



MEM215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 9

1) Έστω $\mathbb{R}[x]$ ο χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Ορίζουμε

$$\phi(P, Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt, \quad P, Q \in \mathbb{R}[x].$$

α) Δείξτε ότι η ϕ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}[x]$.

β) Υπολογίστε το $\phi(x^p, x^q)$ με $p, q \in \mathbb{N}$.

γ) Υπολογίστε το

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt.$$

2) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ οικογένεια $n \geq 2$ στοιχείων του X με την ιδιότητα

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Δείξτε ότι οποιαδήποτε $n - 1$ από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Υποδ. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Μαθηματική Επαγωγή.

3) Από σελ. 99, 100 των σημειώσεων οι ασκήσεις 8, 11, και 18.