ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 28 Φεβρουαρίου 2020

Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ – Ασθενείς λύσεις

Φυλλάδιο 2

1) . Έστω $f \in C^1(\mathbf{R})$ με $f' \in L^\infty$ και $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$ όπου U φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με ομαλό σύνορο. Δείξτε οτι $f \circ u \in W^{1,p}(U)$ και $D(f \circ u) = f'(u)Du$.
Υπόδειξη: Δείξτε οτι υπάρχει ακολουθία $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ τ.ω. οι ακολουθίες u_m, Du_m, $f(u_m)$, $f'(u_m)Du_m$ να συγκλίνουν στις u, Du, $f(u)$, $f'(u)Du$ αντίστοιχα στον $L^p(U)$.

2). Έστω $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$ όπου U φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με ομαλό σύνορο και

$$u^+ = \max\{u,\ 0\}, \qquad u^- = \min\{u,\ 0\}.$$

Δείξτε οτι $u^+,\ u^-, |u| \in W^{1,p}(U)$ και

$$\begin{aligned} Du^+ &= \begin{cases} Du, & u > 0 \\ 0, & u \le 0 \end{cases}, \\ Du^- &= \begin{cases} 0, & u \ge 0 \\ Du, & u < 0 \end{cases}, \\ D|u| &= \begin{cases} Du, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -Du, & u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & u > 0 \\ 0, & u \le 0 \end{cases},$$

και το αποτέλεσμα της άσκησης 4 ώστε να δείξετε οτι για $\phi \in C_c^\infty(U)$ ισχύει

$$\int_U f_\varepsilon(u)\, D\phi\, dx = -\int_{u>0} \phi \frac{u\, Du}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\, dx.$$

3). Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ συνεκτικό και

$$Du = 0, \qquad \sigma.\pi.\ U,$$

ασθενώς. Δείξτε οτι η u είναι σταθερά σχεδόν παντού στο U.

4). Έστω $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ με $0 \le \phi \le 1$ και

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & r \le 0 \\ 0, & r \ge 1. \end{cases}$$

Αν $f \in W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$ ορίζουμε $f_k(x) = \phi(|x| - k)f(x)$. Δείξτε οτι η ακολουθία f_k συγκλίνει στην f στον $W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$ για κάθε $1 \le p < \infty$ και $k = 1, 2, \ldots$.

Συμπεράνετε ότι $W_0^{k,p}(\mathbf{R}^n) = W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$.

5). Έστω $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ και $u \in W^{2,p}(\mathbf{R}^+)$. Ορίζουμε την επέκταση $Eu = u(|x|)$. Δείξτε οτι $Eu \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ αλλά εν γένει $Eu \notin W^{2,p}(\mathbf{R})$.

6). (Ανισότητα Morrey στη μία διάσταση). Αν $1 < p < \infty$ και $u \in C_c^1(\mathbf{R})$ δείξτε οτι

$$[u]_{C^{0,1-\frac{1}{p}}(\mathbf{R})} = \sup_{\substack{x \ne y \\ x,y \in \mathbf{R}}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \le \|u'\|_{L^p(\mathbf{R})}.$$

7). Έστω $n \ge 2$ και $1 \le p < n$. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε την ανισότητα ίχνους με τον καλύτερο (δηλ. μεγαλύτερο) εκθέτη q. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε την

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(x',0)|^q dx'\right)^{\frac{1}{q}} \le C(n,p) \left(\int_{\mathbf{R}^n} |Du(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\ , \tag{1}$$

όπου $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$.

(α) Αν γνωρίζετε οτι η παραπάνω ανισότητα ισχύει, χρησιμοποιώντας κατάλληλο επιχείρημα κλίμακας (scaling argument), βρείτε το q.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα για $p = 1$ και για την τιμή του q που βρήκατε στο ερώτημα (α).

Υποδ. Μπορείτε να ξεκινήσετε απο την σχέση

$$u(x',0) = \int_{-\infty}^0 u_{x_n}(x',t)dt\ .$$

(γ) Αποδείξτε την (1) για γενικό $p \in [1, n)$.

(δ) Γράψτε την αντίστοιχη ανισότητα ίχνους για γενικό φραγμένο χωρίο U με ομαλό σύνορο.