στο $\frac{1}{2}$ και κάθε αριθμός c ανάμεσα στα $f(0) = 0$ και $f(1) = \frac{1}{2}$ είναι τιμή της συνάρτησης.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

Παράδειγμα. Θα δούμε ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Θεωρούμε την $y = \cos x - x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και το διάστημα είναι κλειστό και φραγμένο. Οι τιμές στα άκρα είναι $\cos 0 - 0 = 1$ και $\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ και ο αριθμός 0 είναι ανάμεσα στις δυο αυτές τιμές. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε να ισχύει $\cos \xi - \xi = 0$ ή, ισοδύναμα, $\cos \xi = \xi$. Είναι μάλιστα φανερό ότι $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση. Τώρα δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε μόνοι μας δύο αριθμούς a και b με $a < b$ ώστε το 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές της συνάρτησης $y = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$ στους αριθμούς a και b ή, με άλλα λόγια, οι αριθμοί $a^3 - 5a^2 - 18a + 7$ και $b^3 - 5b^2 - 18b + 7$ να είναι ετερόσημοι. Δοκιμάζουμε λίγο-πολύ στην τύχη: αν $a = 0$ τότε $a^3 - 5a^2 - 18a + 7 = 7$, ενώ αν $b = 1$ τότε $b^3 - 5b^2 - 18b + 7 = -15$. Άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = 0$.
Στο παράδειγμα αυτό έχουμε, όπως είδαμε, ελευθερία επιλογής του διαστήματος στο οποίο εφαρμόζουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Θα δούμε μάλιστα ότι δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται ως εξής. Επειδή $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 5x^2 - 18x + 7) = -\infty$, υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $a < 0$ (δεν είναι ανάγκη να δώσουμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε να ισχύει $a^3 - 5a^2 - 18a + 7 < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 5x^2 - 18x + 7) = +\infty$, υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $b > 0$ ώστε να ισχύει $b^3 - 5b^2 - 18b + 7 > 0$. Επομένως υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = 0$.
Το παράδειγμα αυτό θα γενικευτεί στην επόμενη ενότητα.

Θα δούμε τώρα δύο τυπικές εφαρμογές του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

Θεώρημα του Bolzano. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f(a)f(b) < 0$ τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Από την $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$ και το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. □

Ιδιότητα σταθερού προσήμου. *Έστω διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο I και αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ τότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό τότε πρέπει να υπάρχει $a \in I$ με $f(a) < 0$ και $b \in I$ με $f(b) > 0$. Επειδή το I είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ με άκρα a και b είναι υποσύνολο του I και επομένως η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $\xi \in [b, a]$ και επομένως $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = 0$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα είτε θα ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε θα ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$. □

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της ιδιότητας σταθερού προσήμου είναι ότι *αν μία καμπύλη δεν τέμνει τον x-άξονα τότε είτε θα είναι ολόκληρη πάνω από τον x-άξονα είτε θα είναι ολόκληρη κάτω από τον x-άξονα.*

Ασκήσεις.

5.5.1. Έχουν οι παρακάτω συναρτήσεις μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$;

$$y = x^2, \quad y = x^2 - x + 1, \quad y = \sin(\pi x), \quad y = \cot(\pi x), \quad y = \sin(2\pi x).$$

5.5.2. (i) Αποδείξτε ότι η $y = \sin \frac{1}{x}$ έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$ και ότι παίρνει και την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του διαστήματος αυτού. Ποιά είναι αυτά τα σημεία;
(ii) Αποδείξτε ότι οι $y = x \sin x$ και $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

5.5.3. Αποδείξτε ότι η $y = \frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

5.5.4. Δύο (σημειακά) οχήματα κινούνται πάνω σε ένα επίπεδο από την χρονική στιγμή $t = a$ μέχρι την χρονική στιγμή $t = b$ ($a < b$). Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποια χρονική στιγμή ανάμεσα στις $t = a$ και $t = b$ κατά την οποία η απόσταση ανάμεσα στα δύο οχήματα γίνεται μέγιστη και κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση ανάμεσά τους γίνεται ελάχιστη.

5.5.5. (i) Έστω συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > l$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > l$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.
(ii) Έστω συνεχείς $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

5.5.6. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

5.5.7. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

5.5.8. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, 3)$.

5.5.9. Έστω $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = 2(x - a_1)\cdots(x - a_n) + 3(x - b_1)\cdots(x - b_n)$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες.

5.5.10. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.5.11. Έστω συνεχής $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $f(\xi) = \xi^2$.

5.5.12. Έστω συνεχείς $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $f(a) < g(a)$ και $f(b) > g(b)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

5.5.13. Έστω συνεχής $f : [a, b] \to [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

5.5.14. Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $f(\xi) = \xi$.

5.5.15. Δύο (σημειακά) οχήματα M και N κινούνται με τελείως αυθαίρετο τρόπο πάνω σε μία οριζόντια ευθεία. Την χρονική στιγμή $t = a$ το M είναι δεξιότερα του N ενώ την χρονική στιγμή $t = b$ το N είναι δεξιότερα του M. Αποδείξτε ότι σε κάποια ενδιάμεση χρονική στιγμή τα δύο οχήματα θα βρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο.

5.5.16. Έστω διάστημα I και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ένα-προς-ένα στο I αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονη στο I.

5.5.17. Έστω διάστημα I και συνεχείς $f, g : I \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in I$.
Έστω, επιπλέον, και συνεχής $h : I \to \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in I$ ισχύει $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

5.5.18. (i) Έστω διάστημα I και συνεχείς $f, g : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x)^2 = f(x)^2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in I$.
(ii) Έστω υποδιάστημα I του $[0, +\infty)$ ή του $(-\infty, 0]$ και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = |x|$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = \sqrt{|x|}$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{|x|}$ για κάθε $x \in I$.

Πόσες συνεχείς συναρτήσεις $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ υπάρχουν οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα $f(x)^2 = x^2$ για κάθε x;
(iii) Έστω υποδιάστημα I του $[-1, 1]$ και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in I$.

5.5.19. (i) Γενικεύστε την άσκηση 5.5.17 ως εξής.
Έστω διάστημα I και συνεχείς $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι σε κάθε $x \in I$ οι n αυτές συναρτήσεις έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τι συμπεραίνετε σχετικά με την διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;
Έστω, επιπλέον, και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της f είναι ίση με την τιμή (στο ίδιο x) μίας από τις n αρχικές συναρτήσεις. Τι συμπεραίνετε για την σχέση της f με τις $f_1, \ldots, f_n$;
(ii) Έστω υποδιάστημα I του $[0, 1]$ ή του $[1, +\infty)$ και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $(f(x) - x)(f(x) - x^2)(f(x) - x^3) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = x^3$ για κάθε $x \in I$.
Αν $I = [0, +\infty)$ τότε (με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις) ποιές είναι οι δυνατότητες για την f;

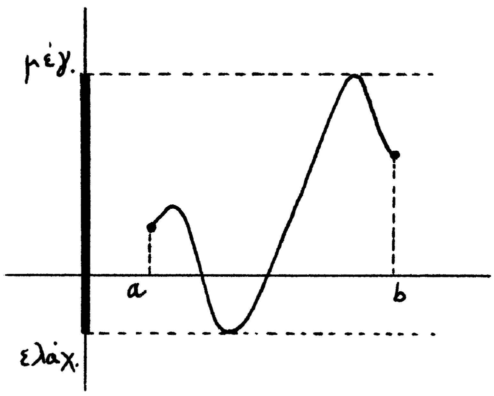
5.5.20. Έστω συνεχής $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) > \lim_{x \to a} f(x)$ και $f(x_0) > \lim_{x \to b} f(x)$ τότε αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b).

5.6 Το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης f αφού αυτό μας δίνει την δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για κάποιο συγκεκριμένο c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει λύση ή όχι. Στην ενότητα αυτή θα δούμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή (τουλάχιστο θεωρητικά) λύση.

Πρόταση 5.8. *Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα I τότε το σύνολο τιμών της (το οποίο αντιστοιχεί στο I) είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο I.*

Απόδειξη. Έστω συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής συνεπάγεται



Σχήμα 5.9: Σύνολο τιμών = [ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή].

ότι υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \le f(x) \le f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Συμβολίζουμε $l = f(\zeta)$, $u = f(\eta)$ την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$ και τότε προφανώς κάθε

τιμή της f ανήκει στο διάστημα $[l, u]$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $[l, u]$.
Αντιστρόφως, έστω $c \in [l, u]$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα $[\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$ το οποίο είναι υποσύνολο του $[a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$ και το c είναι ανάμεσα στις τιμές $l = f(\zeta)$ και $u = f(\eta)$, υπάρχει $\xi \in [\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$ και επομένως $\xi \in [a, b]$ ώστε $c = f(\xi)$. Άρα κάθε $c \in [l, u]$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε το διάστημα $[l, u]$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f.
Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ακριβώς το διάστημα $[l, u]$. □

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα αρκεί μόνο να υπολογίσουμε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο κεφάλαιο 6 θα γνωρίσουμε, με την βοήθεια των παραγώγων, μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παράδειγμα. Η $y = x^2$ είναι αύξουσα στο $[1, 4]$ οπότε η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα αυτό είναι το $1^2 = 1$ και η μέγιστη τιμή της είναι το $4^2 = 16$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[1, 4]$ είναι το διάστημα $[1, 16]$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 3]$ οπότε η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα αυτό είναι το $\frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι το $\frac{1}{1/2} = 2$. Επομένως το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι το διάστημα $[\frac{1}{3}, 2]$.

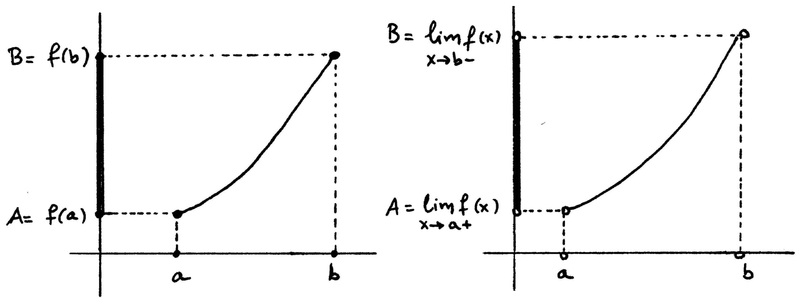
Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = x^2 - 6x + 5$ στο διάστημα $[-1, 6]$. Η συνάρτηση γράφεται $y = (x-3)^2 - 4$ οπότε είναι φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και αύξουσα στο $[3, 6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο $[-1, 6]$ είναι το $3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$ και η μέγιστη τιμή της είναι το μεγαλύτερο από τα $(-1)^2 - 6(-1) + 5 = 12$ και $6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 5$, δηλαδή το 12. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-1, 6]$ είναι το $[-4, 12]$. Ειδικώτερα: το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-1, 3]$ είναι το $[-4, 12]$ και το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[3, 6]$ είναι το $[-4, 5]$.

Μπορεί να δοθεί πλήρης περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης *συνεχούς σε διάστημα* οποιουδήποτε τύπου. Θα περιοριστούμε στην σημαντική ειδική περίπτωση συνάρτησης η οποία εκτός από συνεχής είναι *και γνησίως μονότονη σε διάστημα* οποιουδήποτε τύπου. Η περίπτωση αυτή είναι σημαντική διότι με τις μεθόδους τις οποίες θα γνωρίσουμε στο κεφάλαιο 6 μπορούμε να χωρίσουμε τα πεδία ορισμού των περισσοτέρων συναρτήσεων οι οποίες εμφανίζονται στην πράξη σε διαστήματα στα οποία αυτές είναι γνησίως μονότονες.

Πριν διατυπώσουμε την πρόταση 5.9 ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το θεώρημα 4.1, αν μία συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα τότε υπάρχουν τα πλευρικά όριά της και στα δύο άκρα του διαστήματος: το αριστερό πλευρικό όριο στο δεξιό άκρο και το δεξιό πλευρικό όριο στο αριστερό άκρο.

Πρόταση 5.9. *(i) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = [a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = [A, B]$ όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$.*
(ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο ανοικτό διάστημα I. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το ανοικτό διάστημα J με άκρα τα πλευρικά όρια της f στα άκρα του I (με την ίδια διάταξη).
(iii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο διάστημα I το οποίο περιέχει μόνο το ένα από τα δύο άκρα του. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα J με άκρα την τιμή της συνάρτησης στο άκρο το οποίο ανήκει στο I και το πλευρικό όριο της συνάρτησης στα άκρο το οποίο δεν ανήκει στο I (με την ίδια διάταξη).
Τα συμπεράσματα των (i), (ii) και (iii) ισχύουν και στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα I. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα του διαστήματος J αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (i) πρέπει να είναι $J = [B, A]$ αντί $J = [A, B]$.

Απόδειξη. (i) Απλή εφαρμογή της πρότασης 5.8 διότι η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$ είναι το $B = f(b)$ και η ελάχιστη τιμή της είναι το $A = f(a)$.
(ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b) και $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ και $\lim_{x\to b-} f(x) = B$. Εννοείται ότι το a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$ και το b μπορεί να εί-



Σχήμα 5.10: Σύνολο τιμών γνησίως αύξουσας συνεχούς συνάρτησης.

ναι αριθμός ή $+\infty$. Τα ίδια ισχύουν και για τα A και B, αντιστοίχως.
Έστω $x \in (a, b)$. Θεωρούμε x' ώστε $a < x' < x$ και, επειδή για κάθε x'' το οποίο ικανοποιεί την $a < x'' < x' < x$ ισχύει $f(x'') < f(x') < f(x)$, συνεπάγεται $A = \lim_{x''\to a+} f(x'') \leq f(x')$ και επομένως $A < f(x)$. Κατόπιν, θεωρούμε x' ώστε $x < x' < b$ και, επειδή για κάθε x'' το οποίο ικανοποιεί την $x < x' < x'' < b$ ισχύει $f(x) < f(x') < f(x'')$, συνεπάγεται $f(x') \leq \lim_{x''\to b-} f(x'') = B$ και επομένως $f(x) < B$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε τιμή της f ανήκει στο διάστημα (A, B), δηλαδή ότι το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του (A, B).
Αντιστρόφως, έστω $c \in (A, B)$, δηλαδή $A < c < B$. Από την πρόταση 4.7 συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < c$ κοντά στο a και $c < f(x)$ κοντά στο b. Άρα υπάρχει κάποιο $a' \in (a, b)$ ώστε $f(a') < c$ και κάποιο $b' \in (a, b)$ ώστε $c < f(b')$. Τώρα, η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a', b']$ οπότε, ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, το c είναι τιμή της f στο $[a', b']$ και επομένως στο (a, b). Άρα το διάστημα (A, B) είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f.
Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το (A, B).
(iii) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και $f(a) = A$ και $\lim_{x\to b-} f(x) = B$.
Αν $x \in [a, b)$, δηλαδή $a \leq x < b$, αποδεικνύουμε όπως πριν ότι $A \leq f(x) < B$ και επομένως το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του διαστήματος $[A, B)$.
Αντιστρόφως, αν $c \in [A, B)$, δηλαδή $f(a) = A \leq c < B$, τότε βλέπουμε όπως πριν ότι υπάρχει κάποιο $b' \in [a, b)$ ώστε $c < f(b')$. Από την $f(a) \leq c < f(b')$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι το c είναι τιμή της f στο $[a, b']$ και επομένως στο $[a, b)$. Άρα το διάστημα $[A, B)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f.
Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το $[A, B)$.
Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$. Τέλος, οι αλλαγές οι οποίες πρέπει να γίνουν στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς. □

Παράδειγμα. Έστω η $y = 2x^2 + 1$ στο διάστημα $(1, 3)$. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1, 3)$ και $\lim_{x\to 1+}(2x^2 + 1) = 3$ και $\lim_{x\to 3-}(2x^2 + 1) = 19$. Επομένως το σύνολο τιμών της $y = 2x^2 + 1$ το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $(1, 3)$ είναι το διάστημα $(3, 19)$.

Παράδειγμα. Έστω η $y = \frac{x+1}{x-1}$ στο $(1, +\infty)$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $\lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Άρα το σύνολο τιμών της $y = \frac{x+1}{x-1}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(1, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$.

Παράδειγμα. Έστω η $y = \log\frac{1}{x}$ στο $[1, +\infty)$. Είναι $\log\frac{1}{1} = 0$ και $\lim_{x\to +\infty} \log\frac{1}{x} = -\infty$. Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$, το σύνολο τιμών της το οποίο αντιστοιχεί στο $[1, +\infty)$ είναι το $(-\infty, 0]$.

Παράδειγμα. Έστω η $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ στο $(-\infty, +\infty)$. Τότε $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$ και, επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

Παράδειγμα. Αν το n είναι φυσικός τότε για κάθε $b \geq 0$ υπάρχει $a \geq 0$ ώστε $a^n = b$.
Η αιτιολόγηση είναι απλή. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$ και είναι $0^n = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της $y = x^n$ το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[0, +\infty)$. Επομένως κάθε $b \geq 0$ είναι τιμή της συνάρτησης στο $[0, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει $a \geq 0$ ώστε $a^n = b$.
Στο παράδειγμα αυτό φαίνεται σαν να έγινε μία απόδειξη του θεωρήματος 1.2 το οποίο δεν είχαμε αποδείξει στο κεφάλαιο 1. Θα προσέξατε όμως ότι στην τωρινή απόδειξη χρησιμοποιήθηκε (εμμέσως) το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής το οποίο *δεν* έχουμε αποδείξει.

Τέλος, θα δούμε και την σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης η οποία δεν εμπίπτει στις προηγούμενες δυο προτάσεις.

Πρόταση 5.10. *(i) Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ περιττού βαθμού (δηλαδή $a_{2n-1} \neq 0$). Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.*
(ii) Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$ άρτιου βαθμού (δηλαδή $a_{2n} \neq 0$). Αν $a_{2n} > 0$ τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, και το σύνολο τιμών της είναι το $[m, +\infty)$. Αν $a_{2n} < 0$ τότε η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, έστω m, και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, m]$.

Απόδειξη. (i) Έστω $a_{2n-1} > 0$ οπότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Θεωρούμε οποιοδήποτε c και από την πρόταση 4.7 συνεπάγεται ότι ισχύει $p(x) < c$ κοντά στο $-\infty$ και $c < p(x)$ κοντά στο $+\infty$. Άρα υπάρχει κάποιο μεγάλο $a < 0$ και κάποιο μεγάλο $b > 0$ ώστε $p(a) < c < p(b)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι το c είναι τιμή της συνάρτησης. Άρα το $(-\infty, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της $y = p(x)$ και, επειδή το αντίστροφο είναι προφανές, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $a_{2n-1} < 0$ τότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη μένει ουσιαστικά ίδια.
(ii) Έστω $a_{2n} > 0$. Θεωρούμε οποιαδήποτε τιμή της $y = p(x)$, για παράδειγμα την $p(0) = a_0$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, από την πρόταση 4.7 συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο μεγάλο $a < 0$ ώστε να ισχύει $p(x) > a_0$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και κάποιο μεγάλο $b > 0$ ώστε να ισχύει $p(x) > a_0$ για κάθε $x \in (b, +\infty)$. Η $y = p(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, στο διάστημα αυτό. Μάλιστα επειδή $0 \in [a, b]$, είναι $m \leq p(0) = a_0$ και επομένως ισχύει $m \leq p(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και για κάθε $x \in (b, +\infty)$. Συμπεραίνουμε ότι το m είναι η ελάχιστη τιμή της $y = p(x)$ σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και όχι μόνο στο $[a, b]$. Άρα το σύνολο τιμών της $y = p(x)$ είναι υποσύνολο του $[m, +\infty)$. Αντιστρόφως, έστω $c \in [m, +\infty)$, δηλαδή $m \leq c < +\infty$. Το m είναι τιμή της $y = p(x)$, δηλαδή υπάρχει κάποιο x_0 ώστε $p(x_0) = m$. Από την πρόταση 4.7, επειδή $c < \lim_{x\to+\infty} p(x)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο μεγάλο $b' > 0$ ώστε $c < p(b')$. Άρα το c είναι ανάμεσα στις τιμές $p(x_0)$ και $p(b')$ της συνάρτησης οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής το c ανήκει στο σύνολο τιμών της. Άρα το $[m, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών και συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών είναι το $[m, +\infty)$.
Αν $a_{2n} < 0$ η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα. Το σύνολο τιμών της $y = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ διότι είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού.

Παράδειγμα. Η $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$ γράφεται $y = x^2(x - 2)^2 - 7$. Άρα ισχύει $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7 \geq -7$ για κάθε x και, επιπλέον, το -7 είναι τιμή της συνάρτησης για $x = 0$ και $x = 2$. Επομένως, το -7 είναι η ελάχιστη τιμή της $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$ και, επειδή αυτή είναι πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού, το σύνολο τιμών της είναι το $[-7, +\infty)$.

Ας επαναλάβουμε ότι στο κεφάλαιο 6 θα γνωρίσουμε μεθόδους υπολογισμού των ελάχιστων και των μέγιστων τιμών αρκετών συναρτήσεων.

Ας δούμε και ένα κάπως γενικότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.11. *Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα οποιουδήποτε τύπου τότε το σύνολο τιμών της είναι κι αυτό διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω διάστημα I και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $A = \{f(x) \,|\, x \in I\}$. Παίρνουμε δύο οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in A$ με $y_1 < y_2$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ ώστε $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. Παίρνουμε και οποιοδήποτε y_3 ώστε $y_1 < y_3 < y_2$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ περιέχεται ολόκληρο στο I οπότε η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_3 \in (x_1, x_2)$ ή (x_2, x_1) και επομένως $x_3 \in I$ ώστε $f(x_3) = y_3$. Άρα $y_3 \in A$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι για κάθε $y_1, y_2 \in A$ με $y_1 < y_2$ και για κάθε y_3 με $y_1 < y_3 < y_2$ ισχύει $y_3 \in A$. Με πιο απλά λόγια, το σύνολο A έχει την εξής ιδιότητα: αν δύο σημεία ανήκουν στο A τότε κάθε ενδιάμεσο σ' αυτά σημείο ανήκει επίσης στο A. Τότε είναι προφανές ότι το A είναι διάστημα. □

Ασκήσεις.

5.6.1. Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων;

$$y = -2x^3 + x^2 - 5x + 6, \quad y = x^4 - 2x^2 + 7, \quad y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1.$$

5.6.2. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$. Αν $a_0 a_N < 0$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $p(\xi) = 0$.

5.6.3. Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα. Η γνήσια μονοτονία (αν ισχύει) των συναρτήσεων πρέπει να αποδειχθεί με στοιχειώδη, φυσικά, τρόπο.
(i) $y = \sin x$ και $y = \cos(5x)$ στο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
(ii) $y = x + \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, -1]$, στο $[-1, 0)$, στο $(0, 1]$ και στο $[1, +\infty)$.
(iii) $y = e^x + x$ και $y = \frac{1}{1+e^{2x}}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

5.6.4. Αποδείξτε ότι η $y = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ και $(3, +\infty)$. Υπολογίστε το αντίστοιχο σύνολο τιμών της συνάρτησης για καθένα από τα διαστήματα αυτά. Πόσες ακριβώς λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε αριθμός; Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 5.5.8.

5.7 Αντίστροφες συναρτήσεις.

Γνωρίζουμε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη σε κάποιο διάστημα I τότε αυτή είναι προφανώς ένα-προς-ένα στο I και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. Επίσης, γνωρίζουμε ότι αν J είναι το σύνολο τιμών της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα I τότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το διάστημα I. Η πρόταση 5.10 δίνει πλήρη και λεπτομερή περιγραφή του συνόλου τιμών της f στην περίπτωση κατά την οποία αυτή, εκτός από γνησίως μονότονη, είναι και *συνεχής* στο διάστημα I. Συγκεκριμένα: τότε το σύνολο τιμών J είναι κι αυτό *διάστημα* και μάλιστα ίδιου τύπου με το I. Η πρόταση 5.12 η οποία ακολουθεί συμπληρώνει την πρόταση 5.10, αναφέροντας ότι η f^{-1} είναι κι αυτή *συνεχής* στο J.

Πρόταση 5.12. *(i) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = [a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = [A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$. Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$.*
(ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο ανοικτό διάστημα I. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το ανοικτό διάστημα J με άκρα τα πλευρικά όρια της f στα άκρα του I (με την ίδια διάταξη). Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J με σύνολο τιμών το I.

(iii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο διάστημα I το οποίο περιέχει μόνο το ένα από τα δύο άκρα του. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα J με άκρα την τιμή της f στο άκρο το οποίο ανήκει στο I και το πλευρικό όριο της f στα άκρο το οποίο δεν ανήκει στο I (με την ίδια διάταξη). Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J με σύνολο τιμών το I.
Τα συμπεράσματα των (i), (ii) και (iii) ισχύουν και στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα I. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα του διαστήματος J αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (i) πρέπει να είναι $J = [B, A]$ αντί $J = [A, B]$.

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε από την πρόταση 5.10 ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$ με $A = f(a)$ και $B = f(b)$ και επομένως ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$. Μένει να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in [A, B]$.
Έστω $\eta \in [A, B]$ και το αντίστοιχο $\xi = f^{-1}(\eta)$. Αν $A < \eta < B$ τότε $a < \xi < b$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θεωρούμε $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε $\xi - \epsilon \leq x_1 < \xi < x_2 \leq \xi + \epsilon$. Ορίζουμε τα $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$ οπότε $y_1 < \eta < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = \min\{\eta - y_1, y_2 - \eta\}$. Τότε για κάθε y το οποίο ικανοποιεί την $|y - \eta| < \delta$ ισχύει $y_1 \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq y_2$ οπότε $\xi - \epsilon \leq x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq \xi + \epsilon$ και επομένως $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| = |f^{-1}(y) - \xi| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο η.
Αν $\eta = A$, οπότε $\xi = f^{-1}(\eta) = a$, παίρνουμε πάλι οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θεωρούμε $x_2 \in [a, b]$ ώστε $a < x_2 \leq a + \epsilon$. Ορίζουμε το $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$, οπότε $A < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = y_2 - A$. Τότε για κάθε y το οποίο ικανοποιεί την $A \leq y < A + \delta = y_2$ συνεπάγεται $a = f^{-1}(A) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq a+\epsilon$ και επομένως $|f^{-1}(y)-f^{-1}(A)| = |f^{-1}(y)-a| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $\eta = A$.
Αν $\eta = B$ με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο η. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο $[A, B]$.
(ii)-(iii) Όπως στο (i), αποδεικνύουμε την συνέχεια της f^{-1} σε κάθε $\eta \in J$ επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους του (i). □

Παράδειγμα. Με στοιχειώδη τρόπο αποδεικνύεται ότι η $y = x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$.
Επειδή $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x^3 + x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$ (αυτό το γνωρίζαμε διότι η $y = x^3 + x$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού). Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
Παρατηρήστε ότι δεν είναι ανάγκη να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για να δούμε αν είναι συνεχής.

Παράδειγμα. Η $y = -xe^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Επειδή $-0e^0 + 1 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty}(-xe^x + 1) = -\infty$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1]$ και η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.
Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν είναι ανάγκη να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για να δούμε αν είναι συνεχής. Μάλιστα, τώρα είναι αδύνατο να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης αφού *δεν* λύνεται η εξίσωση $-xe^x + 1 = y$ με άγνωστο το x.

Ιδού και μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, το σύνολο τιμών της $y = e^x$ είναι το $(0, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή αυτή την οποία έχουμε ήδη συμβολίσει $x = \log y$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $x = \log y$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Είναι όμως ενδιαφέρον ότι *η συνέχεια της $x = \log y$ προκύπτει και ως άμεση συνέπεια της πρότασης 5.12*. Επίσης, ήδη γνωρίζουμε τα όρια $\lim_{y\to0+} \log y = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty$. Κι αυτά όμως προκύπτουν

ως άμεση συνέπεια της πρότασης 5.12. Πράγματι, επειδή η $x = \log y$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα πλευρικά όρια $\lim_{y\to 0+} \log y$ και $\lim_{y\to+\infty} \log y$. Επειδή όμως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$, προκύπτει ότι $\lim_{y\to 0+} \log y = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty$.

Παράδειγμα. Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό η συνάρτηση $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση, η οποία έχει τύπο $x = \begin{cases} \sqrt[n]{y} & \text{αν } y \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-y} & \text{αν } y < 0 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επίσης, επειδή η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα πλευρικά όρια $\lim_{y\to-\infty}(-\sqrt[n]{-y})$ και $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y}$. Επειδή όμως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$, αμέσως προκύπτει ότι $\lim_{y\to-\infty}(-\sqrt[n]{-y}) = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y} = +\infty$. (Φυσικά, το πρώτο όριο προκύπτει εύκολα από το δεύτερο με απλή αλλαγή μεταβλητής.)

Παράδειγμα. Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο η συνάρτηση $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Επειδή $0^n = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή η $x = \sqrt[n]{y}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Επίσης, επειδή η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα το $\sqrt[n]{0} = 0$ και το όριο $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y}$. Επειδή όμως το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$, αμέσως προκύπτει ότι $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y} = +\infty$.

Παράδειγμα. Έχουμε ήδη ορίσει τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, δηλαδή την τόξο συνημιτόνου, την τόξο ημιτόνου, την τόξο εφαπτομένης και την τόξο συνεφαπτομένης. Γνωρίζουμε επίσης τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους καθώς και την μονοτονία τους. Το ουσιαστικά νέο το οποίο προκύπτει ως συνέπεια της πρότασης 5.12 είναι η συνέχεια αυτών των συναρτήσεων.
(i) Η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$ και $\cos \pi = -1$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, \pi]$ είναι το $[-1, 1]$. Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση τόξο συνημιτόνου την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arccos y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.
(ii) Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ και $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο ημιτόνου την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arcsin y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(iii) Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Αφού $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο εφαπτομένης την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arctan y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Βρίσκουμε επίσης τα όρια:

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

(iv) Η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, \pi)$. Είναι $\lim_{x\to 0+} \cot x = +\infty$ και $\lim_{x\to\pi-} \cot x = -\infty$ οπότε το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, \pi)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση τόξο συνεφαπτομένης την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \operatorname{arccot} y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(0, \pi)$. Επίσης:

$$\lim_{y\to-\infty} \operatorname{arccot} y = \pi, \qquad \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arccot} y = 0.$$

Παράδειγμα. Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις, δηλαδή η τόξο υπερβολικού συνημιτόνου και η τόξο υπερβολικού ημιτόνου, έχουν ήδη οριστεί και έχουμε βρει τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους καθώς και την μονοτονία τους. Παρακάτω θα ορίσουμε και τις δύο άλλες αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις, την τόξο υπερβολικής εφαπτομένης και την τόξο υπερβολικής συνεφαπτομένης. Αυτό το οποίο θα προκύψει τώρα ως συνέπεια της πρότασης 5.12 είναι η συνέχεια όλων αυτών των συναρτήσεων. Προκύπτει επίσης ένας λιγότερο στοιχειώδης αλλά απλούστερος τρόπος υπολογισμού των συνόλων τιμών των τεσσάρων υπερβολικών συναρτήσεων.
(i) Η συνάρτηση $y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$. Επειδή $\cosh 0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty}\cosh x = +\infty$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[0,+\infty)$ είναι το $[1,+\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο υπερβολικού συνημιτόνου την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \operatorname{arccosh} y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[1,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$.
(ii) Η συνάρτηση $y = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\sinh x = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\sinh x = +\infty$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty,+\infty)$ είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο υπερβολικού ημιτόνου την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \operatorname{arcsinh} y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.
Η αλήθεια είναι ότι από τους τύπους $x = \operatorname{arccosh} y = \log(x+\sqrt{x^2-1})$ και $x = \operatorname{arcsinh} y = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ προκύπτει με δεύτερο τρόπο η συνέχεια των δύο αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.
Μέχρι τώρα η μόνη αναφορά την οποία έχουμε κάνει για τις επόμενες δύο συναρτήσεις είναι στην άσκηση 3.10.1.
(iii) Η συνάρτηση $y = \tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\tanh x = -1$ και $\lim_{x\to+\infty}\tanh x = 1$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty,+\infty)$ είναι το $(-1,1)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο υπερβολικής εφαπτομένης** την οποία συμβολίζουμε $x = \operatorname{arctanh} y$ και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-1,1)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.
(iv) Η συνάρτηση $y = \coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to0+}\coth x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\coth x = 1$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(0,+\infty)$ είναι το $(1,+\infty)$. Ομοίως, η $y = \coth x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty,0)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\coth x = -1$ και $\lim_{x\to0-}\coth x = -\infty$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty,0)$ είναι το $(-\infty,-1)$.
Άρα η $y = \coth x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι ένα-προς-ένα και έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο υπερβολικής συνεφαπτομένης** την οποία συμβολίζουμε $x = \operatorname{arccoth} y$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Η $x = \operatorname{arccoth} y$ είναι *συνεχής* στο πεδίο ορισμού της $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
Ειδικώτερα, η $x = \operatorname{arccoth} y$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1)$ του πεδίου ορισμού της με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.
Προσέξτε: η $x = \operatorname{arccoth} y$ *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ παρά το ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$.

Ασκήσεις.

5.7.1. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες, βρείτε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών και βγάλτε συμπεράσματα για τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις. Τέλος, βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων και ελέγξτε τα προηγούμενα συμπεράσματά σας.
(i) $y = x^2+2x$ στο $[0,1]$.
(ii) $y = \frac{1}{x}$ στο $(0,1]$.
(iii) $y = \frac{1}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$.

5.7.2. Αποδείξτε ότι
(i) $\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$ για κάθε $y \in (-1, 1)$.
(ii) $\operatorname{arccoth} y = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}$ για κάθε $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Παρατηρήστε ότι οι δυο συναρτήσεις $x = \operatorname{arctanh} y$ και $x = \operatorname{arccoth} y$ σχηματίζουν *μία* συνάρτηση με τύπο $x = \frac{1}{2} \log \left|\frac{y+1}{y-1}\right|$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Σχεδιάστε το γράφημά της και βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

5.7.3. Έστω η $y = f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{-1}(y) - \frac{1}{f^{-1}(y)} = 2y$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$.
Αν για κάποια συνάρτηση $x = h(y)$ συνεχή στο $(-\infty, +\infty)$, με μία τουλάχιστον *θετική* τιμή ισχύει $h(y) - \frac{1}{h(y)} = 2y$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$, αποδείξτε ότι $h(y) = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$.
Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την $y = f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0)$.
Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

5.7.4. Έστω η $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και επομένως η συνάρτηση δεν είναι ένα-προς-ένα.
Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, ότι το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $x = g_1(y)$ με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, ότι το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $x = g_2(y)$ με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, 1]$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $g_1(y) + \frac{1}{g_1(y)} = 2y = g_2(y) + \frac{1}{g_2(y)}$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$.
Αν για κάποια συνάρτηση $x = h(y)$ συνεχή στο $[1, +\infty)$ ισχύει $h(y) + \frac{1}{h(y)} = 2y$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(y) = g_1(y)$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$ είτε ισχύει $h(y) = g_2(y)$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$.
Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0)$.
Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

5.7.5. Έστω η $y = f(x) = x^3 - 3x$.
Αποδείξτε με στοιχειώδη τρόπο ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
Βρείτε τα σύνολα τιμών των περιορισμών $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και $y = f_3(x)$ της $y = f(x)$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ και $[1, +\infty)$, αντιστοίχως.
Τί γνωρίζουμε για τις $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και $y = f_3(x)$ σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;
Αν $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ και $x = g_3(y)$ είναι οι αντίστροφες των $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και $y = f_3(x)$, αντιστοίχως, τί γνωρίζουμε γι αυτές σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;
Αποδείξτε ότι αν $x = g(y)$ είναι οποιαδήποτε από τις $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ και $x = g_3(y)$ τότε ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.
Έστω διάστημα I και $x = g(y)$ συνεχής στο I με την ιδιότητα ότι ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2, +\infty)$ αποδείξτε ότι η $x = g(y)$ ταυτίζεται με την $x = g_3(y)$. Αν $I = (-\infty, 2]$ αποδείξτε ότι η $x = g(y)$ ταυτίζεται με την $x = g_1(y)$. Αν όμως $I = [-2, 2]$ αποδείξτε ότι η $x = g(y)$ ταυτίζεται στο I είτε με την $x = g_1(y)$ είτε με την $x = g_2(y)$ είτε με την $x = g_3(y)$.
Είναι οι $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ και $x = g_3(y)$ αλγεβρικές συναρτήσεις;
Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

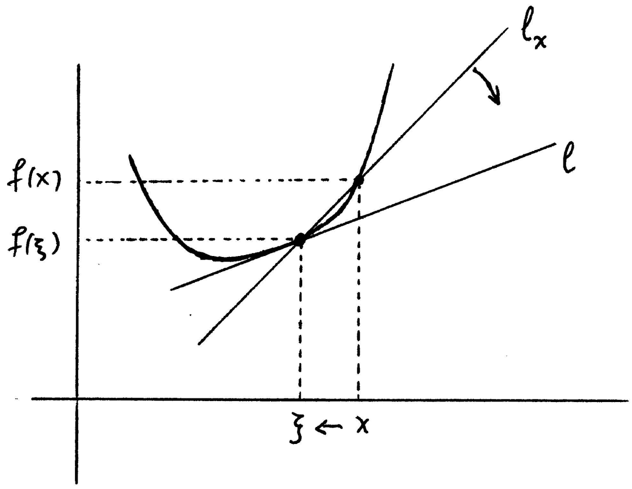
Κεφάλαιο 6

Παράγωγοι.

6.1 Ένα γεωμετρικό και δύο φυσικά προβλήματα.

Α. Εφαπτόμενη ευθεία.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία καμπύλη στο επίπεδο και ένα σημείο της καμπύλης και ότι θέ-



Σχήμα 6.1: Η l_x στρέφεται και τείνει να ταυτιστεί με την l.

λουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και εφάπτεται (στο ίδιο σημείο) στην καμπύλη. Περιορίζοντας λίγο το πρόβλημα, ας δεχτούμε ότι η καμπύλη είναι το γράφημα μίας συνάρτησης f ορισμένης σε κάποιο διάστημα (a, b) και ότι το σημείο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι το $(\xi, f(\xi))$ για κάποιο $\xi \in (a, b)$. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία, ας την ονομάσουμε l, περιέχει το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και για να την προσδιορίσουμε πρέπει να βρούμε είτε ένα ακόμη σημείο της είτε την κλίση της. Θεωρούμε τώρα ένα δεύτερο *μεταβλητό* σημείο $(x, f(x))$ της καμπύλης, όπου $x \neq \xi$. Όταν το x μεταβάλλεται πλησιάζοντας το ξ η αντίστοιχη *μεταβλητή* ευθεία, ας την ονομάσουμε l_x, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(x, f(x))$, περιστρέφεται γύρω από το σταθερό της σημείο $(\xi, f(\xi))$ ακολουθώντας την κίνηση του μεταβλητού σημείου $(x, f(x))$ και *τείνει να ταυτιστεί* με την εφαπτόμενη ευθεία l. Επομένως *η κλίση της μεταβλητής ευθείας l_x πλησιάζει την κλίση της σταθερής ευθείας l.* Όμως η κλίση της l_x είναι ίση με τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Άρα

$$\text{κλίση της } l = \lim_{x \to \xi} \text{κλίση της } l_x = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Β. Στιγμιαία ταχύτητα.

Ας υποθέσουμε ότι ένα όχημα κινείται πάνω σε έναν ευθύ δρόμο. Η ταχύτητά του δεν είναι γνωστή (το ταχύμετρο είναι χαλασμένο) αλλά το ρολόι δουλεύει καθώς και ο δείκτης χιλιομετρικών αποστάσεων. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του οχήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Αν μετρήσουμε τις αποστάσεις $s(t_1)$ και $s(t_2)$ του οχήματος από κάποιο σταθερό σημείο της ευθείας σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, τότε η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις δύο αυτές χρονικές στιγμές είναι ίση με $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$. Ποιά είναι όμως η *στιγμιαία* ταχύτητα σε μία χρονική στιγμή τ; Υποθέτουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα του οχήματος δεν παρουσιάζει απότομες αλλαγές σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα οπότε η στιγμιαία ταχύτητα την στιγμή τ μπορεί να προσεγγιστεί από την μέση ταχύτητα ανάμεσα στην στιγμή τ και σε μία πολύ κοντινή χρονική στιγμή t. Με άλλα λόγια, *η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις χρονικές στιγμές τ και t πλησιάζει την στιγμιαία ταχύτητα την χρονική στιγμή τ όταν το t πλησιάζει το τ*. Δηλαδή

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα την χρονική στιγμή } \tau = \lim_{t\to\tau} \frac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau}.$$

Γ. Πυκνότητα.

Η *γραμμική πυκνότητα* μίας ευθύγραμμης ράβδου (υποθέτοντας ότι σε κάθε σημείο της το πάχος της είναι αμελητέο) φτιαγμένης από ομοιογενές υλικό ορίζεται ως ο λόγος $d = \frac{m}{l}$, όπου m είναι η μάζα της ράβδου και l το μήκος της. Αν η ράβδος είναι φτιαγμένη από ανομοιογενές υλικό τότε το $d = \frac{m}{l}$ είναι η *μέση γραμμική πυκνότητα* της ράβδου. Αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο A της ράβδου και κάποιο πολύ κοντινό του σημείο B και μετρήσουμε την μέση γραμμική πυκνότητα του τμήματος της ράβδου ανάμεσα στα A και B τότε η *σημειακή γραμμική πυκνότητα* στο σημείο A είναι το όριο αυτής της μέσης γραμμικής πυκνότητας όταν το B πλησιάζει το A. Φυσικά, αν το υλικό της ράβδου είναι ομοιογενές τότε η σημειακή γραμμική πυκνότητα είναι ίδια σε κάθε σημείο της και ίση με την μέση γραμμική πυκνότητά της.

Για να εκφράσουμε με μαθηματικούς όρους την έννοια της σημειακής γραμμικής πυκνότητας, θεωρούμε την ευθεία της ράβδου ως x-άξονα και ταυτίζουμε την ράβδο με κάποιο διάστημα $[a, b]$. Κατόπιν συμβολίζουμε $m(x)$ την μάζα του τμήματος $[a, x]$ της ράβδου για $a \leq x \leq b$. Τότε η μέση γραμμική πυκνότητα του τμήματος $[\xi, x]$ της ράβδου είναι ίση με $\frac{m(x)-m(\xi)}{x-\xi}$ και άρα η σημειακή γραμμική πυκνότητα στο σημείο ξ είναι:

$$\text{σημειακή γραμμική πυκνότητα στο σημείο } \xi = \lim_{x\to\xi} \frac{m(x)-m(\xi)}{x-\xi}.$$

Ασκήσεις.

6.1.1. Γράψτε σε μορφή ορίου
(i) την στιγμιαία επιτάχυνση οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.
(ii) την στιγμιαία ταχύτητα και την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο και βρείτε την σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές ταχύτητες.

6.2 Παράγωγος.

Δεν είναι *σύμπτωση* η ομοιότητα ανάμεσα στον τύπο της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας, στον τύπο της στιγμιαίας ταχύτητας και στον τύπο της σημειακής γραμμικής πυκνότητας. Τα προβλήματα είναι διαφορετικά αλλά η έννοια η οποία κρύβεται πίσω από αυτά είναι κοινή: **ρυθμός μεταβολής**, του ύψους $f(x)$ ως προς την οριζόντια μετατόπιση x στο πρώτο πρόβλημα, της απόστασης $s(t)$ ως προς τον χρόνο t στο δεύτερο πρόβλημα και της μάζας $m(x)$ ως προς το μήκος x στο τρίτο πρόβλημα. Το πρόβλημα του υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής μίας εξαρτημένης μεταβλητής ποσότητας ως προς μία ανεξάρτητη μεταβλητή ποσότητα καταλήγει πάντοτε σε ένα ανάλογο τύπο.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ τότε λέμε ότι η f* **έχει παράγωγο** *στο ξ, το όριο αυτό ονομάζεται* **παράγωγος** *στο ξ της f και το συμβολίζουμε $f'(\xi)$ ή $Df(\xi)$ ή $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=\xi}$ ή $\frac{dy}{dx}\big|_{x=\xi}$. Δηλαδή*

$$f'(\xi) = Df(\xi) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Αν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός (και όχι $\pm\infty$) τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** *ή* **διαφορίσιμη** *στο ξ.*

Εννοείται ότι για να γράψουμε $\frac{dy}{dx}\big|_{x=\xi}$ αντί $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=\xi}$ πρέπει να υφίσταται η σχέση $y = f(x)$ ανάμεσα στην εξαρτημένη μεταβλητή y και στην ανεξάρτητη μεταβλητή x.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$. Αν η f έχει παράγωγο ή είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\xi \in A'$ τότε λέμε ότι* **έχει παράγωγο στο** *A' ή ότι* **είναι παραγωγίσιμη στο** *A', αντιστοίχως.*

Παράδειγμα. Η $y = x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο στο 1 ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=1} = \frac{dx^2}{dx}\big|_{x=1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$.

Παράδειγμα. Η $y = \sqrt[3]{x}$ με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ έχει παράγωγο στο 0 ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = \frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$. Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει παράγωγο στο 0 ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to0} \frac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim_{x\to0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Από την συζήτηση στην ενότητα 6.1 είναι φανερό ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα μίας συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο του $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με την παράγωγο $f'(\xi)$ της συνάρτησης. Επίσης, η στιγμιαία ταχύτητα την χρονική στιγμή τ ενός οχήματος το οποίο κινείται ευθύγραμμα ισούται με την παράγωγο $s'(\tau)$ της απόστασης $s = s(t)$ του οχήματος από ένα σταθερό σημείο της διαδρομής ως συνάρτησης του χρόνου t. Τέλος, η σημειακή γραμμική πυκνότητα του υλικού μίας ευθύγραμμης ράβδου στο σημείο της ξ ισούται με την παράγωγο $m'(\xi)$ της μάζας $m = m(x)$ του τμήματος της ράβδου από το σημείο της a (το αριστερό άκρο) μέχρι το σημείο της x.

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ με το οποίο ορίζεται η παράγωγος το γράφουμε με έναν λίγο διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο, τρόπο. Κάνουμε την απλή αλλαγή μεταβλητής $h = x - \xi$ οπότε

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{h\to0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}.$$

Το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ με το οποίο ορίζεται η παράγωγος είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή διότι το όριο του παρονομαστή είναι ίσο με 0. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο ξ τότε και το όριο του αριθμητή είναι ίσο με 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Ας κάνουμε τώρα ένα σχόλιο για το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$. Αν συμβολίσουμε $\Delta x = x - \xi$, δηλαδή την διαφορά δύο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, και $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$, δηλαδή την διαφορά των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε ο λόγος διαφορών $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Σ' αυτήν την παράσταση ο παρονομαστής είναι μία *μη-μηδενική* αλλά αρκετά μικρή ποσότητα διότι το x πλησιάζει το ξ παραμένοντας $\neq \xi$. Τα παλαιότερα χρόνια οι μαθηματικοί συνήθιζαν να θεωρούν μία (ανύπαρκτη στην πραγματικότητα) ποσότητα η οποία είναι *μικρότερη σε μέγεθος από κάθε μη-μηδενικό αριθμό αλλά όχι κατ' ανάγκη μηδέν*, την ονόμαζαν **απειροστό μέγεθος** και την συμβόλιζαν dx. Θεωρούσαν ότι η μεταβλητή ποσότητα Δx προσεγγίζει το απειροστό μέγεθος dx και, στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι συνεχής στο ξ, ότι και η αντίστοιχη διαφορά $\Delta y = f(x) - f(\xi)$ προσεγγίζει το απειροστό μέγεθος dy. Επομένως θεωρούσαν ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει τον λόγο $\frac{dy}{dx}$. Πρέπει να τονιστεί ότι ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ είναι *συμβολικός* και ότι δεν έχει πραγματική υπόσταση *λόγου αριθμών* διότι η μόνη τέτοια υπόσταση θα ήταν η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Θα δούμε όμως στα επόμενα ότι σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να χειριστούμε τον συμβολικό λόγο $\frac{dy}{dx}$ *σαν να ήταν* λόγος αριθμών έχοντας έτσι την ευχέρεια να χρησιμοποιήσουμε απλές αλγεβρικές ιδιότητες των λόγων.

Εκτός από τον ορισμό της παραγώγου τον οποίο είδαμε υπάρχουν μερικοί ακόμη σχετικοί ορισμοί.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ ή το $\lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ τότε λέμε ότι η f* **έχει δεξιά ή αριστερή πλευρική παράγωγο** *στο ξ, το όριο αυτό ονομάζεται* **δεξιά ή αριστερή παράγωγος** *στο ξ της f και το συμβολίζουμε $f'_\pm(\xi)$ ή $D_\pm f(\xi)$ ή $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=\xi\pm}$ ή $\frac{dy}{dx}\big|_{x=\xi\pm}$. Δηλαδή*

$$f'_+(\xi) = D_+f(\xi) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\xi+} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi+} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

ή

$$f'_-(\xi) = D_-f(\xi) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\xi-} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi-} = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Ακολουθούν κάποιες παρατηρήσεις βασισμένες στην γενική σχέση του ορίου με το δεξιό και το αριστερό πλευρικό όριο.

Ας υποθέσουμε ότι το $\xi \in A$ είναι από τα δεξιά του *και* από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f έχει παράγωγο στο ξ τότε έχει δεξιά και αριστερή πλευρική παράγωγο στο ξ και αυτές οι πλευρικές παράγωγοι στο ξ είναι ίσες με την παράγωγο στο ξ, δηλαδή $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Αντιστρόφως, αν η f έχει δεξιά και αριστερή πλευρική παράγωγο στο ξ και αυτές είναι ίσες τότε η f έχει παράγωγο στο ξ ίση με την κοινή τιμή των δύο πλευρικών παραγώγων.

Αν το $\xi \in A$ είναι από τα δεξιά του αλλά όχι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A τότε δεν έχει νόημα η αριστερή πλευρική παράγωγος της f στο ξ και η παράγωγος της f στο ξ ταυτίζεται με την δεξιά πλευρική παράγωγο της f στο ξ, δηλαδή $f'_+(\xi) = f'(\xi)$. Ομοίως, αν το $\xi \in A$ είναι από τα αριστερά του αλλά όχι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A τότε δεν έχει νόημα η δεξιά πλευρική παράγωγος της f στο ξ και η παράγωγος της f στο ξ ταυτίζεται με την αριστερή πλευρική παράγωγο της f στο ξ, δηλαδή $f'_-(\xi) = f'(\xi)$.

Παράδειγμα. Η $y = |x|$ ορίζεται στο $(-\infty, +\infty)$. Η δεξιά πλευρική παράγωγος της συνάρτησης στο 0 είναι $\frac{d|x|}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to0+} 1 = 1$ και η αριστερή πλευρική παράγωγος στο 0 είναι $\frac{d|x|}{dx}\big|_{x=0-} = \lim_{x\to0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to0-}(-1) = -1$. Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο 0.

Παράδειγμα. Η $y = \sqrt{|x|}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει δεξιά πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0} = \lim_{x\to0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ και αριστερή πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0-} = \lim_{x\to0-} \frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0} = \lim_{x\to0-} \frac{1}{-\sqrt{-x}} = -\infty$. Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο 0.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει δεξιά πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ και αριστερή πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-} = \lim_{x\to0-} \frac{-\sqrt{-x}-0}{x-0} = \lim_{x\to0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$. Άρα υπάρχει η παράγωγος στο 0 και είναι ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = +\infty$.

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$. Στο 0 η δεξιά πλευρική παράγωγος $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to+\infty} \sin t$ δεν υπάρχει και η αριστερή πλευρική παράγωγος $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-} = \lim_{x\to 0-} \frac{x\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to-\infty} \sin t$, επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η συνάρτηση δεν έχει καμία πλευρική παράγωγο στο 0.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε το σύνολο A' όλων των $\xi \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή όλων των $\xi \in A$ για τα οποία υπάρχει το $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε με αυτό το σύνολο A' ως πεδίο ορισμού ορίζεται η* **παράγωγος συνάρτηση** *$f' : A' \to \mathbb{R}$ της f η οποία συμβολίζεται*

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad Df(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx}.$$

Ασκήσεις.

6.2.1. Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στο 0 των συναρτήσεων

$$y = 2, \quad y = 3x+1, \quad y = 3x^2-5x+3, \quad y = x+\sqrt[5]{x}, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x,$$

$$y = \begin{cases} 2x & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 2x^2 & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x^2 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} -2\sqrt{-x}+1 & \text{αν } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x}+1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 1-x & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ -1-x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

6.2.2. Έστω $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0 και $g : (-a,0)\cup(0,a) \to \mathbb{R}$ και έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in (-a,0)\cup(0,a)$. Αν η g είναι φραγμένη κοντά στο 0 αποδείξτε ότι $f(0) = 0$. Αν $\lim_{x\to 0} g(x) = p$ αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = p$.

6.2.3. Βρείτε τα a, b ώστε η συνάρτηση $y = \begin{cases} 2x^2+x+1 & \text{αν } x \leq 0 \\ ax+b & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ να έχει παράγωγο στο 0.
Κάντε το ίδιο για την $y = \begin{cases} 2x^2+x+1 & \text{αν } x < 0 \\ ax+b & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

6.2.4. Έστω $g : (a,\xi] \to \mathbb{R}$ και $h : [\xi,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $g(\xi) = h(\xi)$ και $g'_-(\xi) = h'_+(\xi)$. Για την $y = f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x) & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ αποδείξτε ότι $f'(\xi) = g'_-(\xi) = h'_+(\xi)$.

6.2.5. Ξαναδείτε την άσκηση 6.1.1 και γράψτε σε μορφή *παραγώγου*
(i) την στιγμιαία επιτάχυνση οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.
(ii) την στιγμιαία ταχύτητα και την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο.

6.3 Παραδείγματα παραγώγων, Ι.

Η παράγωγος σταθερής συνάρτησης $y = c$, όπου c είναι αριθμός ανεξάρτητος του x, είναι μηδέν σε κάθε σημείο. Πράγματι, για κάθε ξ είναι $\frac{dc}{dx}\big|_{x=\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{c-c}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 0 = 0$. Επομένως

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Η $y=x$ έχει παράγωγο $\frac{dx}{dx}\big|_{x=\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}1=1$. Άρα η παράγωγος συνάρτηση της $y=x$ είναι η σταθερή συνάρτηση

$$\frac{dx}{dx}=1.$$

Αυτό γενικεύεται ως εξής. Αν $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ η $y=x^n$ έχει παράγωγο συνάρτηση

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}\qquad \text{αν } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

Πράγματι, για κάθε ξ είναι

$$\frac{dx^n}{dx}\Big|_{x=\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}(x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\cdots+x\xi^{n-2}+\xi^{n-1})=n\xi^{n-1},$$

διότι $\lim_{x\to\xi}x^{n-k}\xi^{k-1}=\xi^{n-k}\xi^{k-1}=\xi^{n-1}$ και το πλήθος των όρων στην παρένθεση είναι n.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$, ο οποίος είπαμε ότι ισχύει για $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, ισχύει και για $n=1$: $\frac{dx^1}{dx}=1x^0$. Πράγματι, ισχύει και ταυτίζεται με τον προηγούμενο τύπο $\frac{dx}{dx}=1$ *αλλά* με τον περιορισμό $x\neq 0$ διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0.

Ο προηγούμενος τύπος για την παράγωγο συνάρτηση της $y=x^n$ είναι ο ίδιος και όταν $n\in\mathbb{Z}$, $n\leq 0$. Εννοείται ότι η παράγωγος δεν ορίζεται στο $\xi=0$ διότι το 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $y=x^n$ αν $n\leq 0$. Πράγματι, αν $n=0$ τότε η συνάρτηση $y=x^0$ είναι η σταθερή συνάρτηση $y=1$ στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ οπότε έχει παράγωγο μηδέν το οποίο συμπίπτει με την παράσταση $0x^{0-1}$ στο ίδιο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Αν $n\in\mathbb{Z}$, $n<0$ ορίζουμε $m=-n$ οπότε $m\in\mathbb{N}$ και για κάθε $\xi\neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dx^n}{dx}\Big|_{x=\xi}&=\lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{x^{-m}-\xi^{-m}}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{\xi^m-x^m}{\xi^m x^m(x-\xi)}\\&=-\lim_{x\to\xi}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}\xi+\cdots+x\xi^{m-2}+\xi^{m-1}}{\xi^m x^m}=-\frac{m\xi^{m-1}}{\xi^{2m}}=-m\xi^{-m-1}=n\xi^{n-1}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}\qquad \text{αν } n\in\mathbb{Z},\ n\leq 0,\ x\neq 0.$$

Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της $y=x^a$ όταν $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Το πεδίο ορισμού της $y=x^a$ είναι το $[0,+\infty)$ αν $a>0$, και το $(0,+\infty)$ αν $a<0$.

Κατ' αρχάς θα υποθέσουμε ότι $\xi>0$ και έστω $a=\frac{m}{n}$, όπου $m\in\mathbb{Z}$ κα $n\in\mathbb{N}$. Στους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $t=\sqrt[n]{x}$. Τότε $y=t^m$ και ορίζουμε επίσης $\eta=\xi^a$ και $\tau=\sqrt[n]{\xi}$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\frac{dx^a}{dx}\Big|_{x=\xi}&=\lim_{x\to\xi}\frac{y-\eta}{x-\xi}=\lim_{t\to\tau}\frac{t^m-\tau^m}{t^n-\tau^n}=\lim_{t\to\tau}\frac{t^{m-1}+t^{m-2}\tau+\cdots+t\tau^{m-2}+\tau^{m-1}}{t^{n-1}+t^{n-2}\tau+\cdots+t\tau^{n-2}+\tau^{n-1}}\\&=\frac{m\tau^{m-1}}{n\tau^{n-1}}=\frac{m}{n}\tau^{m-n}=\frac{m}{n}\big(\sqrt[n]{\xi}\big)^{m-n}=a\xi^{a-1}.\end{aligned}$$

Κατόπιν, έστω $\xi=0$. Για να έχει νόημα η παράγωγος στο 0 πρέπει το 0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y=x^a$ οπότε πρέπει να είναι $a>0$. Τώρα υπολογίζουμε:

$$\frac{dx^a}{dx}\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^a-0^a}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{a-1}=\begin{cases}0 & \text{αν } a>1\\ +\infty & \text{αν } 0<a<1\end{cases}$$

Άρα η παράγωγος συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ αν $a>1$ και το $(0,+\infty)$ αν $a<1$. Συνοψίζουμε:

$$\frac{dx^a}{dx}=ax^{a-1}\qquad \text{αν } a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z} \text{ και αν } a>1,\ x\geq 0 \text{ ή } a<1,\ x>0.$$

Τέλος,

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x,\qquad \frac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

Για τον πρώτο τύπο υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\cos x}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{\cos x-\cos\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{-2\sin((x-\xi)/2)\sin((x+\xi)/2)}{x-\xi} \\ &= -\lim_{x\to\xi}\frac{\sin((x-\xi)/2)}{(x-\xi)/2}\sin\frac{x+\xi}{2} = -1\,\sin\frac{\xi+\xi}{2} = -\sin\xi \end{aligned}$$

και ομοίως για τον δεύτερο τύπο

$$\begin{aligned} \frac{d\sin x}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{\sin x-\sin\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{2\sin((x-\xi)/2)\cos((x+\xi)/2)}{x-\xi} \\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{\sin((x-\xi)/2)}{(x-\xi)/2}\cos\frac{x+\xi}{2} = 1\,\cos\frac{\xi+\xi}{2} = \cos\xi. \end{aligned}$$

Ασκήσεις.

6.3.1. Λύστε τις εξισώσεις $\frac{d\sin x}{dx} = -1$, $\frac{d\sin x}{dx} + \sin x = \sqrt{2}$, $\cos x\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\frac{d\cos x}{dx} = 1$.

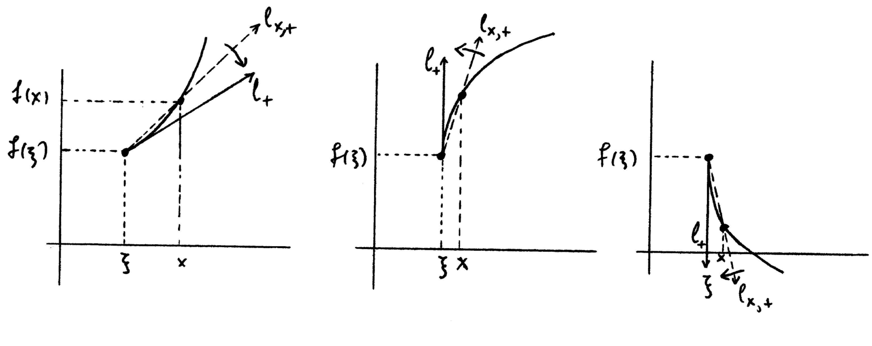
6.3.2. Βρείτε βάσει του ορισμού τις παραγώγους συναρτήσεις των $y = \sin^3 x$, $y = \cos(7x)$.

6.3.3. (i) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου ως προς το μήκος της ακμής του είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς του.
(ii) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου ως προς το μήκος της διαμέτρου του είναι ίσος με το μισό του μήκους της αντίστοιχης περιφέρειάς του.
(iii) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μίας σφαίρας ως προς το μήκος της διαμέτρου της είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς της.
Διακρίνετε κάτι κοινό στα προηγούμενα;

6.4 Παράγωγος και γράφημα συνάρτησης.

Στην ενότητα αυτή θα δούμε λίγο πιο προσεκτικά το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της παραγώγου.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[\xi, b)$. Αν το x μεταβάλλεται στο διάστημα (ξ, b) τότε η μεταβλητή *ημιευθεία* $l_{x,+}$ η οποία έχει κορυφή το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ είναι πλάγια και έχει κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Έστω τώρα ότι το x πλησιάζει το ξ. Αν το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$ (*δηλαδή αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο ξ από τα δεξιά του*) τότε η $l_{x,+}$ τείνει να ταυτισθεί με την *ημιευθεία* l_+ η οποία έχει κορυφή το $(\xi, f(\xi))$ και εφάπτεται στο μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η κλίση της

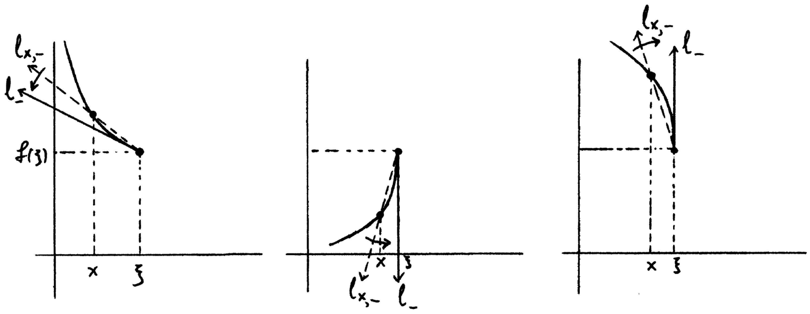


Σχήμα 6.2: Η προς τα δεξιά εφαπτόμενη ημιευθεία.

μεταβλητής ημιευθείας είναι ίση με $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.
(i) Αν το $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός τότε το όριο αυτό είναι ίσο με την κλίση της l_+ και επομένως: η l_+ έχει κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά και είτε από τα κάτω προς

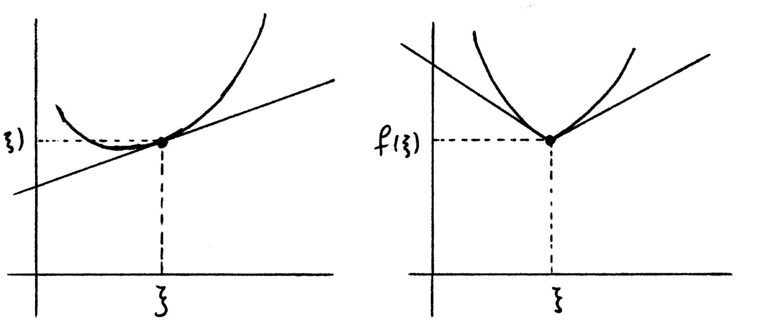
τα πάνω, αν το όριο είναι θετικό, είτε από τα πάνω προς τα κάτω, αν το όριο είναι αρνητικό, είτε η l_+ είναι οριζόντια, αν το όριο είναι 0. (ii) Αν το όριο είναι $f'_+(\xi) = +\infty$ τότε η κλίση της $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική οπότε η l_+ είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. (iii) Αν το όριο είναι $f'_+(\xi) = -\infty$ τότε η κλίση της $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική οπότε η l_+ είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα πάνω προς τα κάτω. Φυσικά, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Ας εξετάσουμε τώρα την "συμμετρική" κατάσταση. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(a, \xi]$. Αν το x μεταβάλλεται στο διάστημα (a, ξ) τότε η μεταβλητή ημιευθεία $l_{x,-}$ η



Σχήμα 6.3: Η προς τα αριστερά εφαπτόμενη ημιευθεία.

οποία έχει κορυφή το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ είναι πλάγια και έχει κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έστω ότι το x πλησιάζει το ξ. Αν το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$ (*δηλαδή αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο ξ από τα αριστερά του*) τότε η $l_{x,-}$ τείνει να ταυτισθεί με την ημιευθεία l_- η οποία έχει κορυφή το $(\xi, f(\xi))$ και εφάπτεται στο μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η κλίση της $l_{x,-}$ είναι ίση με $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και διακρίνουμε πάλι τις εξής περιπτώσεις. (i) Αν το $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός τότε το όριο αυτό είναι ίσο με την κλίση της l_- και επομένως: η l_- έχει κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά και είτε από τα πάνω προς τα κάτω, αν το όριο είναι θετικό, είτε από τα κάτω προς τα πάνω, αν το όριο είναι αρνητικό, είτε η l_- είναι οριζόντια, αν το όριο είναι 0. (ii) Αν το όριο είναι $f'_-(\xi) = +\infty$ τότε η κλίση της $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική οπότε η l_- είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα πάνω προς τα κάτω. (iii) Αν το όριο είναι $f'_-(\xi) = -\infty$ τότε η κλίση της $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική οπότε η l_- είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία από τα δεξιά προς τα αριστερά.



