ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 1 Μαρτίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΕΜ215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 3

1) Δείξτε οτι η διατύπωση του Θεωρήματος 2.4.1 είναι ισοδύναμη με την διατύπωση του Θεωρήματος 2.4.3. (Δηλ. δείξτε οτι Θ2.4.1 $\Rightarrow$ Θ2.4.3, η άλλη κατεύθυνση έχει αποδειχθεί.) Επίσης δείξτε οτι άλλη ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος 2.4.1 είναι η εξής:
Αν (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $F_n \subset X$ κλειστά σύνολα με κενό περιεχόμενο, τότε η ένωση $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ έχει κενό περιεχόμενο.

2) Έστω $f : I\!R \to I\!R$ μία απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση τ.ω. για κάθε $x \in I\!R$ υπάρχει $n_x \in I\!N$ τ.ω. $f^{(n_x)}(x) = 0$. Δείξτε οτι υπάρχει $a \in I\!R$ και $n_0 \in I\!N$ τ.ω. $f^{(n)}(a) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$.

3) Έστω $x \in l_p$, και $1 \leq p \leq r < \infty$. Δείξτε οτι

(α) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_r$.

(β) $\|x\|_r \leq \|x\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \|x\|_p^{\frac{p}{r}}$.

(γ) $\lim_{r\to\infty} \|x\|_r = \|x\|_\infty$.

4) Από σημειώσεις, σελ. 38, η Άσκηση 16.

5) Από σημειώσεις, σελ. 52, η Άσκηση 5.