ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 29 Μαρτίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

MEM215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 7

1) Έστω X ο χώρος $(C(0,1),\ \|\cdot\|_\infty)$ και $T: X \to X$ γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα αν $f(x) \geq 0$ τότε και $Tf(x) \geq 0$. Δείξτε οτι ο T είναι συνεχής. Στη συνέχεια δείξτε οτι

$$\|T\| = \sup_{x \in (0,1)} T(1)\ .$$

2). Αν X συμπαγής μετρικός χώρος και $C(X)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f: X \to I\!R$ με την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα, δείξτε οτι το $F \subset C(X)$ είναι συμπαγές αν και μόνον εαν είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.
Υπόδ. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση συνέπεια του Θ. Arzela-Ascoli. Για την άλλη κατεύθυνση, για να αποδείξετε την ισοσυνέχεια, επιχειρηματολογήστε με εις άτοπο απαγωγή.

3) Έστω $A \subset l_p$, $1 \leq p < \infty$. Το A λέγεται <u>ισοαθροίσιμο</u> αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in I\!N$ τ.ω. $\sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon$ $\forall x = (\xi_k) \in A$.

Δείξτε οτι το $A \subset l_p$, $1 \leq p < \infty$ είναι συμπαγές εαν και μόνον εαν είναι κλειστό, φραγμένο και ισοαθροίσιμο.
Υπόδ. Έστω A κλειστό, φραγμένο και ισοαθροίσιμο και $x^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots)$ ακολουθία στο A. Δείξτε οτι υπάρχει $M > 0$ τ.ω. για κάθε k, n να ισχύει $|\xi_k^{(n)}| < M$. Συνεπώς υπάρχει υπακολουθία της $\xi_1^{(n)}$, έστω $\xi_1^{(n,1)}$, τέτοια ώστε $\xi_1^{(n,1)} \to \alpha_1 \in I\!R$. Με ένα διαγώνιο επιχείρημα δείξτε οτι υπάρχει υπακολουθία της $x^{(n)}$, έστω $x^{(n,n)}$, τέτοια ώστε $\xi_k^{(n,n)} \to \alpha_k \in I\!R$ για κάθε $k \in I\!N$. Αν $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ δείξτε οτι $\|x^{(n,n)} - x\|_p \to 0$.