Σχήμα 6.4: Η εφαπτόμενη ευθεία υπάρχει. Η εφαπτόμενη ευθεία δεν υπάρχει.

Έστω τώρα ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε διάστημα (a, b) με $a < \xi < b$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι *αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο ξ και αν οι δύο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες τότε οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στα δύο μέρη του γραφήματος με αρχή το $(\xi, f(\xi))$ είναι αντίθετες και επομένως σχηματίζουν μία ευθεία, την ευθεία l η οποία εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης στο $(\xi, f(\xi))$.* Αν οι δύο πλευρικές παράγωγοι δεν είναι ίσες τότε οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες δεν είναι αντίθετες και επομένως δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Φυσικά, αν μία από τις δύο πλευρικές παραγώγους δεν υπάρχει τότε ούτε η αντίστοιχη εφαπτόμενη ημιευθεία υπάρχει.

Παράδειγμα. Το γράφημα της $y = |x|$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0, 0)$. Η μία έχει κορυφή $(0, 0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx}\big|_{x=0+} = 1$ και κατεύθυνση από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω. Η άλλη έχει κορυφή $(0, 0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx}\big|_{x=0-} = -1$ και κατεύθυνση από τα δεξιά και κάτω προς τα αριστερά και πάνω. Οι δύο αυτές ημιευθείες δεν είναι αντίθετες οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$.

Παράδειγμα. Το γράφημα της $y = \sqrt{|x|}$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0, 0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0+} = +\infty$, η μία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Ομοίως, επειδή $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0-} = -\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Άρα δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$.

Παράδειγμα. Το γράφημα της $y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } 0 \leq x \\ -\sqrt{-x} & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0, 0)$. Επειδή $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0+} = +\infty$, η μία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Ομοίως, επειδή $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-} = +\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα πάνω προς τα κάτω. Οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες οπότε σχηματίζουν την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$ η οποία είναι προφανώς κατακόρυφη: είναι η ευθεία $x = 0$.

Στην περίπτωση κατά την οποία η $y = f(x)$ είναι ορισμένη μόνο στην μία πλευρά του ξ και είναι συνεχής στο ξ από την πλευρά αυτή μπορούμε να μιλάμε μόνο για μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

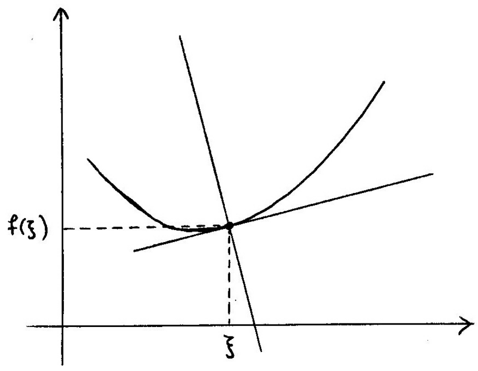
Παράδειγμα. Το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ έχει μόνο μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο $(0, 0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx}\big|_{x=0+} = +\infty$, η ημιευθεία αυτή έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b), ότι $a < \xi < b$ και ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο ξ. Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας l στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$ οπότε:

$$\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας:} \qquad y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (f'(\xi) \neq \pm\infty).$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται, επίσης, από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία. Είναι ευνόητο ότι την ευθεία αυτή την αποκαλούμε ευθεία *κάθετη* στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν $f'(\xi) \neq 0$ τότε η κλίση της κάθετης ευθείας είναι ίση με $-\frac{1}{f'(\xi)}$ και επομένως:

$$\text{εξίσωση κάθετης ευθείας:} \qquad y = -\frac{1}{f'(\xi)}(x - \xi) + f(\xi) \quad (f'(\xi) \neq \pm\infty).$$



Σχήμα 6.5: Η εφαπτόμενη ευθεία και η κάθετη ευθεία στο γράφημα.

Αν $f'(\xi) = 0$ τότε η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια οπότε η κάθετη ευθεία είναι κατακόρυφη και η εξίσωσή της είναι

$$x = \xi.$$

Τέλος, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$ τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και

$$\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας:} \qquad x = \xi \quad (f'(\xi) = \pm\infty)$$

οπότε η κάθετη ευθεία είναι οριζόντια με εξίσωση

$$\text{εξίσωση κάθετης ευθείας:} \qquad y = f(\xi) \quad (f'(\xi) = \pm\infty).$$

Παράδειγμα. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της $y = x^2$ στο σημείο (ξ, ξ^2) είναι η $y = 2\xi(x - \xi) + \xi^2$. Η εξίσωση της κάθετης ευθείας στο ίδιο σημείο (ξ, ξ^2) είναι η $y = -\frac{1}{2\xi}(x - \xi) + \xi^2$ αν $\xi \neq 0$ και η $x = 0$ αν $\xi = 0$.

Παράδειγμα. Αν $\xi > 0$ τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y = x^{1/3}$ στο σημείο $(\xi, \xi^{1/3})$ έχει εξίσωση $y = \frac{1}{3}\xi^{-2/3}(x - \xi) + \xi^{1/3}$. Η εξίσωση της κάθετης ευθείας στο ίδιο σημείο $(\xi, \xi^{1/3})$ είναι η $y = -3\xi^{2/3}(x - \xi) + \xi^{1/3}$.
Για να βρούμε σε ποιό σημείο $(\xi, \xi^{1/3})$ η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$ εξισώνουμε τις κλίσεις των δύο αυτών ευθειών, δηλαδή $\frac{1}{3}\xi^{-2/3} = 1$, και προκύπτει $\xi = \frac{1}{\sqrt{27}}$.

Ασκήσεις.

6.4.1. Βρείτε (αν υπάρχουν) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ημιευθειών, της εφαπτόμενης ευθείας και της κάθετης ευθείας στο σημείο του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο 0 για καθεμία από τις συναρτήσεις της άσκησης 6.2.1.

6.4.2. Γνωρίζουμε από την στοιχειώδη γεωμετρία ότι κάθε ευθεία η οποία εφάπτεται σε έναν κύκλο δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός από το σημείο επαφής.
Θεωρήστε το γράφημα της $y = x^2$. Σε κάθε σημείο της καμπύλης υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο σημείο αυτό και βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει η εφαπτόμενη ευθεία με την καμπύλη. Κάντε το ίδιο για το γράφημα της $y = x^3$.

6.4.3. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας σε κάθε σημείο του γραφήματος καθεμίας από τις συναρτήσεις τις οποίες μελετήσαμε στην ενότητα 6.3.

6.4.4. Βρείτε τα b, c ώστε το γράφημα της $y = x^2 + bx + c$ να εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στο σημείο $(1, 1)$.

6.4.5. Σε ποιά σημεία του το γράφημα της $y = x^{1/3}$ έχει εφαπτόμενη ευθεία κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; στην ευθεία $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; στην ευθεία $x = 4$; στην ευθεία $y = 1$;

6.4.6. (i) Θεωρήστε την $y = f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0. Σε ένα από τα παραδείγματα είδαμε ότι η συνάρτηση δεν έχει πλευρικές παραγώγους στο 0. Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης και μελετήστε την συμπεριφορά καθώς $x \to 0+$ της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ η οποία έχει κορυφή το σταθερό σημείο $(0,0)$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$. Τείνει να ταυτιστεί η $l_{x,+}$ με κάποια ημιευθεία με κορυφή το σημείο $(0,0)$; Κάντε το ίδιο καθώς $x \to 0-$ για την ημιευθεία $l_{x,-}$ η οποία έχει κορυφή το σημείο $(0,0)$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$.
(ii) Θεωρήστε την $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Σε ένα από τα παραδείγματα είδαμε ότι η συνάρτηση έχει παράγωγο στο 0 ίση με 0. Όπως στο (i), μελετήστε καθώς $x \to 0+$ και $x \to 0-$ την συμπεριφορά των ημιευθειών $l_{x,+}$ και $l_{x,-}$ οι οποίες έχουν κορυφή το σημείο $(0,0)$ και διέρχονται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$.

6.4.7. (i) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας σε κάθε σημείο της καμπύλης $y^4 = x^3$. Η λύση είναι απλούστερη αν θεωρήσετε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξαρτημένη μεταβλητή. Αν θεωρήσετε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή τότε πρέπει να θεωρήσετε την καμπύλη ως ένωση των γραφημάτων των $y = x^{3/4}$ και $y = -x^{3/4}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να προσέξετε ιδιαιτέρως το σημείο $(0,0)$ της καμπύλης.
(ii) Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την καμπύλη $y^2 = x^3$. Μήπως τώρα υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$;

6.4.8. Αποδείξτε ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $xy = a$ $(a > 0)$ το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x-άξονα και τον y-άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής (της εφαπτόμενης ευθείας με την καμπύλη). Μπορείτε να θεωρήσετε οποιαδήποτε από τις x, y ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

6.4.9. Αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = a$ $(a > 0)$ αποδείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x-άξονα και τον y-άξονα έχει σταθερό μήκος $a^{\frac{3}{2}}$. Σχεδιάστε την καμπύλη. Συμφωνεί το σχήμα το οποίο φτιάξατε με το προηγούμενο αποτέλεσμα για τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα;

6.5 Ιδιότητες των παραγώγων.

Όλα τα αποτελέσματα παρακάτω θα διατυπώνονται για την περίπτωση της παραγώγου σε κάποιο σημείο. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις της πλευρικής παραγώγου.

Πρόταση 6.1. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ. Αν η μία από τις δύο συναρτήσεις έχει παράγωγο στο ξ τότε και η άλλη συνάρτηση έχει παράγωγο στο ξ και οι δυο παράγωγοι είναι ίσες.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f έχει παράγωγο στο ξ. Επειδή ισχύει $\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$ και άρα $g'(\xi) = f'(\xi)$. □

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} |x|/x & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και η σταθερή συνάρτηση $y = 1$ με πεδίο ορισμού πάλι το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται στο $(0, +\infty)$. Άρα η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης σε κάθε σημείο του $(0, +\infty)$ είναι ίση με 0. Ομοίως, η αρχική συνάρτηση και η σταθερή συνάρτηση $y = -1$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται στο $(-\infty, 0)$. Άρα η

παράγωγος της αρχικής συνάρτησης σε κάθε σημείο του $(-\infty, 0)$ είναι ίση με 0.
Δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a, b) με $a < 0 < b$ ώστε η συνάρτηση να ταυτίζεται με οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση στο διάστημα αυτό. Άρα δεν μπορούμε να πούμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0 στο σημείο 0. Πράγματι, η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο 0.

Παράδειγμα. Η $y = \sqrt{|x|}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζεται στο $[0, +\infty)$ με την $y = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Άρα η παράγωγος της $y = \sqrt{|x|}$ σε κάθε σημείο του $(0, +\infty)$ είναι ίση με την παράγωγο της $y = \sqrt{x}$ στο ίδιο σημείο, οπότε $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επίσης, η δεξιά πλευρική παράγωγος της $y = \sqrt{|x|}$ στο 0 είναι ίση με την δεξιά πλευρική παράγωγο της $y = \sqrt{x}$ στο 0 οπότε $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0+} = \frac{d\sqrt{x}}{dx}\big|_{x=0+} = +\infty$.

Πρόταση 6.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Από την ισότητα $f(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x - \xi) + f(\xi)$ έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \lim_{x\to\xi}(x - \xi) + f(\xi) = f'(\xi)\, 0 + f(\xi) = f(\xi).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο ξ. ☐

Παράδειγμα. Το αντίστροφο της πρότασης 6.2 δεν ισχύει εν γένει. Η $y = |x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Παράδειγμα. Στην πρόταση 6.2 υποθέτουμε ότι η παράγωγος της f στο ξ είναι αριθμός. Αν η παράγωγος είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο ξ. Για παράδειγμα, η $y = \begin{cases} |x|/x & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Δεν είναι συνεχής στο 0 ούτε από τα δεξιά του ούτε από τα αριστερά του αφού και τα δύο όρια $\lim_{x\to0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0+} 1 = 1$ και $\lim_{x\to0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0-}(-1) = -1$ είναι διαφορετικά από την τιμή 0 στο 0. Όμως $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$ και $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-} = \lim_{x\to0-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$ οπότε υπάρχει η παράγωγος στο 0 και είναι ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = +\infty$.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αν η f έχει παράγωγο στο ξ *και αν είναι συνεχής* στο ξ τότε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Η πρόταση 6.2 εξασφαλίζει ότι αν η παράγωγος είναι αριθμός τότε δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο ξ. Αν όμως η παράγωγος είναι $\pm\infty$ τότε για να υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία είναι ουσιαστική η υπόθεση της συνέχειας στο ξ. Στο τελευταίο παράδειγμα είναι φανερό ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$ του γραφήματος.

Πρόταση 6.3. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο ξ τότε και οι $f \pm g$ και fg είναι παραγωγίσιμες στο ξ. Αν επιπλέον ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Τέλος, ισχύουν οι τύποι:*

$$(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \qquad (f - g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi),$$

$$(fg)'(\xi) = g(\xi)f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \qquad \Big(\frac{f}{g}\Big)'(\xi) = \frac{g(\xi)f'(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

Απόδειξη. Και οι τέσσερις ισότητες αποδεικνύονται βάσει αντίστοιχων ιδιοτήτων των ορίων. Για το άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned}(f + g)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) \\ &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \lim_{x\to\xi} \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) + g'(\xi)\end{aligned}$$

και η απόδειξη για την διαφορά είναι ίδια. Για το γινόμενο:

$$\begin{aligned}(fg)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(g(x)\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + f(\xi)\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) \\ &= \lim_{x\to\xi} g(x) \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + f(\xi) \lim_{x\to\xi} \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = g(\xi)f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi).\end{aligned}$$

Τέλος, για τον λόγο:

$$\begin{aligned}\big(\tfrac{f}{g}\big)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{1}{g(x)} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - \tfrac{f(\xi)}{g(x)g(\xi)} \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) \\ &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{1}{g(x)} \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - \tfrac{f(\xi)}{g(\xi)} \lim_{x\to\xi} \tfrac{1}{g(x)} \lim_{x\to\xi} \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \\ &= \tfrac{1}{g(\xi)} f'(\xi) - \tfrac{f(\xi)}{g(\xi)} \tfrac{1}{g(\xi)} g'(\xi) = \tfrac{g(\xi)f'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.\end{aligned}$$

□

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς οι ιδιότητες αυτές γράφονται (παραλείποντας χάριν συντομίας το ξ)

$$D(f \pm g) = Df \pm Dg, \qquad D(fg) = gDf + fDg, \qquad D\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{1}{g}Df - \frac{f}{g^2}Dg$$

$$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}, \qquad \frac{d(f(x)g(x))}{dx} = g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx},$$
$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{1}{g(x)}\frac{df(x)}{dx} - \frac{f(x)}{g^2(x)}\frac{dg(x)}{dx}$$
$$\frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}, \qquad \frac{d(yz)}{dx} = z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\Big(\frac{y}{z}\Big) = \frac{1}{z}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{z^2}\frac{dz}{dx},$$

όπου στην τελευταία σειρά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $z = g(x)$ αντί του $y = g(x)$ για να μην το μπερδέψουμε με το $y = f(x)$.

Παράδειγμα. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός τότε η cf είναι παραγωγίσιμη στο ξ και

$$(cf)'(\xi) = cf'(\xi).$$

Πράγματι, $(cf)'(\xi) = 0\, f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi)$ αφού η σταθερή συνάρτηση $y = c$ έχει παράγωγο μηδέν.

Παράδειγμα. Έστω $y = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$ οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση. Από το προηγούμενο παράδειγμα κάθε όρος του αθροίσματος έχει παράγωγο συνάρτηση την $\frac{d(a_k x^k)}{dx} = a_k \frac{dx^k}{dx} = k a_k x^{k-1}$ και άρα

$$\frac{d}{dx}(a_N x^N + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = N a_N x^{N-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Παράδειγμα. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}\big(\tfrac{x^2+x-1}{x^3+2}\big) &= \tfrac{1}{x^3+2}\tfrac{d(x^2+x-1)}{dx} - \tfrac{x^2+x-1}{(x^3+2)^2}\tfrac{d(x^3+2)}{dx} \\ &= \tfrac{1}{x^3+2}(2x+1) - \tfrac{x^2+x-1}{(x^3+2)^2}3x^2 = \tfrac{-x^4-2x^3+3x^2+4x+2}{(x^3+2)^2}.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται οι παράγωγοι όλων των ρητών συναρτήσεων. Μάλιστα είναι σαφές ότι η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα. Οι παράγωγοι συναρτήσεις της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης είναι

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Για παράδειγμα:

$$\tfrac{d\tan x}{dx} = \tfrac{1}{\cos x}\tfrac{d\sin x}{dx} - \tfrac{\sin x}{\cos^2 x}\tfrac{d\cos x}{dx} = 1 + \tfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tfrac{1}{\cos^2 x}.$$

Η απόδειξη της δεύτερης ισότητας είναι ίδια.

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων.

Κανόνας της αλυσίδας. *Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι το $\eta = f(\xi) \in B$ είναι σημείο συσσώρευσης του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και αν η g είναι παραγωγίσιμη στο η τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και*

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $G : B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} & \text{αν } y \in B \text{ και } y \neq \eta \\ g'(\eta) & \text{αν } y = \eta \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής στο η διότι $\lim_{y\to\eta} G(y) = \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta)$. Επίσης, είναι προφανές από τον τύπο της G ότι ισχύει $g(y) - g(\eta) = G(y)(y - \eta)$ για κάθε $y \in B$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\xi} \tfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{G(f(x))(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} G(f(x)) \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \\ &= G(f(\xi))f'(\xi) = G(\eta)f'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim_{x\to\xi} G(f(x)) = G(f(\xi))$ το οποίο ισχύει διότι η $G \circ f$ είναι συνεχής στο ξ. □

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς ο κανόνας της αλυσίδας γράφεται:

$$D(g \circ f)(\xi) = Dg(\eta)Df(\xi) = Dg(f(\xi))Df(\xi)$$

$$\frac{dg(f(x))}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dg(y)}{dy}\Big|_{y=\eta} \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dg(y)}{dy}\Big|_{y=f(\xi)} \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}$$

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=\eta} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=f(\xi)} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi}.$$

Επιμένοντας λίγο ακόμη στο θέμα του συμβολισμού, αν γράψουμε τις ισότητες αυτές για το γενικό x (αντί του ειδικού ξ), δηλαδή για τις παραγώγους συναρτήσεις, έχουμε τις ισότητες

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\Big|_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=f(x)} \frac{dy}{dx}.$$

Στις δύο τελευταίες ισότητες δεν επιτρέπεται να αγνοηθεί το σύμβολο $\big|_{y=f(x)}$, δηλαδή να γράψουμε $\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\frac{df(x)}{dx}$ ή $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$. Πράγματι, τα σύμβολα $\frac{dg(y)}{dy}$ και $\frac{dz}{dy}$ υποδηλώνουν την συνάρτηση $z = g'(y)$, δηλαδή συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή y. Όμως το αποτέλεσμα πρέπει να είναι συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x (αφού όλα τα άλλα σύμβολα στις ισότητες αυτές έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή x) και επομένως *πρέπει το y να αντικατασταθεί με το $f(x)$ ώστε να εμφανισθεί τελικά η μεταβλητή x*. Μερικές φορές βέβαια χρησιμοποιούμε τις συντομεύσεις

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy}\frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

έχοντας όμως κατά νου ότι *στο τελικό αποτέλεσμα το y πρέπει να αντικατασταθεί με το $f(x)$*. Ειδικά η τελευταία γραφή είναι πολύ εύκολο να απομνημονευθεί αφού θυμίζει τον απλό κανόνα πολλαπλασιασμού λόγων. Θυμόμαστε φυσικά ότι τα $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ και $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι λόγοι αλλά σύμβολα.

Παράδειγμα. Θα βρούμε την παράγωγο της $z = \sin(x^2+3)$ στο 2. Χρησιμοποιούμε την *ενδιάμεση μεταβλητή* $y = x^2 + 3$ και γράφουμε $z = \sin y$. Η παράγωγος της $y = x^2 + 3$ στο 2 είναι $\frac{dy}{dx}\big|_{x=2} = \frac{d(x^2+3)}{dx}\big|_{x=2} = 2x|_{x=2} = 4$ και η παράγωγος της $z = \sin y$ στο $2^2 + 3 = 7$ είναι $\frac{dz}{dy}\big|_{y=7} = \frac{d\sin y}{dy}\big|_{y=7} = \cos y|_{y=7} = \cos 7$. Άρα $\frac{d\sin(x^2+3)}{dx}\big|_{x=2} = \frac{dz}{dx}\big|_{x=2} = \frac{dz}{dy}\big|_{y=7}\frac{dy}{dx}\big|_{x=2} = 4\cos 7$.

Παράδειγμα. Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της $z = \sin(x^2 + 3)$. Χρησιμοποιούμε την *ενδιάμεση μεταβλητή* $y = x^2+3$ και γράφουμε $z = \sin y$. Η παράγωγος συνάρτηση της $y = x^2+3$ είναι η $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2+3)}{dx} = 2x$ και η παράγωγος συνάρτηση της $z = \sin y$ είναι η $\frac{dz}{dy} = \frac{d\sin y}{dy} = \cos y$. Άρα $\frac{d\sin(x^2+3)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\big|_{y=x^2+3}\frac{dy}{dx} = \cos y\big|_{y=x^2+3} 2x = 2x\cos(x^2 + 3)$.

Παράδειγμα. Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της $z = (\sin x)^n$. Χρησιμοποιούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $y = \sin x$ οπότε $z = y^n$ και έχουμε $\frac{d(\sin x)^n}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\big|_{y=\sin x}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\big|_{y=\sin x}\cos x = n(\sin x)^{n-1}\cos x$.

Πριν διατυπώσουμε τον επόμενο κανόνα θα πούμε δύο λόγια για κάτι το οποίο θα αναπτύξουμε εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα. Ας υποθέσουμε ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ότι έχει παράγωγο στο $\xi \in A$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$ και επομένως η παράγωγος $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Ομοίως, βλέπουμε ότι αν η f είναι φθίνουσα τότε η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι είτε αριθμός ≤ 0 είτε $-\infty$.

Κανόνας αντίστροφης συνάρτησης. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο I και έστω $\xi \in I$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα J με $\eta = f(\xi) \in J$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J. Αν η f έχει παράγωγο στο ξ τότε η f^{-1} έχει παράγωγο στο η και*

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} 1/f'(\xi) & \textit{αν } f'(\xi) \textit{ είναι αριθμός} > 0 \\ 0 & \textit{αν } f'(\xi) = +\infty \\ +\infty & \textit{αν } f'(\xi) = 0 \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε ισχύουν τα ίδια με τις προφανείς αλλαγές: < 0 αντί > 0 και $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης γράφουμε

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta}\tfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta} = \lim_{x\to\xi}\tfrac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} 1\big/\big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\big).$$

Το τελευταίο όριο είναι προφανώς ίσο με $\frac{1}{f'(\xi)}$ αν το $f'(\xi)$ είναι αριθμός > 0, και ίσο με 0 αν $f'(\xi) = +\infty$. Στην περίπτωση $f'(\xi) = 0$, το $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ τείνει στο 0 και έχει μόνο θετικές τιμές και άρα το $1\big/\big(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\big)$ τείνει στο $+\infty$. □

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς ο κανόνας της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται:

$$D(f^{-1})(\eta) = \frac{1}{Df(\xi)}, \qquad \frac{df^{-1}(y)}{dy}\Big|_{y=\eta} = 1\Big/\Big(\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}\Big), \qquad \frac{dx}{dy}\Big|_{y=\eta} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi}\Big).$$

Για τις παραγώγους συναρτήσεις γράφουμε

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \qquad D(f^{-1})(y) = \frac{1}{Df(f^{-1}(y))},$$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=f^{-1}(y)}\Big), \qquad \frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big|_{x=f^{-1}(y)}\Big).$$

Όπως και στον κανόνα της αλυσίδας, δεν επιτρέπεται να συντομεύσουμε τις δυο τελευταίες ισότητες σε $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = 1/\big(\frac{df(x)}{dx}\big)$ και $\frac{dx}{dy} = 1/\big(\frac{dy}{dx}\big)$ διότι η συνάρτηση $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy}$, δηλαδή η παράγωγος της $x = f^{-1}(y)$, έχει ανεξάρτητη μεταβλητή y ενώ η συνάρτηση $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ έχει ανεξάρτητη μεταβλητή x. Χρησιμοποιούμε όμως και τους συντομότερους τύπους

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{df(x)}{dx}\Big), \qquad \frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big),$$

έχοντας κατά νου ότι *η μεταβλητή x η οποία προκύπτει στα δεύτερα μέλη πρέπει να αντικατασταθεί από το $f^{-1}(y)$ ώστε να προκύψει τελικά η μεταβλητή y*. Ειδικά ο δεύτερος τύπος $\frac{dx}{dy} = 1/\big(\frac{dy}{dx}\big)$ είναι πολύ εύκολο να απομνημονευθεί αφού θυμίζει τον ανάλογο τύπο απλοποίησης σύνθετου λόγου.

Ο κανόνας αντίστροφης συνάρτησης έχει το εξής γεωμετρικό περιεχόμενο. Τα γραφήματα μίας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι, όπως γνωρίζουμε, συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο $y = x$. Αυτό συνεπάγεται ότι *οι εφαπτόμενες ευθείες στο ένα γράφημα και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες στο άλλο γράφημα είναι συμμετρικές ως προς την κύρια διαγώνιο*. Αυτό με την σειρά του συνεπάγεται ότι *οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών του ενός γραφήματος είναι αντίστροφες των κλίσεων των αντίστοιχων εφαπτόμενων ευθειών του άλλου γραφήματος*. Η λόγος είναι απλός: *δύο ευθείες συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ έχουν αντίστροφες κλίσεις*.

Παράδειγμα. Έχουμε ήδη αποδείξει τον τύπο $\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{y}}{y}$ για την παράγωγο συνάρτηση της $x = \sqrt[n]{y}$. Θα δούμε τώρα μία δεύτερη απόδειξη βασισμένη στον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης. Η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^n$ οπότε

$$\tfrac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \tfrac{dx}{dy} = 1/\big(\tfrac{dy}{dx}\big|_{x=\sqrt[n]{y}}\big) = 1/\big(nx^{n-1}\big|_{x=\sqrt[n]{y}}\big) = \tfrac{1}{n}\tfrac{\sqrt[n]{y}}{y}.$$

Παρεμπιπτόντως, ας αναφέρουμε ότι με ένα ακόμη βήμα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, μπορούμε να αποδείξουμε με δεύτερο τρόπο τον τύπο $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$ για την παράγωγο συνάρτηση της $y = x^a$ όταν $a \in \mathbb{Q}$. Πράγματι, αν $a = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $u = \sqrt[n]{x}$ και $y = x^a = u^m$ και έχουμε ότι

$$\tfrac{dx^a}{dx} = \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{dy}{du}\big|_{u=\sqrt[n]{x}}\tfrac{du}{dx} = mu^{m-1}\big|_{u=\sqrt[n]{x}}\tfrac{1}{n}\tfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = \tfrac{m}{n}(\sqrt[n]{x})^{m-1}\tfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = \tfrac{m}{n}\tfrac{(\sqrt[n]{x})^m}{x} = ax^{a-1}.$$

Παράδειγμα. Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \arcsin y$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arcsin y$. Η παράγωγος της $y = \sin x$ είναι $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ και δεν είναι ποτέ ίση με $+\infty$. Παρατηρήστε ότι από τις τιμές $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ επιλέξαμε αυτήν με το $+$ διότι ισχύει $\cos x \geq 0$ για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Αν $\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$ τότε έχουμε

$$\tfrac{d\arcsin y}{dy} = 1/\big(\tfrac{d\sin x}{dx}\big|_{x=\arcsin y}\big) = 1/\big(\sqrt{1 - \sin^2 x}\big|_{x=\arcsin y}\big) = \tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Αν $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = 0$ τότε $\frac{d\arcsin y}{dy} = +\infty$. Άρα

$$\frac{d\arcsin y}{dy} = \begin{cases} 1/\sqrt{1-y^2} & \text{αν } -1 < y < 1 \\ +\infty & \text{αν } y = \pm 1 \end{cases}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arccos y$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και σύνολο τιμών το $[0,\pi]$.

$$\frac{d\arccos y}{dy} = \begin{cases} -1/\sqrt{1-y^2} & \text{αν } -1 < y < 1 \\ -\infty & \text{αν } y = \pm 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα. Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \arctan y$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arctan y$. Η παράγωγος $\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ δεν είναι ποτέ ίση με 0 ή $+\infty$ οπότε

$$\begin{aligned} \tfrac{d\arctan y}{dy} &= 1\big/\big(\tfrac{d\tan x}{dx}\big|_{x=\arctan y}\big) = 1\big/\big(\tfrac{1}{\cos^2 x}\big|_{x=\arctan y}\big) = \cos^2 x\big|_{x=\arctan y} \\ &= \tfrac{1}{1+\tan^2 x}\big|_{x=\arctan y} = \tfrac{1}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{d\arctan y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \operatorname{arccot} y$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0,\pi)$.

$$\frac{d\operatorname{arccot} y}{dy} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Ασκήσεις.

6.5.1. Υπολογίστε τις παραγώγους των

$$y = x^2 - 3x + 1 - \tfrac{x^3+2}{x^2+1}, \quad y = \tfrac{x^3-x+4\sin x}{x^2+\sin x+2}, \quad y = \sin x + \tan x.$$

6.5.2. Υπολογίστε τις παραγώγους των

$$y = \sin(x^n), \quad y = \tan^n x, \quad y = \tan(x^n), \quad y = \sqrt[n]{1+\cos x}, \quad y = \tfrac{\sin^3 x - 3\sin^2 x}{\sin^2 x + 4},$$

$$y = \sin(\arccos x), \quad y = \arcsin(\cos x), \quad y = \arctan(\tan x), \quad y = \tan(\arctan x).$$

6.5.3. (i) Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Έχουμε δει ότι η συνάρτηση αυτή δεν έχει παράγωγο στο 0. Υπολογίστε την παράγωγο συνάρτηση στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(ii) Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Υπολογίστε την παράγωγο συνάρτηση στο $(-\infty,+\infty)$. Είναι η παράγωγος συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$;

(iii) Γενικεύστε τα προηγούμενα. Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^a\sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Για ποιές τιμές του a είναι η συνάρτηση συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$; παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$; είναι η παράγωγος συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$;

6.5.4. Από τον τύπο $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ βρείτε με παραγωγίσεις ανάλογους τύπους για τα αθροίσματα $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ και $x+4x^2+9x^3+\cdots+n^2x^n$.

6.5.5. Έστω ότι οι $f_1,\ldots,f_n$ είναι όλες παραγωγίσιμες στο ξ και καμία δεν έχει τιμή 0 στο ξ. Αν $g=f_1\cdots f_n$ αποδείξτε ότι $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f_1{}'(\xi)}{f_1(\xi)}+\cdots+\frac{f_n{}'(\xi)}{f_n(\xi)}$.

6.5.6. Για ποιές ρητές συναρτήσεις $y=r(x)$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\frac{xr'(x)}{r(x)}=0$;

6.5.7. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a,b) και καμία ρητή συνάρτηση $y=r(x)$ ώστε να ισχύει $r'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(a,b)$.

6.5.8. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

6.5.9. Έστω ότι το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, δηλαδή $p(\xi)=0$. Λέμε ότι ο φυσικός k είναι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του $p(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $q(x)$ ώστε να ισχύει $p(x)=(x-\xi)^kq(x)$ για κάθε x και $q(\xi)\neq 0$. Το ότι $q(\xi)\neq 0$ ισοδυναμεί με το ότι το πολυώνυμο $q(x)$ δεν διαιρείται από το $x-\xi$. Άρα η πολλαπλότητα της ρίζας ξ του πολυωνύμου $p(x)$ είναι ο μέγιστος φυσικός k ώστε το $(x-\xi)^k$ να διαιρεί το $p(x)$. Αν το ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, δηλαδή $p(\xi)\neq 0$, επεκτείνουμε τον ορισμό της έννοιας της πολλαπλότητας, λέγοντας ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του $p(x)$ είναι 0. Είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα μίας ρίζας πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου.
Έστω ότι το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$. Αποδείξτε ότι το ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας k του $p(x)$ αν και μόνο αν είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του $p'(x)$.

6.5.10. Θεωρούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$, όπου η $p(x)$ έχει βαθμό $n\geq 2$ και n διαφορετικές ανά δύο ρίζες $x_1,\ldots,x_n$ και η $q(x)$ έχει βαθμό $\leq n-1$.
(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{q(x)}{p(x)}=\sum_{k=1}^n\frac{q(x_k)}{p'(x_k)(x-x_k)}$ για κάθε $x\neq x_1,\ldots,x_n$.
(ii) Υπολογίστε το $\sum_{k=1}^n\frac{1}{p'(x_k)}$.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)}=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{x+k}$ για κάθε $x\neq 0,-1,\ldots,-m$.

6.5.11. Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο ξ βρείτε το $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi}$.

6.5.12. Έστω $k\in\mathbb{N}$ και συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ξ.
(i) Αποδείξτε ότι $n\big(f(\xi+\frac{1}{n})+f(\xi+\frac{2}{n})+\cdots+f(\xi+\frac{k}{n})-kf(\xi)\big)\to\frac{k(k+1)}{2}f'(\xi)$.
(ii) Αποδείξτε ότι $f(\xi+\frac{1}{n^2})+f(\xi+\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\xi+\frac{n}{n^2})-nf(\xi)\to\frac{1}{2}f'(\xi)$.

6.5.13. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο 0 και $0<\mu<1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\mu x)}{x}=b\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(0)=\frac{b}{1-\mu}$.

6.5.14. Έστω ότι η συνεχής $y=f(x)$ ικανοποιεί την ισότητα $f(x)^2+4f(x)=x^3-5x^2-5x+21$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Αποδείξτε ότι ισχύει $(2f(x)+4)f'(x)=3x^2-10x-5$ για κάθε x στο οποίο η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες συναρτήσεις και βρείτε τα πεδία ορισμού τους, τους τύπους τους και τους τύπους των παραγώγων τους.

6.5.15. Θεωρήστε την $y=f(x)=x^3+3x^2+3x+7$ στο $(-\infty,+\infty)$. Αποδείξτε με στοιχειώδη τρόπο ότι η $y=f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της; Αποδείξτε ότι $(f^{-1})'(y)=\begin{cases}3^{-1}(f^{-1}(y)+1)^{-2} & \text{αν } y\neq 6\\ +\infty & \text{αν } y=6\end{cases}$ χωρίς να υπολογίσετε την αντίστροφη συνάρτηση $x=f^{-1}(y)$. Υπολογίστε την $x=f^{-1}(y)$, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της και επαληθεύστε την παραπάνω ισότητα.

6.5.16. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος κ και ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή.

6.5.17. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός σφαιρικού μπαλονιού έχει μήκος κ και η παροχή αέρα στο μπαλόνι έχει ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή;

6.5.18. Μία μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στην μία πλευρά και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά μίας ορθής γωνίας. Αν το ένα άκρο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας με ταχύτητα v (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας) βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άλλο άκρο πλησιάζει την κορυφή (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας). Βρείτε επίσης τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ενός από τα άκρα από την κορυφή ως προς την απόσταση του άλλου άκρου από την κορυφή.

6.5.19. Ένα όχημα κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^2 = 4x^3$. Σε ποιά θέση του οχήματος ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της δεύτερης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο); Καλό θα ήταν να *μην* λύσετε ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y.

6.6 Παραδείγματα παραγώγων, II.

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τις παραγώγους τριών σημαντικών συναρτήσεων.

Αρχίζουμε με την λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_a x$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$, με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{\log a}\,\frac{1}{x} \qquad \text{αν } x > 0.$$

Εκτός από το γνωστό όριο $\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ θα μας χρειαστεί και το

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\tfrac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\tfrac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^t} = \lim_{t\to+\infty}\tfrac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})} = \tfrac{1}{e\,1} = \tfrac{1}{e}.$$

Από την συνέχεια της $y = \log_a x$ και από τα δύο προηγούμενα όρια συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1+\tfrac{1}{t}\right)^t = \log_a e = \tfrac{1}{\log a}, \qquad \lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1-\tfrac{1}{t}\right)^t = \log_a\tfrac{1}{e} = -\tfrac{1}{\log a}.$$

Στον επόμενο υπολογισμό θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x}{h}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\tfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} &= \lim_{h\to0+}\tfrac{1}{h}\log_a\left(\tfrac{x+h}{x}\right) = \tfrac{1}{x}\lim_{h\to0+}\tfrac{x}{h}\log_a\left(1+\tfrac{h}{x}\right)\\ &= \tfrac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}t\log_a\left(1+\tfrac{1}{t}\right) = \tfrac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1+\tfrac{1}{t}\right)^t = \tfrac{1}{\log a}\,\tfrac{1}{x}.\end{aligned}$$

Επίσης, στον επόμενο υπολογισμό θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = -\frac{x}{h}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\tfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} &= \lim_{h\to0-}\tfrac{1}{h}\log_a\left(\tfrac{x+h}{x}\right) = \tfrac{1}{x}\lim_{h\to0-}\tfrac{x}{h}\log_a\left(1+\tfrac{h}{x}\right)\\ &= -\tfrac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}t\log_a\left(1-\tfrac{1}{t}\right) = -\tfrac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1-\tfrac{1}{t}\right)^t = \tfrac{1}{\log a}\,\tfrac{1}{x}.\end{aligned}$$

Άρα $\frac{d\log_a x}{dx} = \lim_{h\to0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$.

Ειδική περίπτωση της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης είναι η

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{αν } x > 0.$$

Παράδειγμα. Θα δούμε ότι
$$\frac{d\log|x|}{dx}=\frac{1}{x}\qquad \text{αν } x\neq 0.$$
Πράγματι στο $(0,+\infty)$ έχουμε $\frac{d\log|x|}{dx}=\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}$ και στο $(-\infty,0)$ έχουμε $\frac{d\log|x|}{dx}=\frac{d\log(-x)}{dx}=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$ από τον κανόνα της αλυσίδας.

Η επόμενη παράγωγος που θα υπολογίσουμε είναι της εκθετικής συνάρτησης $y=a^x$, όπου $a>0$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Ο τύπος είναι:
$$\frac{da^x}{dx}=a^x\log a.$$
Αν $a>0$, $a\neq 1$, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης. Η αντίστροφη συνάρτηση της $y=a^x$ είναι η $x=\log_a y$ και επομένως
$$\tfrac{da^x}{dx}=\tfrac{dy}{dx}=1\big/\big(\tfrac{dx}{dy}\big|_{y=a^x}\big)=1\big/\big(\tfrac{1}{\log a}\tfrac{1}{y}\big|_{y=a^x}\big)=a^x\log a.$$
Αν $a=1$ η $y=1^x=1$ είναι σταθερή και έχει παράγωγο μηδέν. Αλλά και η παράσταση $1^x\log 1$ είναι ίση με μηδέν οπότε ισχύει ο τύπος της παραγώγου και σ' αυτήν την περίπτωση.

Ως ειδική περίπτωση έχουμε την παράγωγο της $y=e^x$:
$$\frac{de^x}{dx}=e^x.$$
Τέλος, θα υπολογίσουμε την παράγωγο της $y=x^a$ όταν το a είναι *άρρητος*. Σ' αυτήν την περίπτωση η $y=x^a$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ αν $a>0$ ή το $(0,+\infty)$ αν $a<0$. Θα δούμε ότι
$$\frac{dx^a}{dx}=ax^{a-1}\qquad \text{αν } a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ και αν } a>1,\ x\geq 0 \text{ ή } a<1,\ x>0.$$
Έστω $x>0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $y=x^a=e^{\log(x^a)}=e^{a\log x}$ και τον κανόνα της αλυσίδας. Θεωρούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $z=a\log x$ οπότε $y=e^z$ και
$$\tfrac{dx^a}{dx}=\tfrac{dy}{dx}=\tfrac{dy}{dz}\big|_{z=a\log x}\tfrac{dz}{dx}=e^z\big|_{z=a\log x}\tfrac{a}{x}=e^{a\log x}\tfrac{a}{x}=x^a\tfrac{a}{x}=ax^{a-1}.$$
Αν $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ και $a<0$ τότε η $y=x^a$ δεν ορίζεται καν στο 0. Αν $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ και $0<a<1$ τότε
$$\tfrac{dx^a}{dx}\big|_{x=0}=\lim_{x\to 0+}\tfrac{x^a-0^a}{x-0}=\lim_{x\to 0+}x^{a-1}=+\infty.$$
Τέλος, αν $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ και $a>1$ τότε
$$\tfrac{dx^a}{dx}\big|_{x=0}=\lim_{x\to 0+}\tfrac{x^a-0^a}{x-0}=\lim_{x\to 0+}x^{a-1}=0=a0^{a-1}.$$

Ασκήσεις.

6.6.1. Υπολογίστε τις παραγώγους των
$$y=x\log x,\quad y=x\log(x\log(x\log(x\log x))),\quad y=\log(e^{3x^2+4}+\sin(x^{-5/4})),$$
$$y=\log_x 3,\quad y=2^{x^2+1}\log_3(\sin x),\quad y=3^{-\sin(\log x)},\quad y=\sin(e^{\sqrt{\log(x^2+1)}}).$$
6.6.2. Παρατηρήστε ότι τα όρια
$$\lim_{x\to 1}\tfrac{\log x}{x-1},\qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{e^x-1}{x},\qquad \lim_{x\to 1}\tfrac{x^a-1}{x-1}$$
είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και *ως τέτοιες* υπολογίστε τα. Βάσει των ορίων αυτών αποδείξτε ότι
$$\lim_{x\to 1}\tfrac{\log x}{x^a-1}=\tfrac{1}{a},\quad \lim_{x\to 1}\tfrac{x^a-x^b}{x-1}=a-b,\quad \lim_{x\to 1}\tfrac{x^a-x^b}{\log x}=a-b,$$
$$\lim_{x\to 0}\tfrac{a^x-b^x}{x}=\log\tfrac{a}{b},\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b,\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{\tanh(ax)}{x}=a.$$

6.6.3. Έστω διάστημα I, συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ και έστω ξ εσωτερικό σημείο του I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ βρείτε τα $\lim_{h\to 0}\big(\frac{f(\xi+h)}{f(\xi)}\big)^{1/h}$ και $\lim_{x\to\xi}\big(\frac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(\log x-\log\xi)}$. Για το δεύτερο όριο υποθέτουμε επιπλέον ότι $I \subseteq (0,+\infty)$.

6.6.4. Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο ξ αποδείξτε ότι και η $f^g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και υπολογίστε την παράγωγό της στο ξ.
Υπολογίστε τις παραγώγους των

$$y = x^x, \quad y = (x^2+1)^{\sin x}, \quad y = |x-1|^{x-2}|x-2|^{x-1}.$$

6.6.5. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d\tanh x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \frac{d\coth x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x} \text{ αν } x \neq 0.$$

6.6.6. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\,\mathrm{arccosh}\, y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \text{αν } y > 1, \qquad \frac{d\,\mathrm{arcsinh}\, y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$\frac{d\,\mathrm{arctanh}\, y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad \text{αν } |y| < 1, \qquad \frac{d\,\mathrm{arccoth}\, y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad \text{αν } |y| > 1.$$

6.7 Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in A$.*
(i) Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο (ολικού) μεγίστου** *της f αν ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$. Λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο τοπικού μεγίστου** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x-\xi| < \delta$.*
(ii) Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο (ολικού) ελαχίστου** *της f αν ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$. Λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο τοπικού ελαχίστου** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x-\xi| < \delta$.*
(iii) Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο (ολικού) ακροτάτου** *της f αν είναι σημείο (ολικού) μεγίστου ή (ολικού) ελαχίστου της f. Λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο τοπικού ακροτάτου** *της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f.*

Με άλλα λόγια, το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f αν η τιμή που αυτή παίρνει στο ξ είναι μέγιστη ή ελάχιστη, αντιστοίχως, ανάμεσα σε όλες τις άλλες τιμές που παίρνει *κοντά* στο ξ.

Είναι προφανές ότι αν στο ξ η f έχει μέγιστη τιμή στο A, οπότε το ξ είναι σημείο (ολικού) μεγίστου της f, τότε το ξ είναι και σημείο τοπικού μεγίστου της f. Ομοίως, αν στο ξ η f έχει ελάχιστη τιμή στο A, οπότε το ξ είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της f, τότε το ξ είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

Στο γράφημα της f ένα σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου ξ διακρίνεται ως εξής: το (έστω και μικρό) μέρος του γραφήματος *κοντά* στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω ή κάτω, αντιστοίχως, από την οριζόντια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παράδειγμα. Το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = 1 + x^2(x+1)$ διότι η τιμή της συνάρτησης στο 0 είναι 1 και ισχύει $1 + x^2(x+1) \geq 1$ για κάθε $x \in (-1,+\infty)$. Το 0 δεν είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου διότι υπάρχουν τιμές της συνάρτησης οι οποίες είναι < 1. Για παράδειγμα, η τιμή στο -2 είναι $-3 < 1$.

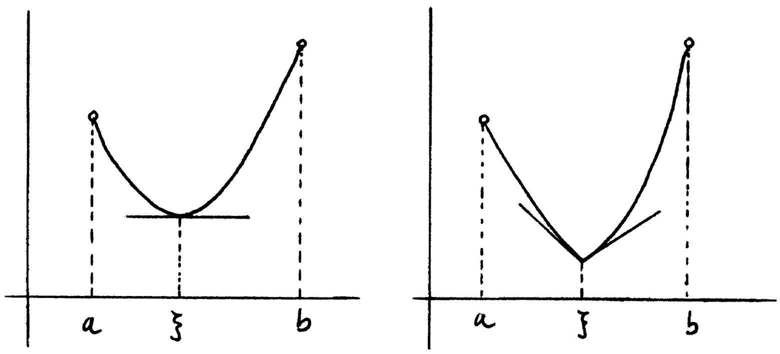
Παράδειγμα. Το 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = x - \sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$ διότι η τιμή της συνάρτησης στο 0 είναι 0 και ισχύει $x - \sqrt{x} \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$. Το 0 δεν είναι σημείο (ολικού) μεγίστου αφού υπάρχουν τιμές της συνάρτησης οι οποίες είναι > 0.

Παράδειγμα. Από τα γραφήματα συναρτήσεων τις οποίες συναντάμε συνήθως δημιουργείται η εντύπωση ότι αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει ένα τουλάχιστον από τα άκρα του τότε το άκρο αυτό είναι αυτομάτως σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης. Θεωρήστε όμως την συνάρτηση $y = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ η οποία είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$. *Είναι ιδιαίτερα διδακτικό να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης αυτής. Παρεμπιπτόντως, ξαναδείτε τις ασκήσεις 3.9.6, 3.9.7, 3.9.8, 4.8.7, 4.8.8, 6.4.6, 6.5.3 και το σχετικό παράδειγμα στην ενότητα 6.2.*
Η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 διότι $\lim_{x\to 0+} x\sin\frac{1}{x} = 0$. Παρατηρούμε ότι στα σημεία $x = \frac{1}{(\pi/2)+n2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x\sin\frac{1}{x} = x > 0$ ενώ στα σημεία $x = \frac{1}{(3\pi/2)+n2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x\sin\frac{1}{x} = -x < 0$. Όταν $n \to +\infty$ τα σημεία αυτά πλησιάζουν το 0. Επομένως όσο μικρό κι είναι ένα διάστημα $[0, d)$ υπάρχουν σημεία του στα οποία η συνάρτηση παίρνει τιμές μεγαλύτερες και τιμές μικρότερες από την τιμή της στο 0. Άρα το 0 *δεν* είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης.

Το πρώτο σημαντικό θεώρημα είναι το εξής.

Θεώρημα του Fermat. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι από τα αριστερά του και από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο ξ,
(ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της f στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (i),



Σχήμα 6.6: Το Θεώρημα του Fermat.

δηλαδή ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(\xi)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οι $f'_+(\xi)$ και $f'_-(\xi)$ και είναι ίσες με την $f'(\xi)$ (και είναι κατ' αρχάς πιθανό η κοινή τιμή τους να είναι ένα από τα $\pm\infty$).
Παρατηρούμε ότι ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στο ξ από τα δεξιά του. Από αυτό συνεπάγεται $f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$. Επίσης, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ κοντά στο ξ από τα αριστερά του. Από αυτό συνεπάγεται $f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$. Από τις δύο ανισότητες συνεπάγεται $f'(\xi) = 0$ και άρα ισχύει το (ii).
Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου τότε επαναλαμβάνουμε τα ίδια, αντικαθιστώντας το ≥ 0 με το ≤ 0 και αντιστρόφως. $\square$

Το γεωμετρικό περιεχόμενο των (i) και (ii) του θεωρήματος του Fermat είναι το εξής: *είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είτε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία και η κλίση της είναι ίση με 0, δηλαδή είναι οριζόντια.*

Παράδειγμα. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της $y = |x|$ η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά δεν έχει παράγωγο στο 0.

Παράδειγμα. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = x^2$ η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγος της συνάρτησης στο 0 είναι, πράγματι, ίση με $\frac{dx^2}{dx}\big|_{x=0} = 2x\big|_{x=0} = 0$.

Το θεώρημα του Fermat μας δίνει το εξής πόρισμα.

Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μίας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0. Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ στο διάστημα $[0, 4]$. Η παράγωγος είναι $\frac{d(2x^3-9x^2+12x+5)}{dx} = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης στο $[0, 4]$ είναι τα άκρα 0 και 4 του διαστήματος καθώς και τα 1 και 2 στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος. Οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10 και 9, αντιστοίχως.
Τώρα σκεφτόμαστε ως εξής. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, 4]$ οπότε έχει οπωσδήποτε σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι οπωσδήποτε κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία και επομένως το 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου (οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 5) και το 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου (οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 37). Μένει να δούμε αν τα 1 και 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου ή όχι.
Στο $[0, 2]$ η συνάρτηση είναι συνεχής οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο διάστημα αυτό. Αυτά είναι κάποια από τα σημεία 0, 1 και 2 (τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος). Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι 5, 10 και 9 οπότε το 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0, 2]$ και άρα είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0, 4]$.
Ομοίως, αφού οι τιμές στα 1, 2 και 4 είναι 10, 9 και 37, αντιστοίχως, το 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1, 4]$ και επομένως είναι σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0, 4]$.
Θα ξαναδούμε το παράδειγμα αυτό στην επόμενη ενότητα με πιο απλό τρόπο.

Το θεώρημα του Fermat έχει το εξής χρήσιμο συμπλήρωμα.

Πρόταση 6.4. *(1) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι από τα δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$,
(ii) είτε υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.
(2) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f τότε
(i) είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$,
(ii) είτε υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (i), δηλαδή ότι υπάρχει η παράγωγος $f'_+(\xi)$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στο ξ από τα δεξιά του. Από αυτό συνεπάγεται $f'_+(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.
Η περίπτωση του τοπικού ελαχίστου στο (1) αλλά και το (2) έχουν παρόμοια απόδειξη. □

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση να είναι $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

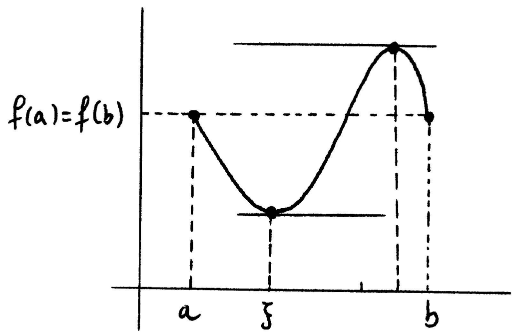
Παράδειγμα. Η $y = x$ στο διάστημα $[0, 2]$ έχει το 0 ως σημείο τοπικού ελαχίστου και η παράγωγός της στο 0 είναι ίση με $1 \geq 0$. Η ίδια συνάρτηση έχει στο ίδιο διάστημα το 2 ως σημείο τοπικού μεγίστου και η παράγωγός της στο 2 είναι ίση με $1 \geq 0$.

Παράδειγμα. Η $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 2]$ έχει το 0 ως σημείο τοπικού ελαχίστου και η παράγωγός της στο 0 είναι ίση με $+\infty \geq 0$.

Το δεύτερο σημαντικό θεώρημα είναι το

Θεώρημα του Rolle. *Έστω ότι η* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$ *και έχει παράγωγο στο* (a, b)*. Αν* $f(a) = f(b)$ *τότε υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *ώστε* $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Αν η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή αν όλες οι τιμές της είναι ίσες με $f(a) = f(b)$, τότε η παράγωγός της είναι ίση με 0 σε κάθε σημείο του (a, b), οπότε το αποτέλεσμα είναι



Σχήμα 6.7: Το Θεώρημα του Rolle.

προφανές.
Αν η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$ τότε είτε έχει μία τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε έχει μία τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά.
Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζουμε το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει κάποια τιμή μεγαλύτερη από την $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται ότι και η μέγιστη τιμή $f(\xi)$ είναι $> f(a) = f(b)$ και επομένως $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, η f έχει παράγωγο στο ξ και τότε, βάσει του θεωρήματος του Fermat, ισχύει $f'(\xi) = 0$.
Στην δεύτερη περίπτωση από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει κάποια τιμή $< f(a) = f(b)$, συνεπάγεται ότι και η ελάχιστη τιμή $f(\xi)$ είναι $< f(a) = f(b)$ και επομένως $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, η f έχει παράγωγο στο ξ και τότε, βάσει του θεωρήματος του Fermat, ισχύει $f'(\xi) = 0$.
Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. □

Παράδειγμα. Η $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, \sqrt{3}]$, έχει παράγωγο στο διάστημα $(-2, \sqrt{3})$ και οι τιμές της στα άκρα είναι και οι δύο 1. Άρα υπάρχει $\xi \in (-2, \sqrt{3})$ στο οποίο η παράγωγος $3x^2 + 4x - 3$ είναι ίση με 0. Για να βρούμε το ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 3 = 0$. Οι λύσεις είναι τα $\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και τα δυο στο $(-2, \sqrt{3})$.

Το θεώρημα του Rolle δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.
Αν η f στο θεώρημα του Rolle δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b) τότε υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει κανένα $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα. Η $y = |x|$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος είναι 1. Δεν υπάρχει κανένα $\xi \in (-1, 1)$ στο οποίο η παράγωγος έχει τιμή 0.

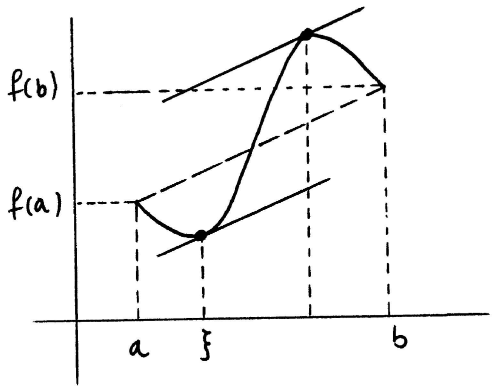
Οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle επιτρέπουν να είναι η παράγωγος $+\infty$ ή $-\infty$ σε σημεία του διαστήματος (a, b). Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.
Το επόμενο είναι το τρίτο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (Lagrange). *Έστω ότι η* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$ *και έχει παράγωγο στο* (a, b)*. Τότε υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$. Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$, έχει παράγωγο στο (a,b) και $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$. Συνεπάγεται $(b-a)f'(\xi) - (f(b) - f(a)) = 0$ και άρα $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής (Lagrange). Πράγ-



Σχήμα 6.8: Το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

ματι, αν $f(a) = f(b)$, από το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) συνεπάγεται ότι για κάποιο $\xi \in (a,b)$ ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Επομένως το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) συνεπάγεται το θεώρημα του Rolle. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) αποδείχθηκε βάσει του θεωρήματος του Rolle. Άρα τα δύο θεωρήματα είναι ισοδύναμα.

Αν παρατηρήσουμε το γράφημα της f στο θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) βλέπουμε ότι ο αριθμός $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ δεν είναι τίποτε άλλο από την κλίση του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Επομένως το γεωμετρικό περιεχόμενο του θεωρήματος μέσης τιμής (Lagrange) είναι ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b) τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ *έχει την ίδια κλίση ή, ισοδύναμα, είναι παράλληλη* με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Παράδειγμα. Η $y = \sin x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και έχει παράγωγο στο $(0, \frac{\pi}{2})$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε $\cos \xi = \frac{\sin(\pi/2) - \sin 0}{(\pi/2) - 0} = \frac{2}{\pi}$.

Συνεχίζουμε με το τέταρτο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (Cauchy). *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$. Συνεπάγεται $(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$ και άρα $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$. $\square$

Πολλές φορές το θεώρημα μέσης τιμής (Cauchy) εφαρμόζεται με κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα, *αν $g(a) \neq g(b)$ και αν δεν ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$ για κανένα $x \in (a,b)$ τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Πράγματι, από $(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi)$ προκύπτει $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=f'(\xi)$. Από αυτήν συνεπάγεται ότι αν $g'(\xi)=0$ τότε $f'(\xi)=0$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $g'(\xi)\neq 0$ και καταλήγουμε στην παραπάνω ισότητα.

Παράδειγμα. Αν $0<a<b$ τότε για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ξ ώστε $a<\xi<b$ και $\frac{b^m-a^m}{b^n-a^n}=\frac{m\xi^{m-1}}{n\xi^{n-1}}=\frac{m}{n}\xi^{m-n}$.

Ασκήσεις.

6.7.1. Δείτε αν το 0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου των συναρτήσεων:

$$y=\begin{cases} x\sin(1/x) & \text{αν } x<0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases} \qquad y=\begin{cases} x(1+\sin(1/x)) & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases} \qquad y=\begin{cases} x^2(-1+\sin(1/x)) & \text{αν } x>0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι οι δυο τελευταίες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο 0. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

6.7.2. Έστω $a<b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε
(i) $a<\xi<b$ και $\sin b-\sin a=(b-a)\cos\xi$.
(ii) $a<\xi<b$ και $\sin b-\sin a=(e^b-e^a)e^{-\xi}\cos\xi$.
(iii) $a<\xi<b$ και $e^b-e^a=(\arctan b-\arctan a)(1+\xi^2)e^{\xi}$.

6.7.3. Μπορεί η εξίσωση $x^3-12x=c$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

6.7.4. Θεωρήστε την $y=2-\sqrt[5]{x^2}$ και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή 1 στα 1 και -1. Υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο να μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης;

6.7.5. (i) Με το θεώρημα του Rolle και επαγωγή αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο n-οστού βαθμού έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.
(ii) Αν $a_1<\ldots<a_n$ αποδείξτε ότι η παράγωγος της $y=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ έχει ακριβώς $n-1$ διαφορετικές ρίζες. Προσδιορίστε την θέση των ριζών της παραγώγου σε σχέση με τα $a_1,\ldots,a_n$.
(iii) Έστω πολυώνυμο $p(x)$ και έστω $\xi_1,\ldots,\xi_m$ οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες του. Δείτε την άσκηση 6.5.9. Έστω $k_1,\ldots,k_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των ριζών του $p(x)$ οπότε ισχύει $p(x)=(x-\xi_1)^{k_1}\cdots(x-\xi_m)^{k_m}q(x)$ για κάθε x, όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο χωρίς καμία ρίζα. Τότε λέμε ότι το $p(x)$ έχει ακριβώς $k=k_1+\cdots+k_m$ ρίζες ή ότι το πλήθος των ριζών του $p(x)$ είναι k.
Αν το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου $p(x)$ είναι k αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p'(x)$ είναι $\geq k-1$. Ειδικώτερα, αν ο βαθμός του $p(x)$ είναι n και το πλήθος των ριζών του είναι n αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p'(x)$ είναι $n-1$.

6.7.6. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2=x\sin x+\cos x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Προσδιορίστε την θέση των δύο αυτών λύσεων σε σχέση με το 0.

6.7.7. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική εξίσωση $x^n+ax+b=0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές λύσεις αν το n είναι άρτιο και το πολύ τρεις διαφορετικές λύσεις αν το n είναι περιττό.

6.7.8. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x=1$; η εξίσωση $e^x=1+x$; η εξίσωση $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$; Γενικεύστε με επαγωγή: πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$;

6.7.9. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $1+\frac{x}{1!}=0$; η εξίσωση $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}=0$; Γενικεύστε με επαγωγή: πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$;

6.7.10. Έστω $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,4]$, έστω $f(1) = -7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (1,4)$. Αποδείξτε ότι $f(4) \geq 2$. Για κάθε $\mu \geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη συνάρτηση f με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε $f(4) = \mu$.

6.7.11. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I. Υποθέτουμε ότι $|y_1 - y_2| = d$, ότι $x_1, x_2 \in I$ και ότι $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$.
(i) Αν ισχύει $|f'(x)| \geq m > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I αποδείξτε ότι $|x_1 - x_2| \leq \frac{d}{m}$.
(ii) Αν ισχύει $|f'(x)| \leq m$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I αποδείξτε ότι $|x_1 - x_2| \geq \frac{d}{m}$.

6.7.12. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

6.7.13. Έστω διάστημα I και έστω ότι οι $f, g : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο I και ότι ισχύει $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε λύσεις της $f(x) = 0$ στο I βρίσκεται τουλάχιστον μία λύση της $g(x) = 0$ και αντιστρόφως. Ταιριάζουν οι υποθέσεις και το συμπέρασμα με το ζευγάρι των $y = \cos x$ και $y = \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$;

6.7.14. (i) Έστω ότι η συνεχής $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο στα a, b. Αν $f'_+(a) < 0 < f'_-(b)$ αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $[a,b]$ (την ύπαρξη του οποίου εγγυάται το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο (a,b). Ποιό είναι το συμπέρασμα αν $f'_+(a) > 0 > f'_-(b)$;
(ii) **Θεώρημα του Darboux**. Έστω ότι η συνεχής $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο στο $[a,b]$ και $f'_+(a) < c < f'_-(b)$ ή $f'_+(a) > c > f'_-(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = c$. Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι κάτι σαν "θεώρημα ενδιάμεσης τιμής" για την παράγωγο στο $[a,b]$ χωρίς όμως να προϋποτίθεται η συνέχεια της παραγώγου.

6.7.15. Έστω ότι η $f : [\xi - h, \xi + h] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$. Αποδείξτε ότι:
(i) υπάρχει $\zeta \in (0,h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) + f'(\xi - \zeta)$.
(ii) υπάρχει $\zeta \in (0,h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

6.7.16. Αν η $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

6.7.17. Αν η $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$.

6.7.18. (i) Έστω $f : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi, b)$, παραγωγίσιμη στο (ξ, b) και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f'(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου.
(ii) Έστω $f : (a, \xi] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(a, \xi]$, παραγωγίσιμη στο (a, ξ) και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f'(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει η παράγωγος $f'_-(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου.

6.7.19. Εδώ θα δούμε μερικά αποτελέσματα για την συμπεριφορά των χορδών του γραφήματος μίας συνάρτησης όταν αυτές πλησιάζουν ένα σημείο του γραφήματος στο οποίο υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Άλλες φορές οι κλίσεις των χορδών τείνουν στην κλίση της εφαπτόμενης ευθείας και άλλες φορές όχι.
Έστω ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\xi \in (a,b)$ και έστω ακολουθίες (x'_n), (x''_n) στο (a,b) ώστε $x'_n \to \xi$ και $x''_n \to \xi$.
(i) Αν $x'_n < \xi < x''_n$ για κάθε n αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n)-f(x''_n)}{x'_n-x''_n} \to f'(\xi)$.
(ii) Αν $\left|\frac{x'_n-\xi}{x'_n-x''_n}\right| \leq M$ για κάθε n αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n)-f(x''_n)}{x'_n-x''_n} \to f'(\xi)$.
(iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και η f' είναι συνεχής στο ξ αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n)-f(x''_n)}{x'_n-x''_n} \to f'(\xi)$.
Θεωρήστε την συνάρτηση f των ασκήσεων 6.4.6(ii) και 6.5.3(ii). Επίσης, έστω $x'_n = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$

και $x''_n = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ για κάθε n. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $x'_n \to 0$, $x''_n \to 0$, αλλά αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n)-f(x''_n)}{x'_n-x''_n} \not\to f'(0)$.

6.7.20. Ορίζουμε συναρτήσεις $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad \text{για } -1 \le x \le 1 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $T_1(x) = x$ και $4T_{n+2}(x) = 4xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Να συμπεράνετε ότι για κάθε $n \geq 1$ η συνάρτηση T_n ταυτίζεται στο $[-1,1]$ με μία πολυωνυμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει βαθμό n και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1. Αυτήν την πολυωνυμική συνάρτηση θα την συμβολίζουμε, επίσης, T_n. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις T_n ονομάζονται **πολυώνυμα του Chebyshev**.
(ii) Υπολογίστε τα πολυώνυμα T_2, T_3, T_4.
(iii) Παρατηρήστε ότι $T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ και $T_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$.
(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο T_n έχει ακριβώς n ρίζες: τους αριθμούς $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$.
(v) Παρατηρήστε ότι ισχύει $|T_n(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο T'_n έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες: τους αριθμούς $t_k = \cos(\frac{k}{n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n-1$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$. Βρείτε τις τιμές $T_n(t_k)$ για $k = 1, \ldots, n-1$.
(vi) Βρείτε για κάθε $n \geq 1$ την σχέση διάταξης ανάμεσα στις ρίζες του T_n και τις ρίζες του T'_n και σχεδιάστε το γράφημα του πολυωνύμου T_n στο διάστημα $[-1,1]$.
(vii) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 ισχύει $\frac{1}{2^{n-1}} = \max\{|T_n(x)| \mid -1 \le x \le 1\} \le \max\{|P(x)| \mid -1 \le x \le 1\}$.
Για ποιά πολυώνυμα P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 γίνεται ισότητα η τελευταία ανισότητα;

6.8 Εφαρμογές.

Α. Ακρότατα και μονοτονία.

