ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δευτέρα 19 Νοεμβρίου 2018

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 4

1). Βρείτε τύπο για τη λύση $u(\mathbf{x},t)$ του προβλήματος Cauchy

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x},t) &= a(t)\Delta u + \mathbf{b}(t)\cdot\nabla u(\mathbf{x},t) + c(t)u(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n, \quad t>0, \\ u(\mathbf{x},0) &= g(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

όπου οι a, $\mathbf{b}$, c, g είναι συνεχείς συναρτήσεις και

$$a(t) \geq a_0 > 0 \ .$$

Υποδ. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών, μετασχηματίστε την παραπάνω ΜΔΕ στην εξίσωση Θερμότητας. Στην αρχή απαλείψτε τον όρο cu, στη συνέχεια τον όρο $\mathbf{b}\cdot\nabla u$ και τέλος τον παράγοντα a.

2). Η συνάρτηση $g(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$ ειναι συνεχής εκτός από ένα σημείο x_0 στο οποίο υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά δεν είναι ίσα:

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = l^- \neq l^+ = \lim_{x\to x_0^+} g(x).$$

Έστω

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t)g(y)dy,$$

όπου Φ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της θερμότητας στον $\mathbf{R}\times(0,\infty)$. Μελετήστε το όριο

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) \ .$$

3). Η $u(x,t)$ είναι φραγμένη λύση του προβλήματος Cauchy της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad x\in\mathbf{R}, \quad t>0, \\ u(x,0) &= \phi(x) \ , \end{aligned}$$

όπου η $\phi \in C(\mathbf{R})$ ικανοποιεί

$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = a, \qquad \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = b.$$

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t), \qquad x\in \mathbf{R}.$$

4) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών αρχικών τιμών (ΠΣΑΤ)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad x\in\mathbf{R}_+, \quad t>0,\\ u &= 0, \qquad x\in\mathbf{R}_+, \quad t=0,\\ u &= g \qquad x=0, \quad t>0, \end{aligned}$$

όπου η $g\in C^1[0,\infty)\to\mathbf{R}$ με $g(0)=0$. Δείξτε (όχι με επαλήθευση) ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος δίδεται από

$$u(x,t)=\frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}g(s)ds.$$

Υποδ. Έστω $v(x,t):=u(x,t)-g(t)$ και επεκτείνετε την v ωστε να ορίζεται και στα αρνητικά x: $v(-x,t)=-v(x,t)$. Στη συνέχεια θεωρήστε το πρόβλημα Cauchy.

5). Έστω το μή γραμμικό ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + g(t,x,u)u_x &= F(t,x), \qquad 0<x<L, \quad t>0,\\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0<x<L,\\ u(0,t)=u(L,t) &= 0, \qquad t>0, \end{aligned}$$

όπου g, F και f ομαλές συναρτήσεις.

(α) Δείξτε οτι η παραπάνω εξίσωση ικανοποιεί αρχή μεγίστου. Συγκεκριμένα αποδείξτε οτι αν

$$u_t - u_{xx} + g(t,x,u)u_x \le 0, \qquad (x,t)\in U_T,$$

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\bar{\Gamma}_T} u,$$

όπου $U_T=(0,L)\times[0,T)$, και Γ_T το παραβολικό σύνορο.

(β) Αν $M=\max_{0\le x\le L}|f(x)|$, $N=\max_{\bar{U}_T}|F(x,t)|$ και u κλασική λύση δείξτε οτι

$$|u(x,t)|\le M+NT\ , \qquad (x,t)\in U_T.$$

6). Έστω $U\subset\mathbf{R}^n$ φραγμένο χωρίο και $0<T<\infty$. Αν $u\in C^{2,1}(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$ λύση του ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t-\Delta u &= -u^3, \qquad x\in U, \quad 0<t<T,\\ u(x,0) &= 0, \qquad x\in U,\\ u(x,t) &= 0, \qquad x\in\partial U, \quad 0<t<T, \end{aligned}$$

δείξτε οτι $u=0$ στο U_T.

(α) Με χρήση ενεργειακών εκτιμήσεων.

(β) Με χρήση αρχής μεγίστου.

7). Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο χωρίο και $0 < T < \infty$. Αν $H : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ και $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι ομαλές συναρτήσεις, δείξτε οτι για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g, h το ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + H(\nabla u) + g(u) &= f(t,x), \qquad x \in U, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in U, \\ u(x,t) &= h(x,t), \qquad x \in \partial U, \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία κλασική λύση $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$.

8). (Λήμμα Hopf, απλή περίπτωση) Έστω $U = (0,1)$, $U_T = U \times (0,T]$ και $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^1(\bar{U}_T)$ ικανοποιεί την

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad x \in U_T,$$

Υποθέτουμε οτι υπάρχουν $t_0 \in (0,T]$ και $m \in \mathbf{R}$ τ.ω. $u(0,t_0) = m$ και

$$u(x,t) > m, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 < t < t_0,$$

Δείξτε οτι

$$u_x(0,t_0) > 0.$$