ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 5 Μαίου 2020

Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ – Ασθενείς λύσεις

Φυλλάδιο 5

1. Έστω X χώρος Hilbert (πχ H_0^1) και

$$\begin{array}{rcll} u_n & \rightharpoonup & u, & \text{στον} \quad L^2(0,T;X) \\ u_n' & \rightharpoonup & v, & \text{στον} \quad L^2(0,T;X^*), \end{array}$$

όπου u_n' η ασθενής παράγωγος της u_n. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε ότι

$$u' = v, \qquad \text{ασθενώς.} \tag{1}$$

(i) Δείξτε οτι

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^T \langle u_n(t), \psi(t)\rangle\, dt & \to & \displaystyle\int_0^T \langle u(t), \psi(t)\rangle\, dt, & \forall \psi \in L^2(0,T;X^*), \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_n'(t), \psi(t)\rangle\, dt & \to & \displaystyle\int_0^T \langle v(t), \psi(t)\rangle\, dt, & \forall \psi \in L^2(0,T;X). \end{array}$$

(ii) Έστω $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ και $w \in X$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\left\langle \int_0^T \phi'(t)u(t)\, dt, w \right\rangle = \int_0^T \langle \phi'(t)u(t)\, , w\rangle\, dt = \int_0^T \langle u(t)\, , \phi'(t)w\rangle\, dt,$$

δείξτε οτι

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)\, dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)\, dt$$

και συμπεράνετε την (1).

2. Εστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο. Θεωρούμε την εξίσωση θερμότητας

$$\begin{array}{rcll} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) & = & f(x,t), & x \in U, \quad t \in (0,T) \\ u(x,t) & = & 0, & x \in \partial U, \quad t \in (0,T) \\ u(x,0) & = & g(x), & x \in U, \end{array}$$

με

$$f \in L^2(0,T;L^2(U)), \qquad g \in L^2(U).$$

Ακολουθώντας τα βήματα της θεωρίας, κατασκευάστε λύση με τη μέθοδο Galerkin.

3. (Μέθοδος Galerkin για ελλειπτικές εξισώσεις). Το $U \subset \mathbf{R}^n$ είναι ανοικτό και φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο και $\{w_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(U)$ που ταυτόχρονα είναι ορθογώνια βαση του $H_0^1(U)$. Έστω $f \in L^2(U)$ και

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k w_k, \quad d_m^k \in \mathbf{R}, \quad m = 1, \ldots.$$

(i) Δείξτε οτι υπάρχει μοναδική συνάρτηση u_m που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\int_U \nabla u_m \cdot \nabla w_k \, dx = \int_U f w_k \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots m.$$

(ii) Δείξτε οτι υπάρχει υπακολουθία της u_m η οποία συγκλίνει ασθενώς στον $H_0^1(U)$ στην συνάρτηση u η οποία είναι ασθενής λύση της

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad x \in U, \\ u &= 0, \quad x \in \partial U. \end{aligned}$$

4.$^{\otimes}$ Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο. Θεωρούμε την εξίσωση θερμότητας με συνοριακή συνθήκη Neumann.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), \qquad x \in U, \quad t \in (0,T) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \partial U, \quad t \in (0,T) \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in U, \end{aligned} \tag{2}$$

με

$$f \in L^2(0,T; L^2(U)), \qquad g \in L^2(U).$$

Έστω $\{w_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ ορθοκανονική βάση του $L^2(U)$ που ταυτόχρονα είναι ορθογώνια βαση του $H^1(U)$, π.χ. μπορούμε να θεωρήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Neumann:

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \mu_k w_k, \quad x \in U, \\ \frac{\partial w_k}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \partial U. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια κατασκευάσετε λύση της (2) με τη μέθοδο Galerkin. Η προσεγγιστική λύση, ως συνήθως, έχει τη μορφή

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \quad m = 1, \ldots.$$

5.$^{\otimes}$ Έστω H χώρος Hilbert και ακολουθία

$$u_k \rightharpoonup u, \qquad \text{στον} \quad L^2(0,T;H).$$

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε ότι αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \|u_k(t)\| \le C, \qquad k = 1, 2, \dots$$

τότε και

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \|u(t)\| \le C. \tag{3}$$

(i) Δείξτε ότι αν $v \in H$ και $0 \le a \le b \le T$ τότε

$$\int_a^b (v, u_k(t))\, dt \le C\|v\|\,(b-a), \qquad k = 1, 2, \dots$$

(ii) Δείξτε ότι για σχεδόν κάθε $t \in [0,T]$,

$$(v, u(t)) \le C\|v\|, \qquad \forall v \in H,$$

και συμπεράνετε την (3).

$\otimes$: *Οι ασκήσεις ειναι προαιρετικές*