Πρόταση 6.5. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(i) Η f είναι σταθερή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(ii) Η f είναι αύξουσα στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(iii) Η f είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \le 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.

Απόδειξη. (i) Αν η f είναι σταθερή τότε ήδη γνωρίζουμε ότι η παράγωγός της είναι μηδέν. Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$, όπου πιθανόν κάποιο από αυτά (ή και τα δύο) να είναι άκρο του I. Η f είναι τότε συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και έχει παράγωγο στο (x_1, x_2). Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και επομένως ξ εσωτερικό του I ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0$. Άρα $f(x_1) = f(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές της f είναι ίσες μεταξύ τους οπότε η f είναι σταθερή στο I.
(ii) Αν η f είναι αύξουσα στο I τότε, όπως αποδείξαμε πριν από τον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του . Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Όπως στην απόδειξη του (i), θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και βλέπουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και επομένως ξ εσωτερικό του I ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$. Άρα $f(x_1) \le f(x_2)$ οπότε η f είναι αύξουσα στο I.
(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (ii). □

Ιδού το γεωμετρικό περιεχόμενο της πρότασης 6.5. Το γράφημα μίας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα είναι *οριζόντια καμπύλη* αν και μόνο αν *οι εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε σημείο της είναι οριζόντιες*. Ομοίως, το γράφημα μίας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα είναι καμπύλη η οποία *ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω* αν και μόνο αν *οι εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε σημείο της έχουν μη-αρνητικές κλίσεις*. Υπάρχει επομένως σχέση αλληλοκαθορισμού ανάμεσα στην κατεύθυνση μίας καμπύλης και στις κατευθύνσεις των εφαπτόμενων ευθειών της.

Αξίζει να διατυπώσουμε μία παραλλαγή της πρότασης 6.5.

Πρόταση 6.6. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(i) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I.
(ii) Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της πρότασης 6.5. □

Στις προτάσεις 6.5 και 6.6 όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$. Το ίδιο ισχύει και για την πρόταση 6.7 παρακάτω.

Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των (i) και (ii) της πρότασης 6.6. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό το οποίο προκύπτει επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, δηλαδή ότι ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα. Η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά δεν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Υπολογίζουμε $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$ για κάθε x και αυτό είναι > 0 για κάθε $x \neq 0$ αλλά είναι 0 για $x = 0$.

Πρέπει να τονιστεί ότι στις προτάσεις 6.5 και 6.6 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. *Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν κι αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.*

Παράδειγμα. Η $y = \frac{|x|}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο $-\frac{1}{x^2} < 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

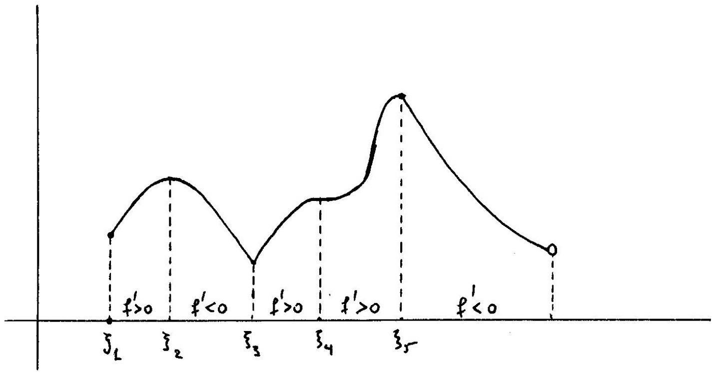
Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μίας συνάρτησης.

Πρόταση 6.7. *Έστω συνεχής $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$.*
(i) Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ τότε το ξ είναι σημείο μεγίστου της f στο (a, b).
(ii) Αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ τότε το ξ είναι σημείο ελαχίστου της f στο (a, b).

Απόδειξη. (i) Η f είναι αύξουσα στο $(a, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, b)$ οπότε το $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο (a, b).
(ii) Ομοίως. □

Ιδού μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της πρότασης 6.7.

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση f συνεχή σε κάποιο διάστημα (οποιουδήποτε τύπου) και έστω ότι έχουμε βρει σημεία $\xi_1, \dots, \xi_n$ στα οποία περιλαμβάνονται τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η συνάρτηση έχει παράγωγο με σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το



Σχήμα 6.9: Διαστήματα μονοτονίας και σημεία τοπικού ακροτάτου.

οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Δεν χρειάζεται να έχει παράγωγο η f στα $\xi_1, \dots, \xi_n$: αρκεί μόνο να είναι συνεχής στα σημεία αυτά.

Παράδειγμα. Θα ξαναδούμε ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 6.7. Η $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και έχει παράγωγο $6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ στο $(0, 4)$. Αυτή είναι θετική στο διάστημα $(0, 1)$ και στο $(2, 4)$ και αρνητική στο $(1, 2)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $[2, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και επομένως τα 0 και 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης και τα 1 και 4 είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

Παράδειγμα. Η $y = x^4(x-1)^4$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με παράγωγο $\frac{d(x^4(x-1)^4)}{dx} = 8x^3(x-1)^3(x-\frac{1}{2})$. Αυτή είναι θετική στο $(0, \frac{1}{2})$ και στο $(1, +\infty)$ και αρνητική στο $(-\infty, 0)$ και στο $(\frac{1}{2}, 1)$. Άρα η αρχική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$ και στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[\frac{1}{2}, 1]$. Επομένως τα 0 και 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και το $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Η τιμή στα σημεία 0 και 1 είναι 0 και, επειδή ισχύει $0 \le x^4(x-1)^4$ για κάθε x, τα 0 και 1 είναι σημεία ολικού ελαχίστου. Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου διότι η τιμή στο σημείο αυτό είναι $\frac{1}{256}$ ενώ $\lim_{x \to \pm\infty} x^4(x-1)^4 = +\infty$.

Παράδειγμα. Η $y = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η παράγωγος είναι $\frac{d}{dx}(x + \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x^2}$ και είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και αρνητική στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$ και επομένως το -1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και το 1 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Μάλιστα το -1 είναι σημείο ολικού μεγίστου για το διάστημα $(-\infty, 0)$ και το 1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου για το διάστημα $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = |\sin x|$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και είναι ίση με $y = \sin x$ στο διάστημα $(0, \pi)$ και ίση με $y = -\sin x$ στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$. Επομένως η παράγωγος είναι ίση με $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ στο $(0, \pi)$ και ίση με $\frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x$ στο $(\pi, 2\pi)$. Συνεπάγεται ότι η παράγωγος είναι θετική στα διαστήματα $(0, \frac{\pi}{2})$ και $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ και αρνητική στα διαστήματα $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Επομένως τα 0, π και 2π είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και τα $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή η τιμή στα τρία πρώτα σημεία είναι ίση με 0, τα σημεία αυτά είναι σημεία ολικού ελαχίστου και, επειδή η τιμή στα δύο δεύτερα σημεία είναι ίση με 1, τα σημεία αυτά είναι σημεία ολικού μεγίστου.
Παρεμπιπτόντως, η $y = |\sin x|$ δεν έχει παράγωγο στο π.

B. Ισότητες, ανισότητες.

Θα δούμε πώς αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες με την βοήθεια των θεωρημάτων μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ή των προτάσεων 6.5 και 6.6.

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παραγώγους $\frac{d\,\cos x}{dx} = -\sin x$ και $\frac{d\,\sin x}{dx} = \cos x$ και ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ για κάθε x.
Υπολογίζουμε $\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) = -2\cos x \sin x + 2\sin x \cos x = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Από την πρόταση 6.5 συνεπάγεται ότι η $y = \cos^2 x + \sin^2 x$ είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει c ώστε να ισχύει $\cos^2 x + \sin^2 x = c$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Βρίσκουμε την τιμή του c δοκιμάζοντας οποιαδήποτε βολική τιμή του x. Για παράδειγμα: $c = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε την ανισότητα

$$e^x \geq x + 1$$

για κάθε x. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = f(x) = e^x - x - 1$ και βλέπουμε ότι η $f'(x) = e^x - 1$ είναι > 0 για κάθε $x > 0$ και < 0 για κάθε $x < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ για κάθε x.
Θεωρούμε την $y = f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Αυτή έχει παράγωγο $f'(x) = x - \sin x$ η οποία είναι > 0 στο $(0, +\infty)$ και < 0 στο $(-\infty, 0)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και επομένως ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Ασκήσεις.

6.8.1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των

$$y = x^2 - x - 1, \quad y = x^3 - 15x^2 + 72x + 7, \quad y = \tfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 3}, \quad y = \tfrac{\sqrt{x}}{x + 4},$$

$$y = x^2 e^{-x}, \quad y = \sin x - \cos x, \quad y = \tfrac{\sin(3x)}{3} - \cos x, \quad y = x + \sin x,$$

$$y = x + |\sin x|, \quad y = \tfrac{\log x}{x}, \quad y = |x| e^{-|x-1|}, \quad y = \arctan x - \log(1 + x^2).$$

6.8.2. Αποδείξτε ότι η $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

6.8.3. Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x - x^2 \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και αποδείξτε ότι $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 1 > 0$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα $a > 0$, οσοδήποτε μικρό, ώστε η συνάρτηση να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a, a)$.

6.8.4. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.
(i) $y = (x - 1)|x|$ στο $[-1, 3]$.
(ii) $y = |x^2 - 3x + 2|$ στο $[-3, 10]$.
(iii) $y = \frac{\log^2 x}{x}$ στο $[1, 3]$.
(iv) $y = x + \frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3}, 3]$.
(v) $y = e^x \sin x$ στο $[0, 2\pi]$.

6.8.5. Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $y = a \log x + 2a - x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

6.8.6. Έστω $a_1 < \ldots < a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των συναρτήσεων

$$y = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2, \qquad y = |x - a_1| + \cdots + |x - a_n|.$$

6.8.7. Αναλόγως της τιμής της παραμέτρου a σχεδιάστε το γράφημα της $y = \frac{\cos x + a}{\sin x}$.

6.8.8. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\sin x = ax$.

6.8.9. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\tan x = ax$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.8.10. (i) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι Hölder συνεχής στο ξ με εκθέτη Hölder > 1 (δείτε την άσκηση 5.1.9) αποδείξτε ότι $f'(\xi) = 0$.
(ii) Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f(x_2) - f(x_1)| \le M|x_2 - x_1|^{\rho}$ για κάθε $x_1, x_2 \in I$. Τότε η f χαρακτηρίζεται **Hölder συνεχής** στο I και το μέγιστο δυνατό ρ για το οποίο ισχύει η παραπάνω ανισότητα ονομάζεται **εκθέτης Hölder** της f στο I. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$ η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στο I.
Αν $\rho > 1$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.

6.8.11. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι από τα δεξιά του και από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν $f'(\xi) > 0$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > f(\xi)$ κοντά στο ξ από τα δεξιά του και $f(x) < f(\xi)$ κοντά στο ξ από τα αριστερά του. Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 6.8.3. Μπορεί το ξ να είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f; Τί αλλάζει αν $f'(\xi) < 0$;

6.8.12. Έστω διάστημα I, έστω συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Από την άσκηση 6.7.12 γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.
(i) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.
(Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος:* Δείτε την άσκηση 5.5.16. *Δεύτερος τρόπος:* Από το θεώρημα του Fermat και την υπόθεση, για κάθε $x_1, x_3 \in I$ με $x_1 < x_3$ τα μοναδικά σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στο $[x_1, x_3]$ είναι τα x_1, x_3. Άρα για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in I$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ή $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. *Τρίτος τρόπος:* Συνέπεια του (ii) το οποίο ακολουθεί.)
(ii) Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του I είτε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος:* Συνέπεια του (i) το οποίο προηγήθηκε. *Δεύτερος τρόπος:* Αν υπάρχουν a, b εσωτερικά του I με $a < b$ και $f'(a) < 0 < f'(b)$ ή $f'(a) > 0 > f'(b)$ τότε βρίσκουμε άτοπο από την άσκηση 6.7.14.)

6.8.13. Απόσταση σημείου από ευθεία. Έστω οποιαδήποτε ευθεία l του επιπέδου και οποιοδήποτε σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Ονομάζουμε **απόσταση** του M από την l την ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l και την συμβολίζουμε $d(M, l)$.
(i) Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$ αποδείξτε ότι $d(M, l) = |\kappa - x_0|$.
(ii) Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ αποδείξτε ότι $d(M, l) = \frac{|\mu x_0 + \nu - y_0|}{(1+\mu^2)^{1/2}}$.
Αν η εξίσωση της ευθείας είναι στην μορφή $ax + by = c$, όπου ένα τουλάχιστον από τα a, b είναι $\neq 0$, τότε $d(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2+b^2)^{1/2}}$.

6.8.14. Λυγίζουμε μία λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε την ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;

6.8.15. Θεωρούμε μία ευθεία γραμμή η οποία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα καθώς και ένα σημείο A_1 στο ένα ημιεπίπεδο σε απόσταση d_1 από την ευθεία και ένα σημείο A_2 στο άλλο ημιεπίπεδο σε απόσταση d_2 από την ευθεία. Ένα (σημειακό) όχημα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 όταν βρίσκεται στο πρώτο ημιεπίπεδο και με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 όταν βρίσκεται στο δεύτερο ημιεπίπεδο. Βρείτε την τροχιά την οποία πρέπει να ακολουθήσει το όχημα ώστε από το σημείο A_1 να φτάσει στο σημείο A_2 στον ελάχιστο χρόνο.

6.8.16. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r.
(i) Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μία βάση του πάνω στην βάση του

κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;
(ii) Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μία βάση του πάνω στην βάση του κώνου και έχει τη μέγιστη επιφάνεια;

6.8.17. Έστω ότι οι $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $[0, b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, b)$, έστω ότι $f(0) = g(0) = 0$ και ότι ισχύει $f'(x), g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, b)$. Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$ αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$.
Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $y = \frac{x}{\sin x}$, $y = \frac{(1/2)x^2}{1-\cos x}$, $y = \frac{(1/6)x^3}{x-\sin x}, \ldots$ είναι αύξουσες στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

6.8.18. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{d(\arccos y + \arcsin y)}{dy} = 0$ για κάθε $y \in (-1, 1)$.
(ii) Αποδείξτε την πρώτη ισότητα στην άσκηση 1.4.9, δηλαδή ότι ισχύει $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y \in [-1, 1]$. Με τον ίδιο τρόπο αποδείξτε και την δεύτερη ισότητα στην ίδια άσκηση.

6.8.19. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{d(\arctan x + \arctan(1/x))}{dx} = 0$ για κάθε $x \neq 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x > 0$ και $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x < 0$. Πώς συμβιβάζεται με την πρόταση 6.5 το ότι η $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της αλλά δεν είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της;

6.8.20. Έστω ότι οι $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο (a, b) και $a < \xi < b$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(\xi) = 0$ και $g(\xi) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο ζευγάρι τέτοιων συναρτήσεων;
(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$.
(ii) Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες αποδείξτε ότι ισχύει $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε την $y = (F(x) - f(x))^2 + (G(x) - g(x))^2$.)

6.8.21. Αποδείξτε ότι
(i) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
(ii) $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
(iii) $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$.
(iv) $e^{x/(x+1)} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$.
(v) $x > \arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > 0$.

6.8.22. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο (a, b).
(i) Αν ισχύει $f'(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(a) + \mu(x - a) \leq f(x) \leq f(b) + \mu(x - b)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
(ii) Αν ισχύει $f'(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(b) + \mu(x - b) \leq f(x) \leq f(a) + \mu(x - a)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

6.8.23. Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι
(i) $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ay^{a-1}$ αν $a < 0$ ή $a > 1$.
(ii) $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ax^{a-1}$ αν $0 < a < 1$.

6.8.24. (i) Έστω $x < y$ και $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y - x} < a^y \log a$.
(ii) Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{y-x} \log(\frac{y}{x}) < \frac{1}{x}$.
(iii) Έστω $0 \leq x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y-x}{1+x^2}$.

6.8.25. Αποδείξτε ότι ισχύει $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!}$, $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$, $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ για κάθε $x \geq 0$. Ποιά είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων; Κατόπιν, αποδείξτε ότι για $x \leq 0$ ισχύει η πρώτη, η τρίτη, η πέμπτη κ.τ.λ. ανισότητα καθώς και η αντίστροφη της δεύτερης, της τέταρτης κ.τ.λ. ανισότητας.

6.8.26. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sin x \le \frac{x}{1!}$, $\sin x \ge \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$, $\sin x \le \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ για κάθε $x \ge 0$ και ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται για $x \le 0$. Αποδείξτε, επίσης, ότι ισχύει $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!}$, $\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ για κάθε x. Ποιά είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων;

6.8.27. (i) Αν $A > 0$ βρείτε την ελάχιστη τιμή της $y = \frac{nA+x}{(n+1)\sqrt[n+1]{A^n x}}$ στο $(0, +\infty)$. Βρείτε όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου.
(ii) Αν $a_1, \ldots, a_n \ge 0$ αποδείξτε την **ανισότητα του Cauchy**:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα και επαγωγή.)
Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.

6.8.28. Έστω $a, b \ge 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αποδείξτε την **ανισότητα του Young**:

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a^p = b^q$.
(Υπόδειξη: Να ορίσετε $x = \frac{b}{a^{p-1}}$ και να μελετήσετε την $y = \frac{1}{q}x^q - x + \frac{1}{p}$ στο $(0, +\infty)$.)

6.8.29. Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \ge 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(i) Αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder**:

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \le (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p}(b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \ge 0$ όχι και τα δύο ίσα με 0 ώστε να ισχύει $sa_k^p = tb_k^q$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
(Υπόδειξη: Έστω $A = (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p}$ και $B = (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}$. Εφαρμόστε την ανισότητα του Young της προηγούμενης άσκησης σε κάθε ζεύγος $\frac{a_k}{A}$, $\frac{b_k}{B}$ και προσθέστε. Τί γίνεται αν $A = 0$ ή $B = 0$;)
Ως ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder με $p = q = 2$ προκύπτει η γνωστή και πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**:

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2}(b_1^2 + \cdots + b_n^2)^{1/2}.$$

(ii) Αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski**:

$$((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p)^{1/p} \le (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \ge 0$ όχι και τα δύο ίσα με 0 ώστε να ισχύει $sa_k = tb_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
(Υπόδειξη: Γράψτε $(a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p = (a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \cdots + a_n(a_n + b_n)^{p-1}) + (b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \cdots + b_n(a_n + b_n)^{p-1})$ και εφαρμόστε την ανισότητα Hölder στα δύο αθροίσματα στην δεξιά μεριά.)

6.8.30. (i) Αποδείξτε ότι $(x + 1)^a \ge ax + 1$ για κάθε $x \ge -1$ και κάθε $a \ge 1$. Η ανισότητα αυτή είναι γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli.
(ii) Αν $0 < a < b$, $x \ge -a$ και $x \ne 0$ αποδείξτε ότι $(1 + \frac{x}{a})^a < (1 + \frac{x}{b})^b$.

6.8.31. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $k > 0$ ώστε να ισχύει $|f'(x)| \le k|f(x) - f(a)|$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

6.9 Δεύτερη παράγωγος και εφαρμογές.

Η δεύτερη παράγωγος της f στο ξ είναι η πρώτη παράγωγος της f' στο ξ, δηλαδή το όριο $\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$. Το όριο αυτό, αν υπάρχει, το συμβολίζουμε $f''(\xi)$ ή $D^2f(\xi)$ ή $\frac{d^2f(x)}{dx^2}\big|_{x=\xi}$ ή $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=\xi}$. Δηλαδή

$$f''(\xi)=D^2f(\xi)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big|_{x=\xi}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}.$$

Πρέπει να τονισθεί ότι για να ορισθεί η δεύτερη παράγωγος σε κάποιο ξ πρέπει η πρώτη παράγωγος να υπάρχει και να μην έχει τιμές $\pm\infty$ κοντά στο ξ.

Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, ορίζεται η n-οστή παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της $(n-1)$-οστής παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(1)}$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δυο σύμβολα f''' και $f^{(3)}$ αλλά για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους το σύμβολο με τους τόνους είναι άβολο οπότε για την n-οστή παράγωγο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$f^{(n)}(\xi)\quad ή\quad D^nf(\xi)\quad ή\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n}\Big|_{x=\xi}\quad ή\quad \frac{d^ny}{dx^n}\Big|_{x=\xi}.$$

Τέλος, ας αναφέρουμε ότι καμιά φορά συμβολίζεται $f^{(0)}$ η ίδια η συνάρτηση f.

Παράδειγμα. Αν $n\in\mathbb{N}$ οι διαδοχικές παράγωγοι της $y=x^n$ είναι $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$, $\frac{d^2x^n}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},\ldots,\frac{d^{n-1}x^n}{dx^{n-1}}=n(n-1)\cdots 2x$, $\frac{d^nx^n}{dx^n}=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$. Επειδή η n-οστή παράγωγος είναι σταθερή, κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι ίση με 0, δηλαδή $\frac{d^mx^n}{dx^m}=0$ για κάθε $m>n$.

Παράδειγμα. Αν το a δεν είναι φυσικός ή 0 οι παράγωγοι της $y=x^a$ είναι $\frac{dx^a}{dx}=ax^{a-1}$, $\frac{d^2x^a}{dx^2}=a(a-1)x^{a-2}$, $\frac{d^3x^a}{dx^3}=a(a-1)(a-2)x^{a-3}$ και, γενικά, για κάθε m είναι

$$\frac{d^mx^a}{dx^m}=a(a-1)\cdots(a-m+1)x^{a-m}.$$

Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής της δύναμης του x δεν είναι ίσος με 0 και επομένως καμία παράγωγος δεν είναι ίση με 0.

Παράδειγμα. Αν $a>0$, $a\neq 1$ οι παράγωγοι της $y=a^x$ είναι $\frac{da^x}{dx}=a^x\log a$, $\frac{d^2a^x}{dx^2}=a^x(\log a)^2$ και, γενικά,

$$\frac{d^ma^x}{dx^m}=a^x(\log a)^m$$

για κάθε m.
Ειδικά για την $y=e^x$ είναι

$$\frac{d^me^x}{dx^m}=e^x$$

για κάθε m.

Παράδειγμα. Οι παράγωγοι της $y=\sin x$ είναι $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$, $\frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x$, $\frac{d^3\sin x}{dx^3}=-\cos x$, $\frac{d^4\sin x}{dx^4}=\sin x$. Από το σημείο αυτό οι διαδοχικές παράγωγοι επαναλαμβάνουν τον "κύκλο": $\sin x,\cos x,-\sin x,-\cos x$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d^{2k}\sin x}{dx^{2k}}=(-1)^k\sin x\qquad και\qquad \frac{d^{2k-1}\sin x}{dx^{2k-1}}=(-1)^{k-1}\cos x$$

για κάθε φυσικό k.
Ομοίως, οι παράγωγοι της $y=\cos x$ είναι $\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$, $\frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x$, $\frac{d^3\cos x}{dx^3}=\sin x$,

$\frac{d^4 \cos x}{dx^4} = \cos x$. Από το σημείο αυτό οι διαδοχικές παράγωγοι επαναλαμβάνουν τον “κύκλο”: $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d^{2k} \cos x}{dx^{2k}} = (-1)^k \cos x \qquad \text{και} \qquad \frac{d^{2k-1} \cos x}{dx^{2k-1}} = (-1)^k \sin x$$

για κάθε φυσικό k.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου στην μελέτη μίας συνάρτησης.

Α. Τοπικά ακρότατα.

Η πρώτη εφαρμογή είναι ένα απλό κριτήριο για να αποφασίζουμε αν ένας αριθμός είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μίας συνάρτησης.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. *Έστω ότι η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο στο (a, b), ότι $a < \xi < b$ και ότι η f έχει δεύτερη παράγωγο στο ξ.*
(i) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$ τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
(ii) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$ τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.

Απόδειξη. (i) Έστω $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$. Επειδή $f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχουν $c \in (a, \xi)$ και $d \in (\xi, b)$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in (c, \xi) \cup (\xi, d)$. Επομένως ισχύει $f'(x) > f'(\xi) = 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ και $f'(x) < f'(\xi) = 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\xi, b)$ και στο $(a, \xi]$, συνεπάγεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, b)$ και επομένως το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
(ii) Ομοίως. □

Παράδειγμα. Για την $y = x^2$ είναι $\frac{dx^2}{dx} = 2x$ και $\frac{d^2x^2}{dx^2} = \frac{d(2x)}{dx} = 2$ οπότε $\frac{dx^2}{dx}\big|_{x=0} = 0$ και $\frac{d^2x^2}{dx^2}\big|_{x=0} = 2 > 0$. Άρα το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.

Παράδειγμα. Δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου. Η $y = x^4$ έχει $\frac{dx^4}{dx} = 4x^3$ και $\frac{d^2x^4}{dx^2} = \frac{d(4x^3)}{dx} = 12x^2$ οπότε $\frac{dx^4}{dx}\big|_{x=0} = 0$ και $\frac{d^2x^4}{dx^2}\big|_{x=0} = 0$. Όμως το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.

Β. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Ορισμός. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*
(i) Η f χαρακτηρίζεται ***κυρτή*** *στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.*
(ii) Η f χαρακτηρίζεται ***κοίλη*** *στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.*

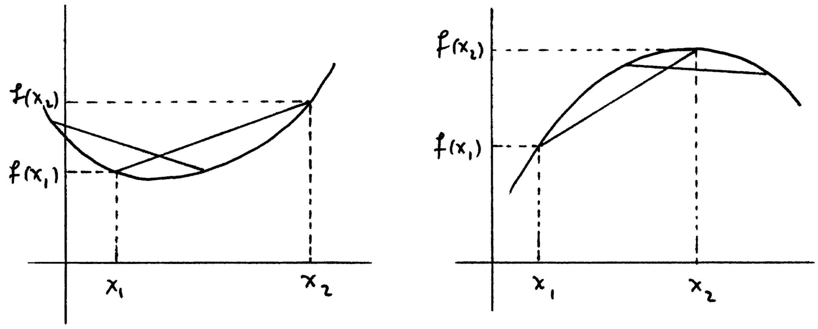
Θα διατυπώσουμε τώρα με μαθηματική ορολογία τις έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας. Η εξίσωση της ευθείας l η οποία διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ είναι η $y = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $x \in [x_1, x_2]$ τότε το να μην είναι το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ ισοδυναμεί με το ότι το σημείο $(x, f(x))$ δεν είναι πάνω από το αντίστοιχο σημείο (x, y) της ευθείας l, δηλαδή ότι

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι *η f είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει η παραπάνω ανισότητα.*

Βάσει του ίδιου συλλογισμού, μπορούμε να πούμε ότι *η f είναι κοίλη στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει η ανισότητα*:

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$



Σχήμα 6.10: Κυρτή συνάρτηση και κοίλη συνάρτηση.

Υπάρχει ένας ακόμη τρόπος να διατυπώσουμε τις ανισότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν τις κυρτές και τις κοίλες συναρτήσεις. Παρατηρούμε εύκολα ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ ο αριθμός $x = (1-t)x_1 + tx_2$ ανήκει στο $[x_1, x_2]$. Αντιστρόφως, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ υπάρχει μοναδικό $t \in [0, 1]$ ώστε να ισχύει $x = (1-t)x_1 + tx_2$. Πράγματι, λύνοντας ως προς t, βρίσκουμε $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ το οποίο ανήκει στο $[0, 1]$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την ανισότητα η οποία ορίζει την έννοια της κυρτότητας στην μορφή $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (f(x_2) - f(x_1))t + f(x_1) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ και να ξαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας ως εξής. *Η f είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in$ με $x_1 < x_2$ ισχύει*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{αν } 0 \leq t \leq 1.$$

Ο ορισμός της κοίλης συνάρτησης είναι όμοιος: περιέχει την ανισότητα

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{αν } 0 \leq t \leq 1$$

αντί της $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Παρατηρήστε ότι αν $x_1 = x_2$ οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν έτσι κι αλλιώς ως ισότητες.

Παράδειγμα. Κάθε συνάρτηση $y = f(x) = \mu x + \nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $(-\infty, +\infty)$. Πράγματι:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = \mu((1-t)x_1 + tx_2) + \nu = (1-t)(\mu x_1 + \nu) + t(\mu x_2 + \nu) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y = f(x) = x^2$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$, έχουμε για $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} f((1-t)x_1 + tx_2) &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \\ &\leq (1-t)^2x_1^2 + t(1-t)(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2^2 = (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y = f(x) = |x|$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$, διότι για $0 \leq t \leq 1$:

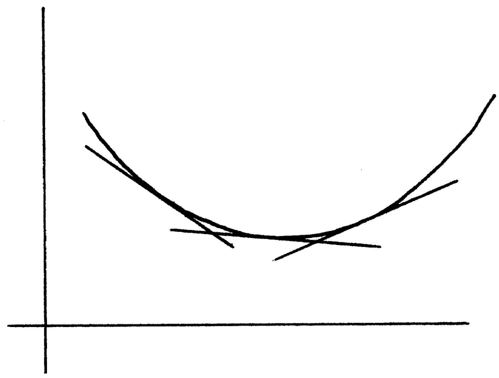
$$f((1-t)x_1 + tx_2) = |(1-t)x_1 + tx_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2| = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Στην συνέχεια θα δούμε δύο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μία συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

Πρόταση 6.8. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(i) Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I.
(ii) Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Παίρνουμε εσωτερικά σημεία x_1 και x_2 του I με $x_1 < x_2$ για να αποδείξουμε ότι $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ ισχύει $f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$. Αυτή η ανισότητα γράφεται και $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ οπότε, παίρνοντας το όριο της αριστερής πλευράς καθώς $x \to x_1+$, βρίσκουμε $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ομοίως, η ίδια ανισότητα γράφεται και $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ οπότε, παίρνοντας το όριο της δεξιάς πλευράς καθώς $x \to x_2-$, βρίσκουμε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$. Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες ανισότητες, καταλήγουμε στην $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in I$ (πιθανόν και άκρα) με $x_1 < x_2$ και θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in (x_1, x_2)$. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[x_1, x]$ και έχει παράγωγο στο (x_1, x) οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1)$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (x, x_2)$ ώστε $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2)$. Λόγω της μονοτονίας της παραγώγου, συνεπάγεται $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ οπότε $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Από αυτό συνεπάγεται $f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$ και, επειδή το x είναι οποιοδήποτε σημείο του (x_1, x_2) και επειδή η ίδια ανισότητα ισχύει προφανώς και για $x = x_1$ και $x = x_2$, η f είναι κυρτή στο I.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). $\square$

Παράδειγμα. Η $y = \begin{cases} 2x^2 & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$ έχει παράγωγο $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 4x & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$ Η παράγωγος είναι αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Παρατηρήστε, εν όψει της πρότασης 6.9, ότι η συνάρτηση δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.



Σχήμα 6.11: Αύξουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κυρτή συνάρτηση.

Η πρόταση 6.8 δίνει ένα δεύτερο γεωμετρικό περιεχόμενο στις έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας. Έστω ότι η f έχει παράγωγο σε κάποιο διάστημα και ας συμβολίσουμε l_x την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$. Η κλίση της l_x είναι ίση με $f'(x)$. Η πρόταση 6.8 λέει ότι η f είναι *κυρτή* στο διάστημα αν καθώς το x αυξάνεται *η μεταβλητή εφαπτόμενη ευθεία l_x περιστρέφεται με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού*. Ομοίως, η f είναι κοίλη στο διάστημα αν καθώς το x αυξάνεται η εφαπτόμενη ευθεία l_x περιστρέφεται με φορά ίδια με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Βάσει της γνωστής μας σχέσης ανάμεσα στην μονοτονία μίας συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή του προηγούμενου αποτελέσματος.

Πρόταση 6.9. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(i) Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(ii) Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.

Παράδειγμα. Για την $y = x(x-1)(x-2)$ έχουμε ότι $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 2$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$. Στο διάστημα $(-\infty, 1)$ ισχύει $\frac{d^2y}{dx^2} \leq 0$ και επομένως η συνάρτηση είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Στο διάστημα $(1, +\infty)$ ισχύει $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$ οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Παράδειγμα. Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο η $y = x^n$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό η $y = x^n$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Πράγματι, αν το n είναι άρτιο τότε ισχύει $\frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ για κάθε x, ενώ αν το n είναι περιττό τότε ισχύει $\frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και $\frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \leq 0$ για κάθε $x < 0$.

Παράδειγμα. Η $y = x^a$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ αν $a \leq 0$ ή $a \geq 1$ και κοίλη στο $(0, +\infty)$ αν $0 \leq a \leq 1$. Διότι το πρόσημο της $\frac{d^2x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του γινομένου $a(a-1)$.

Παράδειγμα. Η $y = a^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$ για $a > 0$ διότι ισχύει $\frac{d^2a^x}{dx^2} = a^x(\log a)^2 \geq 0$ για κάθε x.

Παράδειγμα. Η $y = \log_a x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ αν $a > 1$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$ αν $0 < a < 1$. Διότι το πρόσημο της $\frac{d^2 \log_a x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{\log a}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $-\frac{1}{\log a}$.

Γ. Σημεία καμπής.

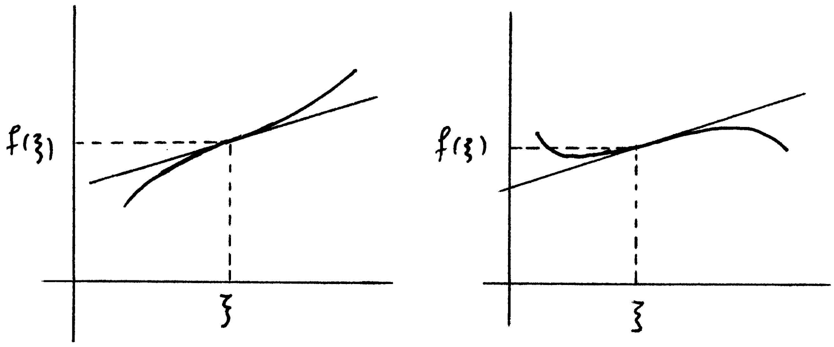
Ορισμός. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$ και έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$, δηλαδή ότι υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία l στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Λέμε ότι το ξ είναι* **σημείο καμπής** *της f αν το μέρος του γραφήματος της f το οποίο είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και δεξιά του και το μέρος του γραφήματος της f το οποίο είναι κοντά στο $(\xi, f(\xi))$ και αριστερά του είναι το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δύο ημιεπίπεδα τα οποία ορίζει η εφαπτόμενη ευθεία l.*

Στην περίπτωση που είναι $f'(\xi) = +\infty$ ή $-\infty$, η εφαπτόμενη ευθεία l είναι κατακόρυφη και είναι σαφές ότι ικανοποιείται αυτομάτως η γεωμετρική συνθήκη η οποία καθορίζει το ότι το ξ είναι σημείο καμπής της f. Τώρα, έστω ότι η $f'(\xi)$ είναι αριθμός. Τότε η εφαπτόμενη ευθεία l στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$. Άρα η γεωμετρική συνθήκη η οποία καθορίζει το ότι το ξ είναι σημείο καμπής της f μεταφράζεται ως εξής: υπάρχουν $c \in (a, \xi)$ και $d \in (\xi, b)$ ώστε είτε (i) ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in (c, \xi]$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in [\xi, d)$ είτε (ii) ισχύει $f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in (c, \xi]$ και $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in [\xi, d)$.

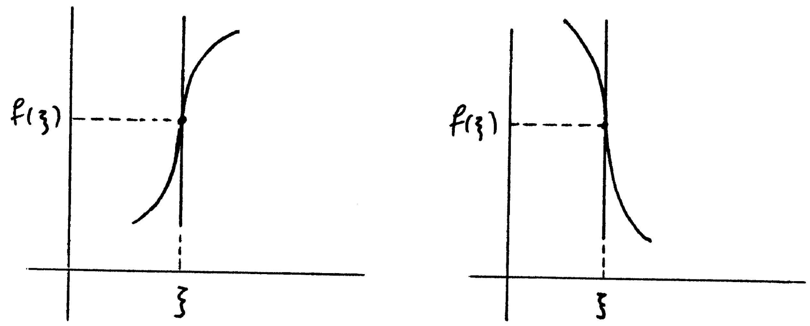
Η πρόταση 6.10 δίνει ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε αν το ξ είναι σημείο καμπής της f στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ξ, δηλαδή αν η $f'(\xi)$ είναι αριθμός.

Πρόταση 6.10. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Αν η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κοίλη σε κάποιο $[\xi, d)$ ή, αντιθέτως, αν είναι κοίλη σε κάποιο $(c, \xi]$ και κυρτή σε κάποιο $[\xi, d)$ τότε το ξ είναι σημείο καμπής της f.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο $(c,\xi]$ και κοίλη στο $[\xi,d)$. Έχουμε δει στην απόδειξη της πρότασης 6.8 ότι, επειδή η f είναι κυρτή στο $(c,\xi]$, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (c,\xi]$ και ότι, επειδή η f είναι κοίλη στο $[\xi,d)$, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in [\xi,d)$. Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (c,\xi]$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in [\xi,d)$. Ομοίως, αν η f είναι κοίλη στο $(c,\xi]$ και κυρτή στο $[\xi,d)$. $\square$



Σχήμα 6.12: Σημείο καμπής: $f'(\xi)$ αριθμός.



Σχήμα 6.13: Σημείο καμπής: $f'(\xi) = +\infty$ ή $-\infty$.

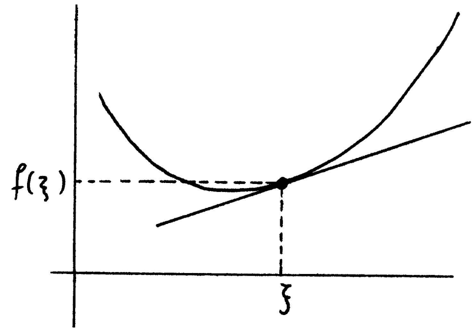
Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε διάφορα κριτήρια για το πότε η f είναι κυρτή ή κοίλη σε διαστήματα για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής της f. Για παράδειγμα:

Πρόταση 6.11. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $a<\xi<b$ και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Αν ισχύει $f''(x)\geq 0$ σε κάποιο διάστημα (c,ξ) και $f''(x)\leq 0$ σε κάποιο (ξ,d) ή, αντιθέτως, αν ισχύει $f''(x)\leq 0$ σε κάποιο (c,ξ) και $f''(x)\geq 0$ σε κάποιο (ξ,d) τότε το ξ είναι σημείο καμπής της f.*

Παράδειγμα. Η $y=x^3$ έχει παράγωγο $\frac{dy}{dx}=3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$. Επειδή ισχύει $\frac{d^2y}{dx^2}\leq 0$ στο $(-\infty,0)$ και $\frac{d^2y}{dx^2}\geq 0$ στο $(0,+\infty)$, το 0 είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

Δ. Ευθείες στήριξης.

Ορισμός. *Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ και έστω ξ εσωτερικό σημείο του I.*
Μία ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από κάτω** *του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος της f κάτω από την l.*
Μία ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από πάνω** *του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος της f πάνω από την l.*



Σχήμα 6.14: Ευθεία στήριξης από κάτω.

Έστω ότι η εξίσωση της ευθείας l είναι $y = \mu x + \nu$. Τότε η l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \geq \mu x + \nu$ για κάθε $x \in I$. Ομοίως, η l είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \leq \mu x + \nu$ για κάθε $x \in I$.

Βάσει της ισότητας $f(\xi) = \mu\xi+\nu$ η εξίσωση της ευθείας στήριξης l γράφεται $y = \mu x+f(\xi)-\mu\xi$ ή, ισοδύναμα, $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι *η ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ και ισχύει*

$$f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi)$$

για κάθε $x \in I$. Ομοίως, *η ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ και ισχύει*

$$f(x) \leq \mu(x - \xi) + f(\xi)$$

για κάθε $x \in I$. Επομένως το να βρούμε αν υπάρχει και ποιά είναι η ευθεία στήριξης είναι το ίδιο με το να προσδιορίσουμε τον συντελεστή μ.

Παράδειγμα. Μία ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = |x|$ στο σημείο της $(0, 0)$ πρέπει να έχει εξίσωση $y = \mu x$. Το να είναι αυτή ευθεία στήριξης από κάτω ισοδυναμεί με το να ισχύει $|x| \geq \mu x$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Για $x = 1$ παίρνουμε $\mu \leq 1$ ενώ για $x = -1$ παίρνουμε $-1 \leq \mu$ και επομένως αναγκαία συνθήκη είναι η $-1 \leq \mu \leq 1$. Αντιστρόφως, αν $-1 \leq \mu \leq 1$ τότε ισχύει $\mu x \leq |\mu x| = |\mu||x| \leq |x|$ για κάθε x. Άρα οι ευθείες στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = |x|$ στο σημείο $(0, 0)$ είναι οι ευθείες $y = \mu x$, $-1 \leq \mu \leq 1$.

Παράδειγμα. Μία ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = (x^2-1)^2$ στο σημείο $(0, 1)$ πρέπει να έχει εξίσωση $y = \mu x + 1$. Το να είναι αυτή ευθεία στήριξης από κάτω ισοδυναμεί με το να ισχύει $(x^2 - 1)^2 \geq \mu x + 1$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Όμως για $x = 1$ παίρνουμε $0 \geq \mu + 1$ και για $x = -1$ παίρνουμε $0 \geq -\mu+1$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα δεν υπάρχει καμία ευθεία στήριξης.

Η πρόταση 6.12 είναι χρήσιμη όταν θέλουμε να βρούμε ευθείες στήριξης του γραφήματος μίας συνάρτησης.

Πρόταση 6.12. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$, έστω ξ εσωτερικό σημείο του I και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και l είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ τότε αυτή είναι οπωσδήποτε η l.*

Απόδειξη. Έστω ότι η εξίσωση της ευθείας στήριξης από κάτω είναι η $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$, δηλαδή ισχύει $f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$. Θα προσδιορίσουμε τον αριθμό μ.

Για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$ και, παίρνοντας όριο καθώς $x \to \xi+$, βρίσκουμε $f'(\xi) \geq \mu$. Κατόπιν, για κάθε $x \in I$, $x < \xi$ ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$ και, παίρνοντας όριο καθώς $x \to \xi-$, βρίσκουμε $f'(\xi) \leq \mu$. Άρα $\mu = f'(\xi)$ οπότε η ευθεία στήριξης έχει εξίσωση $y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ και ταυτίζεται με την l.
Η απόδειξη είναι παρόμοια και στην περίπτωση ευθείας στήριξης από πάνω. □

Παράδειγμα. Θα δούμε αν το γράφημα της $y = x^2$ έχει ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(3, 9)$. Αν υπάρχει τέτοια ευθεία στήριξης αυτή πρέπει να είναι η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη στο ίδιο σημείο, δηλαδή η $y = 6(x-3)+9$. Οπότε πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει $x^2 \geq 6(x-3)+9$ για κάθε x. Αυτό ισοδυναμεί με $(x-3)^2 \geq 0$ για κάθε x και αυτό, πράγματι, είναι σωστό.

Παράδειγμα. Ομοίως, θα δούμε αν το γράφημα της $y = x^3$ έχει ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(3, 27)$. Παίρνουμε πάλι την εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη στο ίδιο σημείο, δηλαδή την $y = 27(x-3) + 27$, και πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει $x^3 \geq 27(x-3) + 27$ για κάθε x. Αυτό ισοδυναμεί με $x^3 - 27x + 54 \geq 0$ για κάθε x και αυτό δεν είναι σωστό. Μία αιτιολόγηση είναι με αντιπαράδειγμα: $(-10)^3 - 27(-10) + 54 = -676 < 0$. Μία δεύτερη αιτιολόγηση είναι ότι $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 27x + 54) = -\infty$. Άρα το γράφημα της $y = x^3$ δεν έχει ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(3, 27)$ και με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι δεν έχει ούτε ευθεία στήριξής του από πάνω στο ίδιο σημείο.

Πρόταση 6.13. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$, έστω ξ εσωτερικό σημείο του I και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και l είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*
(i) Αν η f είναι κυρτή στο I τότε η l είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
(ii) Αν η f είναι κοίλη στο I τότε η l είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Απόδειξη. (i) Η εξίσωση της l είναι η $y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$. Για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ έχουμε ήδη αποδείξει ότι ισχύει $f'(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και επομένως $f(x) - f(\xi) \geq f'(\xi)(x-\xi)$ οπότε $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$. Ομοίως, για κάθε $x \in I$, $x < \xi$ έχουμε αποδείξει ότι ισχύει $f'(\xi) \geq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και επομένως $f(x) - f(\xi) \geq f'(\xi)(x-\xi)$ οπότε $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$ οπότε η l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f. Το ότι η l είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω είναι ακριβώς το περιεχόμενο της πρότασης 6.12.
(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα. Η $y = e^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Επομένως το γράφημα της $y = e^x$ έχει ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(0, e^0) = (0, 1)$ την εφαπτόμενή του ευθεία στο ίδιο σημείο, δηλαδή την ευθεία $y = x + 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε x.

Ε. Ανισότητες.

Θα δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε αποδείξεις ανισοτήτων. Οι εφαρμογές αυτές είναι ουσιαστικά απλές εφαρμογές της έννοιας της κυρτότητας (ή κοιλότητας) σε αποδείξεις ανισοτήτων.

Παράδειγμα. Ισχύει $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ για κάθε x_1, x_2.
Αυτό είναι απλή εφαρμογή της κυρτότητας της $y = e^x$. Πράγματι, επειδή η $y = e^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$, ισχύει $e^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)e^{x_1} + te^{x_2}$ για κάθε x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ και κάθε $t \in [0, 1]$. Αν θέσουμε $t = \frac{1}{2}$ τότε η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται αυτήν την οποία θέλουμε να αποδείξουμε στην περίπτωση $x_1 \neq x_2$. Αλλά και στην περίπτωση $x_1 = x_2$ η ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει προφανώς ως ισότητα.

Παράδειγμα. Ισχύει $(x_1+x_2)\log\frac{x_1+x_2}{2} \le x_1\log x_1 + x_2\log x_2$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$.
Πράγματι, η $y = x\log x$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, διότι ισχύει $\frac{d^2(x\log x)}{dx^2} = \frac{1}{x} \ge 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Εφαρμόζοντας, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, την βασική ανισότητα της κυρτότητας με $t=\frac{1}{2}$, βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{x_1+x_2}{2}\log\frac{x_1+x_2}{2} \le \frac{x_1\log x_1+x_2\log x_2}{2}$ για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1\ne x_2$. Αυτή είναι η ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε στην περίπτωση $x_1\ne x_2$, ενώ στην περίπτωση $x_1=x_2$ η ανισότητα ισχύει προφανώς ως ισότητα.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $x^{3/4}\le\frac{3}{4}(x-1)+1$ για κάθε $x\ge 0$.
Η ανισότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί και με στοιχειώδη τρόπο (πώς;). Εδώ θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το ότι η $y=x^{3/4}$ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$. Αυτό συνεπάγεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y=x^{3/4}$ στο σημείο $(1,1)$ είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος και αυτό "μεταφράζεται" στην ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε.

ΣΤ. Ο τύπος του Taylor, I.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ ή, με άλλα λόγια, το $f(x)$ είναι *περίπου ίσο* με το $f(\xi)$ όταν το x είναι πολύ κοντά στο ξ. Συμβολικά:

$$f(x)\approx f(\xi) \qquad \text{αν } x\approx\xi.$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως προσέγγιση του $f(x)$ το $f(\xi)$ αν αυτό είναι γνωστό (δηλαδή αν υπολογίζεται εύκολα).

Παράδειγμα. Επειδή το 4.00001 είναι πολύ κοντά στο 4 και η $y=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 4, μπορούμε να πούμε ότι $\sqrt{4.00001}\approx\sqrt{4}=2$.

Είναι προφανώς πολύ χρήσιμο αν, εκτός από το $f(\xi)$, γνωρίζουμε και μία εκτίμηση για την διαφορά $f(x)-f(\xi)$ ώστε να έχουμε έναν έλεγχο του σφάλματος το οποίο κάνουμε προσεγγίζοντας το $f(x)$ με το $f(\xi)$. Αυτό το πετυχαίνουμε αν έχουμε πληροφορίες για την παράγωγο της f στο διάστημα ανάμεσα στα σημεία x και ξ. Πράγματι, αν η f είναι συνεχής στο $[\xi,x]$ ή $[x,\xi]$ και έχει παράγωγο στο (ξ,x) ή (x,ξ) τότε υπάρχει $\eta\in(\xi,x)$ ή (x,ξ) ώστε

$$f(x)=f(\xi)+f'(\eta)(x-\xi).$$

Αν τώρα, για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι τα l και u είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα, αντιστοίχως, της f' στο (ξ,x) ή (x,ξ) συμπεραίνουμε ότι $l(x-\xi)\le f(x)-f(\xi)\le u(x-\xi)$ αν $x>\xi$ καθώς και $u(x-\xi)\le f(x)-f(\xi)\le l(x-\xi)$ αν $x<\xi$. Ειδικότερα, αν το $M\ge 0$ είναι φράγμα της $|f'|$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μέγεθος $|f(x)-f(\xi)|=|f'(\eta)||x-\xi|$ του σφάλματος δεν είναι μεγαλύτερο από $M|x-\xi|$:

$$|f(x)-f(\xi)|\le M|x-\xi|.$$

Παράδειγμα. Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι το $\sqrt{4.00001}$ είναι περίπου ίσο με το $\sqrt{4}=2$. Η παράγωγος της $y=\sqrt{x}$ είναι $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ και ισχύει $0<\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ για κάθε $x\ge 4$ οπότε και για κάθε $x\in(4,4.00001)$. Επομένως $0\le\sqrt{4.00001}-2\le\frac{1}{4}(4.00001-4)=0.0000025$. Άρα το σφάλμα το οποίο κάνουμε προσεγγίζοντας το $\sqrt{4.00001}$ με το $\sqrt{4}=2$ είναι μη-αρνητικό και όχι μεγαλύτερο από 0.0000025. Μάλιστα από την σχέση $2\le\sqrt{4.00001}\le 2.0000025$ καταλαβαίνουμε ότι το 2.00000 είναι προσέγγιση του $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και πέμπτου δεκαδικού ψηφίου.

Αν η f έχει παράγωγο και στο ξ (εκτός από τα σημεία του (ξ,x) ή (x,ξ)) και αν η f' είναι συνεχής στο ξ τότε το $f'(\eta)$, το οποίο εμφανίζεται στην ισότητα $f(x)=f(\xi)+f'(\eta)(x-\xi)$, είναι περίπου ίσο με το $f'(\xi)$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$f(x)\approx f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi) \qquad \text{αν } x\approx\xi$$

και έχουμε μία ακόμη προσέγγιση του $f(x)$.

Παράδειγμα. Εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα στην $y = \sqrt{x}$, βρίσκουμε $\sqrt{4.00001} \approx 2 + \frac{1}{4}(4.00001 - 4) = 2.0000025$. Μέχρι τώρα έχουν προκύψει δύο προσεγγίσεις του $\sqrt{4.00001}$, το 2 και το 2.0000025, και γνωρίζουμε ότι το $\sqrt{4.00001}$ είναι ανάμεσα σ' αυτές τις δύο τιμές. Πώς θα αναγνωρίσουμε ποιά από τις δύο αυτές τιμές είναι καλύτερη προσέγγιση του $\sqrt{4.00001}$ και πώς θα πετύχουμε *με κάποιο μεθοδικό τρόπο* καλύτερες προσεγγίσεις;

Αν στην σχέση $f(x) = f(\xi) + f'(\eta)(x - \xi)$ αντικαταστήσουμε το $f'(\eta)$ με το $f'(\frac{\xi+x}{2})$ αντί με το $f'(\xi)$ τότε έχουμε $f(x) \approx f(\xi) + f'(\frac{\xi+x}{2})(x - \xi)$. Τώρα, υπάρχει ζ γνησίως ανάμεσα στα ξ και $\frac{\xi+x}{2}$ ώστε $f'(\frac{\xi+x}{2}) = f'(\xi) + f''(\zeta)(\frac{\xi+x}{2} - \xi) = f'(\xi) + f''(\zeta)\frac{x-\xi}{2}$. Για να γίνει αυτό πρέπει να υποθέσουμε φυσικά ότι η πρώτη παράγωγος είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ και $\frac{\xi+x}{2}$ και ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στο ανοικτό διάστημα με τα ίδια άκρα. Έχουμε λοιπόν ότι $f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x - \xi)^2$. Αν, επιπλέον, η δεύτερη παράγωγος είναι και συνεχής στο ξ τότε $f''(\zeta) \approx f''(\xi)$, οπότε

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \tfrac{f''(\xi)}{2}(x - \xi)^2 \qquad \text{αν } x \approx \xi.$$

Έχουμε λοιπόν μέχρι τώρα τριών τύπων προσεγγίσεις του $f(x)$ όταν το x είναι κοντά στο ξ:

$$f(x) \approx \begin{cases} f(\xi), \\ f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \\ f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - \xi)^2. \end{cases}$$

Για τον πρώτο τύπο προσέγγισης είδαμε και τρόπους εκτίμησης του σφάλματος βάσει φραγμάτων της πρώτης παραγώγου. Αυτά τώρα θα τα γενικεύσουμε.

Θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I, συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και n συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του) και ότι υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ της f σε κάθε εσωτερικό σημείο του I. Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ή (x, ξ) ώστε*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}.$$

Αν, επίσης, ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ για κάθε x εσωτερικό του I τότε

$$\left| f(x) - \Big(f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \Big) \right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x - \xi|^{n+1}$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τα x και ξ και ορίζουμε τον αριθμό A μέσω της ισότητας

$$f(x) = f(\xi) + \tfrac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \tfrac{A}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}.$$

Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση

$$y = g(t) = f(x) - f(t) - \tfrac{f'(t)}{1!}(x - t) - \cdots - \tfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \tfrac{A}{(n+1)!}(x - t)^{n+1}$$

με ανεξάρτητη μεταβλητή t στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$. Η $y = g(t)$ είναι συνεχής στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$ και έχει παράγωγο στο (ξ, x) ή (x, ξ) ίση με

$$g'(t) = \tfrac{A - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Προφανώς, $g(x) = 0$ και, βάσει του ορισμού του A, $g(\xi) = 0$. Άρα υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ή (x, ξ) ώστε $g'(\eta) = 0$ οπότε $A = f^{(n+1)}(\eta)$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του A στην ισότητα η οποία το έχει εξ αρχής καθορίσει, παίρνουμε την ισότητα του θεωρήματος. Η ανισότητα προκύπτει από την ισότητα και την $|f^{(n+1)}(\eta)| \le M$. □

Ορισμός. *Η παράσταση* $f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ *ονομάζεται* **προσέγγιση Taylor τάξης** n *της* f *στο διάστημα* I *και το* $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$ *ονομάζεται* **σφάλμα τάξης** n **τύπου Lagrange**. *Η προσέγγιση Taylor τάξης* n *είναι πολυώνυμο του* x *βαθμού* $\leq n$.

Αν $n = 0$ τότε, με την παραδοχή ότι παράγωγος τάξης 0 είναι η ίδια η συνάρτηση, η ισότητα στο θεώρημα του Taylor γράφεται $f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\eta)}{1!}(x-\xi)$ και δεν είναι τίποτε άλλο από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Παράδειγμα. Έχουμε βρει την εκτίμηση 0.0000025 για το σφάλμα προσέγγισης του $\sqrt{4.00001}$ με το $\sqrt{4} = 2$.
Με το θεώρημα του Taylor στην $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4.00001]$ με $\xi = 4$, $x = 4.00001$ και $n = 1$, βρίσκουμε

$$\sqrt{4.00001} = \sqrt{4} + \frac{1}{1!}\frac{1}{2\sqrt{4}}(4.00001-4) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4\sqrt{\eta^3}}(4.00001-4)^2 = 2.0000025 - \frac{10^{-10}}{8\sqrt{\eta^3}}$$

για κάποιο $\eta \in (4, 4.00001)$. Επειδή $0 < \frac{10^{-10}}{8\sqrt{\eta^3}} < \frac{10^{-10}}{8\sqrt{4^3}} = 0.0000000000015625$, συνεπάγεται $2.0000024999984375 < \sqrt{4.00001} < 2.0000025$. Αυτό σημαίνει ότι το 2.00000249999 προσεγγίζει το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και ενδέκατου δεκαδικού ψηφίου.
Για καλύτερη προσέγγιση, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Taylor με $n = 2$. Τότε

$$\begin{aligned}\sqrt{4.00001} &= \sqrt{4} + \frac{1}{1!}\frac{1}{2\sqrt{4}}(4.00001-4) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4\sqrt{4^3}}(4.00001-4)^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8\sqrt{\eta^5}}(4.00001-4)^3 \\ &= 2.0000024999984375 + \frac{10^{-15}}{16\sqrt{\eta^5}}\end{aligned}$$

για κάποιο $\eta \in (4, 4.00001)$. Επειδή $0 < \frac{10^{-15}}{16\sqrt{\eta^5}} < \frac{10^{-15}}{16\sqrt{4^5}} = 0.000000000000000001953125$, συνεπάγεται $2.0000024999984375 < \sqrt{4.00001} < 2.000002499998437501953125$. Επομένως το 2.00000249999843750 προσεγγίζει το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και δέκατου έβδομου δεκαδικού ψηφίου.

Ζ. Προσεγγιστική επίλυση εξισώσεων.

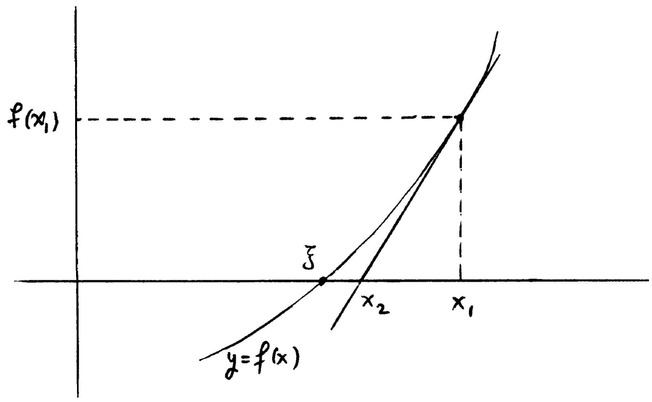
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, όπου η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι το $[a, b]$ περιέχει μία τουλάχιστον λύση ξ της εξίσωσης αυτής. Για παράδειγμα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και μπορούμε να βρούμε δύο σημεία του $[a, b]$ στα οποία οι τιμές της f είναι ετερόσημες τότε από το θεώρημα του Bolzano γνωρίζουμε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον λύση της $f(x) = 0$ στο $[a, b]$. Το πρόβλημα το οποίο θα μελετήσουμε τώρα είναι πώς θα προσεγγίσουμε την άγνωστη λύση ξ.

Θεωρούμε ένα $x_1 \in [a, b]$ το οποίο είναι *αρκετά κοντά* στο ξ, δηλαδή $\xi \approx x_1$, και το αντίστοιχο σημείο $(x_1, f(x_1))$ στο γράφημα της f. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ και η εξίσωσή της είναι $y = f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$. Σύμφωνα με την *προσεγγιστική ισότητα* $0 = f(\xi) \approx f(x_1)+f'(x_1)(\xi-x_1)$ την οποία είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, βρίσκουμε

$$\xi \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Παρατηρήστε ότι το σημείο $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ είναι το σημείο τομής του x-άξονα και της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$.

Ξεκινήσαμε με το x_1, περίπου ίσο με το (άγνωστο) ξ, και βρήκαμε το x_2, επίσης περίπου ίσο με το ξ. Αν επαναλάβουμε αυτήν την κατασκευή βρίσκουμε το $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ από το x_2, το $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$ από το x_3 και ούτω καθ' εξής. Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο μία ακολουθία αριθμών, η (x_n). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διαδικασία του Newton.** *Υπό ορισμένες προϋποθέσεις* η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στην λύση ξ και, επιπλέον, μπορούμε να βρούμε εκτίμηση του σφάλματος $x_n - \xi$.



Σχήμα 6.15: Από την πρώτη στη δεύτερη προσέγγιση.

Πρόταση 6.14. *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει δεύτερη παράγωγο στο $[a,b]$, ότι $0 < m \leq f'(x)$ και $0 < f''(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $f(a) < 0 < f(b)$.*
(i) Τότε υπάρχει μοναδικό $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
(ii) Ορίζουμε ακολουθία (x_n) αρχίζοντας με οποιοδήποτε $x_1 \in (\xi, b]$ και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ για κάθε n. Τότε η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $x_n \to \xi$.
(iii) Επίσης, ισχύει $0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M}(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi))^{2^{n-1}}$ για κάθε n.

Απόδειξη. (i) Από το θεώρημα του Bolzano συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. Το ξ είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$ αφού η f' είναι θετική στο $[a,b]$.
(ii) Επειδή $\xi < x_1 \leq b$, είναι $f(x_1) > 0$ και, επειδή $f'(x_1) > 0$, είναι $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1$. Κατόπιν, υπάρχει $\eta \in (\xi, x_1)$ ώστε $\frac{f(x_1)}{x_1-\xi} = \frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} = f'(\eta)$. Τώρα, επειδή η παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x_1)}{x_1-\xi} < f'(x_1)$ και επομένως $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} > \xi$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\xi < x_2 < x_1$. Αυτό φυσικά επαναλαμβάνεται επαγωγικά οπότε η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα μέσα στο $(\xi, b]$. Συνεπάγεται ότι η (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $\xi' \geq \xi$. Από τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1} \to 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f'(x) \leq N$ για κάθε x στο $[a,b]$. Άρα ισχύει $0 < \frac{f(x_n)}{N} \leq \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ για κάθε n οπότε $f(x_n) \to 0$. Συνεπάγεται $f(\xi') = 0$ και επομένως $\xi' = \xi$. Άρα $x_n \to \xi$.
(iii) Σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor, υπάρχει $\zeta \in (\xi, x_1)$ ώστε

$$0 = f(\xi) = f(x_1) + f'(x_1)(\xi - x_1) + \frac{f''(\zeta)}{2}(\xi - x_1)^2$$

και επομένως $x_2 = x_1 + (\xi - x_1) + \frac{f''(\zeta)}{2f'(x_1)}(\xi - x_1)^2$ ή, ισοδύναμα, $x_2 - \xi = \frac{f''(\zeta)}{2f'(x_1)}(x_1 - \xi)^2$. Άρα $0 < x_2 - \xi \leq \frac{M}{2m}(x_1 - \xi)^2$. Αυτό φυσικά ισχύει για κάθε δύο διαδοχικούς όρους της (x_n), δηλαδή ισχύει $0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{M}{2m}(x_n - \xi)^2$ για κάθε n. Τώρα, με επαγωγή αποδεικνύεται πολύ εύκολα η σχέση $0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M}(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi))^{2^{n-1}}$ για κάθε n. □

Αν επιλέξουμε το $x_1 \in (\xi, b]$ ώστε να είναι σχετικά κοντά στο ξ και, συγκεκριμένα, ώστε να είναι $0 < x_1 - \xi < \frac{2m}{M}$ τότε όπως θα δούμε η ακολουθία (x_n) συγκλίνει εξαιρετικά γρήγορα στο ξ. Πράγματι, τότε ισχύει $0 < \frac{M}{2m}(x_1 - \xi) < 1$, οπότε επειδή $2^{n-1} \to +\infty$ συνεπάγεται ότι $(\frac{M}{2m}(x_1-\xi))^{2^{n-1}} \to 0$ (και άρα $x_n \to \xi$). Γενικά, όταν $0 < \rho < 1$ (στην συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε $\rho = \frac{M}{2m}(x_1 - \xi)$) η γεωμετρική πρόοδος ρ^n τείνει "γρήγορα" στο 0 (για παράδειγμα, πιο "γρήγορα" από την ακολουθία $\frac{1}{n^k}$ για οποιαδήποτε τιμή του $k > 0$). Όμως, επειδή το 2^{n-1} τείνει στο $+\infty$ πιο "γρήγορα" από το n, η ακολουθία $\rho^{2^{n-1}}$ τείνει στο 0 ακόμη πιο "γρήγορα" από την ρ^n. Επομένως, αφού ισχύει $0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M}(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi))^{2^{n-1}} = \frac{2m}{M}\,\rho^{2n-1}$ για κάθε n, έχουμε ότι $x_n \to \xi$ πολύ "γρήγορα". Αυτό είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα της επαναληπτικής διαδικασίας του Newton διότι σε σχετικά λίγα βήματα, δηλαδή με σχετικά μικρό n, πετυχαίνουμε πολύ καλή προσέγγιση του ξ.

Ασκήσεις.

6.9.1. Αποδείξτε ότι η $y = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά ότι δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.
Γενικά, για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^k & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^k & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ και υπολογίστε (αν υπάρχει) την $\frac{d^n y}{dx^n}$ για κάθε n.

6.9.2. Βρείτε για κάθε n τις n-οστές παραγώγους των:

$$\tfrac{x+2}{x^2-1}, \quad \tfrac{x+1}{(x-1)^2}, \quad \tfrac{x^3}{x^2-1}, \quad \tfrac{1}{x^2+1}, \quad \sin(5x)\sin(7x).$$

6.9.3. Έστω ότι η $g : (a, \xi] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(a, \xi]$ και ότι η $h : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi, b)$. Αν $g(\xi) = h(\xi)$, $g'_-(\xi) = h'_+(\xi)$ και $g''_-(\xi) = h''_+(\xi)$, αποδείξτε ότι η $y = f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x) & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ έχει δεύτερη παράγωγο στο ξ και $f''(\xi) = g''_-(\xi) = h''_+(\xi)$.

6.9.4. (i) Αν το $p(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ αποδείξτε ότι το $p'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Αποδείξτε και το αντίστροφο. (Προσέξτε: το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.)
(ii) Έστω $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(N+1)}(x) = 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (όχι μονοσύνολο) I αν και μόνο αν το $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq N$ ή το μηδενικό πολυώνυμο.

6.9.5. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (a, b)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

6.9.6. Έστω ότι η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει δεύτερη παράγωγο στο (a, b) και ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν στο (a, b) περιέχονται δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.

