ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 15 Φεβρουαρίου 2018
Διδάσκων: Σ. Φίλιππας

# ΜΕΜ215 Συναρτησιακή Ανάλυση

Φυλλάδιο 1

**Ορισμός:** Έστω $d_1$, $d_2$ δύο μετρικές που ορίζονται στο ίδιο σύνολο $X$. Οι δύο μετρικές λέγονται Lipschitz ισοδύναμες αν υπάρχει $c > 0$ τ.ω. για κάθε $x_1,\ x_2 \in X$

$$\frac{1}{c}\ d_2(x_1, x_2) \leq d_1(x_1, x_2) \leq c\ d_2(x_1, x_2)\ .$$

**1**). Έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος και $\tilde{d}(x_1, x_2) = \min\{1, d(x_1, x_2)\}$. Δείξτε οτι η $\tilde{d}$ είναι μετρική και οτι οι $d$ και $\tilde{d}$ είναι τοπολογικά ισοδύναμες. Είναι Lipschitz ισοδύναμες;

**2**) Αν $A \subset X$ δείξτε οτι

(ι) $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$

(ιι) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$

**3**) Υπό τις προυποθέσεις της Ασκησης 6 (κεφ. 1) δείξτε οτι

$$\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\bar{A})\ .$$

**4**) Έστω $X$, $Y$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αν το $A \subset X$ είναι συμπαγές τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές.