ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 5 Ιουνίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΕΜ215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Τελικό Διαγώνισμα

1) Έστω $\mathcal{B}$ ο χώρος των ακολουθιών με στοιχεία 0 ή 1, δηλ.

$$\mathcal{B} = \{x = (x_1, x_2 \ldots) : \ x_i = 0 \ \text{ ή } \ 1, \quad i \in I\!N\} \ .$$

Για $x, y \in \mathcal{B}$ ορίζουμε την

$$d(x,y) = \sum_1^\infty \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \ .$$

α) Δείξτε οτι η $d(x,y)$ ορίζει μετρική.

β) Αν $\mathcal{F}_0$ είναι το υποσύνολο του $\mathcal{B}$ που περιέχει όλες τις ακολουθίες με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων, δείξτε οτι το $\mathcal{F}_0$ ειναι πυκνό στο $\mathcal{B}$. Έστω $\mathcal{F}_1$ το υποσύνολο του $\mathcal{B}$ που περιέχει όλες τις ακολουθίες με πεπερασμένο πλήθος μηδενικών στοιχείων. Είναι το $\mathcal{F}_1$ πυκνό στο $\mathcal{B}$;

2) Έστω $B_{cl} = \{x \in l_1 : \ \|x\|_1 \leq 1\}$ η κλειστή μοναδιαία μπάλα στον l_1 και

$$M := \{x = (\xi_j) \in B_{cl} : \quad |\xi_j| \leq \frac{1}{j}, \ j = 1, 2, \ldots\}.$$

Δείξτε οτι το M δεν είναι συμπαγές. (Υποδ. Χρησιμοποιήστε κατάλληλα την ακολουθία $x_n = (\frac{1}{2^n} \ldots \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots)$, όπου οι πρώτοι 2^n όροι είναι μη μηδενικοί.)

3). Δίδεται ο χώρος Banach $X = (C([0,1]), \ \|\cdot\|_\infty)$ και ο γραμμικός τελεστής $\Lambda : X \to X$:

$$\Lambda(f)(t) = \begin{cases} f(0), & t = 0 \\ \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds, & t \in (0,1] \ . \end{cases}$$

α) Δείξτε οτι ο Λ είναι καλώς ορισμένος, συνεχής και υπολογίστε την νόρμα του.

β) Δείξτε οτι ο Λ είναι ένα προς ένα αλλά όχι επί.

4). Έστω

$$E = \{f \in C([0,1]) : \ f(0) = 0, \quad \int_0^1 f(x)dx = 0\} \ ,$$

υπόχωρος του $(C([0,1], \ \|\cdot\|_\infty)$. Υπολογίστε την απόσταση της $\phi(t) = t$ απο τον E. Υπάρχει συνάρτηση $f \in E$ τ.ω. $\|f - \phi\|_\infty = \text{dist}(\phi, E)$;

Διάρκεια 2 ώρες. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες