Διάλεξη 1 Πρόοδος 25/11 17:00-19:00 03/11/2026

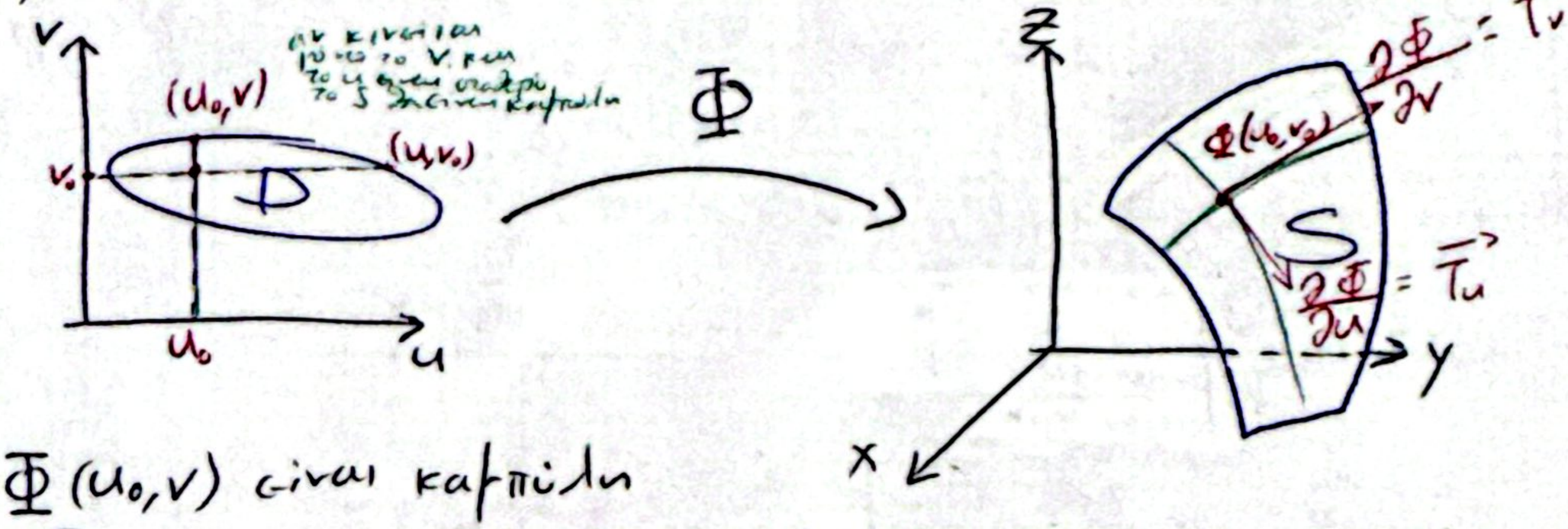
ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Ορισμός: Παραμετρικοποιημένη επιφάνεια είναι μία (διανυσματική) συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^3$

$\rightsquigarrow \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Η επιφάνεια είναι η εικόνα $S = \Phi(D)$

Η Φ είναι διαχωριστή $C^1, C^2, \dots$ αν οι x, y, z είναι διαχωριστές $C^1, C^2, \dots$



Η $\Phi(u_0, v)$ είναι καμπύλη

$\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα και

η $\Phi(u, v_0)$ είναι καμπύλη, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα

$\rightsquigarrow$ Ελέγχουμε το σημείο $\Phi(u_0, v_0)$

Έχουμε τα 2 εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ (T_v) και $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ (T_u) υπολογισμένα στο σημείο (u_0, v_0)

Τα $\vec{T_u}, \vec{T_v}$ είναι στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$. Τότε το $\vec{T_u} \times \vec{T_v} = \vec{n}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\vec{n} = 0$

εξωτερικό γινόμενο

$x_0 = x(u_0, v_0)$

$y_0 = y(u_0, v_0)$

$z_0 = z(u_0, v_0)$

Ορισμός: Η επιφάνεια $S = \Phi(D)$ λέμε ότι είναι λεία στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ αν $\vec{T}_{u_0} \times \vec{T}_{v_0} \neq 0$

Αν αυτό συμβαίνει σ' όλα τα σημεία λέμε ότι η επιφάνεια είναι λεία (χωρίς να κάνουμε αναφορά σε συγκεκριμένο σημείο)

