ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 31 Οκτωβρίου 2018

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 3

1). Η u είναι αρμονική στην 'τρύπια' μπάλα με ακτίνα $\frac{3}{2}$, $B(0, \frac{3}{2}) \setminus \{0\} \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Έστω ότι γνωρίζουμε ότι καθώς $x \to 0$ έχουμε ότι $u(x) = o(|\ln|x|)$ όταν $n = 2$ ή $u(x) = o(|x|^{2-n})$ αν $n \geq 3$. Θα δείξουμε οτι η u είναι φραγμένη. Έστω $n \geq 3$.

(α) Με χρήση αρχής μεγίστου δείξτε οτι υπάρχει σταθερα $C > 0$ τ.ω.

$$u(x) \leq C + \varepsilon |x|^{2-n}, \qquad r < |x| < 1, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall r \in (0, 1).$$

(β) Η u είναι φραγμένη στην $B(0, 1) \setminus \{0\}$.

(γ) Εργαστείτε αντίστοιχα για $n = 2$.

2). Έστω $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ κλασική λύση της

$$\Delta u - u = f(x), \qquad |u| < 1, \qquad x \in \mathbf{R}^n \ .$$

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε οτι αν

$$|f(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}|x|}, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

τότε για κατάλληλη σταθερά $C > 0$,

$$|u(x)| \leq C e^{-\frac{1}{2}|x|}, \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

(α) Με κατάλληλη χρήση αρχής μεγίστου δείξτε οτι υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ τ.ω. για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $R_\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$u(x) \leq C_1 e^{-\frac{1}{2}|x|} + \varepsilon e^{\frac{1}{2}|x|}, \qquad 1 < |x| < R, \qquad \forall R \geq R_\varepsilon.$$

(β) Δείξτε την (1).

3). Η $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ ικανοποιεί την

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) = 0, \qquad x \in U,$$

όπου ο L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και $a_{ij} \in C^1(\bar{U})$. Θέτουμε

$$v := |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2.$$

(α) Δείξτε οτι για κατάλληλα μεγάλη σταθερά λ,

$$Lv \leq 0, \qquad x \in U.$$

(β) Συμπεράνετε οτι

$$\|Du\|_{L^\infty(U)} \leq C(\|Du\|_{L^\infty(\partial U)} + \|u\|_{L^\infty(\partial U)}).$$

4) Έστω η αρμονική συνάρτηση $u(x) = xy$ ορισμένη στη μοναδιαία μπάλα $B(0,1)$. Βρείτε τα ακρότατά της u στην $\overline{B(0,1)}$ και υπολογίστε στα σημεία αυτά την $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, όπου ν το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε το Λήμμα του Hopf.

5). Εστω φραγμένο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ συνάρτηση τέτοια ώστε $u = 0$ στο $\partial\Omega$. Πρώτα δείξτε οτι

$$\Delta(x \cdot \nabla u) = x \cdot \nabla \Delta u + 2\Delta u, \qquad x \in \Omega \ ,$$

και, αν ν το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο $\partial\Omega$,

$$x \cdot \nabla u = (x \cdot \nu)\, \frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad x \in \partial\Omega \ .$$

Στη συνέχεια με ολοκληρώσεις κατά μέρη δείξτε οτι

$$2\int_\Omega (x \cdot \nabla u)\Delta u dx = (2-n)\int_\Omega u\, \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu)\, \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS_x \ .$$

6). Εστω η μπάλα $B = B(0,R) \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ και $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} -\Delta u &= |u|^{p-1}u, \quad x \in B, \\ u &= 0, \qquad\quad x \in \partial B \ , \end{aligned}$$

όπου $p > 1$. Θέτουμε

$$K := \int_B |\nabla u|^2 dx, \qquad P := \int_B |u|^{p+1} dx \ .$$

(α) Πολλαπλασιάστε την ΜΔΕ με u, ολοκληρώστε στην B και βρείτε μια σχεση που συνδέει τα K και P.

(β) Πολλαπλασιάστε την ΜΔΕ με $x \cdot \nabla u$ και βρείτε νέα σχεση που συνδέει τα K και P.

(γ) Δείξτε οτι όταν $p > \frac{n+2}{n-2}$ η ΜΔΕ **δεν έχει** μη τετριμμένη λύση.

(δ) Δείξτε οτι όταν $p = \frac{n+2}{n-2}$ η ΜΔΕ **δεν έχει** μη αρνητική, μη τετριμμένη λύση.