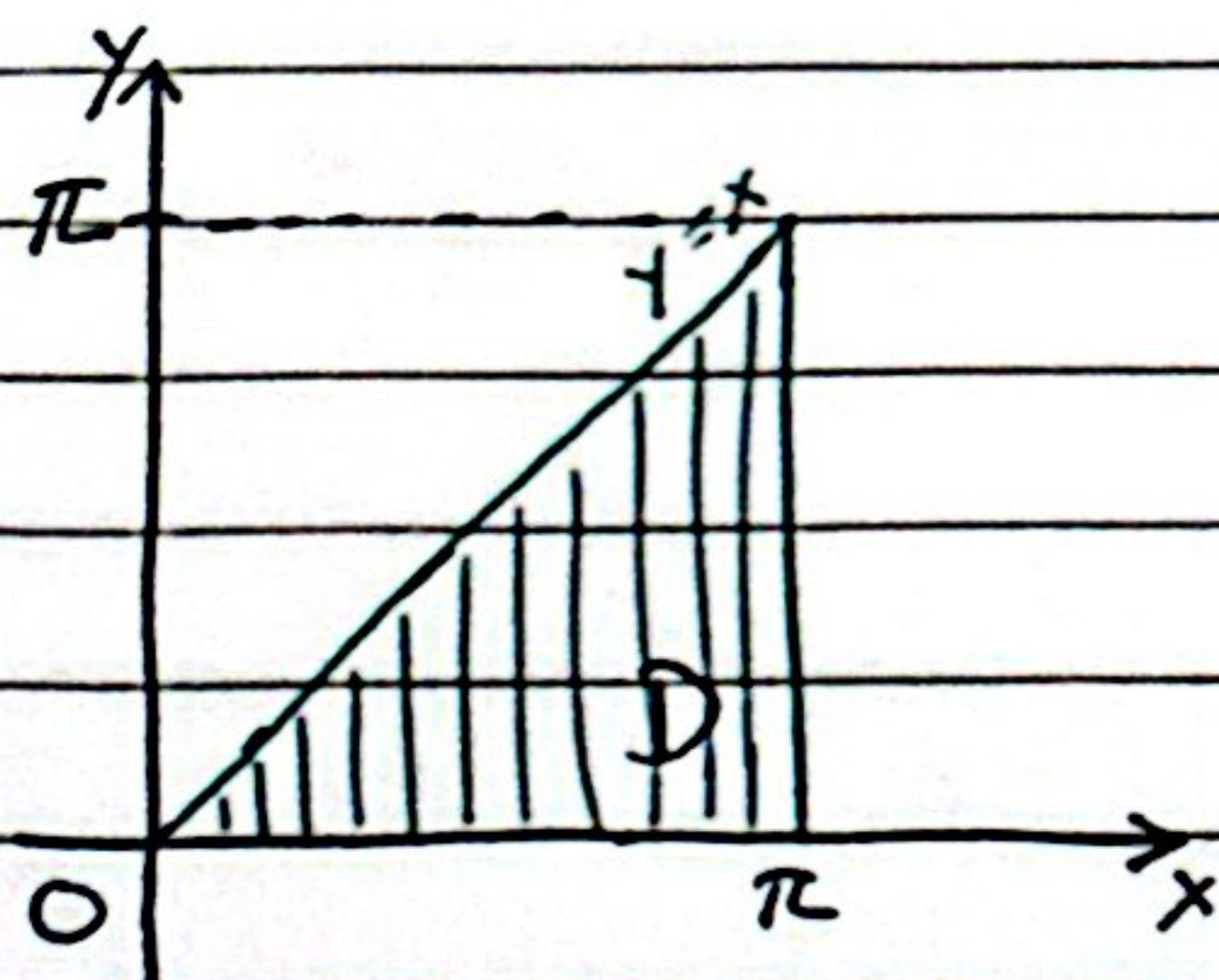


Διάλεξη 3

29/09/2026

ΑΛΛΑΓΗ ΣΕΙΡΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (Συνέχεια)



$$I = \int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx dy = ?$$

Υποχρεωτικά σχεδιάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης και το περιγράφουμε με άλλο τρόπο

$$D: 0 \leq y \leq \pi$$

$$y \leq x \leq \pi$$

ισοδύναμα

$$D: 0 \leq x \leq \pi$$

$$0 \leq y \leq x$$

ΟΤΩΣΤΕ
$$I = \int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^\pi \left[y \frac{\sin x}{x} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, f -συνεχής, $D \subset \mathbb{R}^2$, τότε $\exists (x_0, y_0) \in D$ τέλ

$$\int_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) \cdot A(D)$$

Εμβαδόν του D

Απόδειξη (όχι αυστηρή)

f -συνεχής άρα $m \leq f(x, y) \leq M$

ελάχιστη τιμή μέγιστη τιμή

Ολοκληρώνουμε στο D:

$$mA(D) \leq \int_D f dA \leq MA(D) \Leftrightarrow$$

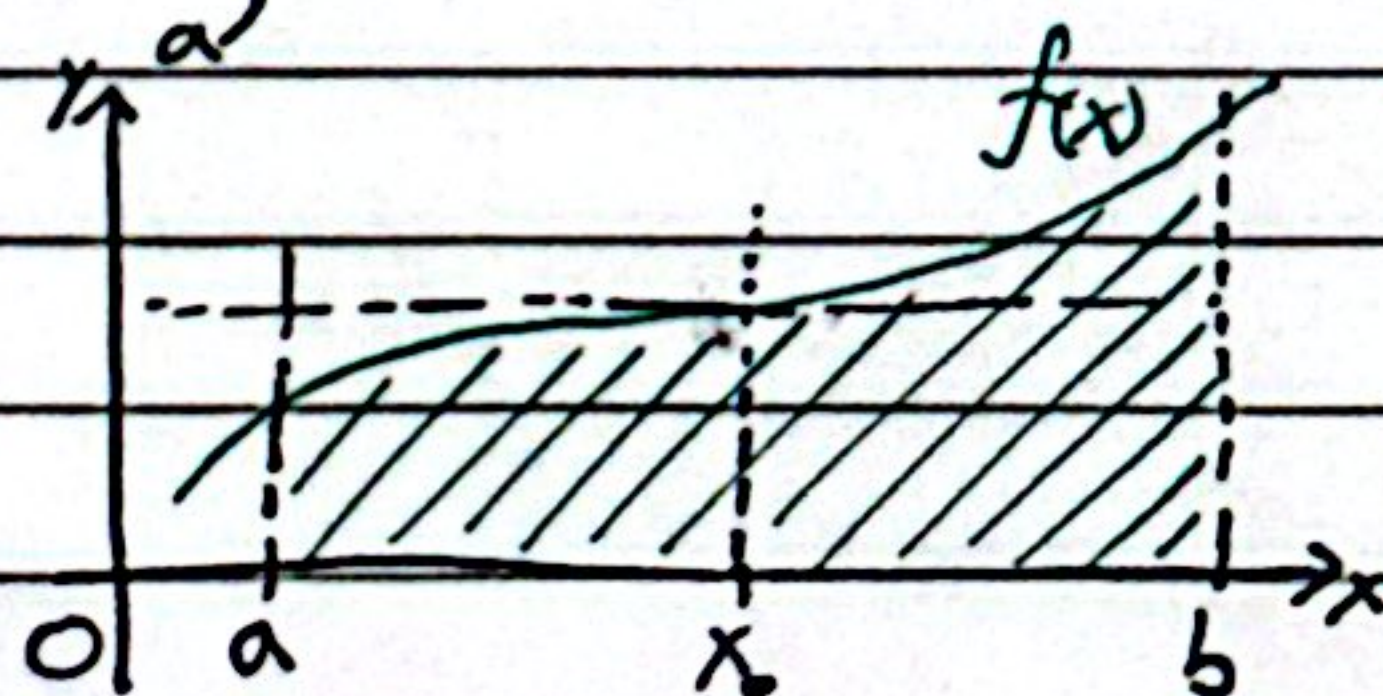
$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{A(D)} \int_D f dA \leq M$$

Από δείξηνα ενδιάμεσος τιμής $\exists (x_0, y_0) \in D$ τέλ $f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y) dA$

~> Αντίστοιχα στη 1η διάσταση:

$\exists x_0 \in (a, b)$ τέλ

$$\int_a^b f dx = f(x_0)(b-a)$$



ΤΡΙΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορίζουμε $\int_W f(x,y,z) dV$ ή $\iiint f dV \dots$

Ολοκληρώνουμε συνάρτηση τριών μεταβλητών

Το ορίζουμε σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $\Pi = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$

Αν $W = \Pi$ τότε:

$$\int_{\Pi} F(x,y,z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f F(x,y,z) dz dy dx$$

$$S_n = \sum_{i,j,k=1}^n f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Αν $\lim S_n$ τότε είναι το τρίτο ολοκλήρωμα

Παράδειγμα

Έστω $\Pi = (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \leadsto$ παρακάτω κύβος

$$\int_{\Pi} z e^{x+y} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z e^{x+y} dx dy dz$$