6.9.7. (i) Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$. Αποδείξτε ότι $p^{(n)}(0) = n! a_n$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots, N$. Επίσης, αποδείξτε ότι $p^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \geq N+1$.
(ii) Έστω αριθμοί $y_0, y_1, \ldots, y_N$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x)$ βαθμού $\leq N$ ώστε να είναι $p^{(n)}(0) = y_n$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots, N$. Πόσες τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν;

6.9.8. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε η $f^{(n-1)}$ να είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ να υπάρχει στο εσωτερικό του I. Αν η f έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I αποδείξτε ότι η $f^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I.

6.9.9. Έστω $a < b$. Θεωρήστε την πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = (x-a)^n (x-b)^n$. Αποδείξτε ότι η $p^{(n)}$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, ότι έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες και ότι όλες αυτές οι ρίζες ανήκουν στο (a, b).

6.9.10. Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1, 1]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και έστω $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f^{(3)}(\xi) = 3$.

6.9.11. Αποδείξτε τον **τύπο του Leibniz**:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

6.9.12. Θεωρήστε την $y = f(x) = e^{-1/x}$ στο $(0, +\infty)$.
(i) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = x^{-2n} p_n(x) e^{-1/x}$ για κάθε $x > 0$, όπου $p_n(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Για παράδειγμα: $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1-2x$, $p_3(x) = 1 - 6x + 6x^2$ κ.τ.λ.
(ii) Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) + (1-2nx)p_n(x)$ για κάθε $x > 0$.
(iii) Αποδείξτε ότι $p_{n+2}(x) = (1 - 2(n+1)x)p_{n+1}(x) - n(n+1)x^2 p_n(x)$ για κάθε $x > 0$.
(iv) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $p_n(x)$ είναι το $(-1)^{n-1} n!$.
(v) Αποδείξτε ότι $x^2 p_n''(x) - (2nx - 2x - 1)p_n'(x) + n(n-1)p_n(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

6.9.13. Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = e^{-x^2}$.
(i) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ για κάθε x, όπου $H_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ κ.τ.λ.
(ii) Αποδείξτε ότι $H_{n+1}(x) = -H_n'(x) + 2xH_n(x)$ για κάθε x.
(iii) Αποδείξτε ότι $f'(x) = -2xf(x)$ για κάθε x. Παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 6.9.8 και αποδείξτε ότι $H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.
(iv) Αποδείξτε ότι $H_{n+1}'(x) = 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.
(v) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $H_n(x)$ είναι το 2^n.
(vi) Αποδείξτε ότι $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ για κάθε x.
Τα πολυώνυμα $H_n(x)$ ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite**.

6.9.14. Εφαρμόστε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για να βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των συναρτήσεων
$$y = x^3 - 4x^2 + x + 3, \quad y = xe^x, \quad y = x \log x.$$

6.9.15. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες οι συναρτήσεις
$$y = x^3 - 3x^2 + 6x, \quad y = x^2(x-1)^2, \quad y = \tfrac{x}{x+1}, \quad y = \tfrac{1}{\log x}, \quad y = \sin x.$$

6.9.16. (i) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν είναι πολυωνυμική βαθμού ≤ 1 ή μηδενική.

6.9.17. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_0, x_2 \in I$ με $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται *πάνω* στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο ότι για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται *πάνω* στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα ή, με άλλα λόγια, ότι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

6.9.18. Αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο ότι είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$.

6.9.19. Αν η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα I αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο ότι είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.

6.9.20. Βρείτε τα σημεία καμπής των συναρτήσεων
$$y = x^3 - 3x^2 + 6x, \quad y = x^2(x-1)^2, \quad y = \tfrac{x}{x+1}, \quad y = \tfrac{1}{\log x}, \quad y = \sin x.$$

6.9.21. Αποδείξτε ότι το 0 είναι σημείο καμπής της $y = \begin{cases} x|x| + x^2 \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Μπορεί να εφαρμοστεί η πρόταση 6.10 ή η πρόταση 6.11;

6.9.22. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a, b) και έστω $a < \xi < b$. Αν ισχύει είτε $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$ είτε $f'(x) \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$ αποδείξτε ότι το ξ είναι σημείο καμπής της f.

6.9.23. Βρείτε όλες τις ευθείες στήριξης (είτε από πάνω είτε από κάτω) των γραφημάτων των συναρτήσεων

$$y = x, \quad y = |x|, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = e^{-2x}, \quad y = \tfrac{1}{x^2+1}, \quad y = x \log x.$$

6.9.24. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν για κάθε x εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(x, f(x))$ αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I. Αντιστρόφως, αν η f είναι κυρτή στο I αποδείξτε ότι για κάθε x εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(x, f(x))$.

6.9.25. Έστω $a \geq 1$ ή $a \leq 0$. Αποδείξτε ότι
(i) $((1-t)x_1 + tx_2)^a \leq (1-t){x_1}^a + t{x_2}^a$ αν $x_1, x_2 > 0$, $0 \leq t \leq 1$.
(ii) $x^a \geq a\xi^{a-1}(x - \xi) + \xi^a$ αν $x, \xi > 0$.
Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται αν $0 \leq a \leq 1$.

6.9.26. Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι
(i) $a^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)a^{x_1} + ta^{x_2}$ αν $0 \leq t \leq 1$.
(ii) $a^x \geq a^\xi \log a\,(x - \xi) + a^\xi$.

6.9.27. Αποδείξτε ότι
(i) $\log((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)\log x_1 + t \log x_2$ αν $x_1, x_2 > 0$, $0 \leq t \leq 1$.
(ii) $\log x \leq \frac{1}{\xi}(x - \xi) + \log \xi$ αν $x, \xi > 0$.

6.9.28. Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση 6.8.28 με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας (i) το ότι η $y = \log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και (ii) το ότι η $x^{1/p}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $p > 1$.

6.9.29. (i) Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Έστω $x_1, \ldots, x_n \in I$ και $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ με $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$. Αποδείξτε ότι

$$f(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n) \leq \mu_1 f(x_1) + \cdots + \mu_n f(x_n).$$

(ii) Αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 6.8.29 χρησιμοποιώντας το ότι η $x^{1/q}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $q > 1$ και θεωρώντας $x_1 = \frac{b_1^q}{a_1^p}, \ldots, x_n = \frac{b_n^q}{a_n^p}$ και $w_1 = \frac{a_1^p}{A^p}, \ldots, w_n = \frac{a_n^p}{A^p}$, όπου $A = (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p}$.
(iii) Αποδείξτε την ανισότητα του Cauchy στην άσκηση 6.8.29 χρησιμοποιώντας το ότι η $y = \log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

6.9.30. Βρείτε τις προσεγγίσεις Taylor οποιασδήποτε τάξης των συναρτήσεων $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\log \frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x^2+1}$ με $\xi = 0$.

6.9.31. Εφαρμόστε το θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange στην $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4.00001]$ με $\xi = 4$ και $x = 4.00001$. Ποιό n πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

6.9.32. Προσαρμόστε την προηγούμενη άσκηση στην προσέγγιση των $\sin(1^o)$ και $\sin(31^o)$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου.

6.9.33. Στο θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}$ το η εξαρτάται φυσικά από το x. Αυτό το δηλώνουμε γράφοντας $\eta = \eta(x)$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει η παράγωγος τάξης $n + 2$ της f στο διάστημα I και είναι συνεχής στο ξ τότε $\lim_{x \to \xi} \frac{\eta(x) - \xi}{x - \xi} = \frac{1}{n+2}$ ή, με άλλα λόγια, $\eta(x) \approx \xi + \frac{x - \xi}{n+2}$.

6.9.34. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b), ότι $f(a) = f(b) = 0$ και ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}$ για κάθε $x \in (a, b)$.

6.9.35. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f'(a) = f'(b) = 0$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$.

6.9.36. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ και $|f''(x)| \leq N$ για κάθε x αποδείξτε ότι ισχυει $|f'(x)| \leq 2\sqrt{MN}$ για κάθε x.

6.9.37. (i) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν η f'' είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
(ii) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

6.9.38. Εφαρμόστε την επαναληπτική διαδικασία του Newton στην εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ στο διάστημα $[1, 2]$ για να προσεγγίσετε το $\sqrt{2}$. Ξεκινήστε με $x_1 = 2$ και βρείτε τα x_2, x_3, x_4. Εκτιμήστε για καθένα από αυτά το σφάλμα σε σχέση με την αληθινή τιμή του $\sqrt{2}$. Ποιό πρέπει να είναι το n ώστε το x_n να προσεγγίζει το $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

6.10 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δυο κανόνων του l' Hopitâl.

Α. Όρια συναρτήσεων.

Ο πρώτος κανόνας του l' Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πρώτος κανόνας του l' Hopitâl. *Έστω παραγωγίσιμες $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ καθώς και $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν (με τις προφανείς προσαρμογές) και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη. Οι f, g δεν θεωρούνται κατ' αρχάς ορισμένες στο σημείο ξ, αλλά τώρα τις ορίζουμε και στο ξ θέτοντας $f(\xi) = 0$ και $g(\xi) = 0$. Λόγω της υπόθεσης $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$, οι f, g είναι τώρα συνεχείς στο $[\xi, b)$.
Έστω $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Από το θεώρημα μέσης τιμής (Cauchy) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (\xi, b)$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$ συνεπάγεται ότι και το αντίστοιχο ζ είναι στο (ξ, b) και ικανοποιεί την $\xi < \zeta < \xi + \delta$ οπότε ισχύει $\left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \epsilon$ και άρα $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι ισχύει $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.
Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις: $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. Επίσης, η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$.
Τώρα ανάγουμε την περίπτωση $x \to +\infty$ στην περίπτωση $x \to 0+$.

Έστω παραγωγίσιμες $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $a > 0$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει και θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο.
Μέσω της αλλαγής μεταβλητής $t = \frac{1}{x}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $F(t) = f(\frac{1}{t}) = f(x)$ και $G(t) = g(\frac{1}{t}) = g(x)$ στο διάστημα $(0, \frac{1}{a})$ και παρατηρούμε ότι ισχύει $G(t) = g(x) \neq 0$ και $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) = -x^2 g'(x) \neq 0$ για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$. Επίσης, $\lim_{t\to0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ και επομένως το $\lim_{t\to0+} \frac{F'(t)}{G'(t)}$ υπάρχει. Άρα και το $\lim_{t\to0+} \frac{F(t)}{G(t)}$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το προηγούμενο. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+} \frac{F(t)}{G(t)}$, συνεπάγεται ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Με τον ίδιο τρόπο η περίπτωση $x \to -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \to 0-$. $\square$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{\sin x}$.
Στο $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin x \neq 0$ και $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \neq 0$. Επίσης, $\lim_{x\to0}(e^x - 1) = \lim_{x\to0} \sin x = 0$. Τώρα υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων: $\lim_{x\to0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. Επομένως $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{\sin x} = 1$.

Ο δεύτερος κανόνας του l' Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μία γενίκευσή της.

Δεύτερος κανόνας του l' Hopitâl. *Έστω παραγωγίσιμες $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ καθώς και $\lim_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν (με τις προφανείς προσαρμογές) και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \frac{\epsilon}{6}$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta'$. Επιλέγουμε τώρα κάποιο $x_0 \in (\xi, b)$ με $\xi < x_0 < \xi + \delta'$. Κατόπιν, επειδή $\lim_{x\to\xi+} |g(x)| = +\infty$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(x)| > \max\left\{|g(x_0)|, \frac{3}{\epsilon}|f(x_0)|, \frac{3|\eta|}{\epsilon}|g(x_0)|\right\}$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta''$. Τώρα ορίζουμε $\delta = \min\{x_0 - \xi, \delta''\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$ ικανοποιεί και τις $\xi < x < x_0 < \xi + \delta'$ και $\xi < x < \xi + \delta''$. Από το θεώρημα μέσης τιμής (Cauchy) συνεπάγεται ότι για κάθε τέτοιο x υπάρχει $\zeta \in (x, x_0)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Άρα και το ζ ανήκει στο (ξ, b) και ικανοποιεί την $\xi < \zeta < \xi + \delta'$ οπότε $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \eta\right| = \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \frac{\epsilon}{6}$. Συνεπάγεται

$$|f(x) - f(x_0) - \eta(g(x) - g(x_0))| < \frac{\epsilon}{6}|g(x) - g(x_0)|$$

οπότε

$$|f(x) - \eta g(x)| < \frac{\epsilon}{6}(|g(x)| + |g(x_0)|) + |f(x_0)| + |\eta||g(x_0)|$$

και άρα

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \frac{\epsilon}{6}\left(1 + \frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}\right) + \frac{|f(x_0)|}{|g(x)|} + |\eta|\frac{|g(x_0)|}{|g(x)|} < \frac{\epsilon}{6}(1+1) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ το οποίο ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Οι περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$ καθώς και οι περιπτώσεις $x\to\xi-$ και $x\to\xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x\to\pm\infty$ ανάγονται στις $x\to 0\pm$ όπως στην απόδειξη του πρώτου κανόνα. $\Box$

Στις υποθέσεις του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl δεν αναφέρεται το $\lim_{x\to\xi+}f(x)$: δεν μας ενδιαφέρει αν αυτό το όριο υπάρχει ούτε το ποιά ακριβώς είναι η τιμή του (αν υπάρχει). Επομένως οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl, όπως τον έχουμε διατυπώσει.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0 \qquad \text{αν } b>0,\ a>1.$$

Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση με $b=1$, δηλαδή το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$ με $a>1$. Τώρα $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ οπότε το όριο το οποίο πρέπει να αποδείξουμε είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Στο $(-\infty,+\infty)$ ισχύει $a^x\neq 0$ και $\frac{da^x}{dx}=a^x\log a\neq 0$. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1}{a^x\log a}$ και έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x\log a}=0$. Από τον δεύτερο κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$.
Η γενική περίπτωση ανάγεται στην ειδική: επειδή $a^{1/b}>1$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x}{(a^{1/b})^x}\big)^b=\big(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(a^{1/b})^x}\big)^b=0^b=0$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^b x}{x^a}=0 \qquad \text{αν } b>0,\ a>0.$$

Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$ με $a>0$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}x^a=+\infty$ οπότε προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Στο $(0,+\infty)$ ισχύει $x^a\neq 0$ και $\frac{dx^a}{dx}=ax^{a-1}\neq 0$. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\frac{1}{ax^a}$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0$.
Από τον δεύτερο κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$.
Για την γενική περίπτωση: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^b}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{\log x}{x^{a/b}}\big)^b=0^b=0$ διότι $\frac{a}{b}>0$.

Παράδειγμα. Το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ είναι περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Πράγματι, από την ανισότητα $x-\cos x\geq x-1$ συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}(x-\cos x)=+\infty$.
Το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα: από την ανισότητα $\big|\frac{\cos x}{x}\big|\leq\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$ συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ και επομένως $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{\cos x}{x})=1-0=1$.
Όμως ο δεύτερος κανόνας δεν βοηθά! Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1+\sin x}{1}=1+\sin x$ και δεν υπάρχει το όριό του διότι, όπως ήδη γνωρίζουμε, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του κανόνα του l' Hopitâl. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν όμως και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την εκάστοτε απροσδιόριστη μορφή σε μία από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και κατόπιν εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα του l' Hopitâl. Θα περιγράψουμε τελείως σχηματικά πώς περίπου χειριζόμαστε τις διάφορες περιπτώσεις.
(i) Έστω $\lim_x f(x)=0$, $\lim_x g(x)=\pm\infty$ και έστω ότι πρέπει να βρούμε το $\lim_x f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim_x\frac{f(x)}{1/g(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να μετατρέψουμε σε $\lim_x\frac{g(x)}{1/f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
(ii) Έστω $\lim_x f(x)=+\infty$, $\lim_x g(x)=-\infty$ και έστω ότι πρέπει να βρούμε το $\lim_x(f(x)+g(x))$,

δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim_x \left(\frac{1}{g(x)}+\frac{1}{f(x)}\right)f(x)g(x)$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Έτσι αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

(iii) Έστω $\lim_x f(x) = 0$, $\lim_x g(x) = 0$, ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο όριο του x και έστω ότι πρέπει να βρούμε το $\lim_x f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή 0^0. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim_x e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.

(iv) Έστω $\lim_x f(x) = +\infty$, $\lim_x g(x) = 0$ και έστω ότι πρέπει να βρούμε το $\lim_x f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim_x e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.

(v) Έστω $\lim_x f(x) = 1$, $\lim_x g(x) = \pm\infty$ και έστω ότι πρέπει να βρούμε το $\lim_x f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim_x e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)0$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0+} x\log x$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Γράφουμε $x\log x = \frac{\log x}{1/x}$ οπότε $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του δεύτερου κανόνα: $\frac{1}{x}\neq 0$ και $\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Τώρα, για τον λόγο των παραγώγων ισχύει $\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$. Άρα $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$.

Παράδειγμα. Το $\lim_{x\to 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0. Γράφουμε $x^x = e^{x\log x}$ και, βάσει του προηγούμενου ορίου, $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^0 = 1$ διότι η $y = e^x$ είναι συνεχής στον 0.

Παράδειγμα. Το $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$ είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Γράφουμε $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\sin x}$ και έχουμε $\lim_{x\to 0+}(x-\sin x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+} x\sin x = 0$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του πρώτου κανόνα: $x\sin x\neq 0$ και $\frac{d(x\sin x)}{dx} = \sin x + x\cos x\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ (διότι $\sin x > 0$, $x > 0$ και $\cos x > 0$ στο διάστημα αυτό). Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}$ και έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ διότι $\lim_{x\to 0+}(1-\cos x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+}(\sin x + x\cos x) = 0$. Σκοπεύοντας να εφαρμόσουμε (δεύτερη φορά) τον πρώτο κανόνα, βλέπουμε ότι ισχύει $\sin x + x\cos x\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $\frac{d}{dx}(\sin x + x\cos x) = 2\cos x - x\sin x\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{4})$. Για τον λόγο των παραγώγων ισχύει $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$. Άρα $\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = 0$ και επομένως $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}) = 0$.

Παράδειγμα. Το $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{x}{1+x^2})^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$. Κάνουμε την μετατροπή $(1+\frac{x}{1+x^2})^x = e^{x\log\frac{1+x+x^2}{1+x^2}}$ οπότε αναγόμαστε στο $\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{1+x+x^2}{1+x^2}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$. Γράφουμε λοιπόν $x\log\frac{1+x+x^2}{1+x^2} = \frac{\log\frac{1+x+x^2}{1+x^2}}{1/x}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του πρώτου κανόνα: $\frac{1}{x}\neq 0$ και $\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Μετά από πράξεις έχουμε για τον λόγο των παραγώγων ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)} = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{1+x+x^2}{1+x^2} = 1$ και άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\frac{1+x+x^2}{1+x^2}} = e^1 = e$ διότι η $y = e^x$ είναι συνεχής στο 1.

Β. Όρια ακολουθιών.

Εφαρμόζουμε τους κανόνες του l' Hopitâl στον υπολογισμό ορίων ακολουθιών.

Πρώτη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n\neq 0$ για κάθε n και έστω $a_n\to 0$ και $b_n\to 0$. Στόχος είναι ο υπολογισμός του $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$ αν αυτό υπάρχει.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις $f,g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(n) = a_n$ και $g(n) = b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Φυσικά, οι f,g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1,+\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ καθώς και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί αυτές τις συναρτήσεις και αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο όριο. Τώρα, εφαρμόζοντας την πρόταση 4.10 στην $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ και στην ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n=n$, συμπεραίνουμε ότι και το $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με τα δύο προηγούμενα όρια.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})$.
Επειδή $\arctan\frac{1}{n}\to 0$ και $\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})\to+\infty$, το όριο το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε είναι απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.
Γράφουμε $\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})=\arctan\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}=\frac{\arctan(1/n)}{\tan(1/n)}$ για να μετατρέψουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $y=f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ και $y=g(x)=\tan\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(\frac{2}{\pi},+\infty)$. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες οπότε υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos^2(1/x)}{1+x^2}=1$. Θεωρώντας την ακολουθία (n) με όριο $+\infty$, βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(1/n)}{\tan(1/n)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(1/x)}{\tan(1/x)}=1$.

Δεύτερη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n\neq 0$ για κάθε n και έστω $b_n\to+\infty$ ή $-\infty$. Στόχος, όπως πριν, είναι ο υπολογισμός του $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$ αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να βρούμε συναρτήσεις $f,g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(n)=a_n$ και $g(n)=b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1,+\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ή $-\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο όριο οπότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ και έχει την ίδια τιμή με τα δύο προηγούμενα όρια.

Παράδειγμα. Δυο σημαντικά όρια ακολουθιών είναι τα

$$\frac{n^b}{a^n}\to 0\quad\text{αν } b>0,\ a>1\qquad\qquad \frac{(\log n)^b}{n^a}\to 0\quad\text{αν } b>0,\ a>0.$$

Για να αποδείξουμε το πρώτο όριο εισάγουμε τις συναρτήσεις $y=x^b$ και $y=a^x$ οι οποίες ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες και αναγόμαστε στον υπολογισμό του $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}$. Το όριο αυτό έχει ήδη υπολογιστεί με τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl οπότε παίρνουμε το αποτέλεσμα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$ και εφαρμόζουμε την πρόταση 4.10 με την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n=n$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το δεύτερο όριο.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε (πάλι) το εξής κλασσικό όριο ακολουθίας:

$$\sqrt[n]{n}\to 1.$$

Γράφουμε $\sqrt[n]{n}=n^{1/n}=e^{(\log n)/n}$ για να μετατρέψουμε την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$ σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο παράδειγμα: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}=0$. Καταλήγουμε στο $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to+\infty}e^{(\log n)/n}=e^0=1$.

Ασκήσεις.

6.10.1. Χρησιμοποιώντας όρια αυτής της ενότητας, υπολογίστε τα

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{e^{x/4}}{x^{13}},\quad \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^{1/7}}{\log^5 x},\quad \lim_{x\to+\infty}\tfrac{e^{x/2}-\log^4 x}{x^{100}-e^{x/4}},\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{e^{-1/x^2}}{x^5},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-x^{10}),\quad \lim_{x\to 0+}(\tfrac{1}{x^5}-\tfrac{2}{x^2}+\log^7 x).$$

6.10.2. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του l' Hopitâl, βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1},\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6},\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\arctan x},\quad \lim_{x\to1}\frac{x^a-1}{x^b-1},\quad \lim_{x\to0+}x^{x^x-1},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{b^x-1}\ (a,b>0,b\neq1),\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4},\quad \lim_{x\to0}(\cot x-\tfrac{1}{x}),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)}{\log x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log(\log x))}{\log(\log x)},\quad \lim_{x\to0+}\sin x\log x,\quad \lim_{x\to1+}\log x\log(x-1),\quad \lim_{x\to0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6},$$

$$\lim_{x\to0}\tan^{-\cot(2x)}(x+\tfrac{\pi}{4}),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x},\quad \lim_{x\to0}(x+e^x)^{1/x},\quad \lim_{x\to0}(\tfrac{1}{e^x-1}-\tfrac{1}{x}),$$

$$\lim_{x\to0}(\tfrac{1}{\log(1+x)}-\tfrac{1}{x}),\quad \lim_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7},\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-\sin x}{\tan x-\arctan x}.$$

6.10.3. Μπορείτε να υπολογίσετε τα $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cosh x}{e^x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως τα όρια αυτά υπολογίζονται πολύ εύκολα χωρίς αναφορά στους κανόνες του l' Hopitâl;

6.10.4. Βρείτε a,b ώστε $\lim_{x\to0}(\frac{1-\cos x}{x^4}+ax^{-2}+b)=0$.

6.10.5. Αποδείξτε ότι η $y=\begin{cases}1/(\log|x|) & \text{αν } x\neq0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι Hölder συνεχής στο 0 (δείτε την άσκηση 5.1.9).

6.10.6. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$y=xe^{-x},\quad y=xe^{-x^2},\quad y=x\log x,\quad y=\frac{\log x}{x},\quad y=x^{1/x},\quad y=x^x,$$

βρίσκοντας τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία (τοπικού) μεγίστου και (τοπικού) ελαχίστου, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες).

6.10.7. Βρείτε τα

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3}{x^4}.$$

Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μία γνωστή παράγωγος οπότε δεν χρειάζεται ο πρώτος κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του. Προσπαθήστε να γενικεύσετε αυτά τα όρια.

6.10.8. Για ποιόν λόγο είναι προτιμότερο να μην εφαρμόσουμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl για να αποδειχθεί το όριο $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$;

6.10.9. Βρείτε τα

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2}{x^4},\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3}{x^5},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^6}.$$

Προσπαθήστε να γενικεύσετε αυτά τα όρια.

6.10.10. Βρείτε τα

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^4}.$$

Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μία γνωστή παράγωγος οπότε δεν χρειάζεται ο πρώτος κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του. Προσπαθήστε να γενικεύσετε αυτά τα όρια.

6.10.11. Έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) και $a<\xi<b$. Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}}{(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Προσοχή: πόσες φορές εφαρμόσατε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl; Παρατηρήστε ότι οι ασκήσεις 6.10.7, 6.10.9 και 6.10.10 είναι ειδικές περιπτώσεις.

6.10.12. Γενίκευση του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου.
(i) Έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), ότι $a<\xi<b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m-1)}(\xi)=0$ αποδείξτε ότι αν $f^{(2m)}(\xi)>0$ τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f και ότι αν $f^{(2m)}(\xi)<0$ τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
(Υπόδειξη: Δείτε την προηγούμενη άσκηση.)
(ii) Έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), ότι $a<\xi<b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m)}(\xi)=0$ και $f^{(2m+1)}(\xi)\neq 0$ αποδείξτε ότι το ξ δεν είναι ούτε σημείο τοπικού ελαχίστου ούτε σημείο τοπικού μεγίστου της f.

6.10.13. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $a<\xi<b$.
(i) Αν υπάρχει η $f'(\xi)$ αποδείξτε ότι $\lim_{h\to0+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}=f'(\xi)$. Μην χρησιμοποιήσετε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl.
(ii) Αν υπάρχει η $f''(\xi)$ αποδείξτε ότι $\lim_{h\to0+}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}=f''(\xi)$.
(iii) Αν υπάρχει η $f''(\xi)$ αποδείξτε ότι $\lim_{h\to0}\frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2}=f''(\xi)$.

6.10.14. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\eta$.

6.10.15. Έστω παραγωγίσιμη $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το $\eta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

6.10.16. Έστω $0<k<1$ και $n\in\mathbb{N}$. Σχεδιάστε το γράφημα της $y=e^{-x}(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})-k$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία θετική λύση της εξίσωσης $1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=ke^x$. Αν συμβολίσουμε x_n αυτήν την λύση αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.

6.10.17. (i) Αν η $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0 και $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(f(a/\sqrt{x})\big)^x=e^{-a^2/2}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(\cos(a/\sqrt{x})\big)^x=e^{-a^2/2}$.

6.10.18. (i) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0+}x^{-m}e^{-1/x}=0$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$.
(ii) Αποδείξτε ότι η $y=h(x)=\begin{cases}e^{-1/x} & \text{αν } x>0\\ 0 & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και, ειδικώτερα, ότι $h^{(n)}(0)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
(Υπόδειξη: Με επαγωγή αποδείξτε ότι η h είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και, ειδικώτερα, ότι $h^{(n)}(0)=0$. Θα βοηθήσει το πρώτο μέρος της άσκησης 6.9.9.)
(iii) Θεωρήστε την $y=f(x)=\begin{cases}e^{-2/(1-x^2)} & \text{αν } -1<x<1\\ 0 & \text{αν } |x|\geq 1\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$.

6.10.19. Αποδείξτε ότι η $y=e^x$ δεν είναι αλγεβρική συνάρτηση στο $(-\infty,+\infty)$.

6.10.20. Χρησιμοποιώντας γνωστά όρια ακολουθιών βρείτε τα όρια των ακολουθιών με n-οστους όρους:

$$\frac{\log^{13}n}{n^2},\quad \frac{\sqrt{n}}{\log^{95}n},\quad ne^{-n},\quad n^3e^{-n},\quad \frac{e^{n/5}}{n^{100}}.$$

6.10.21. Βάσει του $\sqrt[n]{n} \to 1$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n+1} \to 1$, $\sqrt[n]{n^2} \to 1$, $\sqrt[n]{n^3+3n^2+n+2} \to 1$.

6.10.22. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με n-οστους όρους:

$$\frac{\log(\log n)}{\log n}, \quad \frac{\log(\log(\log n))}{\log(\log n)}, \quad n - \cot\frac{1}{n}.$$

6.11 Τάξη μεγέθους, ασυμπτωτική ισότητα.

Α. Τάξη μεγέθους.

Ορισμός. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.*
(i) Αν $\lim_{x\to\xi} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0$ τότε λέμε ότι η f έχει **μικρότερη τάξη μεγέθους** *από την g κοντά στο ξ.*
(ii) Αν $\lim_{x\to\xi} |\frac{f(x)}{g(x)}| = +\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** *από την g κοντά στο ξ.*
(iii) Αν υπάρχουν $l, u > 0$ ώστε να ισχύει $l \leq |\frac{f(x)}{g(x)}| \leq u$ κοντά στο ξ τότε λέμε ότι η f έχει **ίδια τάξη μεγέθους** *με την g κοντά στο ξ.*

Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη-μηδενισμό των f, g κοντά στο ξ, η ισότητα $\lim_{x\to\xi} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi} |\frac{g(x)}{f(x)}| = +\infty$ και άρα το να έχει η f μικρότερη τάξη μεγέθους από την g κοντά στο ξ ισοδυναμεί με το να έχει η g μεγαλύτερη τάξη μεγέθους από την f κοντά στο ξ.

Αν υπάρχει το $\rho = \lim_{x\to\xi} |\frac{f(x)}{g(x)}|$ και είναι *θετικός αριθμός* τότε μπορούμε να επιλέξουμε *θετικό* αριθμό $l < \rho$ (για παράδειγμα το $l = \frac{\rho}{2}$) και αριθμό $u > \rho$ (για παράδειγμα το $u = 2\rho$) οπότε ισχύει $l < |\frac{f(x)}{g(x)}| < u$ κοντά στο ξ και άρα οι f, g έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο ξ.

Όσα είπαμε μπορούν φυσικά να διατυπωθούν και στις περιπτώσεις: $x \to \xi+$, $x \to \xi-$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Παράδειγμα. Έστω $a > 1$, $b > 0$. Τότε η $y = x^b$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y = a^x$ κοντά στο $+\infty$ διότι, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$.

Παράδειγμα. Έστω $b, c > 0$. Τότε η $y = \log^c x$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y = x^b$ κοντά στο $+\infty$ διότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^c x}{x^b} = 0$.

Παράδειγμα. Οι $y = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$ και $y = b_N x^N + \cdots + b_1 x + b_0$, με $a_N, b_N \neq 0$, έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ αφού το $\lim_{x\to+\infty} |\frac{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0}{b_N x^N + \cdots + b_1 x + b_0}| = |\frac{a_N}{b_N}|$ είναι θετικός αριθμός.
Όμως αν η $y = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$, με $a_N \neq 0$, έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό της $y = b_M x^M + \cdots + b_1 x + b_0$, με $b_M \neq 0$, δηλαδή αν $N < M$, τότε η πρώτη συνάρτηση έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την δεύτερη κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \cdots + b_1 x + b_0} = 0$.

Παράδειγμα. Έστω $a > 1$, $b > 0$. Τότε η $y = a^{-1/x}$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y = x^b$ κοντά στο 0 από τα δεξιά του διότι $\lim_{x\to0+} \frac{a^{-1/x}}{x^b} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^b}{a^t} = 0$.

Παράδειγμα. Οι $y = 1 - \cos x$ και $y = x^2$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο 0 διότι το $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ είναι θετικός αριθμός.

Παράδειγμα. Οι $y = \sin x$ και $y = x$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο 0 διότι το $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ είναι θετικός αριθμός.

Παράδειγμα. Έστω $b, c > 0$. Τότε η $y = \log^c \frac{1}{x}$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y = \frac{1}{x^b}$ κοντά στο 0 από τα δεξιά του διότι $\lim_{x\to0+} \frac{\log^c(1/x)}{1/x^b} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log^c t}{t^b} = 0$.

Παράδειγμα. Το $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2+\sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως οι $y=2x+x\sin x$ και $y=x$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, επειδή $\frac{2x+x\sin x}{x}=2+\sin x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $1\leq\frac{2x+x\sin x}{x}\leq 3$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Θα περιγράψουμε τώρα ειδικά για την περίπτωση $x\to+\infty$ μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την *πολυωνυμική*, την *εκθετική* και την *λογαριθμική τάξη μεγέθους*.

Είδαμε στο τρίτο παράδειγμα ότι όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού N έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$.

Ορισμός. *Λέμε ότι η $y=a_Nx^N+\cdots+a_1x+a_0$, με $a_N\neq 0$, έχει* **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** *ή, ειδικώτερα, πολυωνυμική τάξη μεγέθους* **βαθμού** *N κοντά στο $+\infty$.*

Σύμφωνα με το τρίτο παράδειγμα, μπορούμε να "ιεραρχήσουμε" τις πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ *ανάλογα με τον βαθμό τους*: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού N η πιο απλή είναι η $y=x^N$. Πρέπει να πούμε ότι ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού N" χαρακτηρίζει όχι μόνο τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού N αλλά και *κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=x^N$* κοντά στο $+\infty$.

Ορισμός. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχουν $l,u>0$ ώστε να ισχύει $l\leq|\frac{f(x)}{x^N}|\leq u$ κοντά στο $+\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει* **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** *ή, ειδικώτερα, πολυωνυμική τάξη μεγέθους* **βαθμού** *N κοντά στο $+\infty$.*

Παράδειγμα. Η $y=\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}$, με $a_n,b_m\neq 0$, όπου $n>m$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $N=n-m$ κοντά στο $+\infty$ διότι $\lim_{x\to+\infty}|(\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0})/x^{n-m}|=|\frac{a_n}{b_m}|>0$.

Η "πολυωνυμική τάξη μεγέθους" είναι ειδική περίπτωση της λεγόμενης "τάξης μεγέθους δύναμης".

Ορισμός. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει* **τάξη μεγέθους δύναμης βαθμού** *$b>0$ κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=x^b$ κοντά στο $+\infty$, δηλαδή αν υπάρχουν $l,u>0$ ώστε να ισχύει $l\leq|\frac{f(x)}{x^b}|\leq u$ κοντά στο $+\infty$.*

Είναι φανερό ότι οι τάξεις μεγέθους δύναμης "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον βαθμό τους αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{b_1}}{x^{b_2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{b_2-b_1}}=0$ αν $0<b_1<b_2$. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε συνάρτηση με τάξη μεγέθους δύναμης κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, αν η f έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια $y=x^b$, με $b>0$, τότε υπάρχουν $l,u>0$ ώστε να ισχύει $l\leq|\frac{f(x)}{x^b}|\leq u$ και επομένως $|f(x)|\geq lx^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(lx^b)=+\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$.

Ορισμός. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει* **εκθετική τάξη μεγέθους** *κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=a^x$ κοντά στο $+\infty$ για κάποιο $a>1$, δηλαδή αν υπάρχουν $l,u>0$ ώστε να ισχύει $l\leq|\frac{f(x)}{a^x}|\leq u$ κοντά στο $+\infty$.*

Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με την βάση a. Πράγματι, έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1^x}{a_2^x}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{a_1}{a_2})^x=0$ αν $1<a_1<a_2$.

Ορισμός. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει* **λογαριθμική τάξη μεγέθους** *κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=(\log x)^c$ κοντά στο $+\infty$ για κάποιο $c>0$, δηλαδή αν υπάρχουν $l,u>0$ ώστε να ισχύει $l\leq|\frac{f(x)}{(\log x)^c}|\leq u$ κοντά στο $+\infty$.*

Οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον εκθέτη c. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^{c_1}}{(\log x)^{c_2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\log x)^{c_2-c_1}}=0$ αν $0<c_1<c_2$.

Όπως και με τις συναρτήσεις τάξης μεγέθους δύναμης, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στα πρώτα δύο παραδείγματα είδαμε ότι:

Κοντά στο $+\infty$ κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε τάξη μεγέθους δύναμης και κάθε τάξη μεγέθους δύναμης είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.

Β. Ασυμπτωτική ισότητα. Μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον.

Ορισμός. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.*
(i) Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και διαβάζουμε "η f είναι **μικρό όμικρον** *της g" κοντά στο ξ.*
(ii) Αν η $\frac{f}{g}$ είναι φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή αν υπάρχει u ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq u|g(x)|$ κοντά στο ξ, τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και διαβάζουμε "η f είναι **μεγάλο όμικρον** *της g" κοντά στο ξ.*
Όλα αυτά διατυπώνονται με ανάλογο τρόπο και στις περιπτώσεις: $x \to \xi+$, $x \to \xi-$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Παράδειγμα. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g κοντά στο όριο του x τότε $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ κοντά στο όριο του x.
Το αντίστροφο ισχύει φυσικά αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο όριο του x.
Για παράδειγμα, $(\log x)^c = \mathrm{o}(x^b)$ και $x^b = \mathrm{o}(a^x)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $a > 1, b > 0$ και $c > 0$.
Επίσης, $x^{b_1} = \mathrm{o}(x^{b_2})$ κοντά στο $+\infty$ αλλά και $x^{b_2} = \mathrm{o}(x^{b_1})$ κοντά στο 0 αν $0 < b_1 < b_2$.

Παράδειγμα. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g ή την ίδια τάξη μεγέθους με την g κοντά στο όριο του x τότε $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ κοντά στο όριο του x.
Για παράδειγμα, $\sin x = \mathrm{O}(x)$ και $1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$ κοντά στο 0.

Ορισμός. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε γράφουμε*

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** *με την g κοντά στο ξ. Η ορολογία είναι ανάλογη και στις περιπτώσεις: $x \to \xi+$, $x \to \xi-$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.*

Παρατηρήστε ότι από την σχέση $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ κοντά στο ξ και επομένως ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Δηλαδή αν $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ τότε ισχύει $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.

Παράδειγμα. $\sin x \sim x$ και $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ κοντά στο 0.

Παράδειγμα. $e^x - 1 \sim x$ κοντά στο 0 διότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{d\,e^x}{dx}\Big|_{x=0} = 1$.

Παράδειγμα. $\log(1 + x) \sim x$ κοντά στο 0 διότι $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{d\,\log x}{dx}\Big|_{x=1} = 1$.

Παράδειγμα. $\tan x \sim \frac{1}{(\pi/2)-x}$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ διότι $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{1/((\pi/2)-x)} = \lim_{t\to 0} t \cot t = 1$.

Δείτε την εξής χρήσιμη παρατήρηση.

Η σχέση $f(x) - g(x) = o(cg(x))$, όπου c είναι οποιοσδήποτε αριθμός $\neq 0$, είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ισότητα $f(x) \sim g(x)$.

Πράγματι, η $f(x) - g(x) = \mathrm{o}(cg(x))$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_x \frac{f(x)-g(x)}{cg(x)} = 0$, αυτή με την $\lim_x \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$, αυτή με την $\lim_x (\frac{f(x)}{g(x)} - 1) = 0$, αυτή με την $\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ κι αυτή με την $f(x) \sim g(x)$.

Συνδυάζοντας την τελευταία παρατήρηση με τα αμέσως προηγούμενα παραδείγματα προκύπτουν τα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα. $\sin x - x = \mathrm{o}(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{o}(x^2)$ κοντά στο 0.

Παράδειγμα. $e^x - 1 - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στο 0.

Παράδειγμα. $\log(1 + x) - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στο 0.

Παράδειγμα. $\tan x - \frac{1}{(\pi/2)-x} = \mathrm{o}(\frac{1}{(\pi/2)-x})$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$.

Αν όλες οι συναρτήσεις $g_1, \dots, g_n$ είναι μικρό όμικρον της ίδιας g κοντά στο όριο του x τότε και το άθροισμά τους $g_1 + \cdots + g_n$ είναι μικρό όμικρον της g κοντά στο όριο του x. Αυτό είναι προφανές:

$$\lim_x \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)} = \lim_x \frac{g_1(x)}{g(x)} + \cdots + \lim_x \frac{g_n(x)}{g(x)} = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Αν σε κάποιο άθροισμα συναρτήσεων $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \dots, g_n$ μικρό όμικρον της g κοντά στο όριο του x τότε η g χαρακτηρίζεται **κύριος όρος** του αθροίσματος κοντά στο όριο του x και τότε οι f, g είναι ασυμπτωτικά ίσες κοντά στο όριο του x. Πράγματι,

$$\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_x \big(1 + \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)}\big) = 1.$$

Το να μπορούμε να διακρίνουμε τον κύριο όρο σε κάποιο άθροισμα συναρτήσεων είναι κάτι *χρήσιμο*. Για παράδειγμα, αν στο άθροισμα $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ ο κύριος όρος g έχει κάποιο όριο όταν το x τείνει στο όριό του τότε και το άθροισμα f έχει *το ίδιο όριο*. Διότι, όπως μόλις είδαμε, οι f, g είναι ασυμπτωτικά ίσες κοντά στο όριο του x και άρα $\lim_x f(x) = \lim_x (\frac{f(x)}{g(x)} g(x)) = \lim_x g(x)$. Ένα ακόμη παράδειγμα: αν στα αθροίσματα $g + g_1 + \cdots + g_n$ και $h + h_1 + \cdots + h_m$ οι g και h είναι οι κύριοι όροι, αντιστοίχως, κοντά στο όριο του x τότε οι $\frac{g+g_1+\cdots+g_n}{h+h_1+\cdots+h_m}$ και $\frac{g}{h}$ είναι ασυμπτωτικά ίσες κοντά στο όριο του x και επομένως αν η $\frac{g}{h}$ έχει κάποιο όριο όταν το x τείνει στο όριό του τότε και η $\frac{g+g_1+\cdots+g_n}{h+h_1+\cdots+h_m}$ έχει το ίδιο όριο.

Παράδειγμα. Βάσει των προηγουμένων μπορούμε να δούμε με “νέο μάτι” τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων. Επειδή $x^n = \mathrm{o}(x^N)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $n < N$, συνεπάγεται ότι στο πολυώνυμο $a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0$, με $a_N \neq 0$, ο όρος $a_N x^N$ είναι κύριος όρος κοντά στο $+\infty$ οπότε

$$a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0 \sim a_N x^N$$

και επομένως $\lim_{x\to+\infty}(a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to+\infty} a_N x^N$. Ομοίως,

$$\frac{a_N x^N+\cdots+a_1 x+a_0}{b_M x^M+\cdots+b_1 x+b_0} \sim \frac{a_N x^N}{b_M x^M}$$

κοντά στο $+\infty$ οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_N x^N+\cdots+a_1 x+a_0}{b_M x^M+\cdots+b_1 x+b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_N x^N}{b_M x^M}$.

Παράδειγμα. Και στα δυο αθροίσματα $xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2 e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x} + \log x - x^2 e^x$ ο πρώτος τους όρος είναι ο κύριος όρος κοντά στο $+\infty$. Άρα $\frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} \sim \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}$ κοντά στο $+\infty$ οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.

Ασκήσεις.

6.11.1. (i) Έστω $a > 1$. Ιεραρχήστε κατά τάξη μεγέθους τις $y = a^x$, $y = a^{a^x}$ και $y = a^{a^{a^x}}$ κοντά στο $+\infty$. Γενικεύστε.
(ii) Ιεραρχήστε κατά τάξη μεγέθους τις $y = \log x$, $y = \log(\log x)$ και $y = \log(\log(\log x))$ κοντά στο $+\infty$. Γενικεύστε.

6.11.2. (i) Αποδείξτε ότι οι $y = x$, $y = \log(e^x + x \log x)$ και $y = e^{(1+(1/x)) \log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι $y = \log \frac{1}{x}$ και $y = \frac{x^2 + x \log(1/x)}{\sin x + x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο 0.

6.11.3. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ των $y = \frac{x^3 e^x - x^5 e^{x/2}}{x e^x + \sin x}$, $y = e^{x/5} + x^3 e^{x/6} - x$ και $y = e^{3 \log(2 + \log x)}$ σε τάξεις μεγέθους δύναμης, εκθετικές και λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

6.11.4. Λέμε ότι μία συνάρτηση έχει **αντίστροφη τάξη μεγέθους δύναμης** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = \frac{1}{x^b}$ με $b > 0$. Ομοίως, λέμε ότι μία συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = \frac{1}{a^x}$ με $a > 0$ ή κάποια από τις $y = \frac{1}{\log^c x}$ με $c > 0$, αντιστοίχως, κοντά στο $+\infty$.
(i) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη τάξη μεγέθους δύναμης ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$.
(ii) Αποδείξτε ότι κοντά στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη τάξη μεγέθους δύναμης και ότι κάθε αντίστροφη τάξη μεγέθους δύναμης είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους.
(iii) Ιεραρχήστε τις αντίστροφες τάξεις μεγέθους δύναμης μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους.
(iv) Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$ με $a_n, b_m \neq 0$ και $n < m$ έχει αντίστροφη τάξη μεγέθους δύναμης κοντά στο $+\infty$.
(v) Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ των $y = e^{-x} + 2e^{-x^2}$, $y = \frac{1}{\log(x + \log x)}$, $y = \log(e^{1/x} + \frac{1}{x^2})$ σε αντίστροφες τάξεις μεγέθους δύναμης, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

6.11.5. Αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{1-x} - 1 = \mathsf{o}(1), \quad \tfrac{1}{1-x} - (1 + x) = \mathsf{o}(x), \quad \tfrac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = \mathsf{o}(x^2)$$

κοντά στο 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στο 0. Γενικεύστε.

6.11.6. Αποδείξτε ότι

$$e^x - 1 = \mathsf{o}(1), \quad e^x - (1 + \tfrac{x}{1!}) = \mathsf{o}(x), \quad e^x - (1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!}) = \mathsf{o}(x^2)$$

κοντά στο 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στο 0. Γενικεύστε.

6.11.7. Αποδείξτε ότι

$$\sin x - (\tfrac{x}{1!} - \tfrac{x^3}{3!}) = \mathsf{o}(x^3), \quad \cos x - (1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!}) = \mathsf{o}(x^4),$$

$$\sin x - (\tfrac{x}{1!} - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!}) = \mathsf{o}(x^5), \quad \cos x - (1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!}) = \mathsf{o}(x^6)$$

κοντά στο 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στο 0. Γενικεύστε.

6.11.8. Αποδείξτε ότι

$$\log(1 + x) - x = \mathsf{o}(x), \ \log(1 + x) - (x - \tfrac{x^2}{2}) = \mathsf{o}(x^2), \ \log(1 + x) - (x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3}) = \mathsf{o}(x^3)$$

κοντά στο 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στο 0. Γενικεύστε.

6.11.9. Αποδείξτε ότι

$$\arctan x - x = \mathrm{o}(x), \quad \arctan x - (x - \tfrac{x^3}{3}) = \mathrm{o}(x^3), \quad \arctan x - (x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5}) = \mathrm{o}(x^5)$$

κοντά στο 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στο 0. Γενικεύστε.

6.11.10. (i) Έστω $f(x) - (a + bx + cx^2 + dx^3) = \mathrm{o}(x^3)$ κοντά στο 0. Αποδείξτε διαδοχικά ότι $f(x) - (a + bx + cx^2) = \mathrm{o}(x^2)$, $f(x) - (a + bx) = \mathrm{o}(x)$ και $f(x) - a = \mathrm{o}(1)$ κοντά στο 0.
(ii) Υπολογίστε διαδοχικά τα a, b, c, d ώστε $\frac{x}{e^x - 1} - (a + bx + cx^2 + dx^3) = \mathrm{o}(x^3)$ κοντά στο 0.

6.11.11. Διατυπώστε την άσκηση 6.10.11 της προηγούμενης ενότητας ως εξής.
Έστω ότι η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $a < \xi < b$. Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός τότε

$$f(x) - \Big(f(\xi) + \frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x - \xi)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \Big) = \mathrm{o}((x - \xi)^n) \quad \text{κοντά στο } \xi.$$

Παρατηρήστε ότι τα αποτελέσματα των ασκήσεων 6.11.5 έως 6.11.9 είναι ειδικές περιπτώσεις του αποτελέσματος αυτής της άσκησης.

6.11.12. Βρείτε τους κύριους όρους κοντά στο $+\infty$ των αθροισμάτων:

$$e^{2x} \log x - x^5 e^x, \quad x \log x - \tfrac{x^2}{\log x} + x\sqrt{x}\log(\log x), \quad x^2 \log x - x^2 + 3x \sin x.$$

6.11.13. Βρείτε τους κύριους όρους κοντά στο 0 των αθροισμάτων:

$$\tfrac{2}{x} + \tfrac{1}{x\sqrt{x}} - \tfrac{3}{\sqrt{x}}, \quad 1 + 2x - x\sqrt{x}, \quad \tfrac{1}{\sin^2 x} + \tfrac{3}{x} - \tfrac{1}{x\sqrt{x}}.$$

6.11.14. (i) Αν η f είναι μικρό όμικρον της g αποδείξτε ότι η f είναι μεγάλο όμικρον της g. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά $\mathrm{o}(g(x)) = \mathrm{O}(g(x))$.
Προσέξτε: *δεν* ισχύει $\mathrm{O}(g(x)) = \mathrm{o}(g(x))$.
(ii) Είδαμε ότι αν οι f_1 και f_2 είναι μικρό όμικρον της g τότε η $f_1 + f_2$ είναι μικρό όμικρον της g. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά $\mathrm{o}(g(x)) + \mathrm{o}(g(x)) = \mathrm{o}(g(x))$.
Αποδείξτε και τα ανάλογα $\mathrm{O}(g(x)) + \mathrm{O}(g(x)) = \mathrm{O}(g(x))$, $\mathrm{o}(g_1(x))\mathrm{O}(g_2(x)) = \mathrm{o}(g_1(x)g_2(x))$, $\mathrm{O}(g_1(x))\mathrm{O}(g_2(x)) = \mathrm{O}(g_1(x)g_2(x))$.

Κεφάλαιο 7

Ολοκληρώματα Riemann.

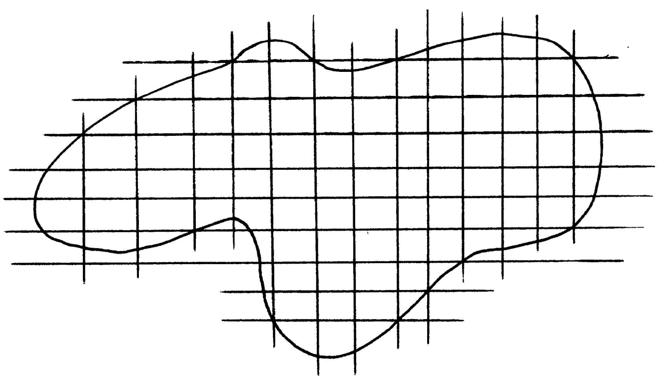
7.1 Ένα γεωμετρικό και ένα φυσικό πρόβλημα.

Α. Εμβαδό.

Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε επιφάνειας είναι γνωστό από την αρχαιότητα. Οι πιο απλές επιφάνειες από αυτήν την άποψη είναι οι επίπεδες επιφάνειες και οι πιο απλές από όλες είναι οι τριγωνικές και οι παραλληλόγραμμες επιφάνειες για τα εμβαδά των οποίων υπάρχουν οι γνωστοί στοιχειώδεις τύποι υπολογισμού. Το ίδιο απλές είναι και οι επιφάνειες με πολυγωνικό σχήμα. Τις επιφάνειες αυτές μπορούμε με κατάλληλες ευθείες να τις χωρίσουμε σε τριγωνικές ή παραλληλόγραμμες επιφάνειες οπότε ο προσδιορισμός των εμβαδών τους ανάγεται στην άθροιση των εμβαδών των επιμέρους επιφανειών και άρα είναι “εννοιολογικά απλός”.

Το ουσιαστικό πρόβλημα είναι *ο προσδιορισμός του εμβαδού μίας επίπεδης επιφάνειας της οποίας το σύνορο είναι καμπυλόγραμμο*. Τέτοια παραδείγματα είναι πολλά: δίσκοι, δακτύλιοι, ελλειπτικά ή παραβολικά ή υπερβολικά χωρία κ.τ.λ. Η μοναδική μέθοδος για τον υπολογισμό εμβαδών τέτοιων καμπυλόγραμμων σχημάτων είναι η προσέγγισή τους από κατάλληλα πολυγωνικά σχήματα. Θα περιγράψουμε μία από τις παραλλαγές αυτής της μεθόδου.

Με την βοήθεια κατάλληλων οριζόντιων και κατακόρυφων ευθειών χωρίζουμε την επιφάνεια



Σχήμα 7.1: Χωρισμός μιας επιφάνειας σε στοιχειώδεις επιφάνειες.

σε μικρότερες “στοιχειώδεις επιφάνειες” το σύνορο καθεμίας από τις οποίες αποτελείται από τέσσερις πλευρές: ένα οριζόντιο ή κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα, δύο ευθ. τμήματα κάθετα προς το προηγούμενο στα άκρα του και μία καμπυλόγραμμη πλευρά. Αρκεί λοιπόν να περιγράψουμε τον υπολογισμό του εμβαδού οποιασδήποτε τέτοιας “στοιχειώδους επιφάνειας” και, ειδικώτερα, αρκεί να ασχοληθούμε με την περίπτωση κατά την οποία η καμπυλόγραμμη πλευρά είναι η *πάνω* πλευρά της “στοιχειώδους επιφάνειας”. Κάθε άλλη “στοιχειώδης επιφάνεια” προκύπτει από μία τέτοια είτε με στροφή κατά ορθή γωνία είτε με ανάκλαση ως προς την πλευρά η οποία είναι απέναντι στην καμπυλόγραμμη πλευρά. Επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα αξόνων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κάτω βάση της "στοιχειώδους επιφάνειας" είναι ένα διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα, ότι η απέναντι πλευρά είναι το γράφημα συνάρτησης $y = f(x)$ για $a \leq x \leq b$ και ότι οι δύο άλλες πλευρές είναι το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(b, 0)$ και $(b, f(b))$. Φυσικά, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Θα ασχοληθούμε στο εξής με τον υπολογισμό του εμβαδού μίας τέτοιας "στοιχειώδους επιφάνειας", με δεδομένα το $[a, b]$ και την $y = f(x)$. Για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι η $y = f(x)$ είναι *συνεχής* στο $[a, b]$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή A και το εμβαδό της E.

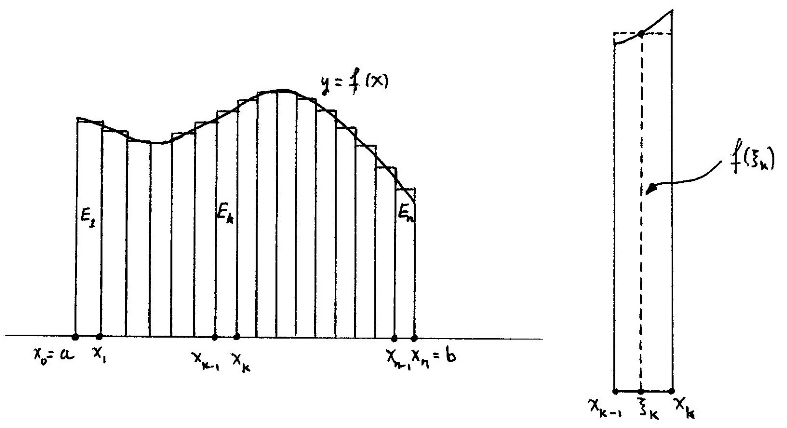
Η μέθοδος. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε *πολύ μικρά* διαδοχικά υποδιαστήματα επιλέγοντας διαδοχικά σημεία: $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n$ με $x_0 = a$ και $x_n = b$. Τα διαδοχικά υποδιαστήματα είναι τα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$. Είναι φανερό ότι όσο πιο μικρά είναι τα υποδιαστήματα αυτά τόσο πιο μεγάλο είναι το πλήθος τους n. Τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία** και το σύνολό τους $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του $[a, b]$. Φυσικά, αν $n = 1$ τότε το μοναδικό υποδιάστημα είναι το $[x_0, x_1] = [a, b]$. Γενικά, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του $[a, b]$. Διότι υπάρχουν άπειρες επιλογές του πλήθους n των υποδιαστημάτων τα οποία ορίζονται από την διαμέριση και, για κάθε $n \geq 2$, υπάρχουν άπειρες επιλογές διαιρετικών σημείων $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Παράδειγμα. Μία πολύ απλή διαμέριση είναι εκείνη η οποία χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Συγκεκριμένα: $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$.

Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων τα οποία ορίζονται από αυτήν, δηλαδή

$$\text{πλάτος}(\Delta) = \max\left\{x_k - x_{k-1} \,|\, 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Όπως έχουμε πει, το πλάτος της Δ πρέπει να είναι πολύ μικρό.



Σχήμα 7.2: Χωρισμός σε κατακόρυφες λεπτές στοιχειώδεις επιφάνειες.

Αφού επιλέξουμε την διαμέριση Δ του $[a, b]$, παρατηρούμε ότι το εμβαδό της αρχικής "στοιχειώδους επιφάνειας" είναι το άθροισμα των εμβαδών των n διαδοχικών "στοιχειωδών επιφανειών", από τις οποίες η k-οστή έχει ως κάτω βάση το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, ως άνω βάση το γράφημα της $y = f(x)$ για $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ και ως πλαϊνές πλευρές το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_{k-1}, 0)$ και $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ και το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_k, 0)$ και $(x_k, f(x_k))$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή A_k και το εμβαδό της E_k. Είναι λοιπόν

$$E = E_1 + \cdots + E_n.$$

Το πρόβλημα υπολογισμού των εμβαδών των επιφανειών $A_1, \dots, A_n$ παραμένει, διότι όλες είναι, εν γένει, καμπυλόγραμμες. Όμως υπάρχει η εξής διαφορά: επειδή το πλάτος της Δ είναι πολύ μικρό, κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό και καθώς το x διατρέχει το $[x_{k-1}, x_k]$ το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ δεν είναι μεν σταθερό αλλά οι διακυμάνσεις του από σημείο σε σημείο είναι αμελητέες ή, με άλλα λόγια, είναι *περίπου σταθερό. Αυτό οφείλεται στην συνέχεια της συνάρτησης* $y = f(x)$. Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε **ενδιάμεσο σημείο** $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ τότε οι τιμές του $f(x)$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι *περίπου ίσες* με το $f(\xi_k)$ οπότε η επιφάνεια A_k είναι *περίπου ίδια* με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\widetilde{A_k}$ το οποίο έχει κάτω πλευρά το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος ίσο με $f(\xi_k)$. Επομένως και το εμβαδό E_k της A_k είναι *περίπου ίσο* με το εμβαδό $\widetilde{E_k} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $\widetilde{A_k}$ ή, συμβολικά,

$$E_k \approx \widetilde{E_k} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Υπολογίζουμε λοιπόν για κάθε $k = 1, \dots, n$ το αντίστοιχο $\widetilde{E_k}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα $\widetilde{E} = \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n}$ το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από το εμβαδό της ένωσης $\widetilde{A}$ των διαδοχικών ορθογώνιων παραλληλογράμμων $\widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_n}$. Επειδή κάθε E_k είναι περίπου ίσο με το αντίστοιχο $\widetilde{E_k}$, συμπεραίνουμε ότι και το $E = E_1 + \cdots + E_n$ είναι περίπου ίσο με το $\widetilde{E} = \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ ή, συμβολικά,

$$E \approx \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Επομένως μπορούμε να προσεγγίσουμε το άγνωστο E με το γνωστό $\widetilde{E}$. Αυτό θεωρείται γνωστό διότι το υπολογίζουμε παίρνοντας οποιοδήποτε σημείο ξ_k στο αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$, υπολογίζοντας το $f(\xi_k)$, πολλαπλασιάζοντάς το με το μήκος $x_k - x_{k-1}$ και προσθέτοντας όλα αυτά τα γινόμενα για $k = 1, \dots, n$. Συμβολίζουμε Ξ το σύνολο $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ όλων των ενδιάμεσων σημείων τα οποία επιλέξαμε, ένα σε κάθε υποδιάστημα. Παρατηρούμε ότι για κάθε Δ υπάρχουν άπειρες επιλογές συνόλων Ξ ενδιάμεσων σημείων. Το $f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ θα το συμβολίζουμε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Παράδειγμα. Δύο απλές επιλογές ενδιάμεσων σημείων είναι εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το αριστερό άκρο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = x_{k-1}$, και εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = x_k$. Μία ακόμη απλή επιλογή ενδιάμεσων σημείων είναι εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το μέσο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.

Συνοψίζουμε:

Θεωρούμε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ *του* $[a, b]$ *και σύνολο ενδιάμεσων σημείων* $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ *και βρίσκουμε το* $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$*. Τότε το* $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ *προσεγγίζει το* E *όταν το πλάτος της* Δ *είναι πολύ μικρό. Συμβολικά:*

$$E \approx \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Β. Μάζα.

Στην ενότητα 6.1 θεωρήσαμε μία ευθύγραμμη ράβδο την οποία ταυτίσαμε με το διάστημα $[a, b]$ ενός x-άξονα και συμβολίσαμε $m(x)$ την μάζα του τμήματος $[a, x]$ της ράβδου για $a \leq x \leq b$. Αν συμβολίσουμε $d(x)$ την (σημειακή) γραμμική πυκνότητα του υλικού της ράβδου σε κάθε σημείο $x \in [a, b]$ είδαμε ότι η συνάρτηση $d(x)$ προσδιορίζεται από την συνάρτηση $m(x)$ μέσω του τύπου $d(x) = m'(x)$: η πυκνότητα είναι η παράγωγος της μάζας. Τώρα θα μελετήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή τον προσδιορισμό της μάζας της ράβδου από την συνάρτηση της πυκνότητας.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $y = d(x)$ δεν παρουσιάζει απότομες αλλαγές σε κοντινά σημεία x ή, με άλλα λόγια, ότι είναι συνεχής στο $[a, b]$ και εφαρμόζουμε και πάλι την μέθοδο των διαμερίσεων. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ της ράβδου $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε m_k την μάζα του υποδιαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$, οπότε

$$m = m_1 + \cdots + m_n.$$

Επειδή η $y = d(x)$ είναι συνεχής, καθώς το x διατρέχει οποιοδήποτε από τα μικρά υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ οι διακυμάνσεις της $y = d(x)$ είναι αμελητέες ή, με άλλα λόγια, είναι *περίπου σταθερή*. Επομένως αν πάρουμε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ τότε οι τιμές του $d(x)$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι *περίπου ίσες* με το $d(\xi_k)$ οπότε η μάζα m_k είναι *περίπου ίση* με την μάζα $\widetilde{m_k} = d(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ την οποία θα είχε το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ αν το υλικό του ήταν ομοιογενές σταθερής σημειακής γραμμικής πυκνότητας $d(\xi_k)$. Συμβολικά:

$$m_k \approx \widetilde{m_k} = d(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Επομένως και η συνολική μάζα $m = m_1 + \cdots + m_n$ της ράβδου $[a, b]$ είναι περίπου ίση με το $\widetilde{m} = \widetilde{m_1} + \cdots + \widetilde{m_n} = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ ή, συμβολικά,

$$m \approx \widetilde{m} = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα της προηγούμενης υποενότητας, μπορούμε να γράψουμε

$$m \approx \Sigma(d; a, b; \Delta; \Xi) = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

όπου $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ είναι οποιαδήποτε διαμέριση της ράβδου $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και το $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ είναι οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων.

7.2 Το ολοκλήρωμα Riemann.

Με τον παρακάτω ορισμό ουσιαστικά γενικεύουμε την μέθοδο την οποία αναπτύξαμε για τον υπολογισμό εμβαδών. Στην γενική περίπτωση δεν θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ ούτε ότι είναι μη-αρνητική. Θα υποθέσουμε μόνο ότι η συνάρτηση είναι *φραγμένη*.

Ορισμός. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a, b]$, διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Το άθροισμα*

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** *της f ως προς το $[a, b]$, την διαμέριση Δ και το σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων. Αν υπάρχει αριθμός I ώστε το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ να πλησιάζει το I ή, ισοδύναμα, το $|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - I|$ να γίνεται απεριόριστα μικρό όταν το πλάτος της Δ πλησιάζει το 0 τότε λέμε ότι η f είναι* **Riemann ολοκληρώσιμη** *στο $[a, b]$ και ονομάζουμε τον αριθμό I* **ολοκλήρωμα Riemann** *της f στο $[a, b]$ και τον συμβολίζουμε*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Με άλλα λόγια: η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \epsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε αντίστοιχο σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων.

Από τώρα και στο εξής, χάριν συντομίας, αντί να λέμε "ολοκλήρωμα Riemann" ή "Riemann ολοκληρώσιμη" θα λέμε απλώς "ολοκλήρωμα" ή "ολοκληρώσιμη".

Η τιμή του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης δεν εξαρτάται από το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Δηλαδή τα σύμβολα

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(y)\,dy, \quad \int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^b f(u)\,du$$

δηλώνουν όλα τον ίδιο αριθμό, το ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[a,b]$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, το ολοκλήρωμα είναι το όριο του αθροίσματος Riemann όταν το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0. Γράφουμε

$$\text{Συμβολικά :} \qquad \lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0} \Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = \int_a^b f(x)\,dx$$

αν και ο συμβολισμός αυτός είναι ασαφής από μαθηματική σκοπιά. Ο συμβολισμός αυτός σχετίζεται και με τον εξής πολύ χρήσιμο μνημονικό κανόνα. Το άθροισμα Riemann $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ είναι, σε "λιτή γραφή", άθροισμα της μορφής $\Sigma f(x)\Delta x$, δηλαδή άθροισμα (Σ) γινομένων της μορφής: τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο ($f(x)$) επί διαφορά κοντινών σημείων (Δx). Αν χρησιμοποιήσουμε το πρώτο γράμμα της λατινικής λέξης Sum (= άθροισμα), τότε γράφουμε S$f(x)\Delta x$ για το άθροισμα Riemann και, παίρνοντας όριο, το Δx γίνεται dx (το απειροστό μέγεθος το οποίο συναντάμε και στις παραγώγους) και το S "μακραίνει" και γίνεται $\int$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, για να *αποδείξουμε* ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ πρέπει να αποδείξουμε ότι αν το πλάτος (Δ) τείνει στο 0 τότε το $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)$ πλησιάζει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό I ο οποίος είναι τότε το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$. *Προσοχή*: αυτό πρέπει να γίνει για *όλες* τις διαμερίσεις (με αρκετά μικρό πλάτος) και για *όλα* τα αντίστοιχα σύνολα ενδιάμεσων σημείων χωρίς να περιοριστούμε σε κάποιες συγκεκριμένες διαμερίσεις ή σε κάποια συγκεκριμένα σύνολα ενδιάμεσων σημείων τα οποία είναι, πιθανόν, βολικά για ευκολότερους υπολογισμούς των αντίστοιχων $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)$. Ο ορισμός είναι σαφής: "για κάθε διαμέριση" και "για κάθε σύνολο ενδιάμεσων σημείων". Όμως αν *ήδη γνωρίζουμε* ότι η f *είναι ολοκληρώσιμη* στο $[a,b]$ τότε για να *υπολογίσουμε* το $\int_a^b f(x)\,dx$ αρκεί να περιοριστούμε σε κάποιες συγκεκριμένες διαμερίσεις και σε κάποια συγκεκριμένα σύνολα ενδιάμεσων σημείων με τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ευκολότερα τα αντίστοιχα $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)$ και να φροντίσουμε μόνο ώστε τα πλάτη των διαμερίσεων τις οποίες θα επιλέξουμε να τείνουν στο 0.

Τα θεωρήματα 7.1 και 7.2 είναι σημαντικά διότι εξασφαλίζουν δύο αντίστοιχες συλλογές ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Το μόνο το οποίο απομένει γι αυτές είναι ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων τους βάσει της παρατήρησης στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου.

Θεώρημα 7.1. *Αν η* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$.

Θεώρημα 7.2. *Αν η* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι μονότονη τότε είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$.

Τα θεωρήματα 7.1 και 7.2 δεν θα αποδειχθούν σ' αυτές τις σημειώσεις.

Επιστρέφοντας στο γεωμετρικό πρόβλημα του εμβαδού, ας υποθέσουμε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Στην ενότητα 7.1 αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού E της επιφάνειας A η οποία περικλείεται ανάμεσα στο $[a,b]$, στο γράφημα της f, στο ευθ. τμήμα με άκρα $(a,0)$ και $(a,f(a))$ και στο ευθ. τμήμα με άκρα $(b,0)$ και $(b,f(b))$. Η απάντηση η οποία δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα παίρνει τώρα τη μορφή

$$E = \int_a^b f(x)\,dx$$

διότι, όπως είδαμε, το εμβαδό E είναι ακριβώς ο αριθμός τον οποίο προσεγγίζουν τα αθροίσματα $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$.

Με την ίδια λογική βλέπουμε ότι μάζα m μίας ράβδου $[a, b]$ προκύπτει από την συνάρτηση πυκνότητας $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ του υλικού της, όταν αυτή είναι συνεχής, μέσω του τύπου

$$m = \int_a^b d(x)\, dx.$$

Δηλαδή *η μάζα μίας ευθύγραμμης ράβδου ισούται με το ολοκλήρωμα της σημειακής γραμμικής πυκνότητάς της.*

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σταθερή συνάρτηση $y = f(x) = c$ στο διάστημα $[a, b]$. Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= (x_1 - x_0)c + \cdots + (x_n - x_{n-1})c = (b - a)c.\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι όλα τα αθροίσματα Riemann έχουν την ίδια σταθερή τιμή $(b-a)c$ οπότε προφανώς τα αθροίσματα Riemann προσεγγίζουν τον αριθμό $(b - a)c$ όταν το πλάτος της Δ πλησιάζει το 0. Επομένως η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είναι ίσο με $(b - a)c$:

$$\int_a^b c\, dx = (b - a)c.$$

Στην περίπτωση $c \geq 0$ η επιφάνεια η οποία βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης είναι ένα απλό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου το εμβαδό είναι ίσο με $(b - a)c$ οπότε, τουλάχιστον σ' αυτήν την ειδική περίπτωση, επιβεβαιώνουμε τα συμπεράσματά μας πάνω στην σχέση εμβαδού και ολοκληρώματος.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = f(x) = x$ στο διάστημα $[a, b]$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και μονότονη οπότε από τα Θεωρήματα 7.1 και 7.2 συνεπάγεται ότι είναι ολοκληρώσιμη. Αφού έχουμε εξασφαλίσει την ολοκληρωσιμότητα της συνάρτησης, για να *υπολογίσουμε* το ολοκλήρωμα θα θεωρήσουμε *κατάλληλες* διαμερίσεις του $[a, b]$ και *κατάλληλα* αντίστοιχα σύνολα ενδιάμεσων σημείων ώστε τα πλάτη αυτών των διαμερίσεων να είναι πολύ μικρά και επομένως τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann να πλησιάζουν την τιμή του ολοκληρώματος και (το κυριότερο) ώστε ο υπολογισμός των αθροισμάτων Riemann να είναι *σχετικά απλός*.
Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$:

$$\Delta_n = \{a, a + \tfrac{b-a}{n}, a + 2\tfrac{b-a}{n}, \dots, a + k\tfrac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\tfrac{b-a}{n}, a + n\tfrac{b-a}{n} = b\}.$$

Το πλάτος της Δ_n είναι ακριβώς $\frac{b-a}{n}$. Επίσης επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων

$$\Xi_n = \{a + \tfrac{b-a}{n}, a + 2\tfrac{b-a}{n}, \dots, a + k\tfrac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\tfrac{b-a}{n}, a + n\tfrac{b-a}{n} = b\}.$$

Δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Τότε το αντίστοιχο άθροισμα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) &= \big(a + \tfrac{b-a}{n}\big)\tfrac{b-a}{n} + \cdots + \big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big)\tfrac{b-a}{n} + \cdots + \big(a + n\tfrac{b-a}{n}\big)\tfrac{b-a}{n} \\ &= \big(na + (1 + \cdots + k + \cdots + n)\tfrac{b-a}{n}\big)\tfrac{b-a}{n} = \big(na + \tfrac{n(n+1)}{2}\tfrac{b-a}{n}\big)\tfrac{b-a}{n} \\ &= a(b-a) + \tfrac{n+1}{2n}(b-a)^2.\end{aligned}$$

Για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $1 + \cdots + k + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ο οποίος αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή.
Τώρα, αν $n \to +\infty$ έχουμε ότι πλάτος $(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0$ και άρα

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) \to \textstyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b x\, dx.$$

Όμως

$$\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) = a(b-a) + \tfrac{n+1}{2n}(b-a)^2 \to a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 = \tfrac{b^2-a^2}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\textstyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y = f(x) = x^2$ στο $[a,b]$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η ολοκληρωσιμότητα της συνάρτησης εξασφαλίζεται από την συνέχειά της οπότε για να *υπολογίσουμε* το ολοκλήρωμα θεωρούμε κατάλληλες διαμερίσεις του $[a,b]$ και κατάλληλα αντίστοιχα σύνολα ενδιάμεσων σημείων ώστε τα πλάτη των διαμερίσεων να είναι πολύ μικρά και επομένως τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann να πλησιάζουν την τιμή του ολοκληρώματος και ώστε ο υπολογισμός των αθροισμάτων Riemann να είναι σχετικά απλός. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις ίδιες Δ_n και τα ίδια Ξ_n του προηγούμενου παραδείγματος. Τότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) &= \big(a+\tfrac{b-a}{n}\big)^2\tfrac{b-a}{n} + \cdots + \big(a+k\tfrac{b-a}{n}\big)^2\tfrac{b-a}{n} + \cdots + \big(a+n\tfrac{b-a}{n}\big)^2\tfrac{b-a}{n}\\ &= \big(na^2 + 2a(1+\cdots+k+\cdots+n)\tfrac{b-a}{n}\\ &\quad + (1^2+\cdots+k^2+\cdots+n^2)\tfrac{(b-a)^2}{n^2}\big)\tfrac{b-a}{n}\\ &= a^2(b-a) + \tfrac{n+1}{n}a(b-a)^2 + \tfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(b-a)^3.\end{aligned}$$

Για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τους τύπους $1+\cdots+k+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ και $1^2+\cdots+k^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ οι οποίοι αποδεικνύονται με επαγωγή.
Τώρα, αν $n \to +\infty$ έχουμε ότι πλάτος$(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0$ οπότε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b x\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\big(a^2(b-a) + \tfrac{n+1}{n}a(b-a)^2 + \tfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(b-a)^3\big)\\ &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \tfrac{1}{3}(b-a)^3 = \tfrac{b^3-a^3}{3}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Αν και θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο έναν άλλο (πολύ πιο εύκολο αλλά και λιγότερο στοιχειώδη) τρόπο υπολογισμού του, θα υπολογίσουμε τώρα, βάσει του ορισμού του, το $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ όταν $0 < a < b$. Το θεώρημα 7.1 εγγυάται ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει αφού η $y = f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Για να βρούμε το ολοκλήρωμα θεωρούμε κατάλληλες διαμερίσεις του $[a,b]$ και κατάλληλα αντίστοιχα σύνολα ενδιάμεσων σημείων ώστε τα πλάτη των διαμερίσεων να είναι πολύ μικρά και επομένως τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann να πλησιάζουν την τιμή του ολοκληρώματος και ώστε ο υπολογισμός των αθροισμάτων Riemann να είναι σχετικά απλός. Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση

$$\Delta_n = \{a, a\mu, a\mu^2, \dots, a\mu^k, \dots, a\mu^{n-1}, a\mu^n\},$$

όπου ο αριθμός μ προσδιορίζεται από την ισότητα $a\mu^n = b$ ώστε το τελευταίο σημείο της διαμέρισης να είναι το b. Δηλαδή $\mu = (\frac{b}{a})^{1/n} > 1$. Προσέξτε: τα υποδιαστήματα δεν έχουν ίδιο μήκος. Θεωρούμε και το

$$\Xi_n = \{a\mu, a\mu^2, \dots, a\mu^k, \dots, a\mu^{n-1}, a\mu^n\},$$

δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο ως ενδιάμεσο σημείο. Το μήκος του k-οστού υποδιαστήματος είναι $a\mu^k - a\mu^{k-1} = a(1-\frac{1}{\mu})\mu^k$ και, επειδή $\mu > 1$, το μεγαλύτερο μήκος είναι το n-οστό. Δηλαδή πλάτος$(\Delta_n) = a(1-\frac{1}{\mu})\mu^n = b\big(1-(\frac{a}{b})^{1/n}\big)$. Άρα όταν $n \to +\infty$ έχουμε ότι πλάτος$(\Delta_n) \to b(1-1) = 0$ και επομένως $\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) \to \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$. Υπολογίζουμε λοιπόν το άθροισμα Riemann:

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) &= \tfrac{1}{a\mu}(a\mu - a) + \cdots + \tfrac{1}{a\mu^k}(a\mu^k - a\mu^{k-1}) + \cdots + \tfrac{1}{a\mu^n}(a\mu^n - a\mu^{n-1})\\ &= (1-\tfrac{1}{\mu}) + \cdots + (1-\tfrac{1}{\mu}) + \cdots + (1-\tfrac{1}{\mu}) = n(1-\tfrac{1}{\mu}) = n\big(1-\big(\tfrac{a}{b}\big)^{1/n}\big).\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} n\big(1-\big(\tfrac{a}{b}\big)^{1/n}\ \big) = \log\tfrac{b}{a}.$$

Το όριο προκύπτει από την παράγωγο $\lim_{x\to 0}\frac{p^x-1}{x} = \frac{d\,p^x}{dx}\Big|_{x=0} = p^0\log p = \log p$. Από το όριο αυτό, μέσω της ακολουθίας με n-οστό όρο $x_n = \frac{1}{n}$, περνάμε στο $\lim_{n\to+\infty} n(p^{1/n}-1) = \log p$.

Παράδειγμα. Θα δούμε τώρα ένα πολύ απλό παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι ολοκληρώσιμη παρά το ότι δεν είναι συνεχής ούτε μονότονη. Θεωρούμε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$, οποιοδήποτε $c\in[a,b]$ και την συνάρτηση $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x=c \\ 0 & \text{αν } a\le x\le b \text{ και } x\neq c\end{cases}$ Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ του $[a,b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν κανένα από τα ενδιάμεσα σημεία δεν είναι ίσο με το c οπότε

$$\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) = 0(x_1-x_0)+\cdots+0(x_n-x_{n-1}) = 0.$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν ακριβώς ένα από τα ενδιάμεσα σημεία είναι ίσο με c, για παράδειγμα $\xi_k = c$ για ακριβώς ένα k, οπότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) &= f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\ &= 0(x_1-x_0)+\cdots+1(x_k-x_{k-1})+\cdots+0(x_n-x_{n-1}) = x_k-x_{k-1}.\end{aligned}$$

Η τρίτη περίπτωση είναι όταν ακριβώς δύο από τα ενδιάμεσα σημεία είναι ίσα με c οπότε τα ενδιάμεσα αυτά σημεία είναι σε διαδοχικά υποδιαστήματα και ταυτίζονται με το κοινό τους άκρο, το κοινό διαιρετικό σημείο. Δηλαδή $\xi_k = \xi_{k+1} = x_k = c$ για κάποιο k οπότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) &= f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\ &= 0(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\\ &\quad\ +f(\xi_{k+1})(x_{k+1}-x_k)+\cdots+0(x_n-x_{n-1})\\ &= 1(x_k-x_{k-1})+1(x_{k+1}-x_k) = x_{k+1}-x_{k-1}.\end{aligned}$$

Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση διότι το c δεν μπορεί να είναι ίσο με περισσότερα από δύο ενδιάμεσα σημεία. Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$0\le \Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)\le 2\,\text{πλάτος}\,(\Delta).$$

Άρα αν πλάτος$\,(\Delta)\to 0$ τότε $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)\to 0$. Πιο αυστηρά, για κάθε $\epsilon>0$ θεωρούμε το $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ και τότε για κάθε διαμέριση Δ με πλάτος$\,(\Delta)<\delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων συνεπάγεται $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)-0\big| = \Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) < 2\delta = \epsilon$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της συγκεκριμένης $y=f(x)$ και στο διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα: το οριζόντιο με άκρα $(a,0)$ και $(b,0)$ και το κατακόρυφο με άκρα $(c,0)$ και $(c,1)$. Το πρώτο ευθ. τμήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ύψος ίσο με 0 και το δεύτερο ευθ. τμήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος βάσης ίσο με 0. Άρα το συνολικό εμβαδό των δύο αυτών ευθ. τμημάτων είναι ίσο με 0 και αυτό, όπως είναι αναμενόμενο, συμφωνεί με την τιμή του $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ασκήσεις.

7.2.1. Θεωρήστε διαμέριση με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία, όπως στα παραδείγματα $\int_a^b x\,dx$ και $\int_a^b x^2\,dx$, για να αποδείξετε ότι:
(i) $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$. Θα χρειαστείτε τον τύπο $1^3+\cdots+k^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(ii) $\int_a^b \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^b-\alpha^a}{\log\alpha}$ για κάθε $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$. Ειδικότερα, $\int_a^b e^x\,dx = e^b-e^a$.
(iii) $\int_a^b \cos x\,dx = \sin b-\sin a$ και $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a-\cos b$. Θα χρειαστείτε τους τύπους της άσκησης 1.4.7.

7.2.2. Θεωρήστε την διαμέριση του παραδείγματος $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ για να αποδείξετε ότι $\int_a^b x^\kappa\,dx = \frac{b^{\kappa+1}-a^{\kappa+1}}{\kappa+1}$ όταν $0<a<b$, $\kappa\neq -1$.

7.2.3. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω όρια ακολουθιών με την μορφή ολοκληρώματος. Δεν χρειάζεται να τα υπολογίσετε.
(i) $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{n}{n^2+1^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+k^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\big)$.
(ii) $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{\sqrt{n^2-0^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(k-1)^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}\big)$.
(iii) $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\big)$.
(iv) $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}\big)$.
(Υπόδειξη: Για το (i) γράψτε τον k-οστό όρο $\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{1+(k/n)^2}\,\frac{1}{n}=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ με κατάλληλη συνάρτηση $y=f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$, κατάλληλη διαμέριση $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ του $[0,1]$ και κατάλληλο σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Ομοίως για τα (ii)-(iv).)

7.2.4. Υπολογίστε το όριο ακολουθίας $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+k}+\cdots+\frac{1}{n+n}\big)$ αφού το γράψετε στην μορφή ολοκληρώματος στο διάστημα $[1,2]$.
(Υπόδειξη: Δείτε την υπόδειξη της προηγούμενης άσκησης.)

7.2.5. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$ με $A=f(a)$, $B=f(b)$. Γνωρίζουμε ότι η $x=f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$ με $a=f^{-1}(A)$, $b=f^{-1}(B)$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx+\int_A^B f^{-1}(y)\,dy=Bb-Aa$.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση $\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n\}$ του $[a,b]$ και την αντίστοιχη διαμέριση $\{y_0,y_1,\dots,y_{n-1},y_n\}$ του $[A,B]$ με $y_k=f(x_k)$ για κάθε k. Τί είναι το άθροισμα $y_1(x_1-x_0)+\cdots+y_k(x_k-x_{k-1})+\cdots++y_n(x_n-x_{n-1})$ για το πρώτο ολοκλήρωμα και τί είναι το άθροισμα $x_0(y_1-y_0)+\cdots+x_{k-1}(y_k-y_{k-1})+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-1})$ για το δεύτερο ολοκλήρωμα; Υπολογίστε το άθροισμα των δυο αθροισμάτων.)
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ισότητας;
(Υπόδειξη: Σχεδιάστε τα γραφήματα των $y=f(x)$ και $x=f^{-1}(y)$ στο *ίδιο* σχήμα.)

7.3 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων Riemann.

Α. Αλγεβρικές πράξεις με ολοκληρώματα.

Πρόταση 7.1. *Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω αριθμός λ. Τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (\lambda f(x))\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n\}$ του $[a,b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Sigma(\lambda f;a,b;\Delta;\Xi)&=\lambda f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+\lambda f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\&=\lambda\big(f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\big)=\lambda\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi).\end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon>0$ οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε Δ με πλάτος $(\Delta)<\delta$ και κάθε Ξ να ισχύει $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)-\int_a^b f(x)\,dx\big|<\frac{\epsilon}{|\lambda|+1}$. Συνεπάγεται

$$\Big|\Sigma(\lambda f;a,b;\Delta;\Xi)-\lambda\int_a^b f(x)\,dx\Big|=\Big|\lambda\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)-\lambda\int_a^b f(x)\,dx\Big|\le|\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|+1}<\epsilon.$$

Επομένως η λf είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b(\lambda f(x))\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Ας δούμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της πρότασης 7.1. Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα. Αν $\lambda \geq 0$ και B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της λf και στο διάστημα $[a,b]$, τότε η B έχει την ίδια βάση με την A (το διάστημα $[a,b]$) ενώ τα ύψη της B (τα $\lambda f(x)$) είναι ίσα με τα αντίστοιχα ύψη της A (τα $f(x)$) πολλαπλασιασμένα όλα με τον ίδιο αριθμό λ. Η πρόταση 7.1 λέει ότι *το εμβαδό της B είναι ίσο με το εμβαδό της A πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό λ.*

Ας δούμε ένα ακόμη συμπέρασμα για την σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και σε εμβαδά. Έστω $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα. Η A είναι προφανώς κάτω από τον x-άξονα. Αν B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $-f$ και στο διάστημα $[a,b]$ τότε η B είναι συμμετρική της A ως προς τον x-άξονα. Επειδή ισχύει $-f(x) \geq 0$, γνωρίζουμε ότι το $\int_a^b (-f(x))\,dx$ είναι το εμβαδό της B το οποίο, λόγω συμμετρίας, είναι ίσο με το εμβαδό της A. Η πρόταση 7.1 λέει ότι το $-\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το $\int_a^b (-f(x))\,dx$, δηλαδή ίσο με το εμβαδό της A. Άρα *το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το αντίθετο του εμβαδού της A.*

Πρόταση 7.2. *Έστω ότι οι $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Τότε η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Sigma(f+g;a,b;\Delta;\Xi) &= (f(\xi_1)+g(\xi_1))(x_1-x_0) + \cdots + (f(\xi_n)+g(\xi_n))(x_n-x_{n-1}) \\ &= f(\xi_1)(x_1-x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \\ &\quad + g(\xi_1)(x_1-x_0) + \cdots + g(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \\ &= \Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) + \Sigma(g;a,b;\Delta;\Xi).\end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε Ξ να ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ και $\left|\Sigma(g;a,b;\Delta;\Xi) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&\left|\Sigma(f+g;a,b;\Delta;\Xi) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| \\ &\qquad = \left|\left(\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) + \Sigma(g;a,b;\Delta;\Xi)\right) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| \\ &\qquad \leq \left|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\Sigma(g;a,b;\Delta;\Xi) - \int_a^b g(x)\,dx\right| \\ &\qquad < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. □

Έστω ότι ισχύει $f(x), g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα, B η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της g και στο $[a,b]$ και C η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $f+g$ και στο $[a,b]$, τότε τα ύψη της C (τα $f(x)+g(x)$) είναι όλα ίσα με τα αθροίσματα των αντίστοιχων υψών της A (των $f(x)$) και της B (των $g(x)$). Η πρόταση 7.2 λέει ότι *το εμβαδό της C είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών της A και της B.*

Συνδυάζοντας τις προτάσεις 7.1 και 7.2, βλέπουμε ότι αν οι $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και λ, μ είναι αριθμοί τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν οι $f_1, \dots, f_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι όλες ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ είναι αριθμοί τότε η $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x))\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \dots + \lambda_m \int_a^b f_m(x)\, dx.$$

Παράδειγμα. $\int_a^b (\lambda + \mu x + \nu x^2)\, dx = \lambda \int_a^b 1\, dx + \mu \int_a^b x\, dx + \nu \int_a^b x^2\, dx = \lambda(b-a) + \mu \frac{b^2-a^2}{2} + \nu \frac{b^3-a^3}{3} = \big(\lambda b + \mu \frac{b^2}{2} + \nu \frac{b^3}{3}\big) - \big(\lambda a + \mu \frac{a^2}{2} + \nu \frac{a^3}{3}\big)$. Λίγο αργότερα θα γενικεύσουμε αυτό το παράδειγμα.

Παράδειγμα. Έστω διάστημα $[a,b]$ και m σημεία $c_1, \dots, c_m \in [a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία έχει τιμή $f(x) = 0$ σε κάθε $x \in [a,b]$ εκτός από τα σημεία $c_1, \dots, c_m$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.
Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ οι τιμές της f στα σημεία $c_1, \dots, c_m$, αντιστοίχως. Για κάθε c_k θεωρούμε την $y = f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = c_k \\ 0 & \text{αν } a \le x \le b \text{ και } x \ne c_k \end{cases}$ Είναι εύκολο να δούμε ότι τότε ισχύει $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ οπότε, επειδή κάθε f_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με $\int_a^b f_k(x)\, dx = 0$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b f(x)\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \dots + \lambda_m \int_a^b f_m(x)\, dx = \lambda_1 0 + \dots + \lambda_m 0 = 0$. Η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα αποτελείται από ένα οριζόντιο και από m κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Το εμβαδό της επιφάνειας αυτής είναι 0 και συμφωνεί με την τιμή του ολοκληρώματος.

Πρόταση 7.3. *Έστω ότι οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ Τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, *δεν* υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δύο συναρτήσεων ξεχωριστά. Για παράδειγμα, *δεν ισχύει* $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx$. Αυτός, αν ίσχυε, θα ήταν τύπος ανάλογος του τύπου ο οποίος ισχύει για το άθροισμα συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Για να δούμε ότι δεν ισχύει γενικά ο παραπάνω τύπος για το ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων θεωρούμε το παράδειγμα με $\int_a^b 1 \cdot 1\, dx = \int_a^b 1\, dx = b - a$ και $\int_a^b 1\, dx \int_a^b 1\, dx = (b-a)(b-a) = (b-a)^2$. Η ισότητα $b - a = (b-a)^2$ δεν ισχύει γενικά.

Η πρόταση 7.3 και η πρόταση 7.4 δεν θα αποδειχθούν σ’ αυτές τις σημειώσεις.

Πρόταση 7.4. *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ Αν για κάποιο $m > 0$ ισχύει $|f(x)| \ge m$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε η $\frac{1}{f}$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Τονίζουμε ότι, όπως και με το γινόμενο συναρτήσεων, *δεν* υπάρχει γενικός τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μίας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, *δεν ισχύει* $\int_a^b \frac{1}{f(x)}\, dx = 1 \big/ \big(\int_a^b f(x)\, dx \big)$.

Παράδειγμα. Για να δούμε ότι δεν ισχύει, γενικά, ο παραπάνω τύπος θεωρούμε το παράδειγμα με $\int_a^b \frac{1}{1}\, dx = \int_a^b 1\, dx = b - a$ και $1 \big/ \big(\int_a^b 1\, dx \big) = \frac{1}{b-a}$. Η ισότητα $b - a = \frac{1}{b-a}$ δεν ισχύει γενικά.

Β. Ισότητα ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 7.5. *Έστω ότι οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ταυτίζονται στο διάστημα $[a,b]$ εκτός σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του $[a,b]$. Αν μία από τις δύο συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε και η άλλη είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Η συνάρτηση $h = g - f$ έχει τιμή $h(x) = g(x) - f(x) = 0$ σε κάθε $x \in [a,b]$ εκτός σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του $[a,b]$ οπότε, βάσει προηγούμενου παραδείγματος, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Άρα η $g = f+h$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Η πρόταση 7.5 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής.

Αν μία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και αν δημιουργήσουμε μία νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.

Έστω ότι ισχύει $f(x), g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο $[a,b]$ και B η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της g και στο $[a,b]$ τότε οι δύο επιφάνειες διαφέρουν κατά m κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Επειδή κάθε ευθ. τμήμα έχει εμβαδό 0, οι επιφάνειες A και B έχουν το ίδιο εμβαδό. Αυτό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της πρότασης 7.5.

Γ. Υποδιαστήματα και γειτονικά διαστήματα.

Πρόταση 7.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a,b]$.*

Η πρόταση 7.6 δεν θα αποδειχθεί σ' αυτές τις σημειώσεις.

Πρόταση 7.7. *Έστω $a < b < c$ και έστω ότι η $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και στο $[b,c]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,b]$ και $[b,c]$, είναι φραγμένη στα διαστήματα αυτά οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M'$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $|f(x)| \leq M''$ για κάθε $x \in [b,c]$. Ορίζουμε $M = \max\{M', M''\}$ οπότε $M' \leq M$ και $M'' \leq M$. Άρα ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,c]$ οπότε η f είναι φραγμένη στο $[a,c]$.
Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta^* > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta';\Xi') - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε διαμέριση Δ' του $[a,b]$ με πλάτος$(\Delta') < \delta^*$ και κάθε αντίστοιχο σύνολο Ξ' ενδιάμεσων σημείων και ώστε να ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta'';\Xi'') - \int_b^c f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε διαμέριση Δ'' του $[b,c]$ με πλάτος$(\Delta'') < \delta^*$ και κάθε αντίστοιχο σύνολο Ξ'' ενδιάμεσων σημείων. Ορίζουμε $\delta = \min\left\{\delta^*, \frac{\epsilon}{6M+1}\right\}$ και έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,c]$ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. Έστω ότι η Δ περιέχει το b ως διαιρετικό σημείο: έστω $b = x_k$ για κάποιο k με $1 \leq k \leq n-1$. Τώρα ορίζουμε την διαμέριση $\Delta' = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ του $[a,b]$ και το αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Ορίζουμε και την διαμέριση $\Delta'' = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[b,c]$ και το αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi'' = \{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$. Έτσι η Δ χωρίζεται στις διαμερίσεις Δ' του $[a,b]$ και Δ'' του $[b,c]$ και το Ξ χωρίζεται σε Ξ' και Ξ''. Τώρα:

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \Sigma(f;a,b;\Delta';\Xi') + \Sigma(f;b,c;\Delta'';\Xi'').\end{aligned}$$

Προφανώς πλάτος$(\Delta') \leq$ πλάτος$(\Delta) < \delta \leq \delta^*$ και πλάτος$(\Delta'') \leq$ πλάτος$(\Delta) < \delta \leq \delta^*$ και επομένως $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta';\Xi') - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}$ και $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta'';\Xi'') - \int_b^c f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}$.

Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα, έχουμε

$$\begin{aligned}&\big|\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi)-\big(\textstyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\big)\big|\\&\qquad=\big|\big(\Sigma(f;a,b;\Delta';\Xi')+\Sigma(f;b,c;\Delta'';\Xi'')\big)-\big(\textstyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\big)\big|\\&\qquad\le\big|\Sigma(f;a,b;\Delta';\Xi')-\textstyle\int_a^b f(x)\,dx\big|+\big|\Sigma(f;b,c;\Delta'';\Xi'')-\int_b^c f(x)\,dx\big|\\&\qquad<\tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}=\tfrac{2\epsilon}{3}<\epsilon.\end{aligned}$$

Περίπτωση 2. Έστω ότι η Δ δεν περιέχει το b ως διαιρετικό σημείο. Δηλαδή είναι $x_{k-1}<b<x_k$ για κάποιο k με $1\le k\le n$. Δημιουργούμε την διαμέριση $\Delta^*=\{x_0,\dots,x_{k-1},b,x_k,\dots,x_n\}$, επισυνάπτοντας το b ως επιπλέον διαιρετικό σημείο στην Δ. Είναι φανερό ότι πλάτος$(\Delta^*)\le$ πλάτος$(\Delta)<\delta$. Επίσης δημιουργούμε το $\Xi^*=\{\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\eta,\zeta,\xi_{k+1},\dots,\xi_n\}$, παίρνοντας κάποιο $\eta\in[x_{k-1},b]$ και κάποιο $\zeta\in[b,x_k]$ και αγνοώντας το ξ_k στο $[x_{k-1},x_k]$. Τότε

$$\begin{aligned}\big|\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi)-\Sigma(f;a,c;\Delta^*;\Xi^*)\big|&=\big|f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-f(\eta)(b-x_{k-1})-f(\zeta)(x_k-b)\big|\\&=|f(\xi_k)(b-x_{k-1})+f(\xi_k)(x_k-b)-f(\eta)(b-x_{k-1})-f(\zeta)(x_k-b)|\\&\le|f(\xi_k)-f(\eta)|(b-x_{k-1})+|f(\xi_k)-f(\zeta)|(x_k-b)\\&\le2M(b-x_{k-1})+2M(x_k-b)=2M(x_k-x_{k-1})<2M\delta<\tfrac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Επειδή η Δ^* περιέχει το b ως διαιρετικό σημείο, συνεπάγεται, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της περίπτωσης 1,

$$\big|\Sigma(f;a,c;\Delta^*;\Xi^*)-\big(\textstyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\big)\big|<\tfrac{2\epsilon}{3}.$$

Συνδυάζοντας με την ανισότητα $\big|\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi)-\Sigma(f;a,c;\Delta^*;\Xi^*)\big|<\frac{\epsilon}{3}$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\big|\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi)-\big(\textstyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\big)\big|&\le\big|\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi)-\Sigma(f;a,c;\Delta^*;\Xi^*)\big|\\&+\big|\Sigma(f;a,c;\Delta^*;\Xi^*)-\big(\textstyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\big)\big|<\tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{2\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $\big|\Sigma(f;a,c;\Delta;\Xi)-\big(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\big)\big|<\epsilon$.
Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$. □

Έστω ότι ισχύει $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν A, B και C είναι οι επιφάνειες ανάμεσα στο γράφημα της f και στα διαστήματα $[a,b]$, $[b,c]$ και $[a,c]$, αντιστοίχως, τότε η C είναι η ένωση των A και B ενώ η τομή των A και B είναι ένα κατακόρυφο ευθ. τμήμα. Επειδή το ευθ. τμήμα έχει εμβαδό 0, το εμβαδό της C είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των A και B. Αυτό ακριβώς είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της πρότασης 7.7.

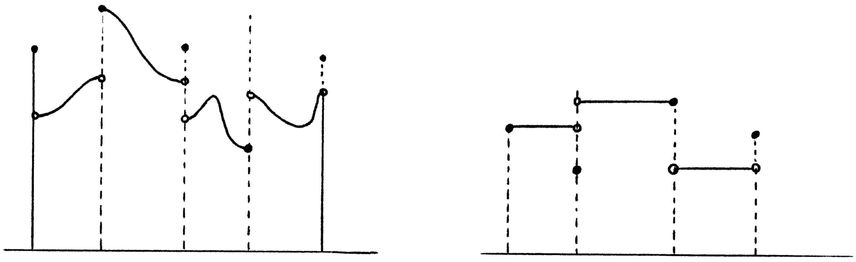
Το αποτέλεσμα της πρότασης 7.7 γενικεύεται για τρία διαδοχικά διαστήματα και με επαγωγή για οποιοδήποτε αριθμό διαδοχικών διαστημάτων. Δηλαδή αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαδοχικά διαστήματα $[a_1,a_2],\dots,[a_{m-1},a_m]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο $[a_1,a_m]$ και

$$\int_{a_1}^{a_m}f(x)\,dx=\int_{a_1}^{a_2}f(x)\,dx+\cdots+\int_{a_{m-1}}^{a_m}f(x)\,dx.$$

Ειδικώτερα, ας δούμε μία ακόμη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και σε εμβαδά. Έστω ότι το $[a,b]$ μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένου πλήθους υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία η f είναι είτε μόνο ≥0 είτε μόνο ≤0. Καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα ορίζει την αντίστοιχη επιφάνεια ανάμεσα σε αυτό και στο γράφημα της f. Τότε *το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών οι οποίες αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι ≥0 πλην το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών οι οποίες αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι ≤0.*

Θα δούμε τώρα μια άμεση εφαρμογή της πρότασης 7.7, αφού πρώτα ορίσουμε μια κατηγορία συναρτήσεων ευρύτερη της κατηγορίας των συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός. *Η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **τμηματικά συνεχής** *στο $[a, b]$ αν υπάρχουν διαδοχικά σημεία $t_0 = a, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = b$ ώστε η f να είναι συνεχής σε καθένα από τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα $(t_0, t_1), \ldots, (t_{m-1}, t_m)$, ώστε να υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f σε καθένα από τα $t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m$ (το ένα πλευρικό όριο στα άκρα $t_0 = a$ και $t_m = b$ και τα δύο πλευρικά όρια σε κάθε άλλο t_k) και αυτά τα πλευρικά όρια να είναι όλα αριθμοί.*



Σχήμα 7.3: Συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής και κατά τμήματα σταθερή.

Πρόταση 7.8. *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ οπότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω ορισμού. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{k-1}, t_k]$. Αν ορίσουμε την $g : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (t_{k-1}, t_k)$, ώστε $g(t_{k-1}) = \lim_{x \to t_{k-1}+} f(x) = \lim_{x \to t_{k-1}+} g(x)$ και $g(t_k) = \lim_{x \to t_k-} f(x) = \lim_{x \to t_k-} g(x)$ τότε η g είναι συνεχής στο $[t_{k-1}, t_k]$ και διαφέρει από την f το πολύ σε δύο σημεία: τα άκρα t_{k-1} και t_k. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_{k-1}, t_k]$ οπότε και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_{k-1}, t_k]$. □

Παράδειγμα. Έστω **τμηματικά σταθερή** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχουν διαδοχικά σημεία $t_0 = a, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = b$ ώστε η f να είναι σταθερή σε καθένα από τα διαδοχικά ανοικτά υποδιαστήματα $(t_0, t_1), \ldots, (t_{m-1}, t_m)$. Έστω λ_k η σταθερή τιμή της f στο αντίστοιχο (t_{k-1}, t_k). Οι τιμές της f στα σημεία $t_0, \ldots, t_m$ δεν έχουν καμία σημασία. Η f είναι προφανώς τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ οπότε είναι ολοκληρώσιμη και τώρα θα υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)\, dx$. Επειδή η f σε κάθε $[t_{k-1}, t_k]$ είναι σταθερή λ_k, εκτός σε δύο το πολύ σημεία, συνεπάγεται $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\, dx = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda_k\, dx = \lambda_k(t_k - t_{k-1})$. Άρα $\int_a^b f(x)\, dx = \lambda_1(t_1 - t_0) + \cdots + \lambda_m(t_m - t_{m-1})$.

Δ. Σύγκριση ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 7.9. *Έστω ότι οι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε*

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx.$$

Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$ τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ το οποίο είναι κοινό σημείο συνέχειας των δύο συναρτήσεων. Ειδικώτερα, αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$ και οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Τότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &\le g(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + g(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi).\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Θεωρούμε ϵ με $0 < \epsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ και $\big|\Sigma(g;a,b;\Delta;\Xi) - \int_a^b g(x)\,dx\big| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε αντίστοιχο σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων. Τότε όμως

$$\Sigma(g;a,b;\Delta;\Xi) < \int_a^b g(x)\,dx + \tfrac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f(x) - \tfrac{\epsilon}{2} < \Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)$$

οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
Τώρα έστω $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ και έστω $\xi \in [a,b]$ ένα κοινό σημείο συνέχειας των f,g. Υποθέτουμε ότι $f(\xi) < g(\xi)$. Επειδή η $g-f$ είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a,b]$ με $c < d$ το οποίο περιέχει το ξ και ώστε να ισχύει $g(x) - f(x) > \frac{g(\xi)-f(\xi)}{2}$ για κάθε $x \in [c,d]$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_a^b(g(x)-f(x))\,dx &= \int_a^c(g(x)-f(x))\,dx + \int_c^d(g(x)-f(x))\,dx + \int_d^b(g(x)-f(x))\,dx \\ &\geq \int_a^c 0\,dx + \int_c^d \tfrac{g(\xi)-f(\xi)}{2}\,dx + \int_d^b 0\,dx = \tfrac{g(\xi)-f(\xi)}{2}(d-c) > 0\end{aligned}$$

οπότε $\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $f(\xi) = g(\xi)$. □

Έστω ότι ισχύει $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν A και B είναι οι επιφάνειες ανάμεσα στο $[a,b]$ και στα γραφήματα των f και g, αντιστοίχως, τότε η A είναι υποσύνολο της B. Η πρόταση 7.9 λέει ότι *το εμβαδό της A δεν υπερβαίνει το εμβαδό της B*.

Πρόταση 7.10. *Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*
(i) Αν το u είναι άνω φράγμα της f στο $[a,b]$, δηλαδή αν ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)u$.
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)u$ τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε $x \in [a,b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f. Ειδικότερα, αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)u$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε $x \in [a,b]$.
(ii) Αν το l είναι κάτω φράγμα της f στο $[a,b]$, δηλαδή αν ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a)l$.
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)l$ τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε $x \in [a,b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f. Ειδικότερα, αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)l$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις σταθερές συναρτήσεις $y = h(x) = l$ και $y = g(x) = u$ για κάθε $x \in [a,b]$ και εφαρμόζουμε την πρόταση 7.9, αφού $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b l\,dx = (b-a)l$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b u\,dx = (b-a)u$. □

Παράδειγμα. Η $y = \frac{x}{x^2+2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,\sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{2},4]$, διότι η $\frac{dy}{dx} = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$ είναι > 0 στο $(1,\sqrt{2})$ και < 0 στο $(\sqrt{2},4)$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως, $\int_1^4 \frac{x}{x^2+2}\,dx \leq (4-1)\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Έστω ότι ισχύει $0 \leq l \leq f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο $[a,b]$ και B και C είναι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με βάση το $[a,b]$ και ύψη l και u, αντιστοίχως, τότε η A περιέχει το B και περιέχεται στο C. Η πρόταση 7.10 επιβεβαιώνει ότι *το εμβαδό της A δεν είναι μικρότερο από το εμβαδό του B ούτε μεγαλύτερο από το εμβαδό του C*.

Πρόταση 7.11. *Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Απόδειξη. Δεν θα αποδείξουμε σ' αυτές τις σημειώσεις ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν όμως το αποδεχτούμε τότε από την $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [a,b]$ προκύπτει $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ και επομένως $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

Η ανισότητα της πρότασης 7.11 ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** για ολοκληρώματα.

Παράδειγμα. Από την $|\sin x| \leq 1$ για κάθε x έχουμε για οποιοδήποτε $x > 0$ ότι $\left|\int_0^x \sin t\,dt\right| \leq \int_0^x |\sin t|\,dt \leq x$. Επίσης, από την $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x έχουμε $\left|\int_0^x \sin t\,dt\right| \leq \int_0^x |\sin t|\,dt \leq \int_0^x |t|\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$. Άρα $\left|\int_0^x \sin t\,dt\right| \leq \min\left\{x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} x^2/2 & \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ x & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

Ε. Μέση τιμή συνάρτησης.

Είναι γνωστό ότι η *μέση τιμή* οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, \ldots, y_n$, όπου το κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\frac{\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_n y_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\, y_1 + \cdots + \frac{\nu_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\, y_n = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n,$$

όπου κάθε $\mu_k = \frac{\nu_k}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ είναι η αναλογία του πλήθους του αντίστοιχου y_k προς το συνολικό πλήθος των $y_1, \ldots, y_n$. Είναι επίσης γνωστό ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να μην είναι ίσος με κανένα από τα $y_1, \ldots, y_n$ αλλά ότι είναι (ως προς το μέγεθος) ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο από τα $y_1, \ldots, y_n$.

Υπάρχει μία ανάλογη έννοια μέσης τιμής για συναρτήσεις. Έστω f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Θεωρούμε και τις αντίστοιχες τιμές $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ της f σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία $x \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο ξ_k οπότε *είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{k-1}, x_k]$* και επομένως *οι τιμές $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ "εκπροσωπούν" όλες τις τιμές της συνάρτησης*. Πρέπει φυσικά να σκεφτούμε ότι αν κάποιο $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο $[x_{l-1}, x_l]$ τότε η τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" περισσότερες τιμές της f από όσες "εκπροσωπεί" η τιμή $f(\xi_l)$. Θα δεχτούμε λοιπόν ότι η αναλογία του συνόλου των τιμών της f οι οποίες "εκπροσωπούνται" από οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_k)$ προς το σύνολο όλων των τιμών της f είναι ίδια με την αναλογία $\mu_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ του μήκους του αντίστοιχου $[x_{k-1}, x_k]$ προς το συνολικό μήκος $b - a$. Επομένως αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής *όλων* των τιμών της f μία καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε την μέση τιμή

$$\frac{x_1 - x_0}{b-a} f(\xi_1) + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)$$

των "αντιπροσωπευτικών" τιμών $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή πλησιάζει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό όταν το πλάτος της Δ είναι πολύ μικρό. Όμως αυτή η μέση τιμή είναι προφανώς ίση με

$$\frac{1}{b-a}\, \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$$

και επομένως πλησιάζει τον αριθμό $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0. Βάσει αυτού έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Ορίζουμε την* **μέση τιμή** *της f στο $[a,b]$ να είναι*

$$\textit{μέση τιμή της } f \textit{ στο } [a,b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Αν η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι ο αριθμός ρ τότε $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\rho = \int_a^b \rho\,dx$ και βλέπουμε ότι:

Η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι εκείνη η τιμή την οποία πρέπει να έχει μία σταθερή συνάρτηση στο $[a,b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f.

Ας δούμε ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της μέσης τιμής μίας συνάρτησης. Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και έστω A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a,b]$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι ο λόγος του εμβαδού της A προς το μήκος του $[a,b]$ ή, με άλλα λόγια, *το ύψος το οποίο πρέπει να έχει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με βάση το $[a,b]$ ώστε να έχει το ίδιο εμβαδό με την A.*

Παράδειγμα. Η μέση τιμή αριθμών είναι ειδική περίπτωση μέσης τιμής συνάρτησης. Πράγματι, ας πάρουμε τα $y_1,\dots,y_n$ με αντίστοιχες αναλογίες $\mu_1,\dots,\mu_n$. Ορίζουμε τους αριθμούς $x_0=0$, $x_1=\mu_1$, $x_2=\mu_1+\mu_2,\dots,x_{n-1}=\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}$ και $x_n=\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}+\mu_n=1$ και, τέλος, ορίζουμε την τμηματικά σταθερή συνάρτηση f στο διάστημα $[0,1]$ η οποία είναι σταθερή y_1 στο $[x_0,x_1)$, σταθερή y_2 στο $[x_1,x_2)$, $\dots$, σταθερή y_n στο $[x_{n-1},x_n]$. Η μέση τιμή της f στο $[0,1]$ είναι ίση με τον αριθμό $\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = y_1(x_1-x_0)+y_2(x_2-x_1)+\cdots+y_n(x_n-x_{n-1}) = \mu_1y_1+\mu_2y_2+\cdots+\mu_ny_n$.

Από την πρόταση 7.10 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μίας συνάρτησης είναι ανάμεσα σε οποιοδήποτε κάτω φράγμα της και σε οποιοδήποτε άνω φράγμα της. Ειδικώτερα, αν η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή τότε η μέση τιμή της είναι ανάμεσα στην ελάχιστη και στην μέγιστη τιμή της. Αν, ακόμη ειδικώτερα, η συνάρτηση είναι συνεχής τότε έχουμε το εξής πιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. *Έστω συνεχής $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε*
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\zeta,\eta\in[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta)\leq f(x)\leq f(\eta)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε $(b-a)f(\zeta)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq(b-a)f(\eta)$ οπότε ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ανάμεσα στην μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή της f. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε ο αριθμός αυτός να είναι ίσος με την τιμή $f(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα. Η $y=x^2$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$. Το $\xi\in[0,1]$ για τον οποίο ισχύει $\xi^2=\frac{1}{3}$ είναι το $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Παράδειγμα. Αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a,b]$ μπορεί η μέση τιμή της στο $[a,b]$ να μην είναι ίση με καμία τιμή της. Η μέση τιμή της $y=\begin{cases}-1 & \text{αν } -1\leq x<0\\ 1 & \text{αν } 0\leq x\leq 1\end{cases}$ στο διάστημα $[-1,1]$ είναι $\frac{1}{1-(-1)}\big(\int_{-1}^0(-1)\,dx+\int_0^1 1\,dx\big)=0$ και καμία τιμή της συνάρτησης στο διάστημα $[-1,1]$ δεν είναι 0.

Ασκήσεις.

7.3.1. Χρησιμοποιώντας και τα αποτελέσματα των ασκήσεων 7.2.1 και 7.2.2, υπολογίστε τα
$$\int_1^3\big(\tfrac{2}{x}-x^2+x^{\sqrt{2}}+3e^x\big)\,dx,\qquad \int_\pi^{2\pi}(x^2-3\cos x+2\sin x)\,dx.$$

7.3.2. Υπολογίστε το $\int_1^2 f(x)\,dx$ της $y=f(x)=\begin{cases}1+3x^2 & \text{αν } 1<x<2\\ 0 & \text{αν } x=1\\ -2 & \text{αν } x=2\end{cases}$

7.3.3. Υπολογίστε το $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ της $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{αν } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

7.3.4. Υπολογίστε το $\int_{-2}^{7/2} [x]\,dx$.

7.3.5. Αποδείξτε με γεωμετρικό τρόπο αλλά και με μαθηματικό τρόπο ότι:
(i) $\int_k^{k+1} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\int_k^{k+(1/2)} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{8}$ και $\int_{k+(1/2)}^{k+1} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{8}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) $-\frac{1}{8} \leq \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx \leq \frac{1}{8}$ για κάθε a, b με $a < b$.

7.3.6. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι:
(i) $xe^{-2x} \leq \int_x^{2x} e^{-t}\,dt \leq xe^{-x}$ για κάθε $x > 0$.
(ii) $3e^{-2} \leq \int_{1/2}^{2} xe^{-x}\,dx \leq \frac{3}{2}e^{-1}$.

7.3.7. Αποδείξτε ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4x}{3}$ για κάθε $x \in [0,1]$ καθώς και ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4}{3x}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, να συμπεράνετε ότι:
(i) $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2x^2}{3}$ για κάθε $x \in [0,1]$.
(ii) $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\log x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

7.3.8. Αποδείξτε ότι $\int_0^\pi \sin^{n+1} x\,dx \leq \int_0^\pi \sin^n x\,dx$ και $\int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x\,dx \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

7.3.9. Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad \lim_{x\to0+} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad \lim_{x\to0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

7.3.10. Έστω ότι ισχύει $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$.
(i) Αποδείξτε ότι $\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(b)\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$ για κάθε υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})| \leq \frac{M}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7.3.11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a,b]$.

7.3.12. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$ και επομένως $\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το 0 και επομένως ότι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το όριο της ακολουθίας αυτής συμβολίζεται

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

και ονομάζεται **σταθερά του Euler**.

7.3.13. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε t, s ισχύει

$$t^2 \int_a^b f^2(x)\,dx + 2ts \int_a^b f(x)g(x)\,dx + s^2 \int_a^b g^2(x)\,dx = \int_a^b (tf(x) + sg(x))^2\,dx \geq 0.$$

Με βάση αυτό αποδείξτε την *πολύ σημαντική* **ανισότητα του Schwarz**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

7.3.14. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.
(i) Αποδείξτε ότι

$\frac{1}{2}\int_a^b \big(\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\,dy\big)\,dx = (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx.$

(ii) Αν οι f, g είναι είτε και οι δύο αύξουσες είτε και οι δύο φθίνουσες στο $[a, b]$ αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\, \tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \le \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

(iii) Αν η μία από τις f, g είναι αύξουσα στο $[a, b]$ και η άλλη φθίνουσα στο $[a, b]$ αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\, \tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \ge \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

7.3.15. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

7.3.16. Έστω συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει $\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \ge 0$ για κάθε $x', x'' \in [a, b]$ με $x' < x''$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
(Υπόδειξη: Έστω $f(\xi) < 0$ για κάποιο $\xi \in [a, b]$. Τότε υπάρχει υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$ με $d - c > 0$ ώστε $\xi \in [c, d]$ και ώστε να ισχύει $f(x) < \frac{f(\xi)}{2}$ για κάθε $x \in [c, d]$.)

7.3.17. Υπολογίστε την μέση τιμή των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.
(i) $y = x$ στα $[-1, 1]$ και $[0, 1]$.
(ii) $y = x^2$ στο $[-1, 1]$.
(iii) $y = \sin x$ στα $[0, \pi]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[0, 2\pi]$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 7.2.1.

7.3.18. θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Έστω συνεχείς $f, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $w(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b w(x)\,dx.$$

Αυτό αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής το οποίο είδαμε στην θεωρία (με σταθερή $w(x) = 1$) και αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Σε αυτό το πλαίσιο, η w χαρακτηρίζεται **συνάρτηση βάρους** και, αν $\int_a^b w(x)\,dx > 0$, ο αριθμός $\frac{1}{\int_a^b w(x)\,dx}\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f σε σχέση με την συνάρτηση βάρους w.

7.3.19. Έστω διάστημα I, συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι *κυρτή* στο I και συνεχής $g : [a, b] \to I$. Αποδείξτε ότι

$$f\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx.$$

(Υπόδειξη: Πάρτε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχη συλλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Εφαρμόστε την ανισότητα της άσκησης 6.9.26(i) με $\mu_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ και $x_k = g(\xi_k)$. Παρατηρήστε ότι ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$ ανήκει στο I. Τέλος, πάρτε όριο όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0.)
Πώς θα γίνει η παραπάνω ανισότητα αν η f είναι *κοίλη* στο I;
Αποδείξτε τις ανισότητες:
(i) $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{g(x)}\,dx$.
(ii) $\log\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\big) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)\,dx$ αν ισχύει $g(x) > 0$ στο $[a, b]$.
(iii) $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\big)^\kappa \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)^\kappa\,dx$ αν ισχύει $g(x) > 0$ στο $[a, b]$ και $\kappa \ge 1$ ή $\kappa \le 0$.
(iv) $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\big)^\kappa \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)^\kappa\,dx$ αν ισχύει $g(x) > 0$ στο $[a, b]$ και $0 \le \kappa \le 1$.

Κεφάλαιο 8

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος Riemann.

8.1 Αντιπαράγωγοι και αόριστα ολοκληρώματα Riemann.

Σ' αυτό το κεφάλαιο, όπως και στο προηγούμενο, θα λέμε "ολοκλήρωμα" ή "ολοκληρώσιμη" συνάρτηση αντί να λέμε "ολοκλήρωμα Riemann" ή "Riemann ολοκληρώσιμη" συνάρτηση.

Α. Αντιπαράγωγοι.

Ορισμός. *Έστω διάστημα I και $f, F : I \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ τότε η F χαρακτηρίζεται* **αντιπαράγωγος** *ή* **παράγουσα** *ή* **πρωτεύουσα συνάρτηση** *ή* **αρχική συνάρτηση** *της f στο διάστημα I.*

Παράδειγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y = x^n$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = 1$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$ η $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y = x^n$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ η $y = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y = x^a$ στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = \log|x|$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Αν $a > 0, a \neq 1$ η $y = \frac{a^x}{\log a}$ είναι αντιπαράγωγος της $y = a^x$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = \sin x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \cos x$ και η $y = -\cos x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Η $y = \tan x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Επίσης, η $y = -\cot x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ στο $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα. Η $y = \arcsin x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1, 1)$. Επίσης, η $y = -\arccos x$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα. Η $y = \arctan x$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{1+x^2}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Πρόταση 8.1. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$.*
(i) Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μία από τις F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγος της f στο I τότε και η άλλη είναι αντιπαράγωγος της f στο I.
(ii) Αν οι F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγοι της f στο I τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε x στο I, όπου c είναι ένας σταθερός αριθμός, δηλαδή ανεξάρτητος του $x \in I$, και έστω ότι η F_1 είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Τότε ισχύει $F_2'(x) = F_1'(x) + 0 = f(x)$ για κάθε $x \in I$ οπότε η F_2 είναι αντιπαράγωγος της f στο I.
(ii) Έστω ότι οι F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγοι της f στο I και ας συμβολίσουμε $h = F_2 - F_1$ την διαφορά τους στο I. Τότε ισχύει $h'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ οπότε από την πρόταση 6.5 συνεπάγεται ότι η h είναι σταθερή συνάρτηση στο I. $\square$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο.

Έστω ότι η F είναι αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $F + c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός, και από καμία άλλη συνάρτηση.

Από την πρόταση 8.1 συνεπάγεται ότι αν μία συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία αντιπαράγωγο σε ένα διάστημα τότε *η συνάρτηση έχει άπειρες αντιπαραγώγους στο ίδιο διάστημα: αυτές οι αντιπαράγωγοι είναι μία οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερά και καμία άλλη συνάρτηση*.

Παράδειγμα. Οι αντιπαράγωγοι της $y = x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι *ακριβώς όλες* οι συναρτήσεις $y = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα. Για κάθε συνάρτηση στα αρχικά παραδείγματα μπορούμε να περιγράψουμε ακριβώς όλες τις αντιπαραγώγους της αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη αντιπαράγωγο. Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $y = \cos x$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = \sin x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Πρέπει να προσεχθεί το εξής. Αν μία συνάρτηση g έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης *δύο ξένων* διαστημάτων τότε *δεν συνεπάγεται* ότι η g είναι σταθερή στην ένωση των δύο αυτών διαστημάτων.

Παράδειγμα. Η $y = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{αν } 1 < x < 3 \end{cases}$ έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης $(0,1) \cup (1,3)$ διότι είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,3)$. Όμως η g δεν είναι σταθερή στην ένωση $(0,1) \cup (1,3)$.

Μετά από την τελευταία παρατήρηση καταλαβαίνουμε γιατί στην πρόταση 8.1 και στις αναδιατυπώσεις της αναφέρεται "διάστημα" και όχι "ένωση περισσοτέρων του ενός διαστημάτων".

Παράδειγμα. Οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = \log|x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Όμως οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι $y = \begin{cases} \log|x| + c_1 & \text{αν } x < 0 \\ \log|x| + c_2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ όπου c_1 και c_2 είναι δύο αυθαίρετες σταθερές *όχι απαραιτήτως ίσες*.

Β. Αόριστα ολοκληρώματα.

Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ οπότε ορίζεται το $\int_a^b f(x)\,dx$. Είναι πολύ χρήσιμη η εξής επέκταση του συμβόλου του ολοκληρώματος:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επιτρέπεται λοιπόν να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Επίσης, αν απλώς ορίζεται η f στο σημείο a τότε θα την θεωρούμε αυτομάτως ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, a] = \{a\}$ και ορίζουμε:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Επομένως έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f(x)\, dx$ για οποιαδήποτε a, b με την προϋπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ αν $b > a$ ή στο $[b, a]$ αν $b < a$ ή ότι είναι ορισμένη στο σημείο a αν $b = a$.

Η γνωστή ιδιότητα

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx,$$

η οποία ισχύει όταν $a < b < c$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a, b, c, αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από το μικρότερο μέχρι το μεγαλύτερο από τα τρία αυτά σημεία. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $c < b < a$ η ισότητα αυτή γράφεται $-\int_c^a f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$ ή, ισοδύναμα, $\int_c^a f(x)\, dx = \int_c^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx$ και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a = c < b$ η ισότητα γράφεται $0 = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx$ η οποία ισχύει λόγω του ορισμού του $\int_b^a f(x)\, dx$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μία ακόμη γνωστή ιδιότητα η οποία επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ αν $a < b$ ή στο $[b, a]$ αν $b < a$ και αν για κάποιο M ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα τότε συνεπάγεται

$$\Big|\int_a^b f(x)\, dx\Big| \leq M|b - a|.$$

Πράγματι, αν $a < b$ (οπότε $|b - a| = b - a$) τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν $b < a$ τότε $\big|\int_a^b f(x)\, dx\big| = \big| -\int_b^a f(x)\, dx\big| = \big|\int_b^a f(x)\, dx\big| \leq M(a - b) = M|b - a|$. Τέλος, αν $a = b$ τότε η ανισότητα $\big|\int_a^b f(x)\, dx\big| \leq M|b - a|$ ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Ορισμός. *Έστω διάστημα I, έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και έστω $a \in I$ και αυθαίρετη σταθερά c. Ορίζουμε την συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + c$$

για κάθε $x \in I$. Κάθε τέτοια συνάρτηση F χαρακτηρίζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** *της f στο διάστημα I. Το a ονομάζεται* **αρχικό σημείο** *του αόριστου ολοκληρώματος.*

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο a με ένα άλλο a' στο ίδιο διάστημα I κάνουμε το εξής απλό:

$$F(x) = \textstyle\int_a^x f(t)\, dt + c = \int_{a'}^x f(t)\, dt + \int_a^{a'} f(t)\, dt + c = \int_{a'}^x f(t)\, dt + c',$$

όπου c' είναι μία νέα σταθερά, η $c' = \int_a^{a'} f(t)\, dt + c$. Δηλαδή βλέπουμε ότι η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' ισοδυναμεί με την αντικατάσταση μίας σταθεράς c με μία άλλη c'. Γι αυτό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f(t)\, dt$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος ο οποίος θα προκύψει.

Παράδειγμα. Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x^2$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $y = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{x^3}{3}$. Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x^2$ είναι το $y = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι οποιαδήποτε σταθερά. Αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε κάποιο άλλο a ως αρχικό σημείο τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $y = \int_a^x t^2\, dt$ είναι το $y = \int_a^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ και η σταθερά είναι η $c = -\frac{a^3}{3}$.

Πρόταση 8.2. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$.*
(i) Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μία από τις F_1, F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I.
(ii) Αν οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε $x \in I$, όπου c είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του x, και έστω ότι η F_1 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Δηλαδή υπάρχουν $a_1 \in I$ και σταθερά c_1 ώστε να ισχύει $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ για κάθε $x \in I$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $F_2(x) = F_1(x) + c = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + (c_1 + c) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_2 = a_1$ και $c_2 = c_1 + c$. Άρα η F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I.
(ii) Έστω ότι οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I οπότε υπάρχουν $a_1, a_2 \in I$ και σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύει $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ και $F_2(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$ για κάθε $x \in I$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2 - \int_{a_1}^x f(t)\,dt - c_1 = \int_{a_2}^{a_1} f(t)\,dt + c_2 - c_1$ για κάθε $x \in I$ οπότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. □

Από την πρόταση 8.2 συνεπάγεται ότι αν μία συνάρτηση έχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα σε κάποιο διάστημα τότε *η συνάρτηση έχει άπειρα αόριστα ολοκληρώματα στο ίδιο διάστημα: αυτά είναι ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερά και καμία άλλη συνάρτηση.*

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\int f(x)\,dx$ για να δηλώσουμε *ταυτόχρονα όλα τα αόριστα ολοκληρώματα* της συνάρτησης f σε κάποιο διάστημα I ή, ισοδύναμα, *ταυτόχρονα όλες τις συναρτήσεις* $\int_a^x f(t)\,dt + c$ στο I, όπου a είναι οποιοδήποτε σημείο του I και c είναι αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή γράφουμε

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c.$$

Παράδειγμα. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι *ακριβώς όλες* οι συναρτήσεις $y = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα με το σύμβολο $\int x^2\,dx$ δηλώνουμε όλες μαζί αυτές τις συναρτήσεις και επομένως γράφουμε $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Πρέπει να τονιστεί ότι με το σύμβολο $\int f(x)\,dx$ περιγράφουμε ταυτόχρονα *άπειρες συναρτήσεις.*

Παρατηρήστε ότι, όπως είδαμε σε δύο από τα παραδείγματά μας, οι αντιπαράγωγοι της $y = x^2$ είναι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματά της: κάθε αντιπαράγωγος είναι αόριστο ολοκλήρωμα και κάθε αόριστο ολοκλήρωμα είναι αντιπαράγωγος. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευθεί.

Πριν προχωρήσουμε ας δούμε δύο απλές ιδιότητες του συμβόλου $\int f(x)\,dx$. Η πρώτη είναι:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Θεωρούμε ένα αρχικό σημείο a του διαστήματος I και παίρνουμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ στο I. Αυτό σημαίνει ότι $\int f(x)\,dx = F(x) + c_1$ και $\int g(x)\,dx = G(x) + c_2$, όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές οι οποίες παίρνουν όλες τις πραγματικές τιμές. Τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned}\textstyle\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx &= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + (c_1 + c_2)\\ &= \textstyle\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt + (c_1 + c_2).\end{aligned}$$

Το $\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $f + g$ στο I και, επειδή η σταθερά $c_1 + c_2$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, συμπεραίνουμε ότι το $\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt + (c_1 + c_2)$ ταυτίζεται με το $\int (f(x) + g(x))\,dx$. Δηλαδή $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\int (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \qquad \text{αν } \lambda \neq 0.$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το ίδιο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ οπότε $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά η οποία παίρνει κάθε πραγματική τιμή. Τώρα

$$\lambda \int f(x)\,dx = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x (\lambda f(t))\,dt + \lambda c.$$

Το $\int_a^x (\lambda f(t))\,dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της λf στο I και η σταθερά λc (προσέξτε: $\lambda \neq 0$) παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Άρα το $\int_a^x (\lambda f(t))\,dt + \lambda c$ ταυτίζεται με το $\int (\lambda f(x))\,dx$ και επομένως $\lambda \int f(x)\,dx = \int (\lambda f(x))\,dx$.

Όπως φάνηκε σ' αυτές τις δύο αποδείξεις, όταν προσθέτουμε δύο γενικά αόριστα ολοκληρώματα μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δύο αυθαίρετων σταθερών οι οποίες εμφανίζονται με *μία* αυθαίρετη σταθερά και, ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα γενικό αόριστο ολοκλήρωμα με ένα αριθμό $\neq 0$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθεράς και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μία* αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα. Γράφουμε $\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2$.

Παράδειγμα. Γράφουμε $\int (7x)\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + c$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (7x)\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 7c$.

Παράδειγμα. Γράφουμε $\int (x + g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \int g(x)\,dx$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x + g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + c + \int g(x)\,dx$ διότι η αυθαίρετη σταθερά c μπορεί να *απορροφηθεί* στο $\int g(x)\,dx$ το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μία αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα. Προσέξτε! Γράφουμε $\int x\,dx - \int x\,dx = c$ και όχι $= 0$. Διότι: $\int x\,dx - \int x\,dx = \int (x - x)\,dx = \int 0\,dx = c$ ή, με άλλο τρόπο, $\int x\,dx - \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c$.

Πρόταση 8.3. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι συνάρτηση συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $a \in I$, σταθερά c και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$.
Έστω $\xi \in I$ όχι δεξιό άκρο του I. Θεωρούμε $b \in I$ ώστε $\xi < b$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[\xi, b]$ είναι φραγμένη στο $[\xi, b]$ οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [\xi, b]$. Τότε για κάθε $x \in [\xi, b]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \left|\left(\int_a^x f(t)\,dt + c\right) - \left(\int_a^\xi f(t)\,dt + c\right)\right| = \left|\int_\xi^x f(t)\,dt\right| \leq M(x - \xi).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[\xi, x] \subseteq [\xi, b]$ οπότε ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [\xi, x]$.
Άρα $\lim_{x \to \xi+}(F(x) - F(\xi)) = 0$ οπότε $\lim_{x \to \xi+} F(x) = F(\xi)$.
Έστω $\xi \in I$ όχι αριστερό άκρο του I. Τα υπόλοιπα είναι παραλλαγή των προηγουμένων. Θεωρούμε $b \in I$ ώστε $b < \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[b, \xi]$ είναι φραγμένη στο $[b, \xi]$ οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [b, \xi]$. Για κάθε $x \in [b, \xi]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \left|\left(\int_a^x f(t)\,dt + c\right) - \left(\int_a^\xi f(t)\,dt + c\right)\right| = \left|\int_x^\xi f(t)\,dt\right| \leq M(\xi - x).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[x, \xi] \subseteq [b, \xi]$ οπότε ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [x, \xi]$.
Άρα $\lim_{x \to \xi-}(F(x) - F(\xi)) = 0$ οπότε $\lim_{x \to \xi-} F(x) = F(\xi)$.
Άρα η F είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$. $\square$

Ασκήσεις.

8.1.1. (i) Βρείτε μία αντιπαράγωγο της $y = 2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιές είναι όλες οι αντιπαράγωγοι της $y = 2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$;
(ii) Βρείτε μία αντιπαράγωγο της $y = 2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή της στο $x = 1$ να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;

8.1.2. Βρείτε συνάρτηση $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $F(1) = 1$.

