ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 14 Φεβρουαρίου 2020

Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ – Ασθενείς λύσεις

Φυλλάδιο 1

1). (**i**) Έστω $f \in C[0,1]$ είναι τ.ω.

$$\int_0^1 f(x)\phi'(x)dx = 0, \qquad \forall\ \phi \in C^1[0,1], \qquad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Δείξτε οτι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$f'(x) = 0, \qquad \forall\ x \in [0,1].$$

Υποδ. Αν $c = \int_0^1 f(x)dx$ δείξτε οτι $f(x) = c$.

(**ii**) Έστω $g,\ h \in C[0,1]$ είναι τ.ω.

$$\int_0^1 (g(x)\phi'(x) + h(x)\phi(x))dx = 0, \qquad \forall\ \phi \in C^1[0,1], \qquad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Δείξτε οτι η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$g'(x) = h(x), \qquad \forall\ x \in [0,1].$$

2). Ποιά από τα παρακάτω συναρτησοειδή ορίζουν κατανομή στο $U \subset \mathbf{R}$; $(\phi \in C_c^\infty(U))$

(**i**) $< f,\ \phi >= \sum_{k=1}^\infty k!\ \phi^{(k)}(k), \qquad U = \mathbf{R}.$

(**ii**) $< f,\ \phi >= \sum_{k=1}^\infty \frac{\phi(1/k)}{k}, \qquad U = \mathbf{R}.$

(**ii**) $< f,\ \phi >= \int_0^\infty \frac{\phi(x)}{x^2}dx, \qquad U = (0,\infty).$

3). Δείξτε οτι η συνάρτηση

$$H(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

δεν έχει ασθενή (δηλ. L^1_{loc}) παράγωγο. Δείξτε οτι $H'(x) = 2\delta(x)$.

4). Έστω $U = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0\ , \end{cases} \qquad\qquad (x,y) \in U.$$

Δείξτε οτι $D^{(1,1)}f = 0$ ασθενώς, ενώ η ασθενής παράγωγος $D^{(1,0)}f$ δεν υπάρχει!.

5). Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & -1 \leq x \leq 0, \\ \ \ x^2, & \ \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του $k = 0, 1, 2, \ldots$ η f ανήκει στον $H^k(-1,\ 1)$;

6). Έστω ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ που διαιρείται με μία ομαλή επιφάνεια Γ σε δύο μέρη Ω_1 και Ω_2, οπότε $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$. Έστω $u_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, $u_2 \in C^1(\overline{\Omega}_2)$ και

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1, \\ u_2(x), & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Δείξτε οτι αν $u_1\big|_\Gamma = u_2\big|_\Gamma$ τότε η συνάρτηση u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη. Τι συμβαίνει αν $u_1\big|_\Gamma \neq u_2\big|_\Gamma$;

7)$^{\otimes}$. Σκοπός της άσκησης ειναι να δείξουμε οτι αν $U \subset \mathbf{R}^n$ ειναι ένα ανοικτό σύνολο, οι συναρτήσεις $C_c^\infty(U)$ ειναι πυκνές στον $L^p(U)$, $1 \leq p < \infty$.

Θα θεωρήσουμε ως γνωστό το εξής αποτέλεσμα:

Οι συναρτήσεις $C_c(U)$ (συνεχείς με συμπαγή φορέα) είναι πυκνές στον $L^p(U)$, $1 \leq p < \infty$. (Η Πρόταση αυτή συνήθως αποδεικνύεται με το Λήμμα του Uryshon, αλλά εμείς απλώς θα την θεωρήσουμε γνωστή.)

(**i**) Αν η_ε ειναι ο ομαλοποιητής στο παράρτημα C.4 του Evans και $f_0 \in C_c(\mathbf{R}^n)$, δείξτε οτι $\eta_\varepsilon * f_0 \to f_0$, ομοιόμορφα στον $\mathbf{R}^n$.

(**ii**) Αν $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ και $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$,

$$\|g * f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\, \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}.$$

(**iii**) Αν $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, δείξτε οτι $\eta_\varepsilon * f \to f$, στον $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Υποδ. $\eta_\varepsilon * f - f = \eta_\varepsilon * (f - f_0) + (\eta_\varepsilon * f_0 - f_0) + (f_0 - f)$, για κατάλληλη $f_0 \in C_c(\mathbf{R}^n)$.

(**iv**) Δείξτε οτι οι συναρτήσεις $C_c^\infty(U)$ ειναι πυκνές στον $L^p(U)$, $1 \leq p < \infty$.

$\otimes$: *Η άσκηση ειναι προαιρετική*