$$z e^y \int_0^1 e^x dx = (e-1) z e^y$$

$$\leadsto \text{Αρα } \int_0^1 \int_0^1 (e-1) z e^y dy dz$$

$$z(e-1) \int_0^1 e^y dy = z(e-1)^2$$

$$\leadsto \text{Αρα } \int_0^1 z(e-1)^2 dz = \frac{(e-1)^2}{2}$$

Σε άλλα χωρία

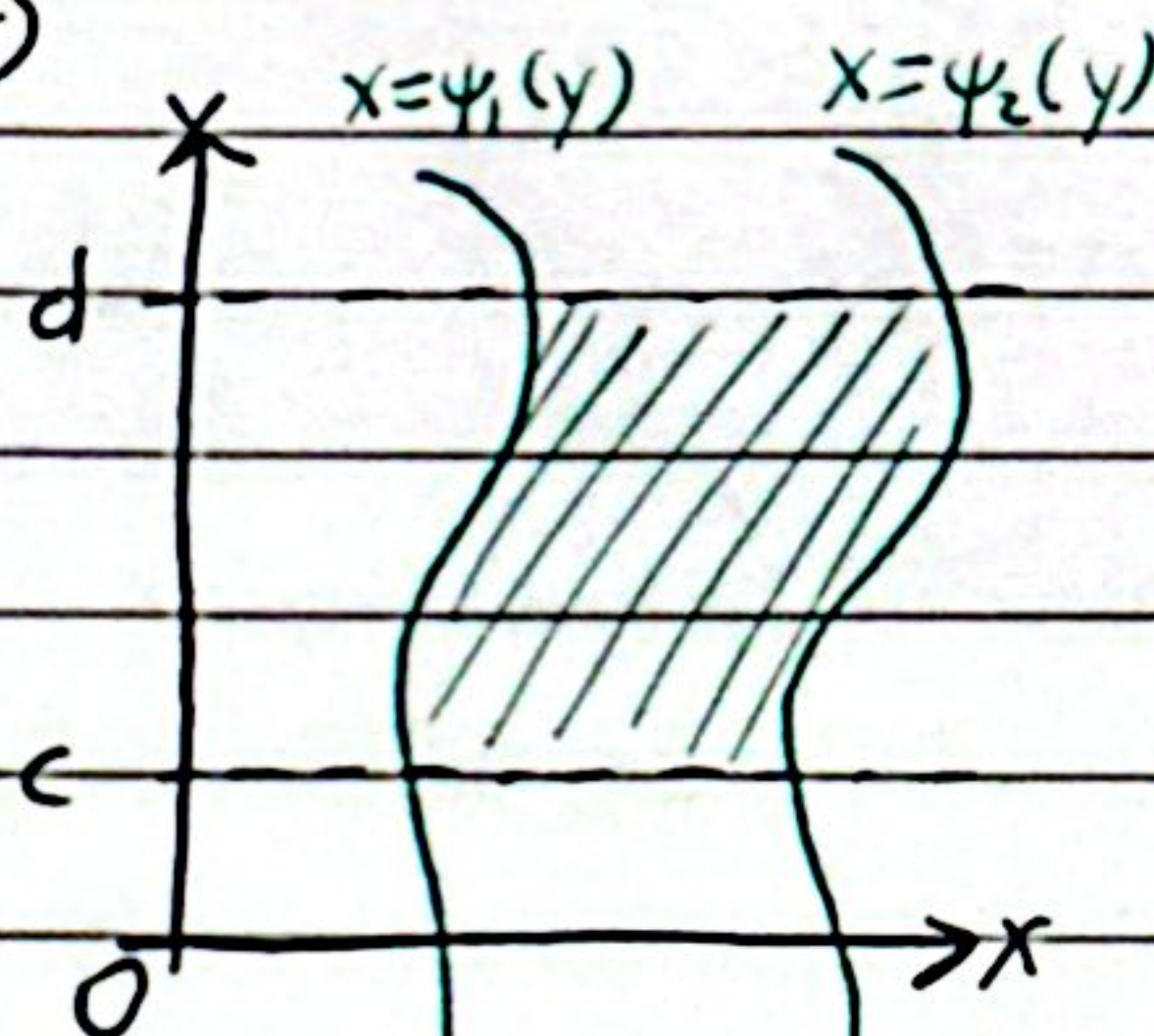
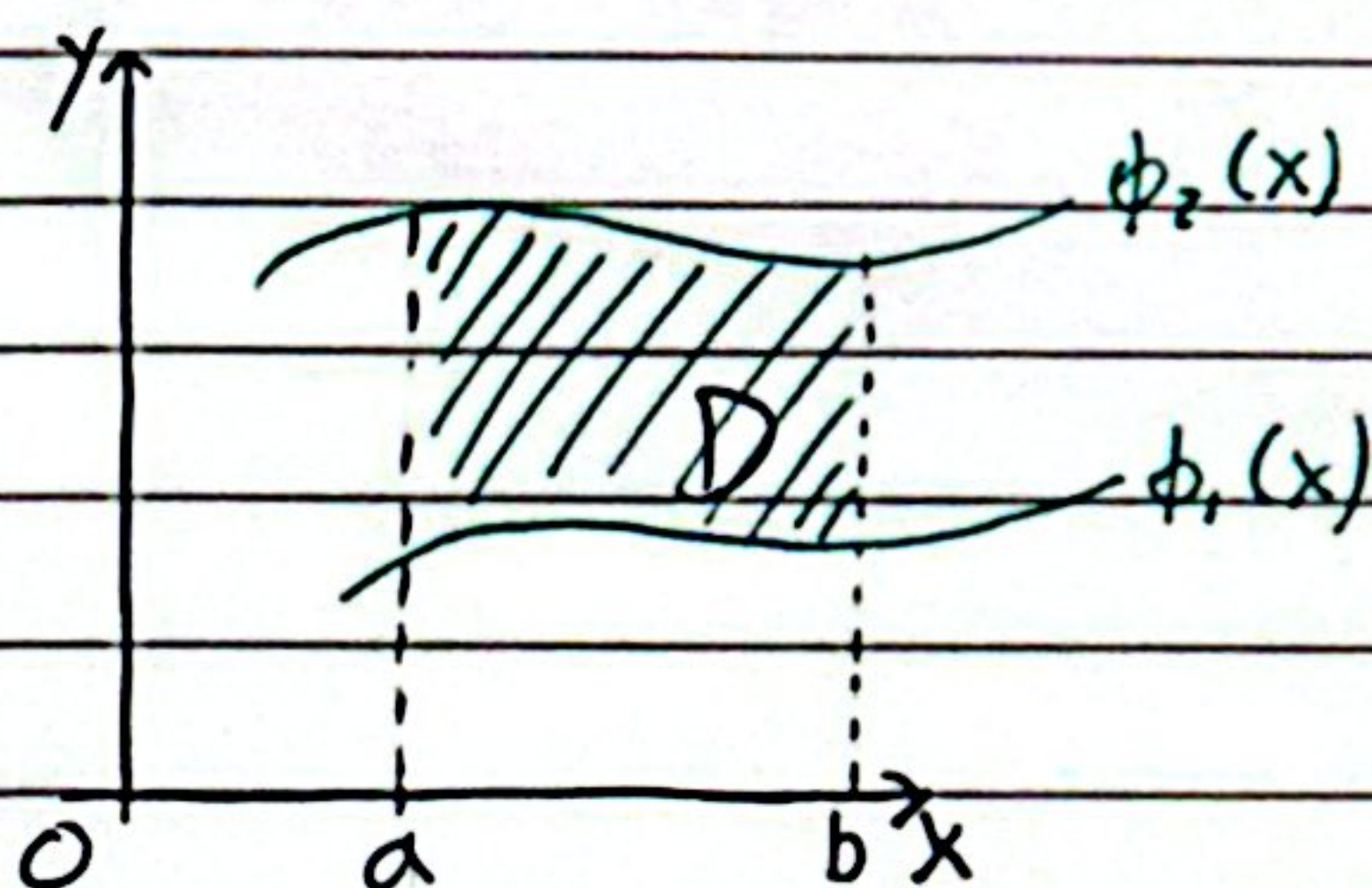
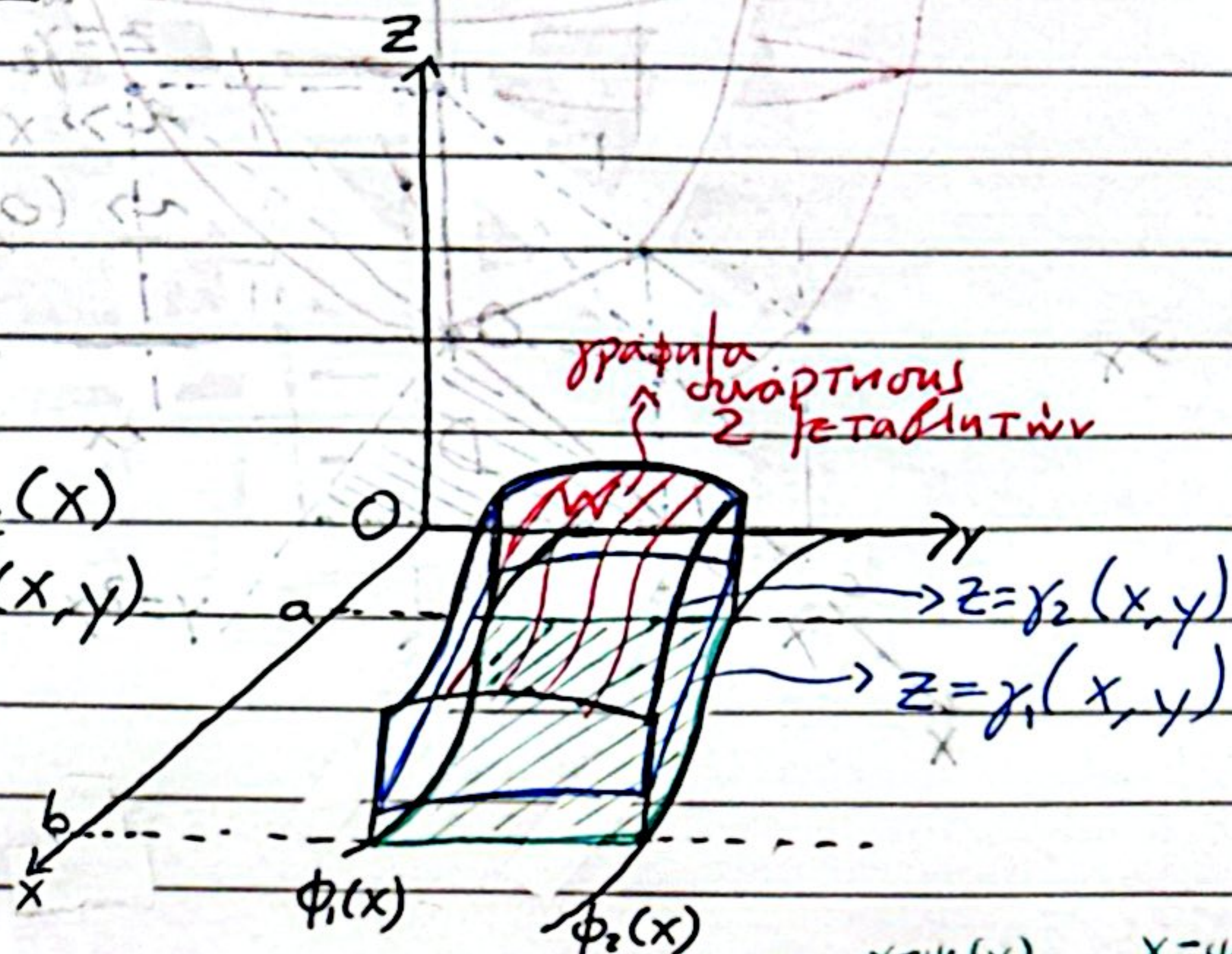
$(W) \subset \mathbb{R}^3$

χωρίο ολοκλήρωσης

$W: a \leq x \leq b$

$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$

$\gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)$



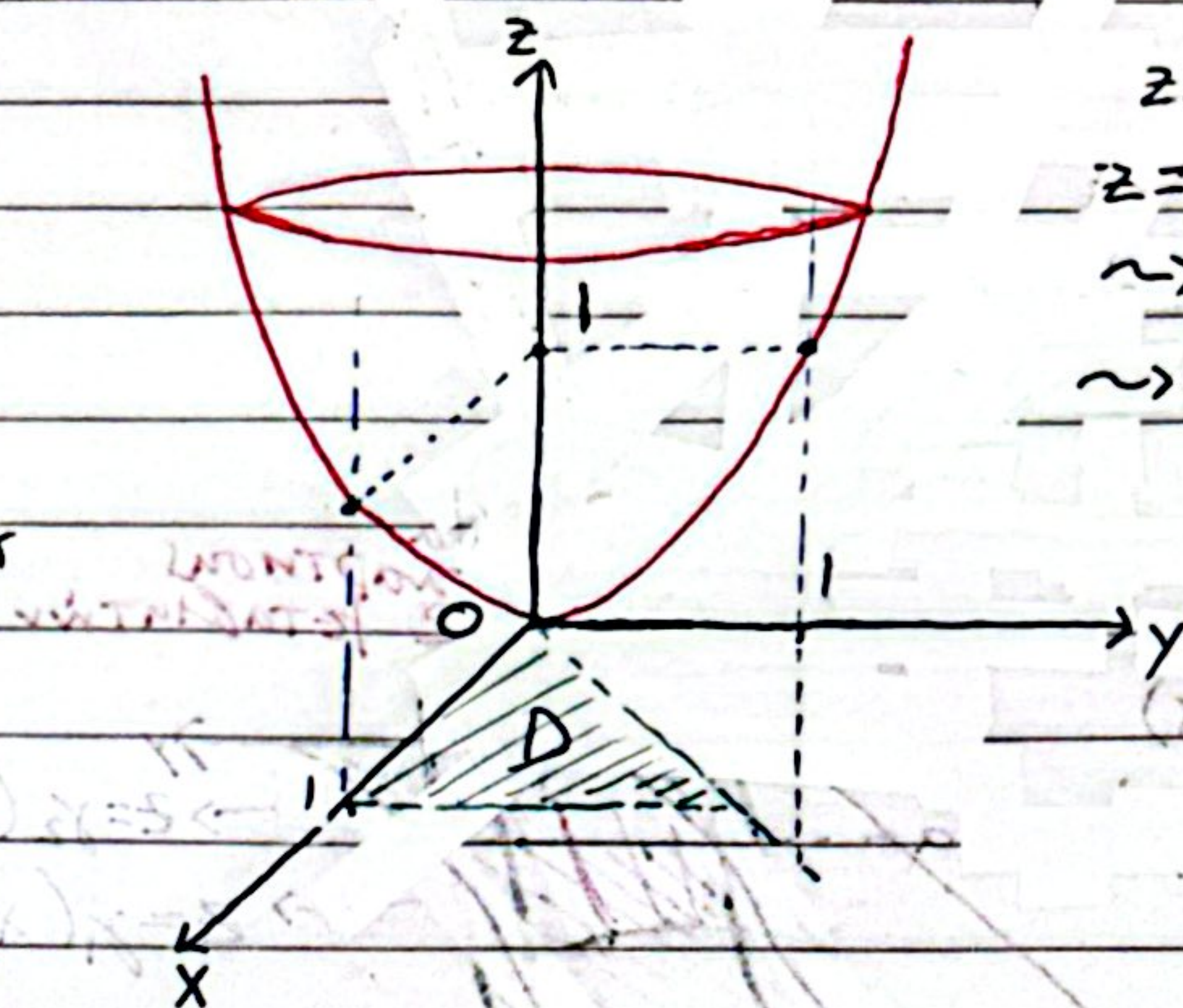
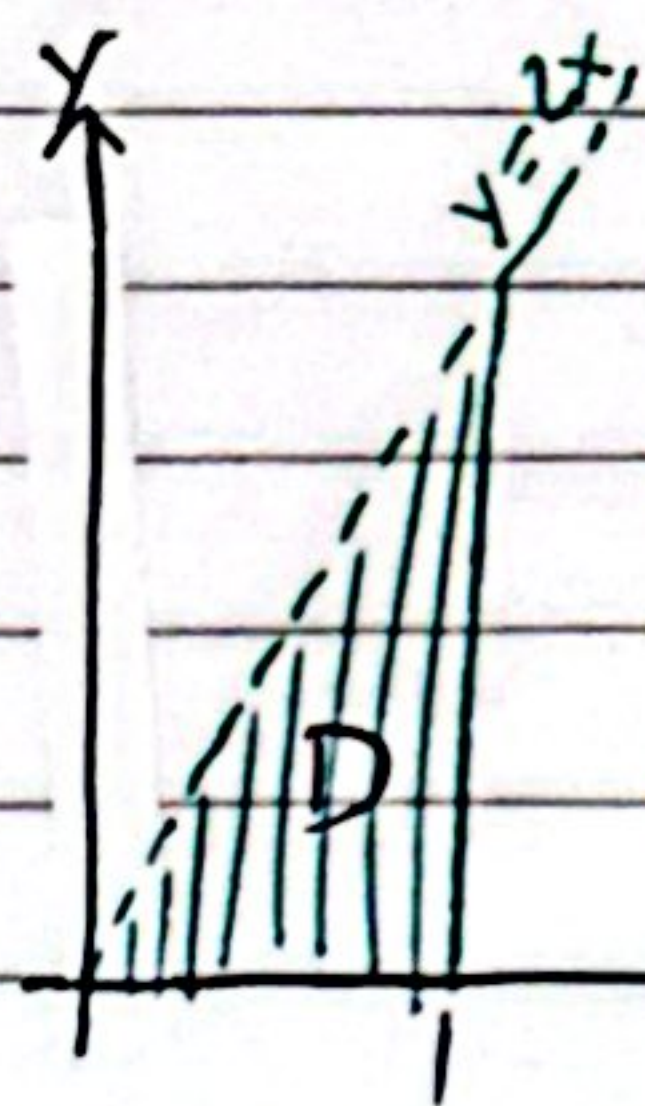
$$\int_W f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx = \int_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

συνάρτηση του (x,y)

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε $I = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} 1 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (x+y-x^2-y^2) dy dx =$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 \left(4x^2 - \frac{14}{3} x^3 \right) dx = \dots = \frac{1}{6}$$



$$z = \gamma_1(x, y) = x^2 + y^2$$

$$z = \gamma_2(x, y) = x + y$$

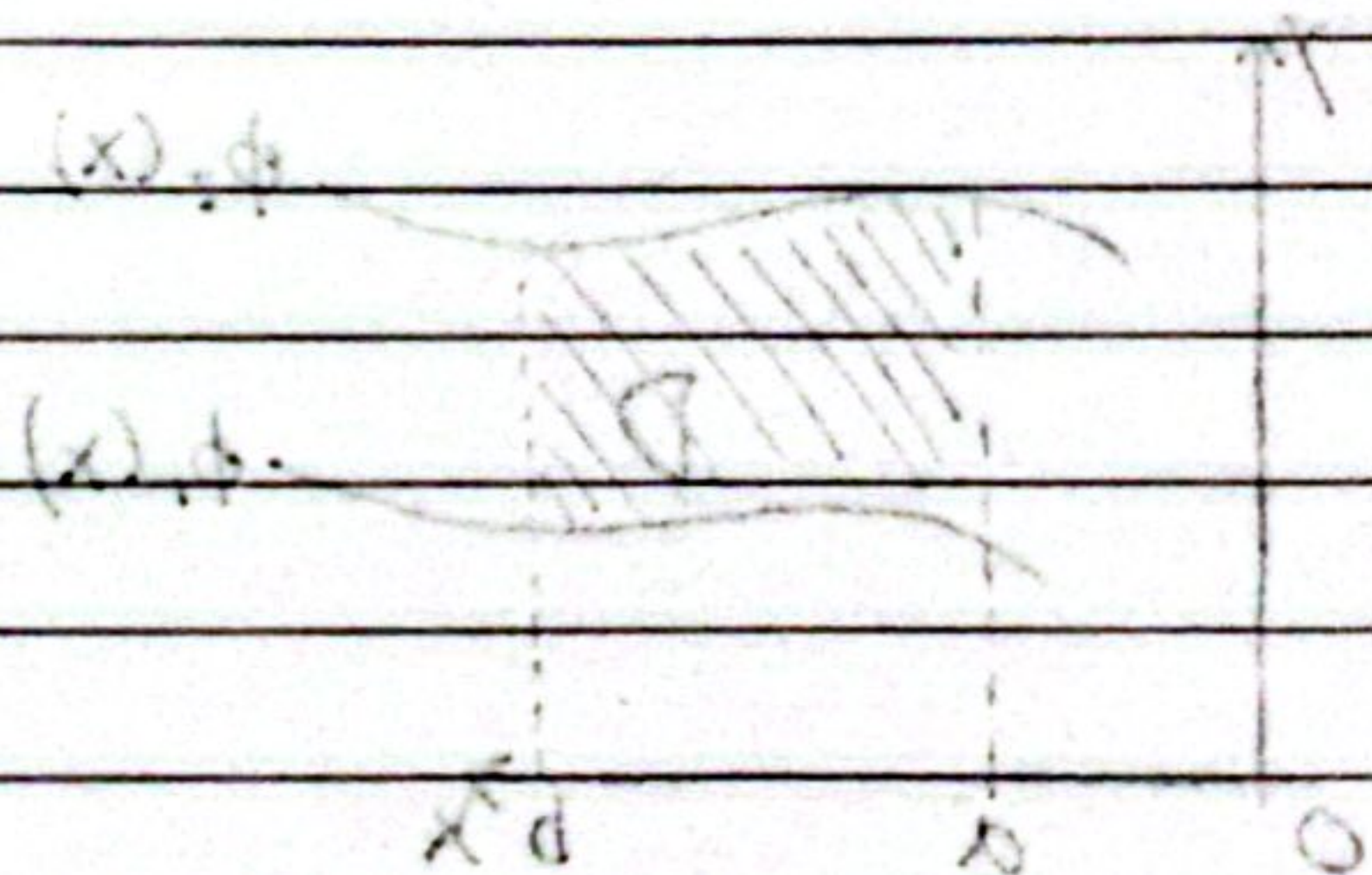
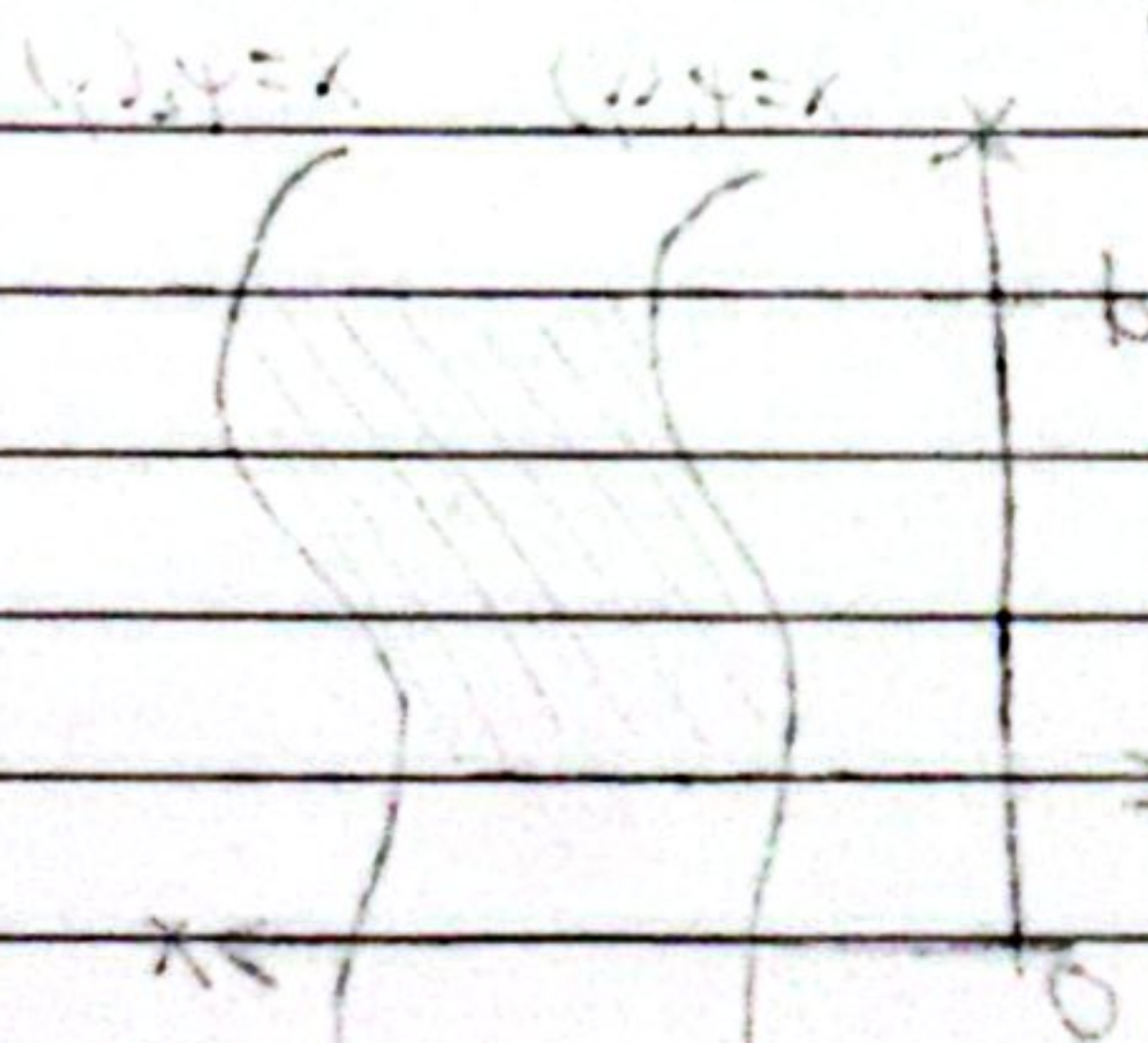
$$\leadsto x + y - z = 0 \text{ (επιπέδο)}$$

$$\leadsto (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$$

$$D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$(x, y) \in D \Rightarrow (x, y) \in D$$

$$(x, y) \in D \Rightarrow (x, y) \in D$$



$$\int_D (x^2 + y^2 - x - y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 - x - y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 (1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{x(1-x)}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 (1 - 2x + x^2)}{2} + \frac{(1 - 3x + 3x^2 - x^3)}{3} - \frac{x - x^2}{2} - \frac{1 - 2x + x^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3} - \frac{x - x^2}{2} - \frac{1 - 2x + x^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

