ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τετάρτη 3 Οκτωβρίου 2018

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 1

1). Αν f συνεχής συνάρτηση δείξτε οτι

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)dx = u(x_0), \qquad \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|\partial B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u(x)dS_x = u(x_0)$$

2). Αν $u \in C^2(U)$ και για κάθε μπάλα $B \subset U$ ισχύει

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

δείξτε οτι η u είναι αρμονική στο U. (Το ν είναι το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω στην επιφάνεια ∂B).

3). Αν $u \in C^2(U)$ ικανοποιεί

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dS_y,$$

για κάθε $B(x,r) \subset U$ τότε η u είναι αρμονική στο U. Εργαστείτε όπως στην απόδειξη του αντίστοιχου Θεωρήματος στον Evans, όπου η μέση τιμή λαμβάνεται στη σφαίρα.

4). Έστω $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ η οποία ικανοποιεί

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \qquad x \in B(0,1), \\ u(x) &= g(x), \qquad x \in \partial B(0,1) \ , \end{aligned}$$

όπου f και g γνωστές συνεχείς συναρτήσεις. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του τύπου της μέσης τιμής δείξτε οτι στις **2 διαστάσεις** ισχύει

$$u(0) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x)dS_x - \frac{1}{2\pi}\int_{B(0,1)} f(x)\ln|x|dx \ .$$

5). Έστω $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Με απλά επιχειρήματα Απειροστικού Λογισμού δείξτε οτι στα σημεία $x \in \Omega$ όπου $\Delta u(x) > 0$, η u δέν μπορεί να παίρνει μέγιστη τιμή.

6). Εστω $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \Delta u &= u^3 - u, \quad in \;\; \Omega, \\ u &= 0, \qquad\quad\; in \;\; \partial\Omega \,. \end{aligned}$$

Δείξτε οτι

$$-1 \leq u \leq 1 \,.$$

7). (Άλλη απόδειξη του Θ. Liouville) Έστω u φραγμένη αρμονική συνάρτηση στον $\mathbf{R}^n$, x, y δύο τυχαία σημεία και $a = |x - y|$. Χωρίς βλαβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι $u > 0$ (γιατί;). Παρατηρώντας οτι $B(y, r) \subset B(x, r + a)$, $r > 0$ και χρησιμοποιώντας το Θ. μέσης τιμής συγκρίνετε τις τιμές $u(x)$ και $u(y)$. Στη συνέχεια με κατάλληλα επιχειρήματα δείξτε οτι η u είναι σταθερή.