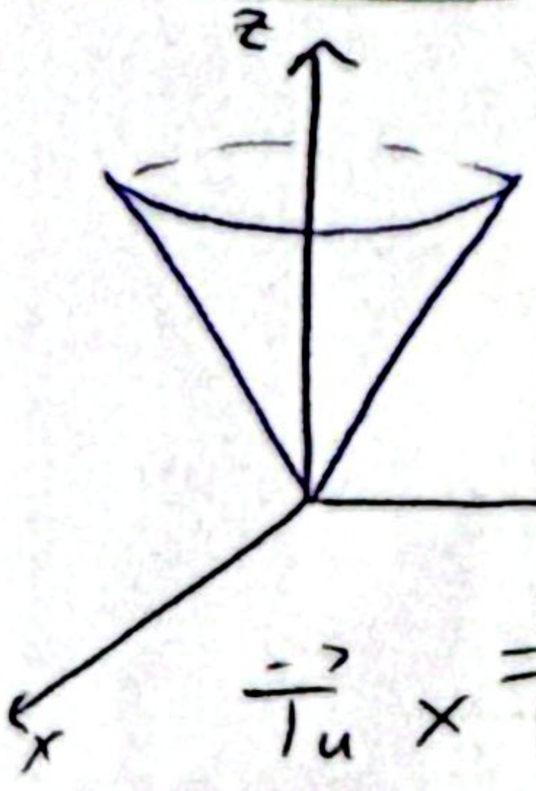
Παράδειγμα 1

Έστω η επιφάνεια $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$

$x = u\cos v, y = u\sin v, z = u, u \geq 0$

κώνος

Η Φ είναι $C^k, k \geq 1$



Έστω (u, v) - τυχαίο και υπολογίζουμε

$\vec{T}_u = (\cos u, \sin u, 1)$

$\vec{T}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u & \sin u & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(-u\cos v, u\sin v, u)}_{\vec{n}}$$

$$\vec{n}(u, v) = (-u\cos v, u\sin v, u) \stackrel{?}{=} 0 \iff \begin{cases} u\cos v = 0 \\ u\sin v = 0 \\ u = 0 \end{cases} \quad u = 0$$

$\Phi(u = 0, v) = (0, 0, 0)$

Η Φ δεν είναι λεία στο $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Η Φ είναι παντού αλλού

ΚΑΜΠΥΛΕΣ

- $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$, $\vec{\sigma}'(t) = (1, 2t)$

$\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2} \neq 0 \ \forall t$

Η $\vec{\sigma}$ είναι αλλού και λεία

- $\vec{\rho}(s) = (s^3, s^6)$, $\vec{\rho}'(s) = (3s^2, 6s^5)$

$\|\vec{\rho}'(s)\| = \sqrt{9s^4 + 36s^{10}}$

Η $\vec{\rho}$ είναι αλλού και λεία παντού εκτός απ' το $s = 0$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το εσωτερικό διανυσματικό διανύσματος δίνει αριθμό. Το εξωτερικό διανυσματικό διανύσματα δίνει διάνυσμα

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$
$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\dots$$

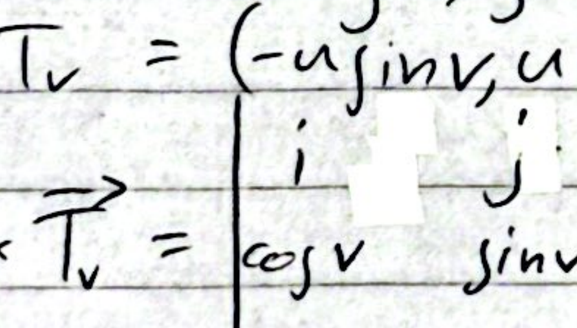
$\rightsquigarrow \vec{a}\times\vec{b}\perp \mathrm{span}(\vec{a},\vec{b})$

Από γραμμικά $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ ίδιο κάθετο αλλά αντίθετο προσανατολισμό } φαίνεται και από τον κανόνα του δεξιού χεριού

$\vec{a}\times\vec{a}=0$

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sin\theta$, θ-γωνία μεταξύ $\vec{a},\vec{b}$

Πχ



Εμβαδόν παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{a},\vec{b}$: $\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|\sin\theta=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

Παράδειγμα 2

$\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $\quad x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2+v^2$

i/ Ποιος ορίζεται εφαπτόμενος επίπεδος

ii/ Βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα στο σημείο $\Phi(1,0)$

$\rightsquigarrow$ i/ $T_u=(\cos v,\sin v,2u)$

$T_v=(-u\sin v,u\cos v,2v)$

$$\vec{n}=\vec{T}_u\times\vec{T}_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & u \\ -u\sin v & u\cos v & 2v \end{vmatrix}=(2v\sin v-2u^2\cos v,-(2v\cos v+2u^2\sin v),u)$$

Πότε $\vec{n}=\vec{0}$;

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2v\sin v-2u^2\cos v=0 \\ -2v\cos v+2u^2\sin v=0 \\ u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v\sin v=0 \\ v\cos v=0 \\ u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix}$$

$\therefore \vec{n}\neq 0$ εκτός από το σημείο $\Phi(0,0)=(0,0,0)$
(η Φ δεν είναι ομαλή)

~> ii/ $\Phi(1,0) = (1, 0, 1) = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{n}(u,v) = (2v\sin v - 2u^2\cos v, -2v\cos v - 2u^2\sin v, u)$

$\vec{n}(1,0) = (-2, 0, 1)$

∴ εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου:

$(\underbrace{x - x_0}_{1}, \underbrace{y - y_0}_{0}, \underbrace{z - z_0}_{1}) \cdot (-2, 0, 1) = 0$

$(x-1)(-2) + (z-1)\cdot 1 = 0 \iff -2x + z + 1 = 0$

Ελένη Σταματίου