8.1.3. Βρείτε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και $F(0) = 1$.

8.1.4. Αν υπήρχε ρητή συνάρτηση $y = r(x)$ και διάστημα (a, b) ώστε να ισχύει $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a, b)$ θα ήταν $r(x) = \ldots$ στο (a, b). Τί συμπεραίνετε;

8.1.5. Αποδείξτε ότι η $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ δεν έχει αντιπαράγωγο στο $(-\infty, +\infty)$.

8.1.6. (i) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y = 1 - x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιά είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = 1-x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$; Με άλλα λόγια, ποιό είναι το $\int (1-t^2)\, dt$;
(ii) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y = 1 - x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή του στο $x = 2$ να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

8.1.7. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και έστω $a \in I$ και σταθερά κ. Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στο $x = a$;

8.1.8. Υποθέστε ότι $\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$;

8.1.9. Θεωρήστε την $y = f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ στο $(-\infty, +\infty)$.
(i) Αποδείξτε ότι f είναι περιοδική με περίοδο 1.
(ii) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι η F στο $(-\infty, +\infty)$ είναι περιοδική με περίοδο 1. Εκφράστε τον τύπο της F χρησιμοποιώντας το $[x]$.
(iii) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F(t) + \frac{1}{12})\, dt$ στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι η G είναι περιοδική στο $(-\infty, +\infty)$ με περίοδο 1.

8.1.10. Έστω ότι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα μίας συνάρτησης είναι περιοδική ή άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ισχύει τότε ότι *όλα* τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης είναι περιοδικές ή άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, αντιστοίχως;

8.2 Το θεμελιώδες θεώρημα.

Το θεώρημα το οποίο ακολουθεί είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του απειροστικού λογισμού. Το θεώρημα αυτό συνδέει τις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και έστω $a \in I$ και σταθερά c. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ για $x \in I$. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $\xi \in I$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο ξ και*

$$F'(\xi) = f(\xi).$$

Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο I τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in I$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Έστω λοιπόν οποιοδήποτε $x \in I$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Τότε για κάθε $t \in [\xi, x]$ ή $[x, \xi]$ ισχύει $|t - \xi| < \delta$ και επομένως $|f(t) - f(\xi)| < \epsilon$. Τότε όμως

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} - f(\xi)\right| &= \left|\tfrac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^\xi f(t)\,dt}{x-\xi} - f(\xi)\right| = \left|\tfrac{\int_\xi^x f(t)\,dt - f(\xi)(x-\xi)}{x-\xi}\right| \\ &= \left|\tfrac{\int_\xi^x f(t)\,dt - \int_\xi^x f(\xi)\,dt}{x-\xi}\right| = \tfrac{|\int_\xi^x (f(t)-f(\xi))\,dt|}{|x-\xi|} \leq \tfrac{|x-\xi|\epsilon}{|x-\xi|} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} = f(\xi)$ οπότε $F'(\xi) = f(\xi)$. □

Έχουμε επομένως το εξής άμεσο πόρισμα.

Πρόταση 8.4. *Έστω διάστημα I και συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και αντιπαράγωγος της f στο I και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Από το θεμελιώδες θεώρημα συνεπάγεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα F της f στο διάστημα I με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για $x \in I$ είναι και αντιπαράγωγος της f στο I. Γνωρίζουμε όμως ότι τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά (*ένα αόριστο ολοκλήρωμα συν αυθαίρετη σταθερά*), αλλά και ότι οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι, επίσης, ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά (*μία αντιπαράγωγος συν αυθαίρετη σταθερά*). □

Θα δούμε ένα ακόμη άμεσο πόρισμα του θεμελιώδους θεωρήματος. Η διατύπωσή του είναι κάπως ασαφής αλλά θα γίνει σαφής στην αιτιολόγηση η οποία ακολουθεί.

Οι πράξεις της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης συναρτήσεων είναι, ουσιαστικά, αντίστροφες. Η μία αναιρεί την άλλη.

Πράγματι, αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και πάρουμε ένα οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμά της, $\int_a^x f(t)\,dt + c$, στο I και κατόπιν πάρουμε την παράγωγο του αόριστου ολοκληρώματος τότε επιστρέφουμε πίσω στην συνάρτηση f:

$$\tfrac{d}{dx}\big(\int_a^x f(t)\,dt + c\big) = f(x).$$

Αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του θεμελιώδους θεωρήματος. Βλέπουμε λοιπόν ότι *η παραγώγιση αναιρεί την ολοκλήρωση*.
Αντιστρόφως, αν η F έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και πάρουμε την παράγωγο $\frac{dF(x)}{dx}$ στο I και κατόπιν πάρουμε ένα οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της παραγώγου αυτής στο I τότε επιστρέφουμε πίσω στην F *συν κάποια σταθερά* (ανεξάρτητη του x):

$$\int_a^x \tfrac{dF(t)}{dt}\,dt + c = F(x) + (c - F(a)) = F(x) + c'.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι *η ολοκλήρωση αναιρεί την παραγώγιση* (εμφανίζοντας μία επιπλέον σταθερά). Αυτό δικαιολογείται ως εξής. Ορίζουμε την $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ στο I η οποία είναι συνεχής στο I. Αυτό σημαίνει ότι η F είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Αλλά το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x \frac{dF(t)}{dt}\,dt + c = \int_a^x f(t)\,dt + c$ είναι, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, *κάποια* από τις αντιπαραγώγους της f στο I και επομένως υπάρχει σταθερά c' ώστε να ισχύει $\int_a^x \frac{dF(t)}{dt}\,dt + c = F(x) + c'$ για κάθε $x \in I$. Αν θέσουμε $x = a$ βρίσκουμε $0 + c = F(a) + c'$ οπότε $c' = c - F(a)$ και επομένως $\int_a^x \frac{dF(t)}{dt}\,dt + c = F(x) + (c - F(a))$ για κάθε x στο I.
Η πρόταση η οποία ακολουθεί, άμεση συνέπεια του θεμελιώδους θεωρήματος, έχει σπουδαία πρακτική αξία.

Πρόταση 8.5. *Έστω διάστημα I, συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και αντιπαράγωγος F της f στο I.*
(i) Τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

για κάθε $x \in I$.
(ii) Το ολοκλήρωμα της f σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με την διαφορά των τιμών της F στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. (i) Έχει ήδη αποδειχθεί στην πρόταση 8.4.
(ii) Έστω $a \in I$. Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, η $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για $x \in I$ είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Επομένως υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = c$ για κάθε $x \in I$. Αν θέσουμε $x = a$ βρίσκουμε $0 - F(a) = c$ και επομένως ότι ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = -F(a)$ για κάθε $x \in I$. Τέλος, με $x = b$ βρίσκουμε ότι $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. □

Πρώτο πόρισμα. *Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και γνωρίζουμε μία αντιπαράγωγο F της f στο I τότε γνωρίζουμε όλα τα αόριστα ολοκληρώματά της στο I.*

Ιδού μερικά σημαντικά αόριστα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα. Ισχύει

$$\int 1\,dx = x + c$$

στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Αν $\kappa \neq -1$, $\kappa \neq 0$ τότε ισχύει

$$\int x^\kappa\,dx = \frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} + c.$$

Ο τύπος αυτός ισχύει (i) στο $(-\infty, +\infty)$ αν $\kappa \in \mathbb{N}$, (ii) στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αν $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\kappa \leq -2$, (iii) στο $[0, +\infty)$ αν $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\kappa > 0$ και (iv) στο $(0, +\infty)$ αν $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\kappa < 0$.

Παράδειγμα. Αν $\kappa = -1$ τότε ισχύει

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ τότε ισχύει

$$\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\log\alpha} + c$$

στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα. Οι παρακάτω τύποι ισχύουν στο $(-\infty, +\infty)$.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c.$$

Παράδειγμα. Ο πρώτος από τους τύπους

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ και ο δεύτερος σε κάθε $(k\pi, \pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα. Οι παρακάτω τύποι ισχύουν στο διάστημα $(-1,1)$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c.$$

Παράδειγμα. Ο τύπος

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

ισχύει στο $(-\infty, +\infty)$.

Δεύτερο πόρισμα. *Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και γνωρίζουμε μία αντιπαράγωγο F της f στο I τότε γνωρίζουμε και το ολοκλήρωμά της σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.*

Ιδού τα αντίστοιχα των αόριστων ολοκληρωμάτων στα προηγούμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα. Για κάθε a, b:

$$\int_a^b 1\,dx = b-a.$$

Παράδειγμα. Αν $\kappa \neq -1$, $\kappa \neq 0$ τότε:

$$\int_a^b x^\kappa\,dx = \frac{b^{\kappa+1}-a^{\kappa+1}}{\kappa+1}.$$

Αυτό ισχύει (i) για κάθε a, b αν $\kappa\in\mathbb{N}$, (ii) για κάθε $a, b>0$ και κάθε $a, b<0$ αν $\kappa\in\mathbb{Z}$, $\kappa\leq -2$, (iii) για κάθε $a, b\geq 0$ αν $\kappa\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\kappa>0$ και (iv) για κάθε $a, b>0$ αν $\kappa\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\kappa<0$.

Παράδειγμα. Αν $\kappa=-1$ τότε για κάθε $a, b<0$ και για κάθε $a, b>0$:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}.$$

Παράδειγμα. Αν $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ τότε για κάθε a, b:

$$\int_a^b \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^b-\alpha^a}{\log\alpha}.$$

Παράδειγμα. Για κάθε a, b:

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Παράδειγμα. Το πρώτο από τα

$$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan b - \tan a, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \cot a - \cot b$$

ισχύει για $a, b\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ και το δεύτερο για $a, b\in(k\pi, \pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα. Για κάθε $a, b\in(-1,1)$:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin b - \arcsin a, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos a - \arccos b.$$

Παράδειγμα. Για κάθε a, b:

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a.$$

Αξίζει να ξαναδούμε την σχέση ανάμεσα στην μάζα ευθύγραμμης ράβδου και στην σημειακή γραμμική πυκνότητά της υπό το φως του θεμελιώδους θεωρήματος: έχουμε ήδη αναφέρει ότι η σημειακή γραμμική πυκνότητα $d(x)$ είναι η παράγωγος της μάζας $m(x)$, $d(x) = m'(x)$, και ότι η μάζα είναι το ολοκλήρωμα της σημειακής γραμμικής πυκνότητας, $m(x) = \int_a^x d(t)\,dt$.

Ασκήσεις.

8.2.1. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$ για κάθε x.
(ii) $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$ για κάθε x.
(iii) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x) + c$ για κάθε $x > 1$.
(iv) $\int \frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx = \log\big(\log(\log x)\big) + c$ για κάθε $x > e$.
(v) $\int x^n e^{-x}\,dx = n!e^{-x}\big(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\big) + c$ για κάθε x.
(vi) $\int x^n e^{x}\,dx = (-1)^{n-1}n!e^{x}\big(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\big) + c$ για κάθε x.

8.2.2. Βρείτε συνεχή $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

8.2.3. Υπάρχει συνεχής $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$.

8.2.4. (i) Έστω διαστήματα I, J, συναρτήσεις $g, h : J \to I$ και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Ορίζουμε την $F : J \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$ για $x \in J$. Αν οι g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\xi \in J$ και η f είναι συνεχής στα $g(\xi)$ και $h(\xi)$, αποδείξτε ότι $F'(\xi) = f(h(\xi))h'(\xi) - f(g(\xi))g'(\xi)$.
(ii) Βρείτε την παράγωγο καθεμίας από τις συναρτήσεις

$$y = \int_0^x \tfrac{\sin t}{1+t^2}\,dt, \quad y = \int_x^2 \tfrac{\sin t + e^t}{t^2+1}\,dt, \quad y = \int_1^{x^2-x} \tfrac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt, \quad y = \int_{\sin x}^{x+\cos x} te^t\,dt.$$

8.2.5. Βρείτε συνεχή $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 1 - 2^{x^2}$ για κάθε x.

8.2.6. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = 0$.

8.2.7. Βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x e^{t-x}(2t+1)\,dt$.

8.2.8. Βρείτε $a > 0$ και b ώστε $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$.

8.2.9. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 7.2.3 καθώς και το $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\kappa+\cdots+k^\kappa+\cdots+n^\kappa}{n^{\kappa+1}}$.

8.2.10. Βάσει της άσκησης 8.2.1, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx = 0$.
(ii) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 0$ αν $k \neq 0$.
Επίσης, για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ αποδείξτε ότι:
(iii) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0$.
(iv) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0$ αν $n \neq m$.
(v) $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0$ αν $n \neq m$.
(vi) $\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$ αν $n \neq 0$.

8.2.11. Κάθε συνάρτηση $f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ ονομάζεται **τριγωνομετρικό πολυώνυμο**. Αν ένα τουλάχιστον από τα a_n, b_n είναι $\neq 0$ τότε λέμε ότι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο έχει **βαθμό** n.
Έστω τριγ. πολυώνυμα $f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ και $g(x) = c_0 + (c_1 \cos x + d_1 \sin x) + \cdots + (c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx))$. Βάσει της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx = a_0c_0 + \tfrac{a_1c_1+b_1d_1}{2} + \cdots + \tfrac{a_nc_n+b_nd_n}{2}.$$

8.2.12. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της άσκησης 1.4.7 καθώς και τις ασκήσεις 8.2.10 και 8.2.11, αποδείξτε ότι
(i) $\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+(1/2))x)}{\sin(x/2)}\, dx = \pi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx = \pi$ ή 0 αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό ή άρτιο, αντιστοίχως.
(iii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\, dx = n\pi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8.2.13. Αν $a \neq \pm b$ αποδείξτε ότι $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(ax)\sin(bx)\, dx = 0$. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο δεύτερος κανόνας του l' Hopitâl;

8.2.14. Η ακολουθία των **πολυωνύμων Bernoulli** ορίζεται επαγωγικά από τις σχέσεις $P_0(x) = 1$, $P_n'(x) = nP_{n-1}(x)$ και $\int_0^1 P_n(x)\, dx = 0$.
(i) Βρείτε τα πολυώνυμα $P_n(x)$ για $n = 1, 2, 3, 4$.
(ii) Αποδείξτε με επαγωγή ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο x^n.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(0) = P_n(1)$ για κάθε $n \geq 2$.
(iv) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ για κάθε $n \geq 1$.
(v) Αποδείξτε ότι

$$1^n + 2^n + \cdots + k^n = \int_0^{k+1} P_n(x)\, dx = \tfrac{P_{n+1}(k+1)-P_{n+1}(0)}{n+1}$$

και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους με $n = 1$ και $n = 2$.
(vi) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ για κάθε $n \geq 1$.
(v) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_{2n+1}(0) = 0$ και $P_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ για κάθε $n \geq 1$.

8.2.15. Έστω διάστημα I, συνεχής $f : I \to \mathbb{R}$ και $a, b \in I$. Αποδείξτε ότι:
(i) αν η $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ για $x \in I$ είναι σταθερή στο I τότε η f είναι σταθερή 0 στο I.
(ii) αν ισχύει $\int_a^x f(t)\, dt = \int_x^b f(t)\, dt$ για κάθε $x \in I$ τότε η f είναι σταθερή 0 στο I.

8.2.16. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a, b]$ στο οποίο είναι συνεχής.
(Υπόδειξη: Από την $\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt = 0$ αποδείξτε ότι ισχύει $\int_a^x f(t)\, dt = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.)
Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$.
Παρατηρήστε ότι το προηγούμενο είναι ειδική περίπτωση της περίπτωσης της "ισότητας" στην πρόταση 7.9 και ότι έτσι μπορούμε να έχουμε μία δεύτερη απόδειξη των αντίστοιχων μερών των προτάσεων 7.9 και 7.10.

8.2.17. (i) Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\, dt$ για κάθε $x > 0$.
(ii) Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 - x \int_1^x f(t)\, dt$ για κάθε $x > 0$.

8.2.18. Έστω συνεχής $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \geq 0$.
(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

8.2.19. Έστω ότι η $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,a]$ και $f(0) = 0$.
(i) Θεωρήστε την $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \begin{cases} f(x)^2/x, & \text{αν } 0 < x \leq a \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0,a]$.
(ii) Θεωρήστε την $h : [0,a] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \int_0^x f'(t)^2\,dt$ και να συγκρίνετε τις παραγώγους των g, h.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)^2 \leq x\int_0^x f'(t)^2\,dt$ για κάθε $x \in [0,a]$.
(iv) Αν $f(a)^2 = a\int_0^a f'(t)^2\,dt$, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x) = cx$ για κάθε $x \in [0,a]$.
(v) Αν $f(a)^2 = a\int_0^a f'(t)^2\,dt$ και $f'(0) = 2$ αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in [0,a]$.

8.2.20. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_\xi^b f(x)\,dx$.

8.3 Υπολογισμοί.

Α. Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής.

Πρόταση 8.6. *Έστω διαστήματα I, J, συναρτήσεις $\phi : I \to J$ και $f : J \to \mathbb{R}$ ώστε η ϕ να έχει συνεχή παράγωγο στο I και η f να είναι συνεχής στο J. Τότε*

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,\Big|_{y=\phi(x)}$$

για κάθε $x \in I$. Επίσης,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy$$

για κάθε $a, b \in I$.

Ας κατανοήσουμε τα δύο μέλη της πρώτης ισότητας $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,\big|_{y=\phi(x)}$. Η συνάρτηση $f(\phi(x))\phi'(x)$ είναι συνεχής στο I διότι σχηματίζεται από σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και το σύμβολο $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ δηλώνει όλα τα αόριστα ολοκληρώματά της ή, ισοδύναμα, όλες τις αντιπαραγώγους της. Βλέπουμε, ειδικότερα, ότι το αριστερό μέλος της ισότητας δηλώνει συναρτήσεις του x στο I. Από την άλλη μεριά, το $\int f(y)\,dy$ στο δεξιό μέλος της ισότητας δηλώνει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα ή, ισοδύναμα, όλες τις αντιπαραγώγους της συνεχούς συνάρτησης $f(y)$ και επομένως δηλώνει συναρτήσεις του y στο J. Η αντικατάσταση $y = \phi(x)$ στο δεξιό μέλος μετατρέπει τις συναρτήσεις του y στο J σε συναρτήσεις του x στο I οπότε *και τα δύο μέλη* της ισότητας δηλώνουν συναρτήσεις του x στο I. Επομένως έχει *κατ' αρχήν* νόημα να αποδείξουμε την ισότητα αυτή.

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα θεωρούμε οποιαδήποτε αντιπαράγωγο $G : J \to \mathbb{R}$ της f στο J. Το $\int f(y)\,dy$ δηλώνει όλες τις αντιπαραγώγους της f στο J οπότε $\int f(y)\,dy = G(y) + c$ για κάθε $y \in J$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Επομένως ισχύει $\int f(y)\,dy\,\big|_{y=\phi(x)} = G(\phi(x)) + c$ για κάθε $x \in I$.
Όμως $\frac{d(G(\phi(x)))}{dx} = G'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ για κάθε $x \in I$ και άρα η $G(\phi(x))$ είναι αντιπαράγωγος της $f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I. Το $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ δηλώνει όλες τις αντιπαραγώγους της $f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I οπότε $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = G(\phi(x)) + c$ για κάθε $x \in I$, όπου c είναι

αυθαίρετη σταθερά.
Αποδείχθηκε λοιπόν ότι $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,\big|_{y=\phi(x)}$ για κάθε $x \in I$.
Για την δεύτερη ισότητα θεωρούμε τις $F, H : I \to \mathbb{R}$ και $G : J \to \mathbb{R}$ με τύπους $F(x) = \int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ και $H(x) = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$ για $x \in I$ και $G(y) = \int_{\phi(a)}^{y} f(s)\,ds$ για $y \in J$. Τώρα, ισχύει $F'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ για κάθε $x \in I$ και $G'(y) = f(y)$ για κάθε $y \in J$. Επίσης, ισχύει $H(x) = G(\phi(x))$ για κάθε $x \in I$ οπότε $H'(x) = G'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα ισχύει $F'(x) = H'(x)$ για κάθε $x \in I$ οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $F(x) = H(x) + c$ για κάθε $x \in I$. Θέτουμε $x = a$ και βρίσκουμε $0 = 0 + c$ οπότε $c = 0$ και επομένως $\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$ για κάθε $x \in I$. Τέλος, θέτουμε $x = b$ και καταλήγουμε στην ισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε. □

Παράδειγμα. Θα βρούμε το $\int \sin^n x \cos x\,dx$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \sin x$ έχουμε $\int \sin^n x \cos x\,dx = \int \sin^n x \frac{d\sin x}{dx}\,dx = \int y^n\,dy\big|_{y=\sin x} = \big(\frac{y^{n+1}}{n+1} + c\big)\big|_{y=\sin x} = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c$.

Παράδειγμα. Για να βρούμε το $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 1$ οπότε $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\frac{d(x^2+1)}{dx}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\big|_{y=x^2+1} = (\log|y| + c)\big|_{y=x^2+1} = \log(x^2+1) + c$.

Παράδειγμα. Για να βρούμε το $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \log x$ και έχουμε $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_a^b \frac{1}{\log x}\frac{d\log x}{dx}\,dx = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{y}\,dy = \log|\log b| - \log|\log a| = \log\big|\frac{\log b}{\log a}\big|$.
Πρέπει να προσέξουμε ώστε τα a, b να είναι τέτοια ώστε το σύνολο τιμών της $y = \log x$ το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a, b να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $z = \frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, +\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $y = \log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει είτε $\log a, \log b > 0$ ή, ισοδύναμα, $a, b > 1$ είτε $\log a, \log b < 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < a, b < 1$. Ειδικώτερα, παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο οπότε $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \log\frac{\log b}{\log a}$.

Β. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

Πρόταση 8.7. *Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο I. Τότε*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

για κάθε $x \in I$. Επίσης,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα θεωρούμε οποιαδήποτε αντιπαράγωγο $F : I \to \mathbb{R}$ της $f'g$ στο I. Τότε $\int f'(x)g(x)\,dx = F(x) - c$ για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Τότε ισχύει $\frac{d(f(x)g(x) - F(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f(x)g'(x)$ για κάθε $x \in I$ οπότε η $fg - F$ είναι αντιπαράγωγος της fg' στο I. Άρα $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - F(x) + c = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ για κάθε $x \in I$.
Για την δεύτερη ισότητα Θεωρούμε τις $F, G : I \to \mathbb{R}$ με τύπους $F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$ και $G(x) = \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ για $x \in I$. Τότε ισχύει $F'(x) + G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{d\,(f(x)g(x))}{dx}$ για κάθε $x \in I$. Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $F(x) + G(x) = f(x)g(x) + c$ για κάθε $x \in I$. Θέτουμε $x = a$ και βρίσκουμε $0 + 0 = f(a)g(a) + c$ οπότε $c = -f(a)g(a)$. Άρα $F(x) + G(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a)$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^x f'(t)g(t)\,dt + \int_a^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a)$ για κάθε $x \in I$. Τέλος, θέτουμε $x = b$ και καταλήγουμε στην ισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε. □

Παράδειγμα. $\int \log x\,dx = \int \log x\,\frac{dx}{dx}\,dx = x\log x - \int \frac{d\log x}{dx}\,x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$.

Παράδειγμα. Αν $a \neq 0$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= \tfrac{1}{a}\int \tfrac{de^{ax}}{dx}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{1}{a}\int e^{ax}\tfrac{d\sin(bx)}{dx}\,dx\\ &= \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \quad \text{(ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό)}\\ &= \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2}\int \tfrac{de^{ax}}{dx}\cos(bx)\,dx\\ &= \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) + \tfrac{b}{a^2}\int e^{ax}\tfrac{d\cos(bx)}{dx}\,dx\\ &= \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \tfrac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx.\end{aligned}$$

Άρα $\big(1+\frac{b^2}{a^2}\big)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(a\sin(bx)-b\cos(bx))+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά, και επομένως $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\big(\frac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\big) + c$.
Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία είναι $a = 0$ και $b \neq 0$ αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(bx) + c$. Άρα έχουμε τον χρήσιμο τύπο:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\,e^{ax}\cos(bx) + c$$

για κάθε a, b με $a^2 + b^2 \neq 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και ο τύπος:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx) + c.$$

Παράδειγμα. $\int_0^2 xe^x\,dx = \int_0^2 x\frac{de^x}{dx}\,dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 \frac{dx}{dx}e^x\,dx = 2e^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1$.

Παράδειγμα. $\int_0^\pi x\sin x\,dx = -\int_0^\pi x\frac{d\cos x}{dx}dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \int_0^\pi \frac{dx}{dx}\cos x\,dx = \pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$.

Γ. Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Θα περιγράψουμε μία γενική μέθοδο υπολογισμού του

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,dx,$$

όπου $r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.
Πρώτο βήμα. Αναγόμαστε στην περίπτωση κατά την οποία ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξ αρχής τότε παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν όμως $m \geq n$ τότε διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ ώστε ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει

$$a_m x^m + \cdots + a_0 = p(x)(b_n x^n + \cdots + b_0) + q(x)$$

για κάθε x. Τότε

$$\textstyle\int r(x)\,dx = \int p(x)\,dx + \int \frac{q(x)}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,dx.$$

Το $\int p(x)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα οπότε στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < n$.

Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και είναι εν γένει πολύ δύσκολο ή και αδύνατο αλλά σε μερικές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα είναι το εξής.

Κάθε πολυώνυμο $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ *μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων*

$$\begin{aligned} b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0 &= b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda ((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho \cdots ((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau \\ &= b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda (x-\mu-i\nu)^\rho (x-\mu+i\nu)^\rho \cdots (x-\epsilon-i\delta)^\tau (x-\epsilon+i\delta)^\tau, \end{aligned}$$

όπου $\kappa, \ldots, \lambda, \rho, \ldots, \tau \in \mathbb{N}$ *με* $\kappa + \cdots + \lambda + 2\rho + \cdots + 2\tau = n$ *και όπου* $\nu, \ldots, \delta > 0$.

Στην παραπάνω ανάλυση η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x-\alpha, \ldots, x-\gamma$ ισοδυναμεί με το ότι τα αντίστοιχα $\alpha, \ldots, \gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa, \ldots, \lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x-\mu)^2+\nu^2, \ldots, (x-\epsilon)^2+\delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu, \ldots, \epsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \ldots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \ldots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $-\infty, \alpha, \ldots, \gamma, +\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση σε **απλούς λόγους**:

$$\begin{aligned} r(x) = &\big(\tfrac{A_1}{x-\alpha} + \tfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \tfrac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}\big) + \cdots + \big(\tfrac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \tfrac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots + \tfrac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda}\big) \\ &+ \big(\tfrac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \tfrac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\big) + \cdots + \big(\tfrac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \tfrac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\big). \end{aligned}$$

Η "λογική" είναι απλή. Κάθε παράγων $x-\alpha, \ldots, x-\gamma$ του παρονομαστή καθορίζει μία ομάδα λόγων με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\kappa, \ldots, \lambda$, αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Επίσης, κάθε παράγων $(x-\mu)^2+\nu^2, \ldots, (x-\epsilon)^2+\delta^2$ καθορίζει μία ομάδα λόγων με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\rho, \ldots, \tau$, αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Οι αριθμοί $A_1, A_2, \ldots, E_\tau, \Delta_\tau$ είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο πολυωνύμων τα οποία προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1, A_2, \ldots, E_\tau, \Delta_\tau$ και το λύνουμε.

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων:

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx, \qquad \int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx, \qquad \int \tfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx,$$

όπου $k \in \mathbb{N}$. Εξετάζουμε καθέναν από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.

(i) Για το $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x - \alpha$ και έχουμε

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\tfrac{d(x-\alpha)}{dx}\,dx = \int \tfrac{1}{y^k}\,dy\Big|_{y=x-\alpha}.$$

Αν $k \geq 2$ τότε

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \big(-\tfrac{1}{k-1}\tfrac{1}{y^{k-1}} + c\big)\Big|_{y=x-\alpha} = -\tfrac{1}{k-1}\tfrac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c.$$

Αν $k = 1$ τότε

$$\int \tfrac{1}{x-\alpha}\,dx = (\log|y| + c)\Big|_{y=x-\alpha} = \log|x-\alpha| + c.$$

(ii) Για το $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$, με αλλαγή μεταβλητής $y = (x-\mu)^2 + \nu^2$ έχουμε

$$\int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\tfrac{d\,((x-\mu)^2+\nu^2)}{dx}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{y^k}\,dy\Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}.$$

Αν $k \geq 2$ τότε

$$\int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{k-1}\tfrac{1}{y^{k-1}} + c\big)\Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = -\tfrac{1}{2(k-1)}\tfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}} + c.$$

Αν $k=1$ τότε

$$\int \frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}\,dx = \frac{1}{2}(\log|y|+c)\Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c.$$

(iii) Τέλος, για το $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$, με την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x-\mu}{\nu}$ έχουμε

$$\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{((\frac{x-\mu}{\nu})^2+1)^k}\frac{d}{dx}\frac{x-\mu}{\nu}\,dx = \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\Big|_{y=\frac{x-\mu}{\nu}}.$$

Έτσι αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy,$$

όπου $k\in\mathbb{N}$. Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο*. Κατ' αρχάς, αν $k=1$ τότε

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c.$$

Αν $k>1$ τότε

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy \\ &= \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy - \int y\frac{y}{(y^2+1)^k}\,dy = I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\int y\frac{d}{dy}\frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy \\ &= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}. \end{aligned}$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1:

$$I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k-2)(2k-4)}I_{k-2}$$

μέχρι

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{y}{y^2+1} + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\arctan y + c. \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στο $\int r(x)\,dx$, καταλήγουμε στο ότι κάθε ομάδα όρων $\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}$ θα συνεισφέρει μία αντίστοιχη ομάδα

$$A_1\log|x-\alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \cdots - \frac{A_\kappa}{(k-1)(x-\alpha)^{\kappa-1}}$$

στο ολοκλήρωμα, κάθε ομάδα $\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\frac{M_2(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2}+\cdots+\frac{M_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ θα συνεισφέρει μία αντίστοιχη ομάδα

$$\frac{M_1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \cdots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}$$

και, τέλος, κάθε ομάδα $\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2}+\cdots+\frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ θα συνεισφέρει μία αντίστοιχη ομάδα

$$N_1'\arctan\frac{x-\mu}{\nu} + \frac{N_2'(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{N_\rho'(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}},$$

όπου οι συντελεστές $N_1',\ldots,N_\rho'$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1,\ldots,N_\rho$.

Παράδειγμα. $\int \frac{2}{x-3}\,dx = 2\log|x-3|+c.$

Παράδειγμα. $\int \frac{-5}{(x+2)^3}\,dx = \frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2}+c.$

Παράδειγμα. Για το $\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x+1}{3}$ οπότε

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\Big|_{y=\frac{x+1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\arctan y + c\right)\Big|_{y=\frac{x+1}{3}} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + c.$$

Παράδειγμα. Για το $\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = (x-2)^2 + 4$ οπότε

$$\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}(\log|y| + c)\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\log((x-2)^2+4) + c.$$

Παράδειγμα. Για το $\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = (x-2)^2 + 4$:

$$\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx = \int \frac{1}{2y^4}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \left(-\frac{1}{6y^3} + c\right)\Big|_{y=(x-2)^2+4} = -\frac{1}{6((x-2)^2+4)^3} + c.$$

Παράδειγμα. Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx$ κατ' αρχάς διαιρούμε το $x^3 - 2x^2 + 2$ με το $x^2 - 3x + 2$ και βρίσκουμε $x^3 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 3x + 2)(x+1) + x$ ή, ισοδύναμα, $\frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} = x + 1 + \frac{x}{x^2-3x+2}$. Άρα

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του $x^2 - 3x + 2$ είναι οι 1 και 2 οπότε $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^2-3x+2}$ γράφεται:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

όπου οι αριθμοί A, B πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x-1)(x-2)$ και προκύπτει $x = (A+B)x + (-2A - B)$. Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δύο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε $A + B = 1$ και $-2A - B = 0$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $A = -1$, $B = 2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Επομένως

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

και, τέλος,

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x-1| + 2\log|x-2| + c.$$

Παράδειγμα. Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$ αναλύουμε το $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ σε απλούς λόγους. Παραγοντοποιούμε το $x^3 + x^2 - x - 1$ ως εξής: $x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$. Δηλαδή το $x^3 + x^2 - x - 1$ έχει απλή ρίζα το 1 και διπλή ρίζα το -1. Άρα ο λόγος $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ γράφεται:

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x-1)(x+1)^2$, εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A + B = 2$, $2A + C = 0$ και $A - B - C = 1$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{5}{4}$, $C = -\frac{3}{2}$. Άρα

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{4}\log|x-1| + \frac{5}{4}\log|x+1| + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx$ αναλύουμε το $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ σε απλούς λόγους. Παραγοντοποιούμε: $x^4-x^2-2x+2 = x^2(x^2-1)-2(x-1) = (x-1)(x^3+x^2-2) = (x-1)(x^3-1+x^2-1) = (x-1)^2(x^2+2x+2)$. Δηλαδή το x^4-x^2-2x+2 έχει διπλή ρίζα το 1 και καμία άλλη ρίζα, διότι το $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ δεν έχει (πραγματικές) ρίζες. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ γράφεται:

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C(x+1)+D}{(x+1)^2+1}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x-1)^2((x+1)^2+1)$, εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A+C=0$, $A+B-C+D=0$, $2B-C-2D=1$ και $-2A+2B+C+D=0$. Το σύστημα έχει λύση $A=\frac{1}{25}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{25}$, $D=-\frac{7}{25}$. Άρα

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{1}{25}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{25}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{7}{25}\frac{1}{(x+1)^2+1},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx &= \frac{1}{25}\int\frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx\\ &\quad - \frac{1}{25}\int\frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx - \frac{7}{25}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx\\ &= \frac{1}{25}\log|x-1| - \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\log((x+1)^2+1) - \frac{7}{25}\arctan(x+1) + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.
Διαιρώντας, βρίσκουμε $\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = x^2+7x+5+\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$. Άρα

$$\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+5x+\int\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx.$$

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή: $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1) = (x^4+2x^2+1)(x-1) = (x^2+1)^2(x-1)$. Αναλύουμε το $\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{(x^2+1)^2(x-1)}$ σε απλούς λόγους:

$$\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x^2+1)^2(x-1)$, εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A+B=-7$, $-B+C=3$, $2A+B-C+D=4$, $-B+C-D+E=1$ και $A-C-E=5$. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{17}{2}$, $C=-\frac{11}{2}$, $D=4$ και $E=2$. Άρα

$$\begin{aligned}\int\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx &= \frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{17x+11}{x^2+1}\,dx + 2\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) - \frac{11}{2}\arctan x - \frac{2}{x^2+1} + 2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{1}{x^2+1}\,dx - \int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c.\end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους υπολογισμούς, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx &= \frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+5x+\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{17}{4}\log(x^2+1)\\ &\quad - \frac{9}{2}\arctan x + c.\end{aligned}$$

Δ. Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θα δούμε μία μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int r(\cos x, \sin x)\, dx,$$

όπου η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών s,t. Δηλαδή η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ είναι ίση με $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι αθροίσματα γινομένων $a\cos^k x \sin^l x$, όπου a είναι αριθμός και τα k,l είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι.

Παράδειγμα. Στο ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos^2 x}\, dx$ έχουμε $f(x) = \frac{\sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos^2 x}$, $f_1(x) = \sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x$, $f_2(x) = \sin x + \cos^2 x$ και η αντίστοιχη ρητή συνάρτηση είναι η $r(s,t) = \frac{t + s^3 - t^2 s}{t + s^2}$.

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tan\tfrac{x}{2}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Άρα η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ μετατρέπεται στην $g(u) = r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\big)$. *Το σημαντικό είναι ότι η νέα αυτή συνάρτηση είναι ρητή συνάρτηση του* u.

Παράδειγμα. Στην $f(x) = \frac{\sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos^2 x}$ του προηγούμενου παραδείγματος αντιστοιχεί η $g(u) = \frac{1+2u-7u^2+4u^3+7u^4+2u^5-u^6}{1+2u-2u^2+2u^3+u^4}$.

Επίσης, ισχύει

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\cos^2(x/2)} = \frac{1}{2}\big(1 + \tan^2\tfrac{x}{2}\big) = \frac{1+u^2}{2}.$$

Επομένως,

$$\int r(\sin x, \cos x)\, dx = \int f(x)\, dx = \int g(u) \frac{2}{1+u^2}\, du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα της $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ ανάγεται στο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u. Έστω λοιπόν ότι υπολογίζουμε το $\int g(u)\frac{2}{1+u^2}\, du = G(u) + c$, όπου η $G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u. Τότε, βάσει των παραπάνω, ισχύει

$$\int r(\cos x, \sin x)\, dx = \int f(x)\, dx = G\big(\tan\tfrac{x}{2}\big) + c = F(x) + c.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ η $\frac{1}{\sin x}$ μετατρέπεται στην $\frac{1+u^2}{2u}$. Τώρα έχουμε

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\, du\Big|_{u=\tan(x/2)} = \int \frac{1}{u}\, du\Big|_{u=\tan(x/2)} = \log\big|\tan\tfrac{x}{2}\big| + c.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε την μέθοδο την οποία αναπτύξαμε.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ η $\frac{1}{\cos^2 x}$ μετατρέπεται στην $\frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}$. Τώρα

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}\frac{2}{1+u^2}\, du\Big|_{u=\tan(x/2)} = 2\int \frac{1+u^2}{(1-u^2)^2}\, du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Υπολογίζουμε $2\int \frac{1+u^2}{(1-u^2)^2}\, du = \frac{2u}{1-u^2} + c$, οπότε

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{2u}{1-u^2}\Big|_{u=\tan(x/2)} + c = \tan x + c.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ η $\frac{1}{2+\sin x}$ μετατρέπεται στην $\frac{1+u^2}{2(1+u+u^2)}$. Τώρα

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{1+u^2}{2(1+u+u^2)}\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)} = \int \frac{1}{u^2+u+1}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Υπολογίζουμε $\int \frac{1}{u^2+u+1}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + c$ και άρα

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\Big|_{u=\tan(x/2)} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + c.$$

Ε. Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων.

Τώρα θα υπολογίσουμε αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\,dx.$$

Και στα τρία ολοκληρώματα η συνάρτηση $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s,t.

(i) Για το πρώτο αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Τότε

$$x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{(1+u^2)^2}{2(1-u^2)}$$

και επομένως

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,dx = \int r\Big(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\Big)\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,du\Big|_{u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}.$$

Αναγόμαστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u.

Παράδειγμα. Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ η $\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$ μετατρέπεται στην $\frac{1+u^2}{1+2u-u^2}$ και τότε

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du\Big|_{u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε $2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du = \frac{1}{2}\log\frac{|1+2u-u^2|}{1+u^2} + \arctan u + c$ οπότε

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{1-x^2}| + \arctan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + c.$$

(ii) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Τότε

$$x = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{2u^2}{u^2-1}.$$

Άρα

$$\int r\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,dx = \int r\Big(\frac{u^2+1}{2u}, \frac{u^2-1}{2u}\Big)\frac{u^2-1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$$

και έχουμε πάλι αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = x + \sqrt{x^2-1}$ η $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ μετατρέπεται στην $\frac{1}{u}$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \big(\tfrac{1}{2u} - \tfrac{1}{2u^3}\big)\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Τώρα υπολογίζουμε $\int (\frac{1}{2u} - \frac{1}{2u^3})\,du = \frac{1}{2}\log|u| + \frac{1}{4u^2} + c$ οπότε

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx = \tfrac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c.$$

(iii) Για το τρίτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Τότε

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{2u^2}{u^2+1}.$$

Άρα

$$\int r\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\,dx = \int r\big(\tfrac{u^2-1}{2u}, \tfrac{u^2+1}{2u}\big)\,\tfrac{u^2+1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = x + \sqrt{x^2+1}$ η $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ μετατρέπεται στην $\frac{4u^2}{u^4-1}$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\int \frac{1}{u^2-1}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Υπολογίζουμε $2\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \log|u-1| - \log|u+1| + c$. Επομένως

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}\big)\,dx,$$

όπου κ, λ, μ είναι αριθμοί, $\kappa \neq 0$ και η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση των s, t. Πράγματι, αφού γράψουμε $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = \kappa\big((x + \frac{\lambda}{2\kappa})^2 + \frac{4\kappa\mu - \lambda^2}{4\kappa^2}\big) = \kappa\big((x+\frac{\lambda}{2\kappa})^2 + \frac{\Delta}{4\kappa^2}\big)$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\kappa > 0$ και $\Delta > 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{\lambda}{2\kappa})$ καταλήγουμε στο $\int R(u, \sqrt{u^2+1})\,du$, όπου $R(s,t)$ είναι μία νέα ρητή συνάρτηση των s, t.

Περίπτωση 2: $\kappa > 0$ και $\Delta < 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{-\Delta}}(x + \frac{\lambda}{2\kappa})$ καταλήγουμε στο $\int R(u, \sqrt{u^2-1})\,du$, όπου $R(s,t)$ είναι μία νέα ρητή συνάρτηση των s, t.

Περίπτωση 3: $\kappa < 0$ και $\Delta < 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{-2\kappa}{\sqrt{-\Delta}}(x + \frac{\lambda}{2\kappa})$ καταλήγουμε στο $\int R(u, \sqrt{1-u^2})\,du$, όπου $R(s,t)$ είναι μία νέα ρητή συνάρτηση των s, t.

Η περίπτωση $\kappa < 0$ και $\Delta > 0$ αποκλείεται διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένα τουλάχιστον από τα κ, Δ είναι 0, καταλήγει σε ολοκλήρωμα του οποίου ο υπολογισμός είναι απλός.

Το $\int r(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu})\,dx$ με $\kappa \neq 0$ είναι ειδική περίπτωση του $\int r(x, a(x))\,dx$, όπου η $y = a(x)$ είναι οποιαδήποτε αλγεβρική συνάρτηση του x. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται **ολοκλήρωμα του Abel** ή **αβελιανό ολοκλήρωμα**. Μία ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανού ολοκληρώματος είναι αυτό για το οποίο $a(x) = \sqrt{\rho x^4 + \sigma x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu}$, όπου ένα τουλάχιστον από τα ρ, σ είναι $\neq 0$, και ονομάζεται **ελλειπτικό ολοκλήρωμα** διότι έχει άμεση σχέση με υπολογισμό μήκους ελλειπτικού τόξου.

Πρέπει να πούμε ότι έχει αποδειχθεί ότι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα *δεν ανάγονται σε στοιχειώδεις συναρτήσεις* αλλά αποτελούν ειδική κατηγορία συναρτήσεων, τις λεγόμενες **ελλειπτικές συναρτήσεις**.

ΣΤ. Ο τύπος του Taylor, II.

Θεώρημα του Taylor με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$, *συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *και έστω* $\xi \in I$. *Έστω ότι η* f *έχει παραγώγους τάξης μέχρι και* $n+1$ *συνεχείς στο* I *(δηλαδή και στα πιθανά άκρα του). Τότε για κάθε* $x \in I$ *ισχύει*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη στο $\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$, μεταφέροντας παραγώγους από την $y = f(t)$ στην $y = (x-t)^n$. $\square$

Η παράσταση $f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ είναι η γνωστή από την ενότητα 6.9 προσέγγιση Taylor τάξης n της f.

Ορισμός. *Το* $\frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ *ονομάζεται* **σφάλμα τάξης** n **ολοκληρωτικού τύπου**.

Αν $n = 0$ τότε η ισότητα στο θεώρημα του Taylor γράφεται $f(x) = f(\xi) + \frac{1}{0!}\int_\xi^x f'(t)\,dt$ και δεν είναι τίποτε άλλο από το (ii) της πρότασης 8.5.

Ασκήσεις.

8.3.1. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.
(i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
(ii) $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε $\lambda > 0$.
Μελετήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο των ιδιοτήτων, θεωρώντας επιπλέον ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

8.3.2. (i) Αν η $f : [-b,-a] \cup [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
(ii) Αν η $f : [-b,-a] \cup [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
(iii) Αν η $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$.
(iv) Αν η $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$.
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

8.3.3. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ αποδείξτε ότι:
(i) $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
(ii) $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$.
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

8.3.4. Με αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:

$$\int x^3\cos(x^4)\,dx, \quad \int \cos^2 x\sin x\,dx, \quad \int \tfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx, \quad \int \sqrt{2x+1}\,dx,$$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{2x+1}\,dx, \quad \int \tfrac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx, \quad \int \tfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx, \quad \int \tfrac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}\,dx,$$

$$\int \tfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int x\sqrt[3]{x-1}\,dx, \quad \int \tfrac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx, \quad \int \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)}\,dx, \quad \int \tfrac{\sin x}{(2+\cos x)^3}\,dx,$$

$$\int \tfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx, \quad \int \tfrac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx, \quad \int x^2e^{x^3}\,dx, \quad \int e^{3\sin x}\cos x\,dx, \quad \int \tan x\,dx, \quad \int \tfrac{1}{x^2}\sin\tfrac{1}{x}\,dx,$$

$$\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx, \quad \int \tfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{4+x^2}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{x^2-x+2}\,dx,$$

$$\int \tfrac{1}{x(x^4+1)}\,dx, \quad \int \tfrac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx, \quad \int \sin^3 x\,dx, \quad \int \tfrac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx, \quad \int \tfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{1+e^x}\,dx,$$

$$\int \tfrac{1}{\sin^3 x}\,dx, \quad \int \sin^4 x\,dx, \quad \int \tfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{2+\cos^2 x}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{1+\cos x}\,dx.$$

8.3.5. Με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:

$$\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx,\quad \int x^3e^{2x}\,dx,\quad \int x^3e^{-x^2}\,dx,\quad \int e^{\sqrt{x}}\,dx,\quad \int x^2\sin x\,dx,\quad \int x\log x\,dx,$$

$$\int x^2\log^4 x\,dx,\quad \int \arcsin x\,dx,\quad \int \arctan x\,dx,\quad \int x^2\arcsin x\,dx,\quad \int x\arctan^2 x\,dx,$$

$$\int \arctan\sqrt{x}\,dx,\quad \int \cos^2 x\,dx,\quad \int \sin^4 x\,dx,\quad \int \sin^3 x\sin(5x)\,dx,\quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx,$$

$$\int \tan^2 x\,dx,\quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx,\quad \int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx,\quad \int \frac{xe^{\arctan x}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx,\quad \int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$$

8.3.6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx,\quad \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx,\quad \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx,\quad \int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx,\quad \int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx,$$

$$\int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^4-1}\,dx,\quad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,\quad \int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx,\quad \int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx,\quad \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^4+1}\,dx,\quad \int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^4+4x^2+4)}\,dx,\quad \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx,\quad \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^5+1}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^6+1}\,dx.$$

8.3.7. Έχουμε δει τα ολοκληρώματα $I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$. Γράψτε τους τύπους των $I_1,\ldots,I_5$.

8.3.8. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$ και $\cos x$:

$$\int \frac{1}{(1+\cos x)^2}\,dx,\quad \int \frac{1}{1+2\sin x}\,dx,\quad \int \frac{1}{5+3\cos x}\,dx,\quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx.$$

8.3.9. Βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx,\quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx,\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx,\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,dx,\quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,\quad \int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx,\quad \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$$

8.3.10. Έστω συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ορίζουμε τις $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, αρχίζοντας από την $f_1(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$ για κάθε n.

8.3.11. Αν $J_n(x)=\int \cos^n x\,dx$ και $I_n(x)=\int \sin^n x\,dx$ για $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$ αποδείξτε ότι:
(i) $J_n(x)=\frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}J_{n-2}(x)$ για κάθε $n\geq 2$.
(ii) $I_n(x)=-\frac{\cos x(\sin x)^{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}(x)$ για κάθε $n\geq 2$.
Βρείτε τις συναρτήσεις $J_1,\ldots,J_6$ και $I_1,\ldots,I_6$. Γενικεύστε.

8.3.12. Ορίζουμε $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ για $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και αποδείξτε ότι ισχύει $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ για κάθε $n\geq 2$.
Είναι προφανές ότι $I_0=\frac{\pi}{2}$ και $I_1=1$. Αποδείξτε ότι:
(i) $I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$.
(ii) $I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$.
(iii) $\frac{\pi}{2}=\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$.
(iv) $(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}$.
Παρατηρήστε τις σχέσεις $I_{2n+1}\leq I_{2n}\leq I_{2n-1}=\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$ από τις οποίες συνεπάγεται $1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq 1+\frac{1}{2n}$ και επομένως $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\to 1$. Αποδείξτε τον **τύπο του Wallis**:

$$\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1))^2(2n+1)}\to\frac{\pi}{2}.$$

Αποδείξτε και τον τύπο $\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}\to\sqrt{\pi}$.

8.3.13. Αν $I_n(x) = \int \tan^n x\, dx$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ αποδείξτε ότι $I_n(x) = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}(x)$ για κάθε $n \geq 2$. Βρείτε τις συναρτήσεις $I_1, \ldots, I_6$ και γενικεύστε.

8.3.14. Αν $I_n(x) = \int x^n e^{-x}\, dx$ και $J_n(x) = \int x^n e^x\, dx$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ αποδείξτε ότι:
(i) $I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x)$ για κάθε $n \geq 1$.
(ii) $J_n(x) = x^n e^x - nJ_{n-1}(x)$ για κάθε $n \geq 1$.
Βρείτε τις συναρτήσεις I_n και J_n και να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 8.2.1.

8.3.15. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int x^n e^{-x^2}\, dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + c$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\int x^n e^{-x^2}\, dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + \int e^{-x^2}\, dx$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$,
όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$ και c είναι αυθαίρετη σταθερά.
Παρεμπιπτόντως, το $\int e^{-x^2}\, dx$ *δεν υπολογίζεται* βάσει των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων. Το αόριστο ολοκλήρωμα $y = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ θεωρείται πολύ σημαντική συνάρτηση, ειδικά για την περιοχή της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων.

8.3.16. Αν $I_{m,n}(x) = \int x^m(1-x)^n\, dx$ για $m, n \in \mathbb{Z}$ αποδείξτε ότι:
(i) $I_{m,n}(x) = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}(x)$ για κάθε $m \neq -1$, $n \neq 0$.
(ii) $I_{m,n}(x) = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}(x)$ για κάθε $m \neq 0$, $n \neq -1$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ για κάθε $m, n \geq 0$.

8.3.17. Αν $I_n(x) = \int x^n \sin x\, dx$ και $J_n(x) = \int x^n \cos x\, dx$ για $n \in \mathbb{Z}$ αποδείξτε ότι:
(i) $I_n(x) = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}(x)$.
(ii) $J_n(x) = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)J_{n-2}(x)$.
Βρείτε τις συναρτήσεις I_n και J_n.

8.3.18. Αν $I_{m,n}(x) = \int \cos^m x \sin^n x\, dx$ για $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$ αποδείξτε ότι:
(i) $I_{m,n}(x) = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}(x)$ για κάθε $m \geq 2$.
(ii) $I_{m,n}(x) = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}(x)$ για κάθε $n \geq 2$.
Αν $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x\, dx$ για $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$ αποδείξτε ότι:
(i) $I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots 1 \cdot (n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+n)(m+n-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2}$ αν τα m, n είναι και τα δύο άρτια.
(ii) $I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots(1\text{ ή }2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(1\text{ ή }2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots(1\text{ ή }2)}$ αν ένα τουλάχιστον από τα m, n είναι περιττό.

8.3.19. Αν $I_{m,n}(x) = \int \sin^m x \sin(nx)\, dx$ για $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$ με $m \neq \pm n$ αποδείξτε ότι $I_{m,n}(x) = -\frac{n \sin^m x \cos(nx)}{n^2-m^2} + \frac{m \sin^{m-1} x \cos x \sin(nx)}{n^2-m^2} - \frac{m(m-1)}{n^2-m^2} I_{m-2,n}(x)$ για κάθε $m \geq 2$.

8.3.20. Αν η $f : [0.\pi] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$ και $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^\pi \big(f(x) + \frac{1}{n^2} f''(x)\big) \sin(nx)\, dx = \frac{f(0)+(-1)^{n-1}f(\pi)}{n}$.

8.3.21. Δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και είναι μονότονη στο $[a, b]$ και ότι η g είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx.$$

8.3.22. (i) Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, b]$ ώστε η ϕ' να είναι μονότονη στο $[a, b]$ και να υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\big| \int_a^b \sin(\phi(x))\, dx \big| \leq \frac{4}{m}$.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\big| \int_a^b \sin(x^2)\, dx \big| \leq \frac{2}{a}$ για κάθε a, b με $0 < a < b$.

8.3.23. Έστω $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ για $n \in \mathbb{N}$.
(i) Αποδείξτε ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

(ii) Αποδείξτε ότι $\int_{-1}^{1} p(x)P_n(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού μικρότερου από n.

(iii) Αποδείξτε ότι $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m \\ 2/(2n+1), & \text{αν } n = m \end{cases}$

Κεφάλαιο 9

Σειρές.

9.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Ορισμός. *Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία αριθμών (x_n). Το σύμβολο*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad ή \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

ονομάζεται **σειρά** *της (x_n) ή, πιο απλά, σειρά των x_n. Το x_n ονομάζεται n-οστός* **όρος** *ή n-οστός* **προσθετέος** *της σειράς. Σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα*

$$s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + x_2,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots,\ s_n = x_1 + \cdots + x_n,\ \ldots$$

και δημιουργούμε με αυτόν τον τρόπο μία νέα ακολουθία (s_n). Το s_n ονομάζεται n-οστό **μερικό άθροισμα** *της σειράς των x_n και η ακολουθία (s_n) ονομάζεται* **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** *της σειράς των x_n.*

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι η ίδια με την $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και με την $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$.

Καμιά φορά ο δείκτης αρχίζει από $n = 0$ αντί $n = 1$ οπότε γράφουμε $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ ή $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$. Αυτή δημιουργείται από την σταθερή ακολουθία (1) και τα μερικά αθροίσματα είναι τα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ και, γενικότερα, $s_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = n$ για κάθε $n \geq 1$.

Παράδειγμα. Η **γεωμετρική σειρά** με λόγο a είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ ή $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + \cdots$. Αυτή δημιουργείται από την γεωμετρική πρόοδο (a^n) και έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + a$, $s_3 = 1 + a + a^2$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.
Παρατηρήστε ότι ο πρώτος όρος a^0 ισούται με 1. Αυτό δεν είναι σωστό όταν $a = 0$ διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0. Υπάρχει όμως μία παραδοσιακή σύμβαση να ερμηνεύουμε το σύμβολο 0^0 ως 1 όταν αυτό είναι προσθετέος σειράς ή ακόμη και πολυωνύμου.
Παρατηρήστε, επίσης, ότι η ίδια σειρά μπορεί να γραφτεί και $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$, όπου το p είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Η σειρά αυτή δημιουργείται από την ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ και έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2^p}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \geq 1$.
Όταν $p = 1$ έχουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία ονομάζεται **αρμονική σειρά**.

Ορισμός. *Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει σε αριθμό s τότε λέμε ότι η σειρά* **συγκλίνει**, *ονομάζουμε το s* **άθροισμα** *της σειράς και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s.$$

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**. *Ειδικώτερα, αν η (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε λέμε ότι η σειρά* **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως, ονομάζουμε το $+\infty$ ή το $-\infty$* **άθροισμα** *της σειράς και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty.$$

Παρατηρήστε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε η σειρά *δεν έχει άθροισμα*.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει την σειρά, ανεξάρτητα από το αν αυτή συγκλίνει ή αποκλίνει. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση κατά την οποία η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, συμβολίζει το άθροισμα της σειράς.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$ διότι $s_n = n \to +\infty$. Επομένως το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Παράδειγμα. Η γεωμετρική σειρά με λόγο a, δηλαδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$, έχει, όπως είπαμε, μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.
Αν $a > 1$ τότε $s_n = \frac{a^n-1}{a-1} \to \frac{(+\infty)-1}{a-1} = +\infty$.
Αν $a = 1$ τότε $s_n = n \to +\infty$.
Αν $-1 < a < 1$ τότε $s_n = \frac{1-a^n}{1-a} \to \frac{1-0}{1-a} = \frac{1}{1-a}$.
Τέλος, έστω $a \leq -1$. Από την $a^n - 1 = (a-1)s_n$ συνεπάγεται $a^n = (a-1)s_n + 1$. Άρα αν *υπάρχει* το όριο της (s_n) τότε υπάρχει και το όριο της (a^n). Όμως το όριο της (a^n) δεν υπάρχει οπότε ούτε και το όριο της (s_n) υπάρχει.
Συμπεραίνουμε για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty & \text{αν } a \geq 1 \\ = 1/(1-a) & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει} & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Πρόταση 9.1. *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει τότε $x_n \to 0$.*

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ο αριθμός s τότε $s_n \to s$. Παρατηρούμε όμως ότι ισχύει $x_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$. Άρα $x_n \to s - s = 0$. □

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.

Λίγο παρακάτω θα δούμε κάποιο παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ (συγκεκριμένα: την αρμονική σειρά) για την οποία ισχύει $x_n \to 0$ ενώ η σειρά δεν συγκλίνει. Δηλαδή δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 9.1.

Πρόταση 9.2. *Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν $N, M \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_{N+k} = y_{M+k}$ για κάθε k. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$. Τότε για κάθε k ισχύει

$$s_{N+k} - s_N = x_{N+1} + \cdots + x_{N+k} = y_{M+1} + \cdots + y_{M+k} = t_{M+k} - t_M$$

οπότε οι ακολουθίες $(s_n - s_N)$ και $(t_n - t_M)$ ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τώρα, έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$ ή $+\infty$ ή $-\infty$, δηλαδή $s_n \to s$ ή $+\infty$ ή $-\infty$. Συνεπάγεται $s_n - s_N \to s - s_N$ ή $+\infty$ ή $-\infty$ και άρα $t_n - t_M \to s - s_N$ ή $+\infty$ ή $-\infty$ οπότε $t_n \to s - s_N + t_M$ ή $+\infty$ ή $-\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = s - s_N + t_M$ ή $+\infty$ ή $-\infty$. □

Η πρόταση 9.2 λέει ότι η συμπεριφορά μίας σειράς ως προς την σύγκλιση ή απόκλιση δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της. Μπορούμε να αλλάξουμε ή να απαλείψουμε (πεπερασμένους) όρους μίας σειράς ή να επισυνάψουμε (πεπερασμένους) όρους σε μία σειρά χωρίς να μεταβληθεί η ιδιότητά της να συγκλίνει ή να αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Με τα σύμβολα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{m+n-1} + \cdots$$

δηλώνουμε την σειρά με μερικά αθροίσματα: $t_1 = x_m$, $t_2 = x_m + x_{m+1}$ και, γενικότερα, $t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1}$ για κάθε n. Είναι φανερό ότι η πρόταση 9.2 εφαρμόζεται στις σειρές $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ οπότε η $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως. Μάλιστα είναι εύκολο να δούμε και την σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα των δύο σειρών:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x_1 + \cdots + x_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m \geq 2$$

και

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m \leq 0.$$

Συνδυάζοντας αυτούς τους τύπους, εύκολα βλέπουμε ότι αν $m, k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_{k-1} + \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m < k.$$

Στον χειρισμό των σειρών εμφανίζεται μερικές φορές μία απλή και πολύ χρήσιμη *αλλαγή μεταβλητής*. Για παράδειγμα, έστω η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$. Χρησιμοποιούμε την νέα μεταβλητή $k = n - m + 1$ και βλέπουμε ότι όταν το n διατρέχει τα $m, m+1, m+2, \ldots$ τότε το k διατρέχει τα $1, 2, 3, \ldots$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+m-1}.$$

Πράγματι, και οι δύο σειρές είναι η $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$.

Πρόταση 9.3. *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ για κάθε n. Τότε $r_n \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$, δηλαδή ότι $s_n \to s$. Επειδή

$$s = \sum_{m=1}^{+\infty} x_m = x_1 + \cdots + x_{n-1} + \sum_{m=n}^{+\infty} x_m = s_{n-1} + r_n,$$

συνεπάγεται ότι $r_n = s - s_{n-1} \to s - s = 0$. □

Το $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ λέμε ότι είναι η "ουρά" της σειράς. Το περιεχόμενο της πρότασης 9.3 το εκφράζουμε παραστατικά ως εξής: *αν μία σειρά συγκλίνει τότε η ουρά της τείνει στο* 0.

Πρόταση 9.4. *Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και αν το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, δηλαδή το άθροισμα των δύο αθροισμάτων, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ των δύο σειρών οπότε $s_n \to s$ και $t_n \to t$, όπου $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $t = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Τώρα, το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ είναι το

$$u_n = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = s_n + t_n.$$

Άρα $u_n \to s + t$ και επομένως η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα ίσο με $s + t$. □

Πρόταση 9.5. *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα, αν το λ είναι αριθμός και αν το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, δηλαδή το γινόμενο του αριθμού και του αθροίσματος της σειράς, δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \Big(\lambda \neq 0 \text{ αν } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \pm\infty\Big).$$

Απόδειξη. Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ τότε $s_n \to s$ όπου $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n)$ είναι το

$$w_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda s_n.$$

Άρα $w_n \to \lambda s$ και επομένως η $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n)$ έχει άθροισμα ίσο με λs. □

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Επίσης, είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται με την αρχή της επαγωγής και για περισσότερες από δύο σειρές.

Πρόταση 9.6. *Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και αν ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \geq 1$ τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ των δύο σειρών οπότε $s_n \to s$ και $t_n \to t$, όπου $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $t = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Τώρα, ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε n οπότε $s \leq t$. □

Ασκήσεις.

9.1.1. Υπολογίζοντας τα μερικά αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\big), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2,$$

βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

9.1.2. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\tfrac{n}{n+1}\big)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\tfrac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \log(1 + \tfrac{1}{n}).$$

9.1.3. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{4}{3})^{n-3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4}, \quad \sum_{n=3}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1+2^{n/2}}{2^n}$$

και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

9.1.4. Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνουν οι σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x}{(1+x)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

9.1.5. Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**.
(i) Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός. Τι σχέση υπάρχει ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$;
(ii) Δείτε αν οι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\log\tfrac{n}{n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{2n+1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{2n^2-1}{n(n+1)}$$

συγκλίνουν και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

9.1.6. Βρείτε, αν υπάρχει, το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, όπου $x_{2k-1} = \frac{1}{k}$ και $x_{2k} = -\frac{1}{k}$ για κάθε k.

9.1.7. Έστω $x \neq y$. Αν οι $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k} + xa_{2k-1})$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k} + ya_{2k-1})$ συγκλίνουν αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.

9.1.8. (i) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \begin{cases} x/(1-x) & \text{αν } |x|<1 \\ 1/(1-x) & \text{αν } |x|>1 \end{cases}$
(ii) Αν $x > 1$ αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{x^{2^{n-1}}+1} = \frac{1}{x-1}$.

9.1.9. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2-k^2} & \text{αν } n \neq k \\ 0 & \text{αν } n = k \end{cases}$ Βρείτε το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

9.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους.

Θεώρημα 9.1. *Αν ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι είτε $+\infty$ είτε μη-αρνητικός αριθμός. Δηλαδή $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty$.*
Ειδικώτερα: αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει και αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη. Επειδή ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι $s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$ για κάθε n. Άρα η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία οπότε έχει όριο το οποίο είναι είτε $+\infty$ είτε αριθμός. Μάλιστα, επειδή ισχύει $s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0$ για κάθε n, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} s_n \geq 0$. Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$ είναι αριθμός ενώ αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. □

Πρέπει να τονιστεί ότι *κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα* και το άθροισμα αυτό είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Επομένως το ότι μία τέτοια σειρά συγκλίνει *ισοδυναμεί* με το να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$.

Το θεώρημα 9.1 (το ότι κάθε σειρά με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα) είναι για τις σειρές ό,τι είναι το θεώρημα 2.1 (το ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο) για τις ακολουθίες. Μάλιστα το θεώρημα 2.1 χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος 9.1.

Πρόταση 9.7. *(i) Έστω ότι ισχύει $0 \le x_n \le y_n$ για κάθε n. Τότε*

$$0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Αν, επιπλέον, η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
(ii) Έστω ότι ισχύει $x_n \ge 0$ και $y_n > 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ συγκλίνει ή, πιο γενικά, ότι είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα οπότε από την πρόταση 9.4 συνεπάγεται $0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$ οπότε από την προηγούμενη ανισότητα συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και επομένως η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
(ii) Από την υπόθεση, υπάρχει u ώστε να ισχύει $\frac{x_n}{y_n} \le u$ και άρα $0 \le x_n \le uy_n$ για κάθε n. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(uy_n)$ συγκλίνει οπότε, σύμφωνα με το (i), και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. □

Αρκετές φορές εφαρμόζουμε την πρόταση 9.7(ii) με τον εξής τρόπο. Αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to \rho$, όπου το ρ είναι ένας θετικός αριθμός, δηλαδή $0 < \rho < +\infty$, τότε το συμπέρασμα για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ είναι το εξής: *είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν στο* $+\infty$. Πράγματι, από το $\frac{x_n}{y_n} \to \rho$ και το ότι το ρ είναι αριθμός συνεπάγεται ότι αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αλλά και από το $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{1}{\rho}$ και το ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι αριθμός συνεπάγεται ότι αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει.
Αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to 0$ συμπεραίνουμε, σύμφωνα πάντα με την πρόταση 9.7(ii), ότι αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα. Ισχύει $\frac{1/2^{n-1}}{1} \to 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Τώρα, αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$ συμπεραίνουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει. Πάλι αυτό προκύπτει από το $\frac{y_n}{x_n} \to 0$ και την πρόταση 9.7(ii).

Παράδειγμα. Για να μελετήσουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ την συγκρίνουμε με την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}$. Ο λόγος για τον οποίο σκεφτόμαστε αυτήν την συγκεκριμένη σειρά είναι ότι οι "μεγάλοι" όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ είναι το 2^n και το 3^{n-1}, αντιστοίχως. Τώρα, $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n} = \frac{2^n}{3^{n-1}} \frac{1+3\cdot 2^{-n}}{1+3n3^{-n}}$ οπότε $\frac{(2^n+3)/(3^{n-1}+n)}{(2^n)/(3^{n-1})} \to 1$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^{n-1}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \ge 2$ ισχύει $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \ge 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$ και ότι η ίδια ανισότητα $n! \ge 2^{n-1}$ ισχύει και για $n = 1$ ως ισότητα. Άρα ισχύει $0 \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε n οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2$. Επομένως $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι το άθροισμα της σειράς του τελευταίου παραδείγματος είναι ένας πολύ γνωστός μας αριθμός.

