

**ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

Φυλλάδιο 4

1) Πόσες εφαπτόμενες της καμπύλης  $y = x^2$  διέρχονται από το σημείο  $(4, 1)$ ; Γράψτε τις εξισώσεις τους.

2) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0. \end{cases}$$

Μπορείτε να βρείτε τιμές των  $a$  και  $b$  ώστε η παραπάνω συνάρτηση (α) Να είναι συνεχής στο μηδέν; (β) Να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbf{R}$ ;

3) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο  $x = 0$ . (α)  $f(x) = |\sin x|$ , (β)  $g(x) = |x^2 \sin x|$ .

4) Δίδεται η θέση ενός σώματος  $s = f(t)$  που κινείται επί του  $s$ -άξονα. Βρείτε τη μετατόπιση του σώματος και την μέση ταχύτητα στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση στα άκρα του χρονικού διαστήματος. Αλλάζει κατεύθυνση το σώμα στο δεδομένο χρονικό διάστημα και πότε;

(α)  $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \leq t \leq 2,$   
 (β)  $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 3.$

5) (α) Αν η συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  δείξτε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

(β) Αν για μια συνάρτηση  $f$  το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = l \in \mathbf{R},$$

υπάρχει δείξτε ότι η συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  (Υποδ. εξετάστε την συνάρτηση  $f(x) = |x|$  στο σημείο  $x_0 = 0$ .)

6) Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

$$\cos(x^2 + \sin x^3), \quad \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 + 1}, \quad (\cos^2 x + \sin^3 x^2)^5.$$