ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 19 Απριλίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΕΜ215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 8

1) Δείξτε οτι οι l_p νόρμες δεν προέρχονται από εσωτερικό γινόμενο εκτος εάν $p = 2$.

2). Εφοδιάζουμε το χώρο $C([0,1])$ με τη νόρμα

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \qquad 1 < p < \infty ,$$

Δείξτε οτι η παραπάνω νόρμα δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο εκτός εάν $p = 2$.
Υποδ. Μπορείτε να χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις $f(t) = 1/2 - t$ και

$$g(t) = \begin{cases} 1/2 - t, & t \in [0, 1/2] \\ t - 1/2, & t \in [1/2, 1] \ . \end{cases}$$

3) Έστω $\mathbb{R}[X]$ ο χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές στον οποίο ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$.

α) Δείξτε οτι υπάρχει ορθοκανονική οικογένεια $\{P_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ πολυωνύμων.

β) Έστω

$$Q_n := \sum_1^n \frac{P_i}{1+i}, \qquad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Δείξτε οτι η ακολουθία $\{Q_n\}$ είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει. Συμπεράνετε οτι δεν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}[X]$ το οποίο τον κάνει χώρο Hilbert.

4) Από σελ. 98, 99 των σημειώσεων οι ασκήσεις 1 και 3.