ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 8 Μαίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

ΜΕΜ215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 10

1) Έστω $(H, <\cdot,\cdot>)$ χώρος Hilbert και u_n και v_n ακολουθίες που ανήκουν στη κλειστή μοναδιαία μπαλα $B_{cl}(0,1)$ του H τ.ω.

$$< u_n . \, v_n > \to 1 \,, \qquad n \to \infty \,.$$

α) Δείξτε οτι

$$\|u_n\| \to 1, \quad \|v_n\| \to 1, \qquad n \to \infty \,.$$

β) Δείξτε οτι

$$\|u_n - v_n\| \to 0, \qquad n \to \infty \,.$$

γ) Μπορούμε να συμπεράνουμε οτι οι (u_n) και (v_n) συγκλίνουν σε κοινό όριο;
δ) Μπορούμε να συμπεράνουμε οτι υπάρχουν υπακολουθίες (u_{k_n}) και (v_{k_n}) οι οποίες συγκλίνουν σε κοινό όριο;

2). Έστω ο χώρος $E = C([0,1])$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Ορίζουμε τα γραμμικά συναρτησοειδή

$$l_n(f) = n \int_0^{1/n} f(t)dt, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

α) Δείξτε οτι για κάθε n, το $l_n(f)$ είναι συνεχές και βρείτε τη νόρμα του.

β) Δείξτε οτι για κάθε $f \in E$, η ακολουθία $l_n(f)$ συγκλίνει στο $f(0)$ και συνεπώς η ακολουθία $l_n(f)$ ειναι φραγμένη.

γ) Είναι το γραμμικό συναρτησοειδές $l(f) := f(0)$ συνεχές;

3) Απο σελ. 134 των σημειώσεων η άσκηση 8.

4) Εστω E γραμμικός χώρος στον οποίο έχουμε ορίσει δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ με τις οποίες ο E γίνεται Banach. Υποθέτουμε οτι υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε $\|x\|_1 \le c\|x\|_2$ για κάθε $x \in E$. Δείξτε οτι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

5) Εστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στο χώρο $E = C([0,1])$ η οποία τον κάνει χώρο Banach. Υποθέτουμε οτι όταν μία ακολουθία (f_n) συγκλίνει στην $f \in E$ με τη νόρμα $\|\cdot\|$ τοτε συγκλίνει κατα σημείο στην f. Δείξτε η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την sup νόρμα.

Υποδ. Χρησιμοποιήστε το Θ. κλειστού γραφήματος.

Ορισμός Έστω X χώρος με νόρμα. Μία ακολουθία (x_n) συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ εαν για κάθε $f \in X^*$ ισχύει οτι $f(x_n) \to f(x)$. Την ασθενή σύγκλιση την συμβολίζουμε με

$$x_n \rightharpoonup x \ .$$

6) Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε οτι

α) Αν $x_n \to x$ τότε $x_n \rightharpoonup x$.

β) Τα ασθενή όρια είναι μοναδικά.

γ) Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει ασθενώς τότε η ακολουθία των νορμών $\|x_n\|$ είναι φραγμένη.

7) Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε οτι $x_n \rightharpoonup x$ εφόσον ισχύουν και τα δύο παρακάτω

α) η ακολουθία $\|x_n\|$ είναι φραγμένη,

β) για κάθε f σε ένα πυκνό υποσύνολο $M \subset X^*$ έχουμε οτι $f(x_n) \to f(x)$.

8) Απο σελ. 134-135 των σημειώσεων οι ασκήσεις 9, 13, 17, 18.