ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 8 Μαρτίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΕΜ215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 4

1) Στο Λήμμα του Riesz (σελ. 64) δείξτε οτι αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης τότε μπορούμε να πάρουμε $\theta = 1$.

2) Έστω X γραμμικός χώρος με νόρμα, άπειρης διάστασης και K συμπαγές υποσύνολο. Δείξτε οτι το K έχει κενό εσωτερικό.

3) Σελ. 65 σημειώσεων, Άσκηση 2(β).

4) Σκοπός της άσκησης είναι να δώσουμε μία διαφορετική απόδειξη της δύσκολης κατεύθυνσης του Θεωρήματος συμπάγειας του Riesz (Θ.4.2.2). Συγκεκριμένα θα δείξουμε:

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{cl}(0,1)$ του X είναι συμπαγής τότε ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.

(ι) Δείξτε οτι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1, \dots x_n$, του X τ.ω.

$$B_{cl}(0,1) \subset \cup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right) .$$

Έστω $F = \mathrm{span}(x_1, \dots x_n)$. Ορίζουμε τον συμβολισμό

$$F + B(0,r) := \{x + z : x \in F, \quad z \in B(0,r)\}, \qquad \forall r > 0 .$$

Στη συνέχεια δείξτε οτι

(ιι) $B(0,1) \subset F + B(0, \frac{1}{2})$,

(ιιι) $B(0, \frac{1}{2}) \subset F + B(0, \frac{1}{2^2})$,

(ιν) $B(0,1) \subset \cap_{k=1}^{\infty} \left(F + B(0, \frac{1}{2^k})\right)$,

(ν) $B(0,1) \subset F$. Συμπεράνετε οτι $X = F$ και συνεπώς ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.