



Πέμπτη 30 Νοεμβρίου 2017
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Φυλλάδιο 8

1) Δίδεται το συναρτησοειδές

$$J[y] = \int_0^\pi y^2(1 - y'^2)dx, \quad y \in C^1[0, 1], \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Με στοιχειώδη επιχειρήματα δείξτε ότι το 'σημείο' $y_0(x) = 0$ είναι σημείο ασθενούς τοπικού ελαχίστου, αλλά όχι 'σημείο' ολικού ελαχίστου, ούτε 'σημείο' ισχυρού τοπικού ελαχίστου.

(Υποδ. Για το τελευταίο ερώτημα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots)$$

2) Δίδεται το συναρτησοειδές

$$J[y] = \int_0^1 y^2(x - y)dx, \quad y \in C[0, 1].$$

Δείξτε ότι η μηδενική συνάρτηση $y_0(x) = 0$ είναι ακρότατο. Βρείτε τη δεύτερη μεταβολή $\delta^2 J(y_0; \phi)$. Δείξτε ότι η $\delta^2 J(y_0; \phi)$ είναι θετικά ορισμένη αλλά όχι ισχυρά θετική. Με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} -x + \varepsilon, & 0 \leq x < \varepsilon \\ 0, & x \geq \varepsilon, \end{cases}$$

δείξτε ότι η $y_0(x) = 0$ δεν είναι 'σημείο' τοπικού ελαχίστου.

3) Δίδεται το συναρτησοειδές

$$J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx, \quad y \in C^1[0, a], \quad y(0) = y(a) = 0.$$

(i) Βρείτε το ακρότατο για τις διάφορες τιμές του $a > 0$, έστω $y_0(x)$.

(ii) Έστω ότι $a > \pi$. Βρείτε συναρτήσεις $\hat{y}$ τ.ω. $J[\hat{y}] < J[y_0]$. Συμπεράνετε ότι το $y_0(x)$ δεν είναι 'σημείο' ολικού ελαχίστου του $J[y]$.

(iii) Όταν $a = \pi$, χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών $y(x) = y_0(x)h(x)$ για να δείξετε ότι η $y_0(x)$ είναι 'σημείο' ολικού ελαχίστου του $J[y]$.

(iv) Έστω ότι $0 < a < \pi$. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητών $t = \frac{\pi x}{a}$, $z(t) = y(x)$, καθώς και το αποτέλεσμα της ερώτησης (iii) δείξτε ότι η $y_0(x)$ είναι 'σημείο' ολικού ελαχίστου του $J[y]$.