

Δευτέρα 30 Νοεμβρίου 2015

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Φυλλάδιο 8

1) Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες και ευθείες που δίδονται παρακάτω

(α) $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$

(β) $y = \sin x$, $y = x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

2) Βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = x^3 - 3x^2$ καθώς και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x .

3) Η συνάρτηση Γ ορίζεται ως εξής

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

Δείξτε ότι είναι καλά ορισμένη, δηλ. ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει. Στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad \forall t > 0.$$

Τέλος δείξτε ότι αν n θετικός ακεραίος τότε $\Gamma(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$ (n παραγοντικό).

4) Βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x τα χωρία που φράσσονται από τις ευθείες και τις καμπύλες που δίδονται

α) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.

β) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

γ) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$.

δ) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$.

5) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα ή δείξτε ότι αποκλίνουν (δηλ. δεν υπάρχουν).

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_2^{\infty} \frac{2dx}{x^2-1}, \quad \int_{-\infty}^0 te^t dt.$$