Πρόταση 9.8.

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ καθώς και τα $t_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Τότε, σύμφωνα με τον δυωνυμικό τύπο του Newton,

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})\cdots(1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})\cdots(1 - \frac{n-1}{n}). \end{aligned}$$

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι θετικές και μικρότερες από το 1, συνεπάγεται $t_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + s_n$ για κάθε n. Ακόμη, αν $1 \leq k \leq n$, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε

$$t_n \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι ισχύει $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = 1 + s_k$ για κάθε k και, με αλλαγή συμβολισμού, $e \geq 1 + s_n$ για κάθε n.
Από τα προηγούμενα έχουμε ότι ισχύει $t_n - 1 \leq s_n \leq e - 1$ για κάθε n και άρα $s_n \to e - 1$. Επειδή το s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$. $\square$

Αξίζει να κάνουμε σ' αυτό το σημείο μία μικρή παράκαμψη για να αποδείξουμε κάτι το οποίο είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο 2 όταν ορίσαμε τον αριθμό e.

Πρόταση 9.9. *Το e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Έστω ότι το e *είναι* ρητός και συγκεκριμένα $e = \frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(n-1)!m = n!e = n!1 + \tfrac{n!}{1!} + \cdots + \tfrac{n!}{n!} + \tfrac{n!}{(n+1)!} + \tfrac{n!}{(n+2)!} + \tfrac{n!}{(n+3)!} + \cdots .$$

Παρατηρούμε ότι καθένας από τους αριθμούς $(n-1)!m$, $n!1$, $\frac{n!}{1!}, \ldots, \frac{n!}{n!}$ είναι ακέραιος οπότε το άθροισμα $s = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots$ είναι ακέραιος. Όμως

$$\begin{aligned} 0 < s &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \leq \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{n+1}\big(1 + \big(\tfrac{1}{n+1}\big) + \big(\tfrac{1}{n+1}\big)^2 + \cdots\big) = \tfrac{1}{n+1}\,\tfrac{1}{1-(1/(n+1))} = \tfrac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο διότι δεν υπάρχει ακέραιος ανάμεσα στα 0 και 1. $\square$

Α. Σειρές με φθίνοντες μη-αρνητικούς όρους.

Θα δούμε τώρα δύο κριτήρια σύγκλισης για σειρές *με μη-αρνητικούς όρους οι οποίοι φθίνουν.*

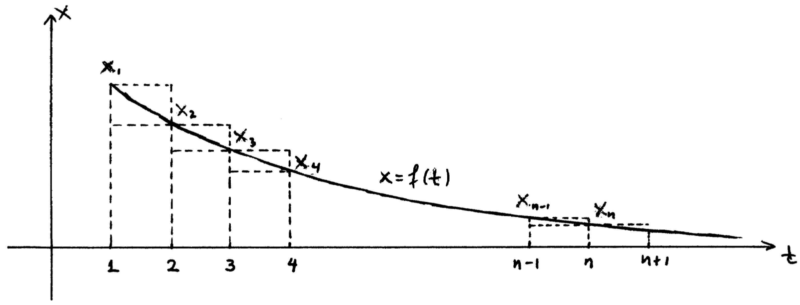
Ολοκληρωτικό κριτήριο. *Έστω ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι υπάρχει φθίνουσα $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει το $\lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt$ και η τιμή του είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt < +\infty$.
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt = +\infty$.
Επιπλέον, ισχύει

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(t)\,dt$$

για κάθε n καθώς και

$$\lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $t \geq 1$ και οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq t$. Επειδή η f είναι φθίνουσα, ισχύει $f(t) \geq f(n) = x_n \geq 0$. Αφού λοιπόν ισχύει $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 1$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\int_1^{u_2} f(t)\,dt - \int_1^{u_1} f(t)\,dt = \int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt \geq 0$ για κάθε u_1, u_2 με $1 \leq u_1 < u_2$. Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα $F(u) = \int_1^u f(t)\,dt$ είναι αύξουσα συνάρτηση του u στο $[1, +\infty)$ και επομένως υπάρχει το $\lim_{u\to+\infty} F(u) = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt$ και η τιμή του είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$.
Τώρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t \in [k, k+1]$ ισχύει $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ οπότε $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$ ή, ισοδύναμα, $x_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq x_k$. Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε $x_2 + \cdots + x_n \leq \int_1^n f(t)\,dt$ και $\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq x_1 + \cdots + x_n$, αντιστοίχως. Επομένως



Σχήμα 9.1: Το ολοκληρωτικό κριτήριο.

$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(t)\,dt$.
Παίρνοντας όρια των τριών μελών της τελευταίας ανισότητας όταν $n \to +\infty$, καταλήγουμε στην $\lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt$. Τώρα τα (i) και (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας. $\square$

Παράδειγμα. Θα μελετήσουμε την *πολύ σημαντική* σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, όπου p είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Η σειρά αυτή είναι σειρά μη-αρνητικών όρων οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι είτε μη-αρνητικός αριθμός είτε $+\infty$.
Αν $p \leq 0$ τότε ισχύει $\frac{1}{n^p} \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$ και επομένως $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$. Άρα στην περίπτωση αυτή η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
Έστω $p > 0$. Τότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Θεωρούμε και την $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{1}{t^p}$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και προφανώς ισχύει $f(n) = \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα, $\int_1^u \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{u^{1-p}-1}{1-p}$ αν $p > 0, p \neq 1$ και $\int_1^u \frac{1}{t^p}\,dt = \log u$ αν $p = 1$ και άρα $\lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{1}{t^p}\,dt = +\infty$ αν $0 < p \leq 1$ και $\lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{1}{p-1} < +\infty$ αν $p > 1$. Επομένως

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Ειδικώτερα, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Επιπλέον, έχουμε και τις εκτιμήσεις

$$\tfrac{1}{p-1} \leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{1}{p-1} \qquad \text{αν } p > 1,$$

$$\log(n+1) \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

και

$$\tfrac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p} \leq 1 + \tfrac{1}{2^p} + \cdots + \tfrac{1}{n^p} \leq 1 + \tfrac{n^{1-p}-1}{1-p} \qquad \text{αν } 0 < p < 1.$$

Τώρα βλέπουμε ότι η αρμονική σειρά, όπως και κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ με $0 < p \leq 1$, είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία δεν συγκλίνει αλλά για την οποία ισχύει $x_n \to 0$.
Οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ είναι σημαντικές *και* διότι χρησιμεύουν ως "πρότυπα" σύγκρισης για πολλές άλλες σειρές.

Παράδειγμα. Συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ με την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$. Σκεφτόμαστε την αρμονική σειρά διότι οι "μεγάλοι" όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ είναι το $2n$ και το n^2, αντιστοίχως. Επειδή $\frac{1/n}{(2n-1)/(n^2+3n+1)} \to \frac{1}{2}$, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα. Συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ με την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, επειδή $\frac{(\sqrt{n}+1)/(2n^2+3)}{1/(n^{3/2})} \to \frac{1}{2}$. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει οπότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$. Γνωρίζουμε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ από το οποίο προκύπτει το $\frac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα. Συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty}\log(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ με την $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, λόγω του $\frac{\log(1+(1/\sqrt{n}))}{1/\sqrt{n}} \to 1$ το οποίο προκύπτει από το $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει στο $+\infty$ οπότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\log(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy. *Έστω ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Τότε*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$.
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = +\infty$.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι και οι δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη-αρνητικούς όρους.
Κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2, έστω $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Χρησιμοποιώντας ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (x_{2^{k-1}} + \cdots + x_{2^k-1}) + (x_{2^k} + \cdots + x_n) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^{k-1}} + 2^k x_{2^k} \leq \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}. \end{aligned}$$

Όταν $n \to +\infty$ βρίσκουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$.
Επίσης,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^k x_{2^k} &\leq 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}) \leq 2\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n. \end{aligned}$$

Όταν $k \to +\infty$ βρίσκουμε $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Συμπεραίνουμε ότι

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}.$$

Άρα τα $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι είτε και τα δύο αριθμοί είτε και τα δύο $+\infty$. $\square$

Παράδειγμα. Θα ξαναδούμε το παράδειγμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.
Κατ' αρχάς η περίπτωση $p \leq 0$ είναι απλή, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$, οπότε στην περίπτωση αυτή η σειρά έχει άθροισμα $+\infty$.
Έστω $p > 0$ οπότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα με μη-αρνητικούς όρους. Εξετάζουμε την σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$. Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$ και συγκλίνει αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ή, ισοδύναμα, αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ ή, ισοδύναμα, αν $0 < p \leq 1$.
Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $p \leq 1$.

B. p-αδικά αναπτύγματα.

Γνωρίζουμε από το δημοτικό σχολείο ότι οι αριθμοί $0, 1, \ldots, 9$ ονομάζονται *δεκαδικά ψηφία*. Γενικότερα, αν $p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ οι αριθμοί $0, 1, \ldots, p-1$ ονομάζονται p-**αδικά ψηφία**.

Παράδειγμα. Οι αριθμοί $0, 1$ είναι τα δυαδικά ψηφία, οι αριθμοί $0, 1, 2$ είναι τα τριαδικά ψηφία και οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \underline{10}, \underline{11}, \underline{12}, \underline{13}, \underline{14}, \underline{15}$ είναι τα δεκαεξαδικά ψηφία.

Πρόταση 9.10. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Κάθε $x \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα*

$$x = X_N p^N + X_{N-1}p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0$$

όπου όλα τα $X_N, \ldots, X_0$ ανήκουν στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, δηλαδή είναι p-αδικά ψηφία, και $X_N \neq 0$.

Απόδειξη. Κάνουμε διαδοχικές επαναλήψεις της *Ευκλείδειας διαίρεσης*. Αρχίζουμε με $x = a_1 p + X_0$, όπου $a_1, X_0 \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq X_0 \leq p-1$. Τότε $0 \leq a_1 < x$. Αν $a_1 = 0$ σταματάμε. Αν $a_1 > 0$ συνεχίζουμε με $a_1 = a_2 p + X_1$, όπου $a_2, X_1 \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq X_1 \leq p-1$. Τότε $0 \leq a_2 < a_1$. Αν $a_2 = 0$ σταματάμε. Αν $a_2 > 0$ συνεχίζουμε με $a_2 = a_3 p + X_2$, όπου $a_3, X_2 \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq X_2 \leq p-1$. Τότε $0 \leq a_3 < a_2$. Συνεχίζουμε επαγωγικά. Επειδή τα διαδοχικά πηλίκα $a_1, a_2, a_3, \ldots$ των διαιρέσεων είναι *μη-αρνητικοί* ακέραιοι και φθίνουν γνησίως, κάποιο από αυτά θα είναι 0 και η διαδικασία θα σταματήσει. Αν $N \geq 0$ είναι ο ακέραιος για τον οποίο ισχύει $a_{N+1} = 0$ τότε οι διαδοχικές διαρέσεις είναι

$$\begin{aligned} x &= a_1 p + X_0 \\ a_1 &= a_2 p + X_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{N-1} &= a_N p + X_{N-1} \\ a_N &= 0p + X_N = X_N. \end{aligned}$$

Από αυτές τις ισότητες έχουμε

$$\begin{aligned} x &= a_1 p + X_0 \\ &= a_2 p^2 + X_1 p + X_0 \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= a_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0 \\ &= a_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0 \\ &= X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα των $X_N, \ldots, X_0$, υποθέτουμε $x = X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0$. Τότε $x = (X_N p^{N-1} + \cdots + X_1) p + X_0$ και, επειδή $0 \leq X_0 \leq p-1$, το X_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το p οπότε είναι μονοσήμαντα καθορισμένο. Κατόπιν, έχουμε ότι $\frac{x - X_0}{p} = (X_N p^{N-2} + \cdots + X_2) p + X_1$ και, επειδή $0 \leq X_1 \leq p-1$, το X_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\frac{x-X_0}{p}$ με το p οπότε είναι μονοσήμαντα καθορισμένο. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε ότι όλα τα $X_N, \ldots, X_0$ είναι μονοσήμαντα καθορισμένα. $\square$

Ορισμός. *Τα $X_N, \ldots, X_0$ στην ισότητα $x = X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0$ ονομάζονται* p**-αδικά ψηφία** *του x. Η παράσταση $X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0$ ονομάζεται* p**-αδικό ανάπτυγμα** *του x και την συμβολίζουμε $\langle X_N X_{N-1} \ldots X_1 X_0 \rangle_p$ οπότε γράφουμε*

$$x = \langle X_N X_{N-1} \ldots X_1 X_0 \rangle_p.$$

Παράδειγμα. Για να βρούμε το δυαδικό ανάπτυγμα του 28 εκτελούμε τις διαδοχικές διαρέσεις: $28 = 14 \cdot 2 + 0$, $14 = 7 \cdot 2 + 0$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $3 = 1 \cdot 2 + 1$ και $1 = 0 \cdot 2 + 1$. Άρα $28 = \langle 11100 \rangle_2$ με πέντε ψηφία.

Παράδειγμα. Για να βρούμε το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του 32137 εκτελούμε τις διαδοχικές διαρέσεις: $32137 = 2008 \cdot 16 + 9$, $2008 = 125 \cdot 16 + 8$, $125 = 7 \cdot 16 + 13$ και $7 = 0 \cdot 16 + 7$. Άρα $32137 = \langle 7\,\underline{13}\,89 \rangle_{16}$ με τέσσερα ψηφία.

Παράδειγμα. Προφανώς, $p = 1p + 0$ οπότε το p-αδικό ανάπτυγμα του ίδιου του p είναι η παράσταση $1p + 0 = \langle 10 \rangle_p$. Το p-αδικό ανάπτυγμα του p^2 είναι η παράσταση $1p^2 + 0p + 0 = \langle 100 \rangle_p$.

Παράδειγμα. Αν $p = 10$ χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο $X_N X_{N-1} \ldots X_1 X_0$ αντί του $\langle X_N X_{N-1} \ldots X_1 X_0 \rangle_{10}$ για το δεκαδικό ανάπτυγμα.
Σ' αυτήν την περίπτωση (σύμφωνα και με το προηγούμενο παράδειγμα) το δεκαδικό ανάπτυγμα του ίδιου του αριθμού δέκα είναι η παράσταση 10. Έτσι λοιπόν αιτιολογείται η χρήση του γνωστού

μας συμβόλου 10 για τον αριθμό δέκα, δηλαδή για τον αριθμό $9+1$. Τώρα, ο αριθμός $10+1$ γράφεται $1\cdot 10+1$ οπότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι η παράσταση 11. Ο αριθμός $10+2$ γράφεται $1\cdot 10+2$ οπότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι η παράσταση 12. Είναι φανερός ο επαγωγικός τρόπος με τον οποίο καταλήγουμε στα γνωστά δεκαδικά αναπτύγματα των φυσικών.

Παράδειγμα. $25=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1$ οπότε το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού 25 είναι η παράσταση $\langle 11001\rangle_2$.

Προχωράμε στην περίπτωση των p-αδικών αναπτυγμάτων αριθμών στο διάστημα $[0,1)$.

Μάθαμε στο δημοτικό σχολείο ότι το σύμβολο 0.25 δηλώνει τον αριθμό $\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}=\frac{1}{4}$. Το σύμβολο 0.5403 δηλώνει τον αριθμό $\frac{5}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{0}{10^3}+\frac{3}{10^4}=\frac{5403}{10000}$. Τα σύμβολα 0.25 και 0.5403 τα γράφουμε και $0.25000\dots$ και $0.5403000\dots$, με το ψηφίο 0 να επαναλαμβάνεται συνεχώς από κάποιο σημείο και πέρα. Τα σύμβολα αυτά ονομάζονται *δεκαδικά αναπτύγματα* των αριθμών $\frac{1}{4}$ και $\frac{5403}{10000}$.

Γνωρίζουμε, επίσης, από το δημοτικό σχολείο ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{7}$ είναι το σύμβολο $0,42857\dots$ τα ψηφία του οποίου συνεχίζουν επ' άπειρον χωρίς να είναι όλα 0 από κάποιο σημείο και πέρα. Τώρα όμως τίθεται το εξής ερώτημα: *με ποιές πράξεις πιστοποιείται η σχέση ανάμεσα στον αριθμό $\frac{3}{7}$ και στο δεκαδικό ανάπτυγμα* $0,42857\dots$; Θα μπορούσαμε, κατ' αναλογία προς τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, να πούμε ότι το άθροισμα $\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\cdots$ είναι ίσο με τον αριθμό $\frac{3}{7}$. Το πρόβλημα είναι ότι η τελευταία παράσταση περιέχει *άπειρες* προσθέσεις και ο υπολογισμός του αποτελέσματός της ξεφεύγει από το πλαίσιο χειρισμού στοιχειωδών αλγεβρικών παραστάσεων. Όμως ακριβώς η έννοια της σειράς, όπως την ορίσαμε, νοηματοδοτεί το άθροισμα άπειρων προσθέσεων και με αυτήν την έννοια μπορούμε να πούμε ότι το άθροισμα της *σειράς* $\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\cdots$ είναι ίσο με τον αριθμό $\frac{3}{7}$ ή, με άλλα λόγια, ότι *η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει στο $\frac{3}{7}$.*

Η πρόταση 9.11 περιγράφει πλήρως την σχέση ανάμεσα στους αριθμούς του διαστήματος $[0,1)$ και στα δεκαδικά αναπτύγματα της μορφής $0.x_1x_2\dots$. Μάλιστα, η πρόταση 9.11 διαπραγματεύεται γενικότερα p-αδικά αναπτύγματα, όπου $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$ και τα ψηφία είναι οι αριθμοί $0,1,\dots,p-1$. Ας δούμε όμως πρώτα έναν χρήσιμο υπολογισμό βασισμένο σε κάποια συγκεκριμένη γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=\frac{p-1}{p}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1}=\frac{p-1}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=1$$

και, γενικότερα, για κάθε $m\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=\frac{p-1}{p^m}\sum_{n=m}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-m}=\frac{p-1}{p^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1}=\frac{p-1}{p^m}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^{m-1}}.$$

Πρόταση 9.11. *Έστω $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$.*
(i) Έστω ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) με τον περιορισμό να μην είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα τα x_n ίσα με $p-1$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της ανήκει στο $[0,1)$.
(ii) Για κάθε $x\in[0,1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) έτσι ώστε να μην είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα τα x_n ίσα με $p-1$ και ώστε

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}=\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}+\frac{x_3}{p^3}+\cdots.$$

Απόδειξη. (i) Η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ είναι σειρά μη-αρνητικών όρων οπότε έχει άθροισμα και, επειδή ισχύει $0\leq x_n\leq p-1$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$0\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=1.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο $[0,1]$. Για να αποδείξουμε ότι $x\in[0,1)$, σκεφτόμαστε ότι, λόγω υπόθεσης, υπάρχει m ώστε $x_m\neq p-1$ ή, ισοδύναμα, $x_m\leq p-2$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}x&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{x_n}{p^n}+\frac{x_m}{p^m}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}\leq\sum_{n=1}^{m-1}\frac{p-1}{p^n}+\frac{p-2}{p^m}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}-\frac{1}{p^m}=1-\frac{1}{p^m}<1.\end{aligned}$$

(ii) Έστω $x \in [0,1)$. Ορίζουμε $x_1 = [px]$ οπότε $x_1 \le px < x_1 + 1$ και επομένως

$$\tfrac{x_1}{p} \le x < \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \le px < p$ οπότε το x_1 ανήκει στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Κατόπιν ορίζουμε $s_1 = \frac{x_1}{p}$ και $x_2 = [p^2(x - s_1)]$. Άρα $x_2 \le p^2(x - s_1) < x_2 + 1$ οπότε

$$\tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} \le x < \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} + \tfrac{1}{p^2}.$$

Επειδή $0 \le p^2(x - s_1) < p$, το x_2 ανήκει στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Κατόπιν ορίζουμε $s_2 = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2}$ και $x_3 = [p^3(x - s_2)]$. Άρα $x_3 \le p^3(x - s_2) < x_3 + 1$, οπότε

$$\tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} + \tfrac{x_3}{p^3} \le x < \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} + \tfrac{x_3}{p^3} + \tfrac{1}{p^3}.$$

Επειδή $0 \le p^3(x - s_2) < p$, το x_3 ανήκει στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.
Αυτή η επαγωγική διαδικασία δημιουργεί τα x_n, το ένα μετά το άλλο, για κάθε n. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε βρεί $x_1, \ldots, x_n$ από το $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ έτσι ώστε

$$\tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} \le x < \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} + \tfrac{1}{p^n}.$$

Τότε ορίζουμε $s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$ και $x_{n+1} = [p^{n+1}(x - s_n)]$. Αυτό σημαίνει ότι $x_{n+1} \le p^{n+1}(x - s_n) < x_{n+1} + 1$ οπότε

$$\tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} + \tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \le x < \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} + \tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}}.$$

Επειδή $0 \le p^{n+1}(x - s_n) < p$, το x_{n+1} ανήκει στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.
Έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε όλα τα μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$ της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ να ικανοποιούν την διπλή ανισότητα $s_n \le x < s_n + \frac{1}{p^n}$. Συνεπάγεται $x - \frac{1}{p^n} < s_n \le x$ και επομένως $s_n \to x$. Με άλλα λόγια,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

Έστω ότι από κάποιον δείκτη και πέρα όλα τα x_n είναι ίσα με $p-1$, δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n = p - 1$ για κάθε $n \ge m$. Αν $m = 1$ τότε

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο και αν $m \ge 2$ τότε

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = s_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = s_{m-1} + \frac{1}{p^{m-1}},$$

το οποίο είναι, επίσης, άτοπο.
Τέλος, έστω ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε να μην είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα τα x_n ίσα με $p-1$ και ώστε

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Τότε

$$px = x_1 + \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-1}}$$

και $0 \le \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-1}} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-1}} = 1$. Επειδή $x_1 \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $x_1 = [px]$ οπότε το x_1 είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Κατόπιν, αφού θέσουμε $s_1 = \frac{x_1}{p}$, έχουμε

$$p^2(x - s_1) = x_2 + \textstyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-2}}$$

και $0 \le \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-2}} < \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-2}} = 1$. Επειδή $x_2 \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $x_2 = [p^2(x - s_1)]$ οπότε το x_2 είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε ότι οι αριθμοί x_n είναι ο ένας μετά τον άλλο μονοσήμαντα ορισμένοι. $\square$

Ορισμός. *Έστω $x \in [0,1)$. Αν η (x_n) είναι εκείνη η ακολουθία p-αδικών ψηφίων της οποίας τα x_n δεν είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$ και για την οποία ισχύει η ισότητα*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n},$$

τότε η (x_n) ονομάζεται **ακολουθία των p-αδικών ψηφίων** *του x ή, πιο απλά, τα x_n ονομάζονται p-***αδικά ψηφία** *του x. Επίσης, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ονομάζεται p-***αδικό ανάπτυγμα** *του x και την συμβολίζουμε $\langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_p$ οπότε γράφουμε*

$$x = \langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_p.$$

Αν $p = 10$ χρησιμοποιούμε παραδοσιακά το απλούστερο σύμβολο $0.x_1x_2x_3\ldots$ αντί του $\langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_{10}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η πρόταση 9.11 λέει ότι

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς του διαστήματος $[0,1)$ και στα p-αδικά αναπτύγματα $\langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_p$ στα οποία τα p-αδικά ψηφία δεν είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$.

Αν $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ είναι το p-αδικό ανάπτυγμα του $x \in [0,1)$ τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη της πρότασης 9.11, τα μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$ της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ικανοποιούν τις διπλές ανισότητες

$$s_n \leq x < s_n + \tfrac{1}{p^n}.$$

Οι ανισότητες $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{p^n}$ γράφονται και $x - \frac{1}{p^n} < s_n \leq x$ και γι αυτό κάθε μερικό άθροισμα s_n ονομάζεται n-**οστή p-αδική προσέγγιση** του x.

Παράδειγμα. Όταν λέμε ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{7}$ είναι το $0.42857\ldots$ καταλαβαίνουμε ότι το $\frac{3}{7}$ ικανοποιεί τις παρακάτω άπειρες διαδοχικές διπλές ανισότητες.

$$0.4 \leq \tfrac{3}{7} < 0.5, \qquad 0.42 \leq \tfrac{3}{7} < 0.43, \qquad 0.428 \leq \tfrac{3}{7} < 0.429,$$
$$0.4285 \leq \tfrac{3}{7} < 0.4286, \qquad 0.42857 \leq \tfrac{3}{7} < 0.42858,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Οι αριθμοί $0.4, 0.42, 0.428, 0.4285, 0.42857, \ldots$ είναι οι *διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις* του $\frac{3}{7}$ και οι αριθμοί $4, 2, 8, 5, 7, \ldots$ είναι τα *δεκαδικά ψηφία* του $\frac{3}{7}$.

Στην απόδειξη της πρότασης 9.11 περιγράφεται μία μέθοδος *πρακτικού* υπολογισμού του p-αδικού αναπτύγματος $\langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_p$ ενός $x \in [0,1)$. Βρίσκουμε τα p-αδικά ψηφία με την εξής επαγωγική διαδικασία. Αρχίζουμε με το $x_1 = [px]$ και, για κάθε n, έχοντας βρεί τα $x_1, \ldots, x_n$, βρίσκουμε το επόμενο ψηφίο με τον τύπο $x_{n+1} = [p^{n+1}(x - s_n)]$, όπου $s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με το αναδρομικό σχήμα:

$$x_1 = [px], \qquad x_{n+1} = [p^{n+1}(x - s_n)] \quad \text{για } n \geq 1.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε *μερικά* αρχικά δεκαδικά ψηφία του $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \big[10\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big] = 7, \quad s_1 = \tfrac{7}{10},\\
x_2 &= \big[10^2\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{7}{10}\big)\big] = 0, \quad s_2 = s_1 + \tfrac{0}{10^2} = \tfrac{7}{10},\\
x_3 &= \big[10^3\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{7}{10}\big)\big] = 7, \quad s_3 = s_2 + \tfrac{7}{10^3} = \tfrac{707}{1000},\\
x_4 &= \big[10^4\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{707}{1000}\big)\big] = 1, \quad s_4 = s_3 + \tfrac{1}{10^4} = \tfrac{7071}{10000}
\end{aligned}$$

και συνεχίζουμε μέχρι να υπολογίσουμε οποιονδήποτε αριθμό αρχικών δεκαδικών ψηφίων. Το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{\sqrt{2}}$ αρχίζει με $0.7071\ldots$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε *μερικά* αρχικά δυαδικά ψηφία του $\frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \big[2\,\tfrac{3}{5}\big] = 1, \quad s_1 = \tfrac{1}{2}, \\ x_2 &= \big[2^2\big(\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{2}\big)\big] = 0, \quad s_2 = s_1 + \tfrac{0}{2^2} = \tfrac{1}{2}, \\ x_3 &= \big[2^3\big(\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{2}\big)\big] = 0, \quad s_3 = s_2 + \tfrac{0}{2^3} = \tfrac{1}{2}, \\ x_4 &= \big[2^4\big(\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{2}\big)\big] = 1, \quad s_4 = s_3 + \tfrac{1}{2^4} = \tfrac{9}{16} \end{aligned}$$

και ούτω καθ’ εξής. Το δυαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{5}$ αρχίζει με $0.1001\ldots$.

Τώρα θα μιλήσουμε για p-αδικά αναπτύγματα γενικότερων μη-αρνητικών αριθμών.

Ορισμός. *Αν $x \geq 1$ γράφουμε $x = [x] + (x - [x])$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή φυσικός αριθμός, και το $x - [x]$ ανήκει στο $[0,1)$. Έχουμε τώρα το p-αδικό ανάπτυγμα $\langle X_N \ldots X_0\rangle_p$ για το $[x]$ και το p-αδικό ανάπτυγμα $\langle 0.x_1x_2\ldots\rangle_p$ για το $x - [x]$. Τότε $[x] = X_Np^N + \cdots + X_1p + X_0$ και $x - [x] = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \cdots$ οπότε*

$$x = X_Np^N + \cdots + X_1p + X_0 + \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} + \cdots .$$

Το τελευταίο άθροισμα το συμβολίζουμε $\langle X_N \ldots X_0.x_1x_2\ldots\rangle_p$ και το ονομάζουμε p-**αδικό ανάπτυγμα** *του x. Γράφουμε*

$$x = \langle X_N \ldots X_0.x_1x_2\ldots\rangle_p.$$

Η n-**οστή** p-**αδική προσέγγιση** του x είναι ο αριθμός

$$s_n = [x] + \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} = X_Np^N + \cdots + X_1p + X_0 + \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n}$$

και, προφανώς, ισχύει

$$s_n \leq x < s_n + \tfrac{1}{p^n}$$

για κάθε n.

Μελετώντας τα p-αδικά αναπτύγματα των αριθμών στο $[0,1)$, αλλά και, γενικότερα, αριθμών ≥ 0, περιοριστήκαμε σε p-αδικά αναπτύγματα στα οποία τα p-αδικά ψηφία δεν είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$. Ας υποθέσουμε ότι στην ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) είναι από κάποιον δείκτη και πέρα όλα τα x_n ίσα με $p-1$, δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε $n \geq m$ και ας συμβολίσουμε n_0 το ελάχιστο τέτοιο m. Η πιο απλή περίπτωση είναι όταν $n_0 = 1$, δηλαδή όταν ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε n οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ έχει άθροισμα

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Τότε η παράσταση $\langle 0.\,\underline{p-1}\,\underline{p-1}\,\underline{p-1}\,\ldots\rangle_p$ μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτικό p-αδικό ανάπτυγμα του αριθμού 1, ο οποίος έχει p-αδικό ανάπτυγμα $\langle 1.000\ldots\rangle_p$.

Στην περίπτωση $n_0 \geq 2$ ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε $n \geq n_0$ και $x_{n_0-1} \leq p-2$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ έχει άθροισμα

$$\begin{aligned} x &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^{n_0-1}} \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{n_0-2} \frac{x_n}{p^n} + \frac{x_{n_0-1}+1}{p^{n_0-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}, \end{aligned}$$

όπου η (y_n) είναι μία νέα ακολουθία p-αδικών ψηφίων η οποία ορίζεται από τις σχέσεις $y_n = x_n$ για κάθε $n = 1, \ldots, n_0 - 2$, $y_{n_0-1} = x_{n_0-1} + 1$ και $y_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως η παράσταση $\langle 0.x_1 \ldots x_{n_0-1}\,\underline{p-1}\,\underline{p-1}\,\ldots\rangle_p$ μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτικό p-αδικό ανάπτυγμα του αριθμού x ο οποίος έχει p-αδικό ανάπτυγμα $\langle 0.x_1 \ldots \underline{x_{n_0-1}+1}\,00\ldots\rangle_p$ στο οποίο τα p-αδικά ψηφία δεν είναι από κανέναν δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$.

Παράδειγμα. Η παράσταση $0.35699999\ldots$ είναι εναλλακτικό δεκαδικό ανάπτυγμα του αριθμού ο οποίος έχει δεκαδικό ανάπτυγμα $0.35700000\ldots$, δηλαδή του $\frac{357}{1000}$.

Παράδειγμα. Η παράσταση $\langle 0.1010111111\ldots\rangle_2$ θεωρείται εναλλακτικό δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού ο οποίος έχει δυαδικό ανάπτυγμα $\langle 0.1011000000\ldots\rangle_2$, δηλαδή του $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{11}{16}$.

Ορισμός. *Ένα p-αδικό ανάπτυγμα $\langle X_N\ldots X_0.x_1x_2\ldots\rangle_p$ χαρακτηρίζεται* **περιοδικό** *αν υπάρχουν $m,k\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_{n+k}=x_n$ για κάθε $n\geq m$. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά από το τμήμα $x_mx_{m+1}\ldots x_{m+k-1}$ του p-αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα $x_mx_{m+1}\ldots x_{m+k-1}$ και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή το p-αδικό ανάπτυγμα έχει την μορφή*

$$\langle X_N\ldots X_0.x_1\ldots x_{m-1}\underbrace{x_m\ldots x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ldots x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ldots x_{m+k-1}}\ldots\rangle_p.$$

Χρησιμοποιούμε και την συντομογραφία $\langle X_N\ldots X_0.x_1\ldots x_{m-1}\overline{x_m\ldots x_{m+k-1}}\rangle_p$.

Η πρόταση 9.12 στην περίπτωση $p=10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το δημοτικό σχολείο (χωρίς απόδειξη, φυσικά).

Πρόταση 9.12. *Έστω $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$ και $x\geq 0$. Τότε το x είναι ρητός αν και μόνο αν το p-αδικό του ανάπτυγμα είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα:

$$x=\langle X_N\ldots X_0.x_1\ldots x_{m-1}\underbrace{x_m\ldots x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ldots x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ldots x_{m+k-1}}\ldots\rangle_p.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
x&=X_Np^N+\cdots+X_0+\tfrac{x_1}{p}+\cdots+\tfrac{x_{m-1}}{p^{m-1}}+\big(\tfrac{x_m}{p^m}+\cdots+\tfrac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\big)\big(1+\tfrac{1}{p^k}+\tfrac{1}{p^{2k}}+\cdots\big)\\
&=X_Np^N+\cdots+X_0+\tfrac{x_1}{p}+\cdots+\tfrac{x_{m-1}}{p^{m-1}}+\big(\tfrac{x_m}{p^m}+\cdots+\tfrac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\big)\tfrac{1}{1-(1/p^k)}\\
&=\tfrac{X_Np^{N+m-1}+\cdots+X_0p^{m-1}+x_1p^{m-2}+\cdots+x_{m-1}}{p^{m-1}}+\tfrac{x_mp^{k-1}+\cdots+x_{m+k-1}}{p^{m-1}(p^k-1)},
\end{aligned}$$

οπότε είναι φανερό ότι το x είναι ρητός.

Αντιστρόφως, έστω ότι το $x\geq 0$ είναι ρητός: $x=\frac{a}{b}$, όπου τα $a\geq 0$ και $b\geq 1$ είναι ακέραιοι. Γράφουμε $p=p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}$, όπου τα $p_1,\ldots,p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και τα $n_1,\ldots,n_r$ είναι φυσικοί. Ομοίως, γράφουμε $b=p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}b'$, όπου τα $l_1,\ldots,l_r$ είναι ακέραιοι ≥ 0 (αν κάποιο p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b τότε το αντίστοιχο l_j είναι 0) και το b' είναι φυσικός σχετικά πρώτος με το p (δηλαδή τα p,b' δεν έχουν κανέναν κοινό παράγοντα >1). Θεωρούμε οποιοδήποτε $m\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $(m-1)n_j\geq l_j$ για $j=1,\ldots,r$. Ορίζουμε $m_j=(m-1)n_j-l_j$ οπότε κάθε m_j είναι ακέραιος ≥ 0. Τότε $x=\frac{a}{b}=\frac{a}{p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}b'}=\frac{ap_1^{m_1}\cdots p_r^{m_r}}{(p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r})^{m-1}b'}=\frac{a'}{p^{m-1}b'}$, όπου το a' είναι ακέραιος ≥ 0. Τώρα, θεωρούμε τους αριθμούς $p,p^2,p^3,\ldots$ και τους διαιρούμε με το b'. Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων είναι πεπερασμένα (οι αριθμοί $0,\ldots,b'-1$) αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι οπότε τουλάχιστον δύο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το b'. Δηλαδή υπάρχουν $t,s\in\mathbb{N}$ με $t<s$ ώστε $p^t=q_tb'+z$ και $p^s=q_sb'+z$, όπου $q_t,q_s\in\mathbb{Z}$ και το z είναι ένα από τα $0,\ldots,b'-1$. Συνεπάγεται $p^t(p^{s-t}-1)=p^s-p^t=(q_s-q_t)b'$ οπότε το b' διαιρεί το $p^t(p^{s-t}-1)$. Επειδή τα b',p είναι σχετικά πρώτα, το b' διαιρεί το $p^{s-t}-1$ οπότε υπάρχει $b''\in\mathbb{N}$ ώστε $b'b''=p^{s-t}-1$. Ορίζουμε τον φυσικό $k=s-t$ και έχουμε $b'b''=p^k-1$ και επομένως $x=\frac{a'b''}{p^{m-1}b'b''}=\frac{a''}{p^{m-1}(p^k-1)}$, όπου $a''\in\mathbb{Z}$, $a''\geq 0$. Κατόπιν, εκτελούμε την διαίρεση του a'' με το p^k-1 οπότε $a''=w(p^k-1)+u$, όπου $w\in\mathbb{Z}$, $w\geq 0$ και το u είναι ένα από τα $0,\ldots,p^k-2$. Τέλος, γράφουμε τα p-αδικά αναπτύγματα των w και u στην μορφή $w=X_Np^{N+m-1}+\cdots+X_0p^{m-1}+x_1p^{m-2}+\cdots+x_{m-1}$ και $u=x_mp^{k-1}+\cdots+x_{m+k-1}$ και παρατηρούμε ότι τα $x_m,\ldots,x_{m+k-1}$ δεν είναι όλα ίσα με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u=$

$(p-1)p^{k-1}+\cdots+(p-1)p+(p-1)=p^k-1$. Συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned}
x &= \tfrac{w(p^k-1)+u}{p^{m-1}(p^k-1)}\\
&= \tfrac{w}{p^{m-1}}+\tfrac{u}{p^{m-1}(p^k-1)}=\tfrac{X_Np^{N+m-1}+\cdots+X_0p^{m-1}+x_1p^{m-2}+\cdots+x_{m-1}}{p^{m-1}}+\tfrac{x_mp^{k-1}+\cdots+x_{m+k-1}}{p^{m-1}(p^k-1)}\\
&= X_Np^N+\cdots+X_0+\tfrac{x_1}{p}+\cdots+\tfrac{x_{m-1}}{p^{m-1}}+\big(\tfrac{x_m}{p^m}+\cdots+\tfrac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\big)\tfrac{1}{1-(1/p^k)}\\
&= X_Np^N+\cdots+X_0+\tfrac{x_1}{p}+\cdots+\tfrac{x_{m-1}}{p^{m-1}}+\big(\tfrac{x_m}{p^m}+\cdots+\tfrac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\big)\big(1+\tfrac{1}{p^k}+\tfrac{1}{p^{2k}}+\cdots\big)\\
&= \langle X_N\ldots X_0.x_1\,\ldots\,x_{m-1}\,\underbrace{x_m\,\ldots\,x_{m+k-1}}\,\underbrace{x_m\,\ldots\,x_{m+k-1}}\,\underbrace{x_m\,\ldots\,x_{m+k-1}}\,\cdots\rangle_p,
\end{aligned}$$

δηλαδή ότι το x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα. □

Ασκήσεις.

9.2.1. Εφαρμόζοντας την πρόταση 9.7, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2}-n),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n^{1+(1/n)}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\,\log(1+\tfrac{1}{n^2}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{1/n}-1),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n\sin^2\tfrac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\tfrac{1}{n}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-\cos\tfrac{1}{n}),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\big(n\log\tfrac{2n+1}{2n-1}-1\big),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

9.2.2. (i) Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες καθεμιά από τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ συγκλίνει.
(ii) Βρείτε τις τιμές των a,b με $a>b>0$, για τις οποίες καθεμιά από τις σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a-n^b}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^n-b^n}$ συγκλίνει.
(iii) Βρείτε τις τιμές των $a,b,c>0$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{b^n+c^n}$ συγκλίνει.

9.2.3. Είναι πολύ απλό να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ (δείτε ξανά την άσκηση 9.1.5). Βάσει αυτού αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

9.2.4. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει.

9.2.5. Εξετάστε τις

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n^2+1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n}{n^2+1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^n}{1+e^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-n},\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{1}{n\log n},\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{1}{n\log^2 n},\quad \sum_{n=3}^{+\infty}\tfrac{1}{n\log n\log(\log n)},\quad \sum_{n=3}^{+\infty}\tfrac{1}{n\log n\log^2(\log n)}$$

με το ολοκληρωτικό κριτήριο. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους. Κατόπιν, εφαρμόστε και το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

9.2.6. Εξετάστε με το ολοκληρωτικό κριτήριο και με το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy την σύγκλιση των

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{1}{n\log^p n},\quad \sum_{n=3}^{+\infty}\tfrac{1}{n\log n\log^p(\log n)}$$

ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου p.

9.2.7. Αποδείξτε ότι:
(i) $\lim_{p\to1+}(p-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=1$.
(ii) $\frac{1}{\log n}\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\big)\to1$.
(iii) $n^{p-1}\big(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\big)\to\frac{1}{1-p}$ αν $0\le p<1$.

9.2.8. Αποδείξτε ότι:
(i) $\log\frac{n+1}{m}\leq\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{m}+\log\frac{n}{m}$ για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leq n$.
(ii) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\to\log 2$ και, γενικότερα, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{pn-1}+\frac{1}{pn}\to\log p$ για κάθε $p\in\mathbb{N}$.

9.2.9. Έστω $p>1$. Αποδείξτε ότι:
(i) $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}\leq\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots\leq\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
(ii) $n^{p-1}\big(\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots\big)\to\frac{1}{p-1}$.

9.2.10. (i) Έστω $x>0$. Αποδείξτε ότι $\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}\leq\frac{x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}=\frac{\pi}{2}$.
Άρα τί απαντάμε αν κάποιος ισχυριστεί ότι γενικά ισχύει η εναλλαγή $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)$ των συμβόλων του ορίου και της σειράς;

9.2.11. Έστω $x_n\geq 0$ για κάθε n. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{x_nx_{n+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα αποδείξτε και το αντίστροφο.

9.2.12. Έστω $x_n\geq 0$ για κάθε n. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει αποδείξτε ότι και οι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n^2}{1+x_n^2}$ συγκλίνουν.

9.2.13. Έστω (x_n) φθίνουσα και $x_n\geq 0$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n<+\infty$ αποδείξτε ότι $nx_n\to 0$. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\frac{n}{2}x_n\leq x_{[n/2]+1}+\cdots+x_n$.)

9.2.14. Έστω (x_n) φθίνουσα, $x_n\to 0$ και έστω $x_n-2x_{n+1}+x_{n+2}\geq 0$ για κάθε n.
(i) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})=x_1$.
(ii) Αποδείξτε ότι $n(x_n-x_{n+1})\to 0$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση.)
(iii) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}n(x_n-2x_{n+1}+x_{n+2})=x_1$.

9.2.15. (i) Έστω ότι ισχύει $x_n,y_n>0$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{y_{n+1}}{y_n}$ για κάθε n. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ συγκλίνει αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
(ii) Έστω ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n.
Αν $0<a<1$ και αν ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq a$ για κάθε n αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
Αν $a\geq 1$ και αν ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq a$ για κάθε n αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει.
(iii) Έστω ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n.
Αν $a>1$ και αν ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq(1-\frac{1}{n+1})^a$ για κάθε n αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
Αν $a\leq 1$ και αν ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq(1-\frac{1}{n+1})^a$ για κάθε n αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει.

9.2.16. Βρείτε το δυαδικό, το τριαδικό, το δεκαεξαδικό και το εκατονταδικό ανάπτυγμα του 87.

9.2.17. Έστω $p,N\in\mathbb{Z}$, $p\geq 2$, $N\geq 0$. Βρείτε το p-αδικό ανάπτυγμα του $p^{N+1}-1$.

9.2.18. Έστω $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$.
(i) Αν όλα τα $X_N,\dots,X_0$ ανήκουν στο $\{0,1,\dots,p-1\}$ και $X_N\neq 0$ αποδείξτε ότι $p^N\leq X_Np^N+\cdots+X_1p+X_0\leq p^{N+1}-1<p^{N+1}$.
(ii) Έστω $x\in\mathbb{N}$ και $N\in\mathbb{Z}$, $N\geq 0$. Αποδείξτε ότι το πλήθος των ψηφίων στο p-αδικό ανάπτυγμα του x είναι ίσο με $N+1$ αν και μόνο αν $p^N\leq x<p^{N+1}$.

9.2.19. Έστω η ακολουθία $k_1<k_2<k_3<\dots$ των φυσικών οι οποίοι δεν περιέχουν το ψηφίο 0 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{k_n}$ συγκλίνει σε αριθμό μικρότερο από 90.

9.2.20. Υπολογίστε το δυαδικό, το τετραδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των $\frac{7}{16}$ και $\frac{31}{32}$.

9.2.21. Έστω $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$ και $x,y\in[0,1)$. Αν για κάποιο n οι n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις των x,y είναι ίδιες αποδείξτε ότι $|x-y|<\frac{1}{p^n}$.

9.2.22. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0,1)$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του x, ποιά είναι τα p-αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$ και $p^n(x - s_n)$;

9.2.23. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0,1)$. Αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του $x+y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις τους είναι $< \frac{2}{p^n}$ και ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του xy είναι $< \frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

9.2.24. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και p-αδικό ψηφίο k. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0,1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a,b)$. Ποιά ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τί μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

9.2.25. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0,1)$.
(i) Αποδείξτε ότι το x μπορεί να έχει δύο διαφορετικά p-αδικά αναπτύγματα μόνο στην περίπτωση κατά την οποία στο ένα από αυτά είναι όλα τα ψηφία ίσα με 0 από κάποιον δείκτη και πέρα και στο άλλο είναι όλα τα ψηφία ίσα με $p-1$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Ποιά σχέση υπάρχει ανάμεσα σ' αυτούς τους δύο δείκτες;
(ii) Αποδείξτε ότι το x έχει δύο διαφορετικά p-αδικά αναπτύγματα αν και μόνο αν $x = \frac{m}{p^n}$ για κάποια $n.m \in \mathbb{N}$ με $m < p^n$.

9.2.26. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}$.

9.2.27. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του $x \geq 0$ και ορίσουμε $t_n = s_n + \frac{1}{p^n}$ αποδείξτε ότι η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία, ότι η (t_n) είναι φθίνουσα ακολουθία και ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο x.

9.2.28. Θεωρήστε τα περιοδικά αναπτύγματα $32.34\underbrace{239}\underbrace{239}\underbrace{239}\ldots$, $\langle 2.0\underbrace{1201}\underbrace{1201}\underbrace{1201}\ldots\rangle_3$ και $\langle 1001.\underbrace{101}\underbrace{101}\underbrace{101}\ldots\rangle_2$ και υπολογίστε τους αντίστοιχους ρητούς αριθμούς.

9.2.29. Υπολογίστε το δυαδικό, το τριαδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του $\frac{313}{150}$.

9.3 Κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Α. Απόλυτη σύγκλιση.

Ορισμός. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** *αν η σειρά (με μη-αρνητικούς όρους)* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ *συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως τότε αυτή συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Απόδειξη. Ισχύει $0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$ για κάθε n οπότε, επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|x_n|$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + |x_n|)$ συγκλίνει. Επομένως συγκλίνει και η διαφορά της τελευταίας σειράς με την $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$, δηλαδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Τώρα, επειδή ισχύει $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ για κάθε $n \geq 1$, έχουμε ότι $-\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ και άρα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$. $\square$

Αν δούμε την ανισότητα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ως γενίκευση των $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κ.τ.λ. τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για την ανισότητα αυτή.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση 9.13. *(i) Αν ισχύει $|x_n| \leq y_n$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει. Επίσης,*

$$\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

(ii) Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και ότι η $\left(\frac{|x_n|}{y_n}\right)$ συγκλίνει ή, πιο γενικά, ότι είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

Απόδειξη. (i) Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει οπότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και, επίσης, $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
(ii) Άμεση συνέπεια της πρότασης 9.7 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Παράδειγμα. Συγκρίνουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ με την $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$. Επειδή $\frac{|(-2)^n/(3^n+2^n)|}{(2/3)^n} \to 1$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

Κριτήριο λόγου του d' Alembert. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big|$.
(i) Αν $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| < 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.*
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| > 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| < 1$. Παίρνουμε a έτσι ώστε $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| < a < 1$. Επομένως υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $|x_{n_0+1}| \leq a|x_{n_0}|, |x_{n_0+2}| \leq a|x_{n_0+1}| \leq a^2|x_{n_0}|, |x_{n_0+3}| \leq a|x_{n_0+2}| \leq a^3|x_{n_0}|$ και, με επαγωγή, $|x_n| \leq a^{n-n_0}|x_{n_0}|$ για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα ορίζουμε $c = \max\left\{|x_1|, \frac{|x_2|}{a}, \dots, \frac{|x_{n_0-1}|}{a^{n_0-2}}, \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0-1}}\right\}$ και βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει $|x_n| \leq ca^{n-1}$ για κάθε n. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Έστω $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| > 1$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως ισχύει $|x_{n_0+1}| \geq |x_{n_0}|, |x_{n_0+2}| \geq |x_{n_0+1}| \geq |x_{n_0}|$ και, γενικότερα, $|x_n| \geq |x_{n_0}| > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό όμως αποκλείει το να ισχύει $x_n \to 0$ οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει διότι $\big|\frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!}\big| = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$.

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ αποκλίνει διότι $\big|\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}\big| = (1+\frac{1}{n})^n \to e > 1$.

Παρατηρήστε ότι στο κριτήριο λόγου δεν αναφέρεται η περίπτωση $\lim_{n\to+\infty} \big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\big| = 1$. Θα δούμε αμέσως δύο παραδείγματα τα οποία εμπίπτουν σ' αυτήν την περίπτωση, όπου στο ένα παράδειγμα η σειρά συγκλίνει ενώ στο άλλο η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\big|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\big| \to 1$.

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\big|\frac{1/(n+1)}{1/n}\big| \to 1$.

Κριτήριο ρίζας του Cauchy. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.
(i) Αν $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.*
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. (i) Αν $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ επιλέγουμε a ώστε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < a < 1$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$ οπότε ισχύει $|x_n| \leq a^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε $c = \max\left\{|x_1|, \frac{|x_2|}{a}, \dots, \frac{|x_{n_0-1}|}{a^{n_0-2}}, a\right\}$ και τότε ισχύει $|x_n| \leq ca^{n-1}$ για κάθε n. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$ τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $|x_n| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ οπότε δεν ισχύει $x_n \to 0$ και άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$ συγκλίνει διότι $\sqrt[n]{\big|\frac{n^3}{2^n}\big|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} \to \frac{1}{2} < 1$.

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n}$ αποκλίνει: $\sqrt[n]{|\frac{(-2)^n}{n}|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \to 2 > 1$.

Παρατηρήστε ότι, όπως και στο κριτήριο λόγου, στο κριτήριο ρίζας δεν αναφέρεται καθόλου η περίπτωση $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$. Θα δούμε δύο παραδείγματα τα οποία εμπίπτουν σ' αυτήν την περίπτωση, όπου στο ένα παράδειγμα η σειρά συγκλίνει ενώ στο άλλο η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} \to 1$.

Παράδειγμα. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} \to 1$.

Β. Υπό συνθήκη σύγκλιση.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποια σχόλια για την έννοια της σύγκλισης σειράς.
Πρώτον, έστω μία σειρά με *μη-αρνητικούς* όρους. Το να συγκλίνει η σειρά είναι ισοδύναμο με το να είναι φραγμένα τα μερικά αθροίσματά της. Αυτά τα μερικά αθροίσματα δημιουργούνται με διαδοχική άθροιση των όρων της σειράς οπότε είναι φανερό ότι για να είναι τα μερικά αθροίσματα φραγμένα πρέπει το μέγεθος των όρων (προσθετέων) να είναι αρκετά μικρό: *όταν προσθέτουμε μεγάλους αριθμούς βρίσκουμε μεγάλα αθροίσματα ενώ όταν προσθέτουμε μικρότερους αριθμούς βρίσκουμε μικρότερα αθροίσματα*. Αυτό φαίνεται και από την πρόταση 9.1 η οποία λέει ότι αν μία σειρά συγκλίνει τότε οι όροι της τείνουν στο 0. Όμως η απλή σύγκλιση των όρων στο 0 δεν αρκεί από μόνη της να κάνει την σειρά να συγκλίνει. Για παράδειγμα, και στις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ οι όροι τείνουν στο 0 αλλά η πρώτη συγκλίνει ενώ η δεύτερη δεν συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι οι όροι της πρώτης σειράς είναι *πολύ μικρότεροι* από τους αντίστοιχους όρους της δεύτερης σειράς. Πράγματι: $\frac{1/n^2}{1/n} \to 0$. Δηλαδή το μέγεθος των όρων της πρώτης σειράς είναι τόσο μικρό ώστε η σειρά συγκλίνει ενώ το μέγεθος των όρων της δεύτερης σειράς δεν είναι τόσο μικρό όσο θα έπρεπε για να συγκλίνει και αυτή. Αυτό το "παιχνίδι" με το μέγεθος των όρων φαίνεται καθαρά και στην πρόταση 9.7. Το βασικό της συμπέρασμα είναι ότι αν μία σειρά με μεγαλύτερους όρους συγκλίνει τότε και η σειρά με τους μικρότερους όρους συγκλίνει.
Όλα τα προηγούμενα έχουν ως βασική προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε σειρές με μη-αρνητικούς όρους: *ένας μη-αρνητικός αριθμός ταυτίζεται με το μέγεθός του*.
Η κατάσταση αλλάζει κάπως όταν εργαζόμαστε με σειρές των οποίων οι όροι έχουν μεταβαλλόμενο πρόσημο. Και πάλι, για να συγκλίνει μία σειρά, πρέπει οι όροι της να τείνουν στο 0 και επομένως το μέγεθός τους συνεχίζει να παίζει ρόλο. Όμως το μέγεθος των όρων δεν παίζει πια τον καθοριστικό ρόλο. Δείτε, για παράδειγμα, τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Οι όροι τους έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όμως ενώ το μέγεθος αυτό δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η δεύτερη σειρά είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η πρώτη σειρά. Ο λόγος είναι ότι από τα διαφορετικά πρόσημα προκαλείται αλληλοαναίρεση των όρων κατά την άθροισή τους και έτσι τα μερικά αθροίσματα παραμένουν "υπό έλεγχο". Το μέγεθος των όρων της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η σειρά απολύτως (δηλαδή να συγκλίνει η σειρά των μεγεθών των όρων) αλλά είναι αρκετά μικρό ώστε, *μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων*, η σειρά να συγκλίνει. Έτσι, το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης φαίνεται λογικό: αν το μέγεθος των όρων μίας σειράς είναι αρκετά μικρό ώστε η σειρά των μεγεθών αυτών να συγκλίνει τότε είναι αρκετά μικρό ώστε, μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων, η σειρά των ίδιων των όρων να συγκλίνει.
Λόγω αυτής της διαφοράς ανάμεσα στην φύση της σύγκλισης των σειρών με μη-αρνητικούς όρους και στην φύση της σύγκλισης των σειρών με γενικούς όρους, υπάρχει και αντίστοιχη διαφορά ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες μεθόδους μελέτης της σύγκλισής τους. Για παράδειγμα, η σύγκριση αντίστοιχων όρων όπως αυτή εκφράζεται στα δύο μέρη της πρότασης 9.7 και στα αντίστοιχα μέρη της πρότασης 9.13 εφαρμόζεται σε σειρές οι οποίες συγκλίνουν απολύτως, ακριβώς επειδή πρόκειται για σύγκριση των *μεγεθών* των αντίστοιχων όρων. Η μέθοδος της σύγκρισης εφαρμόζεται μόνο για την μελέτη της σύγκλισης σειρών μη-αρνητικών όρων ή της απόλυτης σύγκλισης σειρών (δηλαδή και πάλι της σύγκλισης σειρών μη-αρνητικών όρων). Δύο από τις μεθόδους μελέτης

της σύγκλισης σειρών οι οποίες δεν συγκλίνουν απολύτως είναι το κριτήριο του Dirichlet και, ως πόρισμα, το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

Κριτήριο του Dirichlet. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και έστω* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η* (b_n) *είναι φθίνουσα, αν* $b_n \to 0$ *και αν η* (s_n) *είναι φραγμένη τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Επίσης, επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $b_n \geq 0$ για κάθε n.
Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (s_k - s_{k-1}) b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n s_k b_k - \sum_{k=2}^n s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n s_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^n s_k b_k - \sum_{k=1}^n s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

Εκτός από την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ θεωρούμε και την $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$. Ορίζουμε τα αντίστοιχα μερικά αθροίσματα $t_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^n s_k(b_k - b_{k+1})$ οπότε, όπως είδαμε, ισχύει $t_n = u_n + s_n b_{n+1}$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε n ισχύει

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |s_k|(b_k - b_{k+1}) &\leq M \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) \\ &= M((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1})) \\ &= M(b_1 - b_{n+1}) \leq M b_1.\end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|(b_n - b_{n+1})$ είναι άνω φραγμένη οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 9.1, η σειρά αυτή συγκλίνει. Δηλαδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει. Συνεπάγεται ότι η ακολουθία (u_n) συγκλίνει. Επειδή η (s_n) είναι φραγμένη και $b_n \to 0$, συνεπάγεται ότι $s_n b_{n+1} \to 0$. Από την $t_n = u_n + s_n b_{n+1}$ συνεπάγεται ότι και η ακολουθία (t_n) συγκλίνει, δηλαδή ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. □

Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων. *Αν η ακολουθία* (b_n) *είναι φθίνουσα και αν* $b_n \to 0$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Dirichlet με $a_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n. Εύκολα βλέπουμε ότι τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας (a_n) είναι $s_n = 1$ αν το n είναι άρτιο και $s_n = 0$ αν το n είναι περιττό. Άρα η (s_n) είναι φραγμένη. □

Παράδειγμα. Έστω $p > 0$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$ συγκλίνει, όπως προκύπτει από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.
Αν $p > 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως, αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$. Άρα η σειρά συγκλίνει και δεν χρειάζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων για να αποδειχθεί η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.
Όμως αν $0 < p \leq 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ δεν συγκλίνει απολύτως. Σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό, η σειρά αυτή *συγκλίνει υπό συνθήκη*. Με αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.

Ορισμός. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Ασκήσεις.

9.3.1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 e^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}.$$

9.3.2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{n+1}{2n-1})^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{3n-1}{2n+1})^{2n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^3}{e^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)^3 2^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{2^n}{(n+1)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n3^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{n}{n+1})^{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}e^n(\tfrac{n}{n+1})^{n^2}.$$

9.3.3. Για ποιά p, q η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n n^q$ συγκλίνει; συγκλίνει απολύτως;

9.3.4. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{(n(n-1))/2}}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{(n(n-1))/2}}{n},\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n\log n},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{\log n}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1+\tfrac{1}{n}),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin^{3/2}\tfrac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\tan\tfrac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\tfrac{1}{n}),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n(1-\cos\tfrac{1}{n}).$$

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες μία σειρά δεν συγκλίνει απολύτως μπορεί να φανεί χρήσιμο το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

9.3.5. Εξετάστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+(-1)^n n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+6(-1)^n n}$ ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

9.3.6. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\sin(nx)$ συγκλίνουν.

9.3.7. Βρείτε τις τιμές του $x \neq -1$ για τις οποίες η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει.

9.3.8. (i) Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 0$ αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\cos(nx)$ συγκλίνει για κάθε $x \neq m2\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.
(ii) Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 0$ αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\sin(nx)$ συγκλίνει για κάθε x.
(iii) Αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sin(nx)}{n\log n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\log n}{n}\sin(nx),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n})\tfrac{\sin(nx)}{n}$$

συγκλίνουν για κάθε x.

9.3.9. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \int_1^{n+1}\frac{1}{2x}\,dx = \log\sqrt{n+1}$ για κάθε n. Κατόπιν, με την ανισότητα $1+x \leq e^x$ αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ συγκλίνει.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \leq 1+\int_1^n\frac{1}{2x-1}\,dx = 1+\log\sqrt{2n-1}$ για κάθε n. Κατόπιν, με την ανισότητα $1+x \leq e^x$ αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{e\sqrt{2n-1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

9.3.10. Έστω (b_n) φθίνουσα, $b_n \to 0$, $s = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ και $s_n = b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{n-1}b_n$. Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \leq (-1)^n(s-s_n) \leq b_{n+1}$ για κάθε n.

9.3.11. Βρείτε ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $b_n > 0$ για κάθε n, ώστε $b_n \to 0$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ να αποκλίνει.

9.3.12. Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ η οποία συγκλίνει και ακολουθία (b_n) ώστε $b_n \to 0$, ώστε να ισχύει $b_n \geq 0$ για κάθε n και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n b_n$ να αποκλίνει.

9.3.13. Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ η οποία συγκλίνει ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n^2$ να αποκλίνει.

9.3.14. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}nx_n$ αποκλίνει.

9.4 Δυναμοσειρές.

Ορισμός. *Κάθε σειρά της μορφής*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots + a_n(x-\xi)^n + \cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** *με* **κέντρο** ξ *και* **συντελεστές** $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Σε μία δυναμοσειρά το x παίζει τον ρόλο *μεταβλητής*. Στην πραγματικότητα μία δυναμοσειρά είναι *άπειρες* σειρές: σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μία σειρά και φυσικά σε διαφορετικές τιμές του x αντιστοιχούν (εν γένει) διαφορετικές σειρές. Οι τιμές του x χωρίζονται σε κατηγορίες: για κάποιες τιμές του x η δυναμοσειρά συγκλίνει, για κάποιες άλλες αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ και για τις υπόλοιπες τιμές του x η δυναμοσειρά αποκλίνει αλλά όχι στα $\pm\infty$.

Μελέτη μίας δυναμοσειράς σημαίνει κατ' αρχάς να βρεθούν εκείνες οι τιμές του x για τις οποίες η δυναμοσειρά συγκλίνει και κατόπιν να βρεθεί συνοπτικός τύπος για το άθροισμά της, το οποίο φυσικά εξαρτάται από το x. Θα δούμε ότι για το πρώτο ζήτημα υπάρχει μία σχετικά γενική απάντηση ενώ για το δεύτερο υπάρχει απάντηση μόνο κατά περίπτωση.

Παράδειγμα. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 0 ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και προφανώς συγκλίνει για κάθε x και έχει άθροισμα ίσο με 0.

Παράδειγμα. Η **γεωμετρική δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 1 έχει ήδη μελετηθεί στην μορφή $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$, δηλαδή με $a = x-\xi$. Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει μόνο όταν $-1 < x-\xi < 1$ ή, ισοδύναμα, $\xi - 1 < x < \xi + 1$ και το άθροισμά της είναι τότε ίσο με $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n = \frac{1}{1-(x-\xi)} \qquad \text{αν } \xi-1 < x < \xi+1.$$

Το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες μία δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται **σύνολο σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Η επόμενη πρόταση περιγράφει το γενικό αποτέλεσμα για την μορφή του συνόλου σύγκλισης οποιασδήποτε δυναμοσειράς.

Πρόταση 9.14. *Για κάθε δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *υπάρχουν ακριβώς τρεις περιπτώσεις σχετικά με το σύνολο σύγκλισής της. Αυτές είναι:*
(i) το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$,
(ii) το σύνολο σύγκλισης είναι το μονοσύνολο $\{\xi\}$,
(iii) υπάρχει $R > 0$ *ώστε το σύνολο σύγκλισης να είναι το διάστημα* $(\xi-R, \xi+R)$ *ή το* $(\xi-R, \xi+R]$ *ή το* $[\xi-R, \xi+R)$ *ή το* $[\xi-R, \xi+R]$.
Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ *στην περίπτωση* (i), *για* $x = \xi$ *στην περίπτωση (ii) και για κάθε* $x \in (\xi-R, \xi+R)$ *στην περίπτωση (iii).*

Η πρόταση 9.14 δεν θα αποδειχθεί σ' αυτές τις σημειώσεις.

Σε κάθε περίπτωση το σύνολο σύγκλισης μίας δυναμοσειράς περιέχει το κέντρο της. Αυτό είναι προφανές. Πράγματι, για $x = \xi$ η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ γίνεται $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$ και επομένως συγκλίνει.

Οι περιπτώσεις (i) και (ii) της πρότασης 9.14 μπορούν να διατυπωθούν στην μορφή της περίπτωσης (iii). Στην πρώτη περίπτωση το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty) = (\xi-(+\infty), \xi+(+\infty))$ και μπορούμε να το θεωρήσουμε ως διάστημα $(\xi-R, \xi+R)$ με $R = +\infty$. Στην δεύτερη περίπτωση το σύνολο σύγκλισης είναι το $\{\xi\}$ το οποίο γράφεται $[\xi-R, \xi+R]$ με $R = 0$.

Ορισμός. *Το σύνολο σύγκλισης κάθε δυναμοσειράς είναι διάστημα συμμετρικό ως προς το κέντρο της και ονομάζεται* **διάστημα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς. Το αντίστοιχο* R *ονομάζεται* **ακτίνα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς και σε κάθε περίπτωση ισχύει* $0 \le R \le +\infty$.

Παράδειγμα. Η μηδενική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι το $R = +\infty$.

Παράδειγμα. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (\xi-1, \xi+1)$ και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x. Άρα έχει διάστημα σύγκλισης το $(\xi-1, \xi+1)$ και ακτίνα σύγκλισης το $R = 1$.

Παράδειγμα. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n(x-\xi)^n$. Ας υποθέσουμε ότι η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για $x = x_1$. Τότε $n^n(x_1-\xi)^n \to 0$ οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $n^n|x_1-\xi|^n \leq M$ για κάθε n. Συνεπάγεται $|x_1 - \xi| \leq \frac{\sqrt[n]{M}}{n}$ για κάθε n και, παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, συμπεραίνουμε ότι $|x_1-\xi| \leq 0$ οπότε $x_1 = \xi$. Άρα το σύνολο σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς είναι το $\{\xi\}$ και η ακτίνα σύγκλισής της είναι το $R = 0$.

Για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς υπάρχει συγκεκριμένος γενικός τύπος τον οποίο δεν θα δούμε σ' αυτές τις σημειώσεις. Θα γνωρίσουμε όμως δύο τύπους για την ακτίνα σύγκλισης οι οποίοι ισχύουν για τις περισσότερες δυναμοσειρές οι οποίες εμφανίζονται στην πράξη.

