



Πέμπτη 14 Δεκεμβρίου 2017
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Φυλλάδιο 10

- 1) Βρείτε τα τμηματικά ομαλά ακρότατα, με ένα γωνιακό σημείο, του συναρτησοειδούς

$$J[y] = \int_0^2 (y'^4 - 6y'^2) dx, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

- 2) Βρείτε τα ομαλά ή τα τμηματικά ομαλά ακρότατα με ένα γωνιακό σημείο, του συναρτησοειδούς

$$J[y] = \int_0^2 y'^2 (y' - 1)^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Στη συνέχεια μελετήστε τη φύση καθενός απο αυτά (δηλ. αν είναι μέγιστο, ελάχιστο κλπ)

- 3) Βρείτε, με απόδειξη, την ελάχιστη τιμή του συναρτησοειδούς

$$J[y] = \int_{-1}^1 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx, \quad y \in C^1[-1, 1], \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

- 4) Για $\alpha > 0$ θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J_\alpha[y] = \int_0^1 x^\alpha (y')^4 dx, \quad y \in \mathcal{E} := \{y \in C^1[0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0\},$$

Να αποδείξετε ότι

- (α) Αν $0 < \alpha < 3$, τότε

$$\inf_{y \in \mathcal{E}} J_\alpha[y] > 0,$$

και υπάρχει ελαχιστοποιητής στο $\mathcal{E}$ δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $y_0 \in \mathcal{E}$ τέτοια ώστε

$$J_\alpha[y_0] = \inf_{y \in \mathcal{E}} J_\alpha[y].$$

- (β) Αν $\alpha > 3$, τότε

$$\inf_{y \in \mathcal{E}} J_\alpha[y] = 0,$$

και δεν υπάρχει ελαχιστοποιητής στο $\mathcal{E}$ δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση $y_0 \in \mathcal{E}$ τέτοια ώστε

$$J_\alpha[y_0] = \inf_{y \in \mathcal{E}} J_\alpha[y].$$