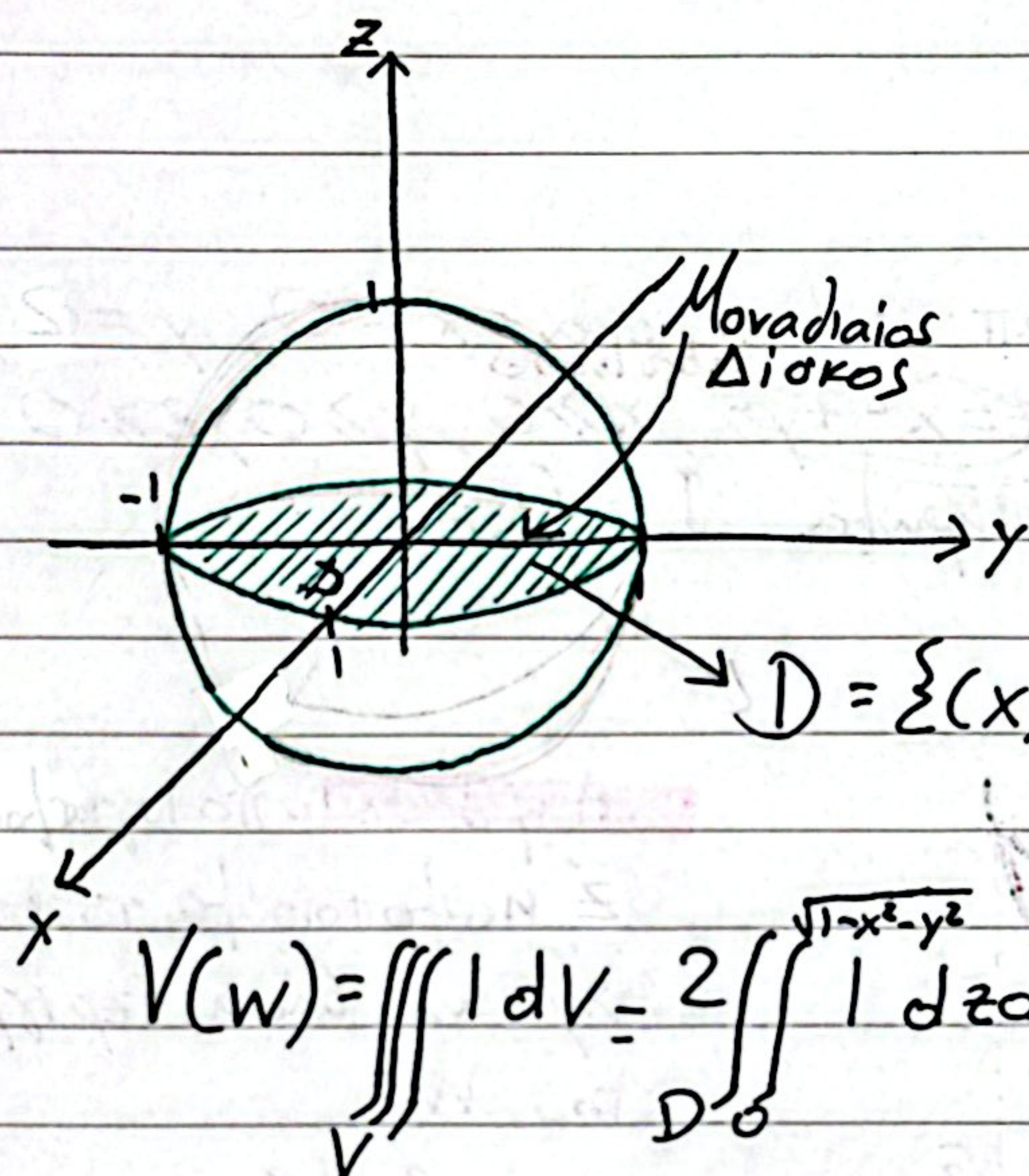
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Παραδείγματα

Αν W - η σφαιρική φέουσα, τότε $V(W) = \frac{4\pi}{3}$



Λόγω συμμετρίας υπολογίζουμε τον όγκο της φέουσας και πολλαπλασιάζουμε επί 2

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$V(W) = \iiint_V 1 \, dV = 2 \int_D \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dx \, dy =$$

$$= 2 \int_D (1-x^2-y^2)^{1/2} \, dx \, dy =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} \, dy \, dx$$

Γιατί το πάνω άκρο του ολοκληρώματος είναι

$$\sqrt{1-x^2-y^2} :$$

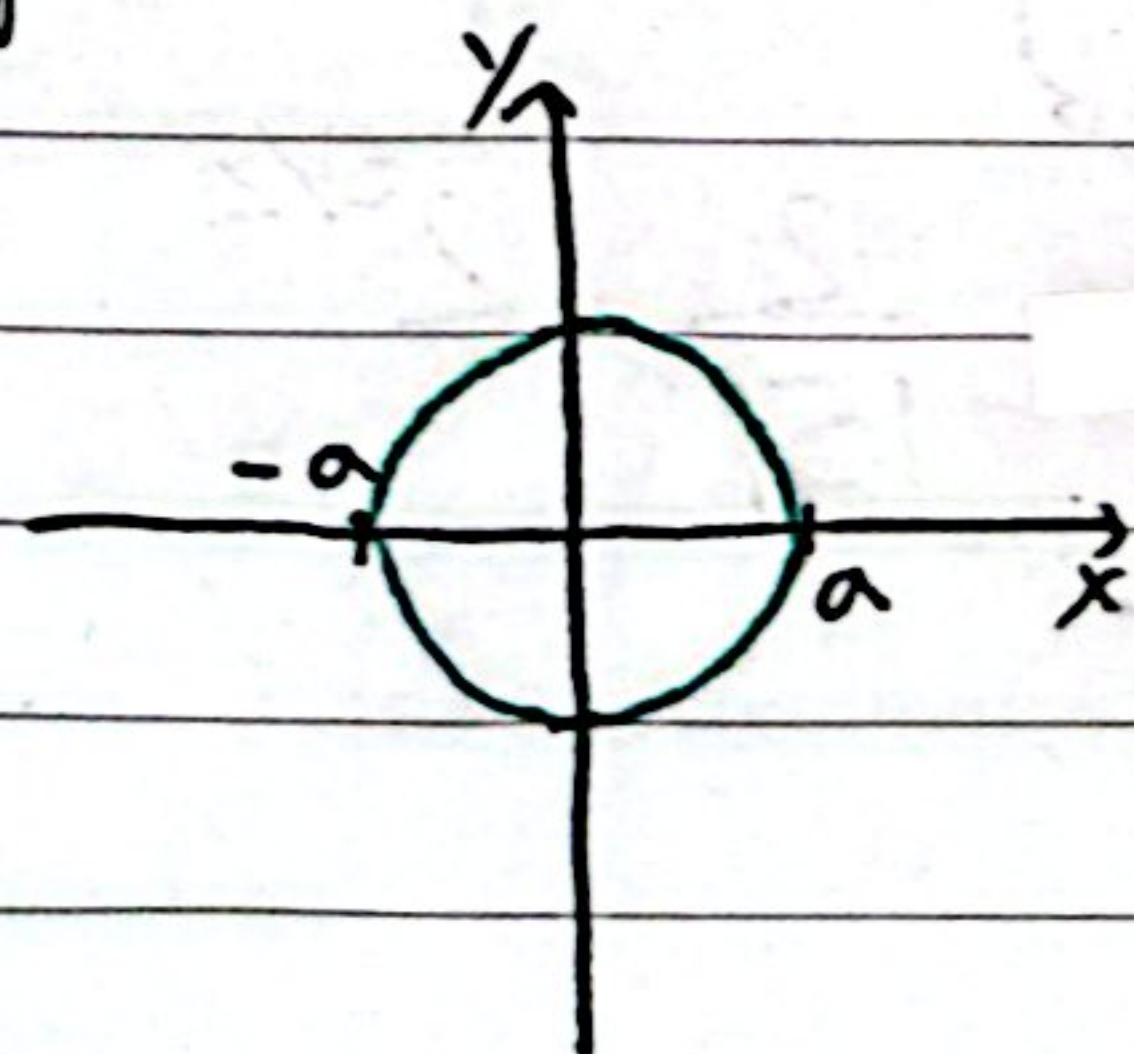
~> Από την εξίσωση της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2}, z \geq 0$$