Πρόταση 9.15. *Έστω ότι ισχύει $a_n \neq 0$ για κάθε n και έστω $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \mu$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$, όπου το $\frac{1}{\mu}$ ορίζεται ως 0 αν $\mu = +\infty$ και ως $+\infty$ αν $\mu = 0$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στην δυναμοσειρά, διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις.
Αν $0 < \mu < +\infty$ έχουμε $\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x-\xi|\mu$ και επομένως: αν $|x-\xi| < \frac{1}{\mu}$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ αν $|x-\xi| > \frac{1}{\mu}$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$.
Αν $\mu = 0$ τότε $\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| \to |x-\xi|\,0 = 0 < 1$ και επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x ή, με άλλα λόγια, η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty = \frac{1}{\mu}$.
Αν $\mu = +\infty$ τότε για κάθε $x \neq \xi$ έχουμε $\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| \to |x-\xi|(+\infty) = +\infty > 1$. Άρα για κάθε $x \neq \xi$ η δυναμοσειρά αποκλίνει οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $0 = \frac{1}{\mu}$. □

Πρόταση 9.16. *Έστω $\sqrt[n]{|a_n|} \to \mu$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$, όπου το $\frac{1}{\mu}$ ορίζεται ως 0 αν $\mu = +\infty$ και ως $+\infty$ αν $\mu = 0$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας στην δυναμοσειρά, διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις.
Αν $0 < \mu < +\infty$ τότε $\sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\sqrt[n]{|a_n|} \to |x-\xi|\mu$ και επομένως: αν $|x-\xi| < \frac{1}{\mu}$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ αν $|x-\xi| > \frac{1}{\mu}$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$.
Αν $\mu = 0$ τότε $\sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} \to |x-\xi|\,0 = 0 < 1$ οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και η ακτίνα σύγκλισής της είναι $+\infty = \frac{1}{\mu}$.
Αν $\mu = +\infty$ τότε για κάθε $x \neq \xi$ έχουμε $\sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} \to |x-\xi|(+\infty) = +\infty > 1$. Άρα για κάθε $x \neq \xi$ η δυναμοσειρά αποκλίνει οπότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι $0 = \frac{1}{\mu}$. □

Παράδειγμα. Για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$ εφαρμόζουμε και τους δύο τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης: $\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$ και $\sqrt[n]{|1/n|} = 1/\sqrt[n]{n} \to 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 και το κέντρο είναι φυσικά το 0. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και αποκλίνει ενώ για $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1)$.

Παράδειγμα. Για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n$ μπορούμε να επαναλάβουμε ό,τι κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα και να εφαρμόσουμε τους τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης. Προτιμάμε όμως να χρησιμοποιήσουμε το *αποτέλεσμα* του προηγούμενου παραδείγματος ως εξής.

Με την αλλαγή μεταβλητής $t=-x$ η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}t^n$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα αυτή συγκλίνει για κάθε $t\in[-1,1)$ οπότε η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1]$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1]$.

Παράδειγμα. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^n$. Εφαρμόζουμε τους δύο τύπους για την ακτίνα σύγκλισης: $|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}|=\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1$ και $\sqrt[n]{|1/n^2|}=1/(\sqrt[n]{n})^2\to 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 και το κέντρο είναι το 0. Για $x=1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ και συγκλίνει ενώ για $x=-1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ και πάλι συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1,1]$.

Παράδειγμα. Στα τρία τελευταία παραδείγματα είδαμε δυναμοσειρές των οποίων το διάστημα σύγκλισης περιέχει ένα μόνο ή και τα δύο άκρα του. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1,1)$ το οποίο δεν περιέχει κανένα άκρο του.

Από κάθε δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης ορίζεται μία συνάρτηση.

Ορισμός. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$ (περιλαμβάνεται και η περίπτωση $R=+\infty$) οπότε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς δεν αποτελείται μόνο από το ξ. Τότε ορίζεται συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$ με τύπο*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n \qquad \text{για } x\in I.$$

Λέμε ότι η f είναι **η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ *στο διάστημα σύγκλισής της.*

Παράδειγμα. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1,1)$ και για κάθε x στο διάστημα αυτό ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Άρα η συνάρτηση $y=\frac{1}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $(-1,1)$ είναι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ στο $(-1,1)$.
Προσέξτε: η συνάρτηση $y=\frac{1}{1-x}$ ορίζεται (ανεξάρτητα από την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$) στο σύνολο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $(-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Υπό προϋποθέσεις, υπάρχει και η αντίστροφη διαδικασία. Από μία συνάρτηση ορίζεται μία δυναμοσειρά.

Ορισμός. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$ και έστω ότι υπάρχει διάστημα $I\subseteq A$ το οποίο έχει μέσο ξ και δεν αποτελείται μόνο από το ξ και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ η οποία συγκλίνει για κάθε $x\in I$ και ισχύει $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ για κάθε $x\in I$. Τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ είναι η* **σειρά Taylor** *της f στο ξ.*

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $y=\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Το διάστημα $(-1,1)$ με μέσο 0 περιέχεται στο σύνολο αυτό και υπάρχει η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ η οποία συγκλίνει για κάθε $x\in(-1,1)$ και ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ είναι η σειρά Taylor της $y=\frac{1}{1-x}$ στο 0.

Τώρα ανακύπτουν δυο ερωτήματα.

Πρώτο ερώτημα. Έστω ότι έχουμε μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ με διάστημα σύγκλισης I. Όπως είδαμε, ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ για κάθε $x\in I$. Μπορούμε να βρούμε *συνοπτικότερο* τύπο της συνάρτησης;

Για παράδειγμα, η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ στο $(-1,1)$ έχει τύπο $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ αλλά έχει και τον συνοπτικότερο τύπο $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Δεύτερο ερώτημα. Έστω συνάρτηση f και ένα ξ στο πεδίο ορισμού της. Μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στο ξ και (αν υπάρχει) να την βρούμε;

Για το δεύτερο ερώτημα υπάρχει πλήρης απάντηση και συγκεκριμένη διαδικασία την οποία θα αναπτύξουμε στην αμέσως επόμενη ενότητα.

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα εξαρτάται κάθε φορά από την συγκεκριμένη δυναμοσειρά και μπορεί να δοθεί για πολύ λίγες δυναμοσειρές. Ο πιο άμεσος τρόπος είναι να βρούμε συνοπτικό τύπο για κάθε μερικό άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-\xi)^k$ και κατόπιν να βρούμε το όριο όταν $n \to +\infty$. Στο παράδειγμα με την γεωμετρική δυναμοσειρά τυχαίνει να γνωρίζουμε τον τύπο $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ και, παίρνοντας όριο, βρίσκουμε $\frac{1}{1-x}$ όταν $-1 < x < 1$. Αυτό όμως είναι ανέφικτο για τις περισσότερες δυναμοσειρές, όπως, για παράδειγμα, για την $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ την οποία θα συναντήσουμε σε επόμενα παραδείγματα.

Λήμμα 9.1. *Για κάθε x και $h \neq 0$ ισχύει:*
(i) $|(x+h)^n - x^n| \leq n(|x|+|h|)^{n-1}|h|$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1}\right| \leq n(n-1)(|x|+|h|)^{n-2}|h|$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Απόδειξη. (i) Από το θεώρημα μέσης τιμής, ισχύει $\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = n(x+\xi)^{n-1}$ για κάποιο ξ ανάμεσα στα 0 και h. Άρα

$$|(x+h)^n - x^n| = n|x+\xi|^{n-1}|h| \leq n(|x|+|\xi|)^{n-1}|h| \leq n(|x|+|h|)^{n-1}|h|.$$

(ii) Για τον ίδιο λόγο ισχύει $(x+\xi)^{n-1} - x^{n-1} = (n-1)(x+\eta)^{n-2}\xi$ για κάποιο η ανάμεσα στα 0 και ξ και επομένως ανάμεσα στα 0 και h. Άρα

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1}\right| &= |n(x+\xi)^{n-1} - nx^{n-1}| = n(n-1)|x+\eta|^{n-2}|\xi| \\ &\leq n(n-1)(|x|+|h|)^{n-2}|h|\end{aligned}$$

αφού $|x+\eta| \leq |x|+|\eta| \leq |x|+|h|$. □

Πρόταση 9.17. *Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ οπότε το διάστημα σύγκλισής της I δεν περιέχει μόνο το ξ. Γνωρίζουμε ότι το I είναι το $(\xi-R, \xi+R)$ και πιθανόν να περιέχει και ένα από τα $\xi \pm R$ ή και τα δύο. Επίσης, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα I. Τότε:*
(i) η f είναι συνεχής στο I.
(ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi-R, \xi+R)$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$$

για κάθε $x \in (\xi-R, \xi+R)$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι το x είναι εσωτερικό σημείο του I οπότε $|x-\xi| < R$. Θεωρούμε οποιαδήποτε R_1, R_2 ώστε $|x-\xi| < R_1 < R_2 < R$ και παίρνουμε h ώστε $|h| \leq R_1 - |x-\xi|$. Τότε, χρησιμοποιώντας το (i) του λήμματος 9.1, έχουμε:

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| &= \left|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\big((x+h-\xi)^n - (x-\xi)^n\big)\right| \\ &\leq |h|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|(|x-\xi|+|h|)^{n-1} \leq |h|\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|{R_1}^{n-1}.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για $x = \xi + R_2$, δηλαδή ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nR_2^n$ συγκλίνει. Άρα $a_nR_2^n \to 0$ οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|a_n|R_2^n \leq M$ για κάθε n. Επομένως

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \tfrac{M}{R_2}|h|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\big(\frac{R_1}{R_2}\big)^{n-1}.$$

Επειδή $0 < \frac{R_1}{R_2} < 1$, από τα κριτήρια λόγου και ρίζας προκύπτει ότι η τελευταία σειρά συγκλίνει οπότε αν ονομάσουμε K το άθροισμά της έχουμε ότι ισχύει

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \tfrac{MK}{R_2}|h|$$

για κάθε h με $|h| \leq R_1 - |x-\xi|$. Άρα $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ οπότε η f είναι συνεχής στο x.
Αν το x είναι άκρο του διαστήματος I και περιέχεται στο I τότε η f είναι συνεχής στο x αλλά δεν θα το αποδείξουμε σ' αυτές τις σημειώσεις.
(ii) Πάλι, έστω $|x-\xi| < R$ καθώς και R_1, R_2 με $|x-\xi| < R_1 < R_2 < R$ και h με $|h| \leq R_1 - |x-\xi|$. Τότε, χρησιμοποιώντας το (ii) του λήμματος 9.1, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Big|\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-\xi)^{n-1}\Big| &= \Big|\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \Big(\tfrac{(x-\xi+h)^n-(x-\xi)^n}{h} - n(x-\xi)^{n-1}\Big)\Big| \\ &\leq \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \Big|\tfrac{(x-\xi+h)^n-(x-\xi)^n}{h} - n(x-\xi)^{n-1}\Big| \\ &\leq \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|(|x-\xi|+|h|)^{n-2}|h| \\ &\leq \tfrac{M}{R_2^2}|h| \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\big(\tfrac{R_1}{R_2}\big)^{n-2}.\end{aligned}$$

Επειδή $0 < \frac{R_1}{R_2} < 1$, πάλι από τα κριτήρια λόγου και ρίζας προκύπτει ότι η τελευταία σειρά συγκλίνει οπότε αν L είναι το άθροισμά της έχουμε ότι ισχύει

$$\Big|\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-\xi)^{n-1}\Big| \leq \tfrac{ML}{R_2^2}|h|$$

για κάθε h με $0 < |h| \leq R_1 - |x-\xi|$.
Άρα $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-\xi)^{n-1}$. □

Η ισότητα στο (ii) της πρότασης 9.17 μπορεί να γραφτεί

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-\xi)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\big(a_n(x-\xi)^n\big)$$

και εκφράζει την εναλλαγή των συμβόλων $\frac{d}{dx}$ της παραγώγισης και $\sum_{n=0}^{+\infty}$ της άθροισης.

Τα επόμενα παραδείγματα είναι *πολύ σημαντικά* και θα τα ξαναδούμε από λίγο διαφορετική σκοπιά και στην επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$.
Με τον πρώτο τύπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης έχουμε: $|\frac{(-1)^n/(n+1)}{(-1)^{n-1}/n}| = \frac{n}{n+1} \to 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 και το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα $(-1,1)$, $(-1,1]$, $[-1,1)$, $[-1,1]$. Με τον δεύτερο τύπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης έχουμε $\sqrt[n]{|(-1)^{n-1}/n|} = 1/\sqrt[n]{n} \to 1$ και βρίσκουμε φυσικά την ίδια ακτίνα σύγκλισης.
Για $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και αποκλίνει και για $x = 1$ γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1]$.
Τώρα, έστω ότι η f είναι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης $(-1,1]$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει

$$f'(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα η f είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{1+x}$ στο $(-1,1)$ οπότε ισχύει $f(x) = \log(1+x) + c$ για κάποια σταθερά c στο $(-1,1)$. Τώρα, $c = f(0) - \log 1 = 0$ οπότε ισχύει $f(x) = \log(1+x)$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-1,1]$ και επειδή και η $y = \log(1+x)$ είναι συνεχής στο $(-1,1]$, έχουμε

$$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \log(1+x) = \log 2.$$

Άρα ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\log(1+x)\qquad \text{για } -1<x\leq 1.$$

Αντικαθιστώντας το x με το $x-1$, βρίσκουμε τον ισοδύναμο τύπο

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n=\log x\qquad \text{για } 0<x\leq 2.$$

Δηλαδή η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ στο $(0,2]$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση οπότε η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **δυναμοσειρά του λογαρίθμου**.
Κατόπιν, αλλάζοντας στην αρχική σχέση το πρόσημο του x, βρίσκουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=-\log(1-x)=\log\frac{1}{1-x}\qquad \text{για } -1\leq x<1.$$

Ειδική περίπτωση αυτών των ισοδύναμων ισοτήτων είναι ο ενδιαφέρων τύπος

$$\log 2=\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots .$$

Παράδειγμα. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$.
Με τον πρώτο τύπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης έχουμε: $|\frac{1/(n+1)!}{1/n!}|=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\to 0$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$. Αν εφαρμόσουμε τον δεύτερο τύπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|1/n!|}=\lim_{n\to+\infty}1/\sqrt[n]{n!}$, δηλαδή το $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}$. Αυτό το όριο δεν είναι τόσο απλό και στην περίπτωση αυτή *δεν χρειάζεται* να το βρούμε διότι έχουμε ήδη υπολογίσει την ακτίνα σύγκλισης βάσει του πρώτου τύπου. Όμως το όριο $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}$ είναι σημαντικό και θα το χρησιμοποιήσουμε συχνά παρακάτω. Θα δούμε λοιπόν ότι:

$$\sqrt[n]{n!}\to+\infty.$$

Πράγματι, αν το n είναι άρτιο γράφουμε

$$n!=1\cdots\tfrac{n}{2}(\tfrac{n}{2}+1)\cdots n\geq(\tfrac{n}{2}+1)\cdots n\geq(\tfrac{n}{2}+1)^{n/2}\geq(\tfrac{n+1}{2})^{n/2},$$

οπότε $\sqrt[n]{n!}\geq(\frac{n+1}{2})^{1/2}$. Αν το n είναι περιττό τότε

$$n!=1\cdots\tfrac{n-1}{2}\tfrac{n+1}{2}\cdots n\geq\tfrac{n+1}{2}\cdots n\geq(\tfrac{n+1}{2})^{(n+1)/2}\geq(\tfrac{n+1}{2})^{n/2},$$

οπότε $\sqrt[n]{n!}\geq(\frac{n+1}{2})^{1/2}$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\sqrt[n]{n!}\geq(\frac{n+1}{2})^{1/2}$ και άρα $\sqrt[n]{n!}\to+\infty$.
Άρα και με τον δεύτερο τύπο υπολογίζουμε την ακτίνα σύγκλισης ίση με $+\infty$.
Τώρα, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ για κάθε x. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και ισχύει

$$f'(x)=\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=f(x)$$

για κάθε x. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)$ και τότε ισχύει $h'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=0$ για κάθε x οπότε η h είναι σταθερή στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα ισχύει $e^{-x}f(x)=h(x)=h(0)=f(0)=1$ και επομένως $f(x)=e^x$ για κάθε x. Άρα

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x\qquad \text{για } -\infty<x<+\infty.$$

Δηλαδή η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ στο $(-\infty,+\infty)$ είναι η εκθετική συνάρτηση e^x. Γι αυτόν τον λόγο η δυναμοσειρά ονομάζεται **εκθετική δυναμοσειρά**.
Προσέξτε ότι ο τύπος $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$ με $x=1$ μας δίνει με δεύτερο τρόπο το αποτέλεσμα της πρότασης 9.8.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.
Ίσως ο πιο απλός τρόπος υπολογισμού του διαστήματος σύγκλισης είναι να κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $t = x^2$ οπότε η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^k = 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!} + \cdots$.
Υπολογίζουμε την ακτίνα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς και με τους δύο τύπους. Έχουμε $|\frac{(-1)^{k+1}/(2k+2)!}{(-1)^k/(2k)!}| = \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \to 0$. Ακόμη, $\sqrt[k]{|(-1)^k/(2k)!|} = 1/\sqrt[k]{(2k)!} \to 0$ διότι $\sqrt[k]{(2k)!} \geq \sqrt[k]{k!}$ και $\sqrt[k]{k!} \to +\infty$. Άρα και με τους δύο τύπους η ακτίνα σύγκλισης υπολογίζεται ίση με $+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι η νέα δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε t οπότε η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και επομένως το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Θα υπολογίσουμε τώρα την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς χωρίς αλλαγή μεταβλητής. Η ακολουθία των συντελεστών έχει *διπλό τύπο*: ο συντελεστής του x^n είναι $a_n = 0$ αν το n είναι περιττό και $a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{n!}$ αν το n είναι άρτιο. Επομένως ο πρώτος τύπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης δεν εφαρμόζεται διότι δεν ορίζεται η ακολουθία $\left(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right)$. Για να εφαρμόσουμε τον δεύτερο τύπο παρατηρούμε ότι ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ αν το n είναι άρτιο και $\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ αν το n είναι περιττό. Άρα ισχύει $0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ για κάθε n και, επειδή $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$, συνεπάγεται $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$.
Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε κατ' ευθείαν το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας. Θεωρούμε τα όρια $\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}x^{2k+2}}{\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}}\right| = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \to 0 < 1$ και $\sqrt[k]{|\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}|} = \frac{x^2}{\sqrt[k]{(2k)!}} \to 0 < 1$ για κάθε x. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$.
Μία συγγενική δυναμοσειρά είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δεύτερης δυναμοσειράς είναι $+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Τώρα, έστω c και s οι συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται από την πρώτη και από την δεύτερη, αντιστοίχως, δυναμοσειρά στο $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει $c(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ και $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ για κάθε x. Τότε οι δύο συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει

$$c'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-1} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = -s(x)$$

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!}x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = c(x)$$

για κάθε x. Θεωρούμε την συνάρτηση h με τύπο $h(x) = (c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(c(x) - \cos x)(c'(x) + \sin x) + 2(s(x) - \sin x)(s'(x) - \cos x) \\ &= -2(c(x) - \cos x)(s(x) - \sin x) + 2(s(x) - \sin x)(c(x) - \cos x) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε x. Άρα η h είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$ οπότε $(c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2 = h(x) = h(0) = (c(0) - 1)^2 + (s(0) - 0)^2 = 0$ και επομένως $c(x) = \cos x$ και $s(x) = \sin x$ για κάθε x. Άρα

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = \cos x, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \sin x \qquad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται από τις $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ είναι το συνημίτονο και το ημίτονο, αντιστοίχως, και γι αυτό ονομάζονται **δυναμοσειρά του συνημιτόνου** και **δυναμοσειρά του ημιτόνου**.

Παράδειγμα. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$.
Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και επομένως μπορούμε, ισοδύναμα, να μελετήσουμε την δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k}$. Τώρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t = x^2$, αναγόμαστε στην δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^k$. Έχουμε ότι $|\frac{(-1)^{k+1}/(2k+3)}{(-1)^k/(2k+1)}| = \frac{2k+1}{2k+3} \to 1$ και $\sqrt[k]{|(-1)^k/(2k+1)|} = 1/\sqrt[k]{2k+1} \to 1$ οπότε η ακτίνα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς είναι ίση με 1. Αν $t = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ και συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων. Επίσης, αν $t = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}$ και αποκλίνει διότι συγκρίνεται με την σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$. Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^k$ συγκλίνει για κάθε $t \in (-1, 1]$. Επειδή $t = x^2$, συνεπάγεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k}$ συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 1]$ οπότε και η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 1]$.
Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε το διάστημα σύγκλισης εφαρμόζοντας κατ' ευθείαν το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας. Είναι $\left| \frac{\frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}} \right| = \frac{2k-1}{2k+1} x^2 \to x^2$ και $\sqrt[k]{|\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}|} = \frac{|x|^{2-(1/k)}}{\sqrt[k]{2k-1}} \to x^2$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $x^2 < 1$ και αποκλίνει αν $x^2 > 1$. Αν $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων. Αν $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ οπότε και πάλι συγκλίνει για τον ίδιο λόγο. Επομένως το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1]$.
Παρατηρήστε ότι στην αρχική δυναμοσειρά δεν εφαρμόζεται κανείς από τους δύο τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης. Διότι ο συντελεστής του x^n είναι $a_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}$ αν το n είναι περιττό και $a_n = 0$ αν το n είναι άρτιο. Άρα ο πρώτος τύπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης δεν εφαρμόζεται διότι δεν ορίζεται η ακολουθία $\left(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right)$. Επίσης, βλέπουμε ότι $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ αν το n είναι περιττό και $\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ αν το n είναι άρτιο. Από αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ οπότε ούτε ο δεύτερος τύπος εφαρμόζεται.
Τώρα, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα $[-1, 1]$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

$$\begin{aligned} f'(x) &= \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα η f είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{1+x^2}$ στο $(-1, 1)$ οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x) = \arctan x + c$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Όμως $c = f(0) - \arctan 0 = 0$ οπότε ισχύει $f(x) = \arctan x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Τέλος, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και επειδή και η $y = \arctan x$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, έχουμε

$$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \arctan 1,$$

$$f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \arctan x = \arctan(-1).$$

Άρα ισχύει

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} = \arctan x \qquad \text{για } -1 \le x \le 1.$$

Δηλαδή η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$ στο $[-1, 1]$ είναι η τόξο εφαπτομένης οπότε η δυναμοσειρά ονομάζεται **δυναμοσειρά της τόξο εφαπτομένης**.
Ειδική περίπτωση, για $x = 1$, είναι η ενδιαφέρουσα ισότητα

$$\tfrac{\pi}{4} = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Παράδειγμα. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots$, όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{n}$ ορίζονται με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε α και

$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{n}$ είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{m}{n}$ το οποίο είχε ορισθεί για $n,m\in\mathbb{Z}$ με $0\le n\le m$. Παρατηρήστε ότι αν $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\alpha\ge 0$ τότε $\binom{\alpha}{n}=0$ για κάθε $n\ge\alpha+1$ οπότε η δυναμοσειρά γράφεται

$$1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{\alpha}x^{\alpha}=(1+x)^{\alpha},$$

βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton. Επομένως αν $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\alpha\ge 0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty,+\infty)$.
Αν $\alpha\notin\mathbb{Z}$ ή αν $\alpha<0$ υπολογίζουμε $\left|\binom{\alpha}{n+1}/\binom{\alpha}{n}\right| = |\frac{\alpha-n}{n+1}|\to 1$ οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα: $(-1,1)$, $(-1,1]$, $[-1,1)$, $[-1,1]$.
Αποδεικνύεται, αλλά όχι σ' αυτές τις σημειώσεις, ότι (i) αν $\alpha\le -1$ το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$, (ii) αν $-1<\alpha<0$ το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1]$ και (iii) αν $\alpha\ge 0$ (και $\alpha\notin\mathbb{Z}$) το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1,1]$.
Τώρα, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ στο διάστημα σύγκλισής της. Δηλαδή έστω ότι ισχύει $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ για κάθε $x\in(-1,1)$ και πιθανόν και σε κάποιο από τα ± 1 ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου α. Τότε ισχύει

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Με λίγες πράξεις συνεπάγεται

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Ορίζουμε την συνάρτηση h με τύπο $h(x)=(1+x)^{-\alpha}f(x)$ για $x\in(-1,1)$ και έχουμε ότι ισχύει

$$h'(x)=-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x)+(1+x)^{-\alpha}f'(x)=0$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Άρα η h είναι σταθερή στο $(-1,1)$ και επομένως ισχύει $(1+x)^{-\alpha}f(x)=(1+0)^{-\alpha}f(0)=1$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Άρα ισχύει $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Όπως κάναμε και σε άλλα παραδείγματα προηγουμένως, εκμεταλλευόμενοι την συνέχεια των συναρτήσεων f και $y=(1+x)^{\alpha}$ και στα ± 1, ανάλογα με την τιμή του α, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

(i) για κάθε $x\in(-1,1)$ αν $\alpha\le -1$, (ii) για κάθε $x\in(-1,1]$ αν $-1<\alpha<0$ και (iii) για κάθε $x\in[-1,1]$ αν $\alpha\ge 0$ (και $\alpha\notin\mathbb{Z}$).
Η τελευταία σχέση ονομάζεται **γενικός δυωνυμικός τύπος** του Newton και η $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ ονομάζεται **δυωνυμική σειρά**.
Ξεχωρίζουμε τις ειδικές περιπτώσεις

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^n}{2n-1}\qquad \text{για } -1\le x\le 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n\qquad \text{για } -1<x\le 1.$$

Ασκήσεις.

9.4.1. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{n^3+1}} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (2^n + \frac{3^n}{n}) x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^n.$$

Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

9.4.2. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{4n-3} x^{3n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{\sqrt{n}} x^{n^2}.$$

Μπορείτε να δοκιμάσετε κάποια αλλαγή μεταβλητής ή να εφαρμόσετε απ' ευθείας το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απ' ευθείας τους τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης;

9.4.3. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \Big(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} \Big)^3 x^n.$$

Μπορείτε να πείτε κάτι για τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης;

9.4.4. Θεωρήστε p, q, όχι και τα δύο 0, και μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ για τους συντελεστές της οποίας ισχύει $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$ για κάθε $n \geq 0$. Αν συμβολίσουμε $f(x)$ το άθροισμα της δυναμοσειράς για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της (όποιο κι αν είναι αυτό το διάστημα) αποδείξτε ότι $(1 - px - qx^2) f(x) = a_0 + (a_1 - p a_0) x$. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

9.4.5. Θεωρήστε την

$$1 + \frac{ab}{1\cdot c} x + \frac{a(a+1) b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2) b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \cdots$$

η οποία ονομάζεται **υπεργεωμετρική δυναμοσειρά** και η συνάρτηση η οποία ορίζεται από αυτήν στο διάστημα σύγκλισής της ονομάζεται **υπεργεωμετρική συνάρτηση** και συμβολίζεται $y = F(a, b, c; x)$.
Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της υπεργεωμετρικής σειράς ανάλογα με τις τιμές των a, b, c. Μπορείτε να πείτε κάτι για τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης;

9.4.6. (i) Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - \xi)^n$ και έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$. Για κάθε $m \geq 1$ αποδείξτε ότι

$$s^{(m)}(x) = m! \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n (x - \xi)^{n-m} \qquad \text{για } x \in (\xi - R, \xi + R)$$

και

$$s^{(m)}(\xi) = m! a_m.$$

(ii) Έστω $R_1 > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,1} (x - \xi)^n$ και f_1 η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(\xi - R_1, \xi + R_1)$. Έστω, επίσης, $R_2 > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,2} (x - \xi)^n$ και f_2 η συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(\xi - R_2, \xi + R_2)$. Αν οι f_1, f_2 ταυτίζονται σε ένα διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ με $\delta > 0$ αποδείξτε ότι οι δύο δυναμοσειρές ταυτίζονται, δηλαδή ότι ισχύει $a_{n,1} = a_{n,2}$ για κάθε n.

9.4.7. Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ για $x \in (-R, R)$.
(i) Αποδείξτε ότι η f είναι άρτια στο $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε περιττό n.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή στο $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε άρτιο n.

9.4.8. Χρησιμοποιώντας τον γενικό δυωνυμικό τύπο του Newton με $a = -\frac{1}{2}$ και x^2 στην θέση του x, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1} \qquad \text{για } -1 \leq x \leq 1.$$

9.4.9. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

9.4.10. (i) Θεωρήστε την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Βρείτε το διάστημα σύγκλισής της και έναν συνοπτικό τύπο για την συνάρτηση η οποία ορίζεται από αυτήν, αφού πρώτα βρείτε έναν συνοπτικό τύπο για την δεύτερη παράγωγό της στο διάστημα σύγκλισης.
(ii) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση f η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' - xy = 1$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε την συνάρτηση f.
(iii) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση f η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''+y'+y = e^x$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε την συνάρτηση f.

9.5 Σειρές Taylor.

Τώρα θα απαντήσουμε στο *δεύτερο ερώτημα* το οποίο διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα: αν, δεδομένης μίας συνάρτησης f και δεδομένου ενός ξ στο πεδίο ορισμού της, μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στο ξ και (αν υπάρχει) να την βρούμε.

Πρόταση 9.18. *Έστω διάστημα I, το οποίο έχει μέσο ξ και δεν αποτελείται μόνο από το ξ, και $f : I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Τότε για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_n(x;\xi;f),$$

όπου $R_n(x;\xi;f)$ είναι το σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange ή ολοκληρωτικού τύπου.
Αν $R_n(x;\xi;f) \to 0$ για κάθε $x \in I$ τότε η σειρά Taylor της f στο ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$. Δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad \text{για } x \in I.$$

Δηλαδή οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στο ξ είναι οι $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, $n \geq 0$.

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι απλή συνέπεια των δύο θεωρημάτων του Taylor. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $R_n(x;\xi;f) \to 0$ για κάθε $x \in I$ τότε συνεπάγεται

$$f(\xi) + \tfrac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \to f(x)$$

ή, ισοδύναμα, $f(\xi) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = f(x)$ για κάθε $x \in I$. □

Παράδειγμα. Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού N και έστω οποιοδήποτε ξ. Για κάθε x και κάθε $n \geq N$ ισχύει $p^{(n+1)}(x) = 0$ οπότε το σφάλμα τύπου Lagrange είναι

$$R_n(x;\xi;p) = \tfrac{p^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} = 0.$$

Άρα $R_n(x;\xi;p) \to 0$ για κάθε x και συμπεραίνουμε ότι η σειρά Taylor της $y = p(x)$ στο ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{p^{(N)}(\xi)}{N!}(x-\xi)^N$. Δηλαδή

$$p(x) = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{p^{(N)}(\xi)}{N!}(x-\xi)^N.$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου* σε δυνάμεις του $x-\xi$. Φυσικά στην περίπτωση $\xi=0$ έχουμε $p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{p^{(N)}(0)}{N!}x^N$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $y=e^x$, η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και μάλιστα ισχύει $\frac{d^n e^x}{dx^n}=e^x$ για κάθε n και κάθε x. Ειδικώτερα, ισχύει $\frac{d^n e^x}{dx^n}\big|_{x=0}=1$ για κάθε n οπότε η πιθανή σειρά Taylor της $y=e^x$ στο 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
Παίρνουμε $\xi=0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange

$$R_n(x;0;e^x)=\tfrac{e^\eta}{(n+1)!}x^{n+1},$$

όπου το η είναι αριθμός ανάμεσα στα 0 και x. Αν $x\geq 0$ τότε $|R_n(x;0;e^x)|\leq\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ και αν $x\leq 0$ τότε $|R_n(x;0;e^x)|\leq\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$. Έχουμε αποδείξει το όριο $\frac{a^n}{n!}\to 0$ για κάθε a. Επομένως $R_n(x;0;e^x)\to 0$ για κάθε x. Άρα η σειρά Taylor της $y=e^x$ στο 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\qquad\text{για }-\infty<x<+\infty.$$

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε τον ίδιο τύπο με διαφορετικό τρόπο.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση $y=\cos x$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και $\frac{d^n\cos x}{dx^n}=\pm\cos x$ ή $\pm\sin x$. Ειδικώτερα, είναι $\frac{d^n\cos x}{dx^n}\big|_{x=0}=(-1)^{n/2}$ αν το n είναι άρτιο και $\frac{d^n\cos x}{dx^n}\big|_{x=0}=0$ αν το n είναι περιττό. Επομένως η πιθανή σειρά Taylor της $y=\cos x$ στο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.
Παίρνουμε $\xi=0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange

$$R_n(x;0;\cos x)=\tfrac{\pm\cos\eta}{(n+1)!}x^{n+1}\text{ ή }\tfrac{\pm\sin\eta}{(n+1)!}x^{n+1},$$

όπου η είναι αριθμός ανάμεσα στα 0 και x. Τότε $|R_n(x;0;\cos x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ οπότε συνεπάγεται $R_n(x;0;\cos x)\to 0$ για κάθε x. Άρα η σειρά Taylor της $y=\cos x$ στο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\qquad\text{για }-\infty<x<+\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την σειρά Taylor της $y=\sin x$ στο 0:

$$\sin x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\qquad\text{για }-\infty<x<+\infty.$$

Οι ίδιες ισότητες αποδείχθηκαν με διαφορετικό τρόπο και στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $y=\log(1+x)$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με παραγώγους $\frac{d^n\log(1+x)}{dx^n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ για κάθε n και κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Ειδικώτερα, $\frac{d^n\log(1+x)}{dx^n}\big|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$ και επομένως η πιθανή σειρά Taylor της $y=\log(1+x)$ στο 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.
Το σφάλμα τύπου Lagrange της $y=\log(1+x)$ στο $\xi=0$ είναι

$$R_n(x;0;\log(1+x))=\tfrac{(-1)^n n!}{(1+\eta)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}=\tfrac{(-1)^n}{(1+\eta)^{n+1}(n+1)}x^{n+1},$$

όπου η είναι αριθμός ανάμεσα στα 0 και x. Αν $0 < x \leq 1$ τότε $|R_n(x;0;\log(1+x))| \leq \frac{1}{n+1}$ οπότε $R_n(x;0;\log(1+x)) \to 0$.
Το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου είναι

$$R_n(x;0;\log(1+x)) = \tfrac{1}{n!}\int_0^x \tfrac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^n\,dt = (-1)^n\int_0^x \tfrac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

Αν $-1 < x \leq 0$ τότε $|R_n(x;0;\log(1+x))| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Τώρα, ισχύει $(\frac{t-x}{1+t})^n \leq |x|^n$ για κάθε $t \in [x,0]$ οπότε

$$|R_n(x;0;\log(1+x))| \leq |x|^n \int_x^0 \tfrac{1}{1+t}\,dt = |x|^n \log\tfrac{1}{1+x}$$

και επομένως $R_n(x;0;\log(1+x)) \to 0$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $R_n(x;0;\log(1+x)) \to 0$ για κάθε $x \in (-1,1]$. Δηλαδή

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \text{για } -1 < x \leq 1.$$

Και αυτός ο τύπος είχε αποδειχθεί στην προηγούμενη ενότητα.
Θα δούμε τώρα έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού της σειράς Taylor της $y = \log(1+x)$ στο διάστημα $(-1,1]$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 9.18. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί σε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή της πρότασης 9.18.
Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-(-t)^n}{1+t} = 1 + (-t) + \cdots + (-t)^{n-1}$, ο οποίος ισχύει για κάθε $t \neq -1$, και τον γράφουμε $\frac{1}{1+t} = 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t}$. Επομένως

$$\int_0^x \tfrac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}\,dt + (-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt$$

για κάθε $x > -1$ οπότε

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt$$

για κάθε $x > -1$.
Αν $0 \leq x \leq 1$ τότε

$$\big|(-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt\big| = \int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \tfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \tfrac{1}{n+1}$$

οπότε συνεπάγεται $(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$.
Αν $-1 < x \leq 0$ τότε

$$\big|(-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt\big| = \int_x^0 \tfrac{|t|^n}{1+t}\,dt \leq \tfrac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n\,dt = \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leq \tfrac{1}{(n+1)(1+x)}$$

και επομένως $(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$.
Άρα για κάθε $x \in (-1,1]$ ισχύει $(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$ οπότε $x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \to \log(1+x)$. Άρα $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ για κάθε $x \in (-1,1]$.

Παράδειγμα. Η $y = \arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος και δεν είναι βολική η εφαρμογή της πρότασης 9.18. Γι αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό το οποίο χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του προηγούμενου παραδείγματος. Γράφουμε $\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2}$ και επομένως $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + (-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}$ για κάθε t. Άρα

$$\int_0^x \tfrac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}\,dt + (-1)^n\int_0^x \tfrac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Αυτό το γράφουμε

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \tfrac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Αν $|x| \le 1$ τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \tfrac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{|x|} \tfrac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}\,dt = \tfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \le \tfrac{1}{2n+1}$$

οπότε $(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \to 0$.
Άρα $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \to \arctan x$ για κάθε $x \in [-1,1]$ οπότε

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{για } -1 \le x \le 1.$$

Παράδειγμα. Η $y = (1+x)^\alpha$ έχει παραγώγους $\frac{d^n\,(1+x)^\alpha}{dx^n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ και, ειδικώτερα, $\frac{d^n\,(1+x)^\alpha}{dx^n}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. Επομένως η πιθανή σειρά Taylor της $y = (1+x)^\alpha$ στο 0 είναι η $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$.
Αν το α είναι μη-αρνητικός ακέραιος τότε αφ' ενός η $y = (1+x)^\alpha$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού α με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ αφ' ετέρου η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται (όπως έχουμε ξαναπεί) πεπερασμένο άθροισμα $1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα

$$(1+x)^\alpha = 1 + \tbinom{\alpha}{1}x + \cdots + \tbinom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \tbinom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$$

δεν είναι παρά ο δυωνυμικός τύπος του Newton και επομένως η παραπάνω δυναμοσειρά είναι, πράγματι, η σειρά Taylor της $y = (1+x)^\alpha$ στο 0 με διάστημα σύγκλισης το $(-\infty,+\infty)$.
Αν το α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος αποδεικνύεται ότι και πάλι η σειρά Taylor της $y = (1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \tbinom{\alpha}{n}x^n.$$

Το διάστημα στο οποίο η δυναμοσειρά αυτή ισούται με την $y = (1+x)^\alpha$ είναι (i) το $(-1,1)$ αν $\alpha \le -1$, (ii) το $(-1,1]$ αν $-1 < \alpha < 0$ και (iii) το $[-1,1]$ αν $\alpha \ge 0$ (και $\alpha \notin \mathbb{Z}$).

Ασκήσεις.

9.5.1. Αναπτύξτε με δύο τρόπους το πολυώνυμο $1 + 2x - x^2 - 4x^3 + x^4$ σε δυνάμεις του $x - 1$.

9.5.2. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^n$$

καθώς και τα διαστήματα σύγκλισής τους. Βρείτε πρώτα συνοπτικούς τύπους για τα μερικά αθροίσματά τους, παραγωγίζοντας την $1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

9.5.3. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-2^n)x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2n-1}x^{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2n}x^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{n-1}{n!}x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(n+1)^2}{n!}x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!}x^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{\log^n a}{n!}x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n.$$

9.5.4. Βρείτε τις σειρές Taylor των συναρτήσεων $y = \sin x$ και $y = \cos x$ στο ξ. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σειρές Taylor, αποδείξτε τους τύπους:
(i) $\sin x = \sin \xi \cos(x - \xi) + \cos \xi \sin(x - \xi)$
(ii) $\cos x = \cos \xi \cos(x - \xi) - \sin \xi \sin(x - \xi)$
οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τους τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.

9.5.5. Βρείτε τις σειρές Taylor στο 0 των $y = \cosh x$, $y = \sinh x$.

9.5.6. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στο 0 των

$$y = \tan x, \quad y = \tfrac{1}{\cos x}, \quad y = \arcsin x, \quad y = \arccos x.$$

9.5.7. Βρείτε τις σειρές Taylor στο 0 των

$$\sin(x^3), \quad \sin^3 x, \quad \sin x \sin(3x), \quad \sin^6 x + \cos^6 x, \quad \log \tfrac{1+x}{1-x}, \quad \log(1 + x + x^2),$$

$$\tfrac{1}{1-5x+6x^2}, \quad \tfrac{e^x}{1-x}, \quad x \arctan x - \tfrac{1}{2} \log(1 + x^2), \quad x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

9.5.8. Υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$.

9.5.9. Γνωρίζουμε από την άσκηση 6.10.18 ότι η $y = h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και ότι ισχύει $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$ η σειρά Taylor της h στο 0;

9.5.10. Έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ η σειρά Taylor της f στο 0. Αποδείξτε ότι η f είναι άρτια ή περιττή σε κάποιο διάστημα με μέσο 0 αν και μόνο αν η σειρά Taylor περιέχει μόνο δυνάμεις του x με άρτιους ή περιττούς, αντιστοίχως, εκθέτες.

Κεφάλαιο 10

Γενικευμένα ολοκληρώματα Riemann.

10.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Είναι φανερό ότι τα “ολοκληρώματα”

$$\textstyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} x\,dx$$

ξεφεύγουν από το πλαίσιο της θεωρίας των ολοκληρωμάτων την οποία έχουμε αναπτύξει. Στο πρώτο “ολοκλήρωμα” η συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$ δεν ορίζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και μάλιστα δεν είναι καν φραγμένη στο διάστημα αυτό αφού $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Στο δεύτερο “ολοκλήρωμα” το διάστημα $[1, +\infty)$ δεν είναι κλειστό και φραγμένο. Τέτοιου τύπου “ολοκληρώματα”, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ονομάζονται *γενικευμένα ολοκληρώματα* και θα τα ορίσουμε αμέσως τώρα.

Ορισμός. *Έστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a, c]$ του $[a, b)$. Τότε το σύμβολο*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b)$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ τότε αυτό το όριο το ονομάζουμε* **τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ και γράφουμε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Αν το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ είναι αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει**. *Αν το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$* **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως. Αν το όριο $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$* **αποκλίνει** *και ότι δεν έχει τιμή.*
Όλα όσα είπαμε ισχύουν με την ανάλογη διατύπωση και ορολογία και στις υπόλοιπες περιπτώσεις διαστημάτων: $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ και $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$. Ας γράψουμε μόνο τις τιμές (αν υπάρχουν) των αντίστοιχων γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c, d]$ του (a, b) τότε ορίζουμε την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ ως εξής. Παίρνουμε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο d

(δηλαδή $a < d < b$), υπολογίζουμε τις τιμές (αν υπάρχουν) των δύο γενικευμένων ολοκληρωμάτων $\int_a^d f(x)\,dx$ και $\int_d^b f(x)\,dx$ και (αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή) τις προσθέτουμε. Δηλαδή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

Ομοίως ορίζονται γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ή $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ στις αντίστοιχες περιπτώσεις $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ και $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Τονίζουμε ότι αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε το γεν. ολοκλήρωμα έχει τιμή και αυτή είναι αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως. Αν το γεν.ολοκλήρωμα αποκλίνει αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε το γεν. ολοκλήρωμα *δεν έχει τιμή*.

Τονίζουμε, επίσης, ότι το σύμβολο $\int_a^b f(x)\,dx$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει το γεν. ολοκλήρωμα, ανεξάρτητα από το αν αυτό συγκλίνει ή αποκλίνει. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση κατά την οποία το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, συμβολίζει την τιμή του γεν. ολοκληρώματος.

Για να δούμε ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ στην περίπτωση συνάρτησης $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, θεωρούμε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b)$. Τότε για κάθε $c \in (a, b)$ το $\int_a^c f(x)\,dx$ είναι ίσο με το εμβαδό E_c της επιφάνειας A_c η οποία περικλείεται από το γράφημα της f, από το διάστημα $[a, c]$ του x-άξονα, από το ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και από το ευθ. τμήμα με άκρα $(c, 0)$ και $(c, f(c))$. Όταν το c αυξάνεται και πλησιάζει το b, το τελευταίο ευθ. τμήμα μετακινείται προς τα δεξιά πλησιάζοντας την κατακόρυφη ευθεία $x = b$ οπότε η επιφάνεια A_c "τείνει να ταυτιστεί" με την επιφάνεια A η οποία περικλείεται από το γράφημα της f, από το διάστημα $[a, b)$ του x-άξονα, από το ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και από την κατακόρυφη ευθεία $x = b$. Επειδή η επιφάνεια A_c τείνει να ταυτιστεί με την επιφάνεια A είναι εύλογο να δεχτούμε ότι το εμβαδό E_c της A_c τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδό E της A. Άρα το $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ είναι ίσο με το όριο του εμβαδού E_c όταν το c πλησιάζει το b και άρα είναι ίσο με το εμβαδό E. Παρατηρήστε ότι, ειδικά στην περίπτωση κατά την οποία η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b)$, η επιφάνεια A δεν είναι φραγμένη.

Τα ίδια μπορούμε να πούμε σε κάθε περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος. Για παράδειγμα, αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ είναι ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας A η οποία περικλείεται από το γράφημα της f, από την ημιευθεία $[a, +\infty)$ του x-άξονα και από το ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$. Και σ' αυτήν την περίπτωση η επιφάνεια A δεν είναι φραγμένη.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιηθεί ότι *μία μη-φραγμένη επιφάνεια μπορεί να έχει πεπερασμένο εμβαδό*. Παρακάτω θα δούμε αρκετά τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}(1 - \frac{1}{c}) = 1$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 1.

Παράδειγμα. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.

Παράδειγμα. $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c\to1-} \int_0^c \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c\to1-} \log(1 - c) = -\infty$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$ αποκλίνει στο $-\infty$ και έχει τιμή $-\infty$.

Παράδειγμα. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{c\to1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{c\to1-}(2 - 2\sqrt{1-c}) = 2$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 2.

Παράδειγμα. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to0+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to0+}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{c}) = 2\sqrt{2}$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή $2\sqrt{2}$.

Παράδειγμα. $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}(\log 2 - \log c) = +\infty$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.

Παράδειγμα. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}(1-\frac{1}{1-c}) = 1$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1.

Παράδειγμα. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\arctan c = \frac{\pi}{2}$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι $\frac{\pi}{2}$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$ και, προσθέτοντας τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$.

Παράδειγμα. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1-}\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1-}\arcsin c = \frac{\pi}{2}$. Δηλαδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή $\frac{\pi}{2}$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ και, προσθέτοντας τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$.

Παράδειγμα. Το όριο $\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \cos x\,dx = \lim_{c\to+\infty}\sin c$ δεν υπάρχει. Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Παράδειγμα. Το όριο $\lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+}(\sin\frac{1}{c} - \sin 1)$ δεν υπάρχει. Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Παράδειγμα. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\log(c^2+1) = +\infty$ και $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}\log(c^2+1) = -\infty$.
Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.

Από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην περίπτωση του γεν. ολοκληρώματος

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,c]$ με $a\leq c$ και

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$$

αν το όριο υπάρχει. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

Ο λόγος για τον οποίο επιλέγουμε να διατυπώσουμε όλα τα αποτελέσματα ειδικά στην περίπτωση του γεν. ολοκληρώματος $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ είναι η ομοιότητα αυτής της περίπτωσης με τις σειρές αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Προσέξτε:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} x_n.$$

Επίσης είναι εμφανής η ομοιότητα στην ορολογία για την σύγκλιση ή την απόκλιση μίας σειράς και ενός γεν.ολοκληρώματος καθώς και για το άθροισμα μίας σειράς και την τιμή ενός γεν. ολοκληρώματος.

Πρόταση 10.1. *Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,c]$ και έστω $a<b$. Τότε είτε και τα δύο γεν. ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ έχουν τιμή είτε και τα δύο δεν έχουν τιμή. Αν και τα δύο γεν. ολοκληρώματα έχουν τιμή τότε*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Άρα είτε και τα δύο γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν είτε και τα δύο είναι ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$ είτε και τα δύο αποκλίνουν.

Απόδειξη. Για κάθε c με $a < b \leq c$ ισχύει $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$. Άρα το $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\lim_{c\to+\infty} \int_b^c f(x)\,dx$ υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \lim_{c\to+\infty} \int_b^c f(x)\,dx.$$

Από αυτήν την ισότητα προκύπτουν όλα τα συμπεράσματα. □

Η πρόταση 10.2 αντιστοιχεί στην πρόταση 9.2 για σειρές.

Πρόταση 10.2. *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a, c]$. Αν οι f, g ταυτίζονται κοντά στο $+\infty$ τότε είτε και τα δύο γεν. ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή είτε και τα δύο δεν έχουν τιμή. Πιο συγκεκριμένα, είτε και τα δύο γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν είτε και τα δύο είναι ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$ είτε και τα δύο αποκλίνουν.*

Απόδειξη. Λόγω της υπόθεσης υπάρχει $b \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [b, +\infty)$. Τότε προφανώς τα γεν. ολοκληρώματα $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_b^{+\infty} g(x)\,dx$ ταυτίζονται. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 10.1 λόγω των $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_b^{+\infty} g(x)\,dx$. □

Η πρόταση 10.3 αντιστοιχεί στην πρόταση 9.3 για σειρές.

Πρόταση 10.3. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει τότε $\lim_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} f(x)\,dx = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$. Επειδή το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, το $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει επίσης και $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$. Από το ότι $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συνεπάγεται ότι $\lim_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. □

Οι επόμενες τρεις προτάσεις γενικεύουν απλώς τις αντίστοιχες προτάσεις 7.1, 7.2 και 7.9 για τα "κανονικά" ολοκληρώματα και χρησιμεύουν για τον απλό αλγεβρικό χειρισμό και για την απλή σύγκριση γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Οι προτάσεις αυτές αντιστοιχούν στις προτάσεις 9.4, 9.5 και 9.6 για σειρές.

Πρόταση 10.4. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$ και έστω αριθμός λ. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και αν το γινόμενο $\lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x))\,dx$ έχει τιμή και*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $c \in [a, +\infty)$ ισχύει $\int_a^c (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^c f(x)\,dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $c \to +\infty$. □

Πρόταση 10.5. *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a, c]$. Αν τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμές και αν το άθροισμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή τότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx$ έχει τιμή και*

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $c \in [a, +\infty)$ ισχύει $\int_a^c (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $c \to +\infty$. □

Πρόταση 10.6. *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a, c]$. Αν τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμές και αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ τότε*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $c \in [a, +\infty)$ ισχύει $\int_a^c f(x)\,dx \le \int_a^c g(x)\,dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $c \to +\infty$. □

Ασκήσεις.

10.1.1. Υπολογίστε τις τιμές, αν υπάρχουν, των γεν. ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^{+\infty} \tfrac{1}{(x^2+1)^2}\,dx,\quad \int_1^{+\infty} \tfrac{1}{x^2(x^2+1)}dx,\quad \int_0^{+\infty} \tfrac{x}{x^3+x^2+x+1}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx,\quad \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{x}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx,$$

$$\int_0^1 \log x\,dx,\quad \int_e^{+\infty} \tfrac{1}{x\log x}dx,\quad \int_e^{+\infty} \tfrac{1}{x\log^2 x}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \tfrac{\log x}{(x+1)^2}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \tfrac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$$

10.1.2. Αν $a > 0$ βρείτε τις τιμές των γεν. ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx,\quad \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx.$$

(Υπόδειξη: Δείτε σχετικό παράδειγμα στην ενότητα 8.3.)

10.1.3. Σχεδιάστε το γράφημα του αόριστου ολοκληρώματος $\int_0^x (-1)^{[t]}\,dt$ ως συνάρτηση του x και μελετήστε ως προς την σύγκλιση ή απόκλιση το $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x]}\,dx$.

10.1.4. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx = \frac{\theta}{\sin\theta}$ για κάθε $\theta \in (0, \pi)$.

10.1.5. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \frac{\log x}{x^p}\,dx = -\frac{1}{(1-p)^2}$ αν $p < 1$ και $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\,dx = \frac{1}{(p-1)^2}$ αν $p > 1$.

10.1.6. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

10.1.7. Αν $0 < a \le b$ αποδείξτε ότι:

$$\int_0^{+\infty} \tfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \log\tfrac{b}{a},\qquad \int_0^{+\infty} \tfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\tfrac{b}{a}.$$

10.2 Γεν. ολοκληρώματα μη-αρνητικών συναρτήσεων.

Το θεώρημα 10.1 αντιστοιχεί στο θεώρημα 9.1 για σειρές.

Θεώρημα 10.1. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και αυτή είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le +\infty$.*
Ειδικώτερα, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν η $\int_a^c f(x)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του c στο $[a, +\infty)$, άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$ αν η ίδια συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Αν $a \le c_1 < c_2$ συνεπάγεται

$$\int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \ge \int_a^{c_1} f(x)\,dx.$$

Άρα η $\int_a^c f(x)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του c, αύξουσα στο $[a, +\infty)$. Άρα το $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα ισχύει $\int_a^c f(x)\,dx \ge 0$ για κάθε $c \in [a, +\infty)$ οπότε $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx \ge 0$.
Τέλος, αν η συνάρτηση $\int_a^c f(x)\,dx$ του c είναι άνω φραγμένη τότε το $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ είναι αριθμός ενώ αν δεν είναι άνω φραγμένη τότε το $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ είναι $+\infty$. □

Βλέπουμε ότι *το γεν. ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης έχει πάντοτε τιμή* η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι η σύγκλιση του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ισοδυναμεί* με το ότι $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ ενώ η απόκλισή του *ισοδυναμεί* με το ότι $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

Η πρόταση 10.7 αντιστοιχεί στην πρόταση 9.7 για σειρές.

Πρόταση 10.7. *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a, c]$.*
(i) Έστω ότι ισχύει $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Αν, επιπλέον, το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
(ii) Έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. (i) Βάσει του θεωρήματος 10.1, τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή οπότε από την πρόταση 10.6 συνεπάγεται $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει τότε $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$ οπότε από την προηγούμενη ανισότητα συνεπάγεται $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ και επομένως το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
(ii) Υπάρχουν M και $b \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ και άρα $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$ για κάθε $x \in [b, +\infty)$. Επειδή το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι το $\int_b^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει και άρα και το $\int_b^{+\infty} (Mg(x))\,dx$ συγκλίνει οπότε, σύμφωνα με το (i), και το $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και επομένως το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως *συναρτήσεις σύγκρισης* στο πλαίσιο είτε της πρότασης 10.7 είτε, αργότερα, της πρότασης 10.8.

Παράδειγμα. Έστω p οποιοσδήποτε αριθμός. Για κάθε $c > 1$ ισχύει $\int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{c^{1-p}-1}{1-p}$ αν $p \neq 1$ και $\int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx = \log c$ αν $p = 1$. Επομένως ισχύει $\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$ αν $p \leq 1$ και $\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$ αν $p > 1$. Δηλαδή

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{αν } p > 1 \\ +\infty & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $p \leq 1$.

Παράδειγμα. Έστω p οποιοσδήποτε αριθμός. Για κάθε c με $0 < c < 1$ ισχύει $\int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1-c^{1-p}}{1-p}$ αν $p \neq 1$ και $\int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \log \frac{1}{c}$ αν $p = 1$. Επομένως ισχύει $\lim_{c\to0+} \int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$ αν $p \geq 1$ και $\lim_{c\to0+} \int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$ αν $p < 1$. Δηλαδή

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} 1/(1-p) & \text{αν } p < 1 \\ +\infty & \text{αν } p \geq 1 \end{cases}$$

Το $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει αν $p < 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $p \geq 1$.

Παράδειγμα. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα παραδείγματα, βλέπουμε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$ για κάθε p.

Παράδειγμα. Για κάθε t και κάθε $c > 0$ ισχύει $\int_0^c e^{-tx}\,dx = \frac{1-e^{-tc}}{t}$ αν $t \neq 0$ και $\int_0^c e^{-tx}\,dx = c$ αν $t = 0$. Άρα $\lim_{c\to+\infty} \int_0^c e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$ αν $t > 0$ και $\lim_{c\to+\infty} \int_0^c e^{-tx}\,dx = +\infty$ αν $t \leq 0$. Δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \begin{cases} 1/t & \text{αν } t > 0 \\ +\infty & \text{αν } t \leq 0 \end{cases}$$

Το $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ συγκλίνει αν $t > 0$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $t \leq 0$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το $\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}\,dx$.
Οι "μεγάλοι" όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}$ είναι οι e^{2x} και e^{3x}, αντιστοίχως. Οπότε γράφουμε $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2} = \frac{e^{2x}}{e^{3x}}\,\frac{1+3e^{-x}+e^{-2x}}{1+x^2e^{-3x}}$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και βλέπουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2})/(\frac{e^{2x}}{e^{3x}}) = 1$. Τώρα συγκρίνουμε το αρχικό γεν. ολοκλήρωμα με το $\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{3x}}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$. Το δεύτερο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει οπότε συγκλίνει και το πρώτο.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{2x^4+1}\,dx$.
Οι "μεγάλοι" όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{x^3+3}{2x^4+1}$ είναι οι x^3 και $2x^4$, αντιστοίχως. Γράφουμε $\frac{x^3+3}{2x^4+1} = \frac{x^3}{x^4}\,\frac{1+3x^{-3}}{2+x^{-4}}$ και $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^3+3}{2x^4+1})/(\frac{x^3}{x^4}) = \frac{1}{2}$. Επειδή το $\frac{1}{2}$ είναι *θετικός* αριθμός και $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, προκύπτει ότι $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{2x^4+1} = +\infty$.

Παράδειγμα. Το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνει.
Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = 0$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ συγκλίνει και επομένως το $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα. Έστω το $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.
Έχουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(\sin\frac{1}{x})/(\frac{1}{x}) = 1$. Το 1 είναι *θετικός* αριθμός και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ οπότε το ίδιο ισχύει για το $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές αριθμών μπορεί να αναδιατυπωθεί ως αποτέλεσμα το οποίο συνδυάζει σειρές και γενικευμένα ολοκληρώματα. Επομένως να μία ακόμη ομοιότητα ανάμεσα στα γεν. ολοκληρώματα και στις σειρές.

Ολοκληρωτικό κριτήριο. *Έστω ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι υπάρχει φθίνουσα $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n. Τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή η οποία είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.
Επιπλέον, ισχύει

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(t)\,dt$$

για κάθε n καθώς και

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ασκήσεις.

10.2.1. Ποιά από τα παρακάτω γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν;

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{xe^x+x^5+3}{2x+e^{2x}}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2+x^3\log x}{2+x^4\log^2 x}\,dx.$$

10.2.2. Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty} \sin^2\frac{1}{x}\,dx \leq 1$ και $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \leq 2$.

10.2.3. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p, q < 1$.

10.2.4. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p(x^q+1)}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p < 1$ και $p + q > 1$.

10.2.5. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ συγκλίνουν.

10.2.6. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p\log^q x}\,dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν είτε $p > 1$ είτε $p = 1$ και $q > 1$.

10.2.7. Εδώ εξετάζουμε μία διαφορά ανάμεσα σε γεν. ολοκληρώματα και σε σειρές.
(i) Βρείτε συνάρτηση $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ ώστε να συγκλίνει το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ και να μην ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
(ii) Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και αν το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

10.2.8. (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$. Αποδείξτε ότι $\Gamma(1) = 1$. Αν το $\Gamma(n)$ συγκλίνει αποδείξτε ότι και το $\Gamma(n+1)$ συγκλίνει και ότι $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Για κάθε $t > 0$ συμβολίζουμε:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx.$$

Το $\Gamma(t)$ είναι γενίκευση του $\Gamma(n)$ του (i). Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx$ συγκλίνει οπότε το $\Gamma(t)$ είναι αριθμός για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ για κάθε $t > 0$.
Η συνάρτηση $\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι εξαιρετικά σημαντική και ονομάζεται **συνάρτηση γάμμα (του Euler)**.

10.3 Κριτήρια σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων.

Α. Απόλυτη σύγκλιση.

Η έννοια της απόλυτης σύγκλισης γεν. ολοκληρώματος αντιστοιχεί στην έννοια της απόλυτης σύγκλισης σειράς.

Ορισμός. *Έστω $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,c]$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή αν $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$, τότε λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$* **συγκλίνει απολύτως**.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν κάποιο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει. Είναι το αντίστοιχο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης για σειρές.

Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. *Έστω $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,c]$. Αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει, και*

$$\Big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Απόδειξη. Ισχύει $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$ οπότε, επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty}(2|f(x)|)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και το $\int_a^{+\infty}(f(x)+|f(x)|)\,dx$ συγκλίνει. Επομένως συγκλίνει και η διαφορά του τελευταίου γεν. ολοκληρώματος με το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, δηλαδή το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.
Επειδή ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$, έχουμε ότι $-\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ και άρα $\big|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. $\square$

Η πρόταση 10.8 αντιστοιχεί στην πρόταση 9.13 για σειρές.

Πρόταση 10.8. *Έστω $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a,c]$.*
(i) Αν ισχύει $|f(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$ και αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως οπότε συγκλίνει. Επίσης,

$$\big|\textstyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\big| \leq \textstyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

(ii) Έστω ότι ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει.

Απόδειξη. (i) Επειδή το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει οπότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

(ii) Άμεση συνέπεια της πρότασης 10.7 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Παράδειγμα. Είδαμε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1. Επειδή ισχύει $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \geq 1$, το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και μάλιστα $\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Παράδειγμα. Θα δούμε ότι $\int_\pi^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$, δηλαδή ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ δεν συγκλίνει απολύτως.
Είναι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Επειδή $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$, συνεπάγεται $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \to +\infty$ οπότε $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.
Σε λίγο θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Β. Υπό συνθήκη σύγκλιση.

Το κριτήριο το οποίο ακολουθεί αντιστοιχεί στο κριτήριο του Dirichlet για σειρές.

Κριτήριο του Dirichlet. *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $[a, +\infty)$ και η g να έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, +\infty)$ και έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Αν η g είναι φθίνουσα στο $[a, +\infty)$, αν $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και αν η F είναι φραγμένη στο $[a, +\infty)$ τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|F(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Επίσης, επειδή η g είναι φθίνουσα και έχει όριο 0 στο $+\infty$, ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Γράφουμε

$$\int_a^c f(x)g(x)\,dx = \int_a^c F'(x)g(x)\,dx = F(c)g(c) - F(a)g(a) - \int_a^c F(x)g'(x)\,dx.$$

Εκτός από το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ θεωρούμε και το $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$. Ορίζουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις $G(c) = \int_a^c f(x)g(x)\,dx$ και $H(c) = \int_a^c F(x)g'(x)\,dx$ οπότε, όπως είδαμε, ισχύει $G(c) = F(c)g(c) - F(a)g(a) - H(c)$ για κάθε $c \in [a, +\infty)$. Τώρα, για κάθε c ισχύει

$$\begin{aligned}\int_a^c |F(x)g'(x)|\,dx \leq M \int_a^c |g'(x)|\,dx = -M \int_a^c g'(x)\,dx = -M(g(c) - g(a))\\ = M(g(a) - g(c)) \leq Mg(a).\end{aligned}$$

Άρα η $\int_a^c |F(x)g'(x)|\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του c, φραγμένη στο $[a, +\infty$ οπότε από το θεώρημα 10.1 συνεπάγεται ότι το $\int_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|\,dx$ συγκλίνει. Δηλαδή το $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει. Συνεπάγεται ότι το $\lim_{c\to+\infty} H(c)$ είναι αριθμός. Επειδή η F είναι φραγμένη στο $[a, +\infty)$ και $\lim_{c\to+\infty} g(c) = 0$, συνεπάγεται $\lim_{c\to+\infty} F(c)g(c) = 0$. Από την $G(c) = F(c)g(c) - F(a)g(a) - H(c)$ συνεπάγεται ότι και το $\lim_{c\to+\infty} G(c)$ είναι αριθμός, δηλαδή ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα. Θα δούμε ότι το $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή, βάσει προηγούμενου παραδείγματος και βάσει του ορισμού ο οποίος ακολουθεί, ότι *συγκλίνει υπό συνθήκη*.
Η συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[\pi, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι συνεχής στο $[\pi, +\infty)$ και ισχύει $|\int_{\pi}^{x} \sin t\,dt| = |\cos\pi - \cos x| \le 2$ για κάθε $x \ge \pi$. Άρα το $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Η έννοια της σύγκλισης υπό συνθήκη για γεν. ολοκληρώματα αντιστοιχεί στην έννοια της σύγκλισης υπό συνθήκη για σειρές.

Ορισμός. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$. Λέμε ότι το $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$* **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Ασκήσεις.

10.3.1. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ αν $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι το $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

10.3.2. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν απολύτως.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx.$$

10.3.3. Αποδείξτε ότι αν $p > 1$ το $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ αν $0 < p \le 1$ το ίδιο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

10.3.4. Αποδείξτε ότι τα

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x+x^2}dx, \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x}\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{x\cos(x^2)}{1+\log x}\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{x(\sqrt{x}+1)\sin(x^2)}{x+\sin x}\,dx,$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x+1)(x+\sin x)}\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \cos x \sin\frac{1}{x}\,dx$$

συγκλίνουν υπό συνθήκη.

10.3.5. Δείτε την άσκηση 8.3.22.
(i) Έστω ότι η $\phi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει αύξουσα παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι το $\int_{a}^{+\infty} \sin(\phi(x))\,dx$ συγκλίνει.
(ii) Αποδείξτε ότι τα $\int_{1}^{+\infty} \sin(x^a)\,dx$, $\int_{1}^{+\infty} \cos(x^a)\,dx$ συγκλίνουν αν $|a| > 1$ και αποκλίνουν αν $|a| \le 1$. Ειδικώτερα, τα $\int_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$, $\int_{0}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ συγκλίνουν.

10.3.6. Για ποιές τιμές του p το $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x+p^2x^2}\,dx$ συγκλίνει είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;

10.3.7. Αποδείξτε ότι το $\int_{1}^{+\infty} \frac{x-[x]-(1/2)}{x^p}\,dx$ συγκλίνει για κάθε $p > 0$.