Είναι της μορφής $\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{1/2} \, dy$

για $a = \sqrt{1-x^2}$



$$\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{1/2} \, dy = 2 \int_0^a (a^2 - y^2)^{1/2} \, dy =$$

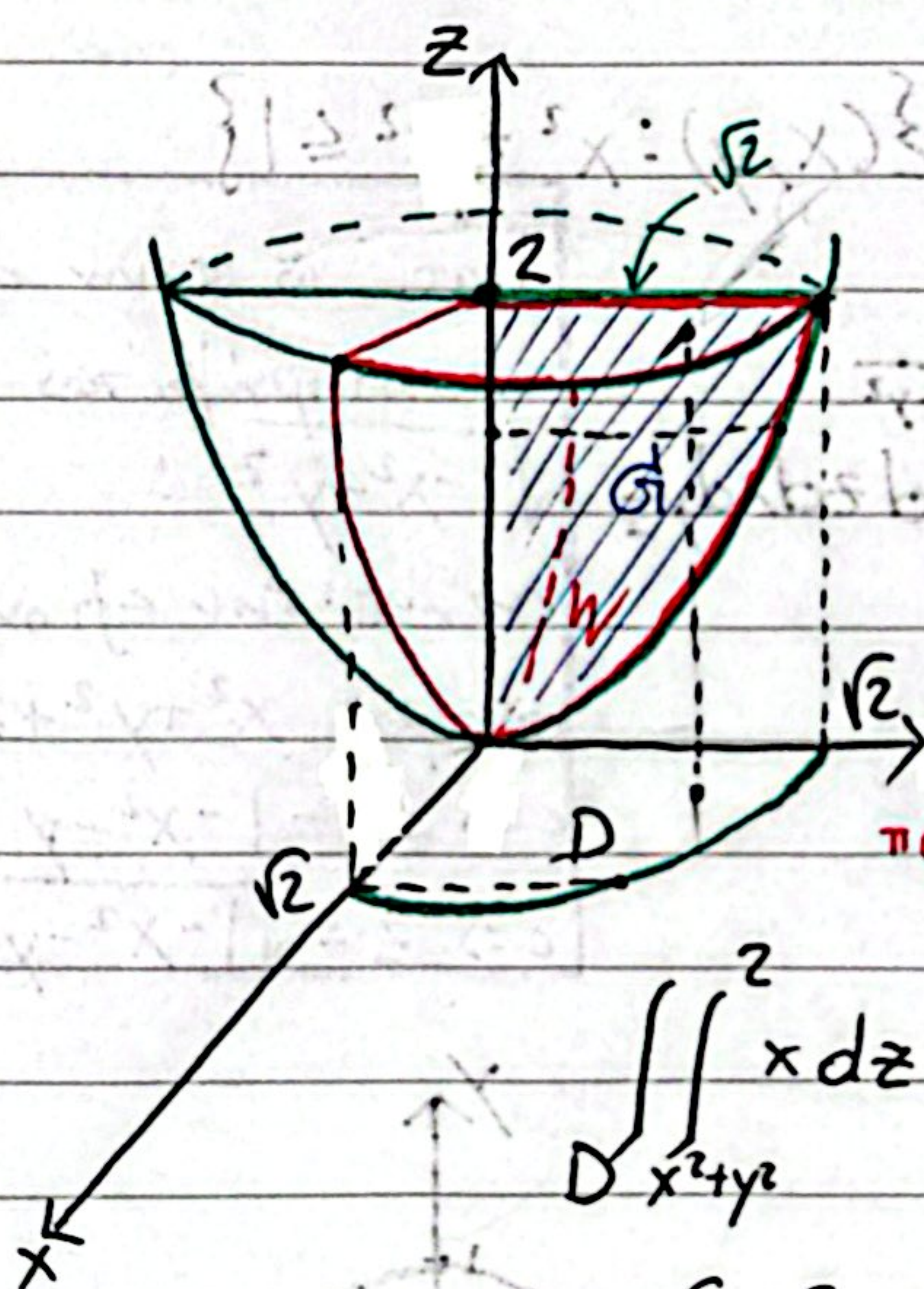
$= 2 \times (\text{εμβαδόν κάτω απ' το γραφικό της } f(x,y) = (a^2 - y^2)^{1/2} = 2 \times (\text{εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας } a) = \pi a^2 = \pi (1-x^2)$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα:

$$= 2\pi \int (1-x^2) dx = \dots$$

Παράδειγμα 2

Το W φράσσεται απ' τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=2$ και την επιφάνεια $z=x^2+y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_W x dV$



α' τρόπος υπολογισμού:

Χρησιμοποιούμε το επίπεδο xy ως βάση περιγραφής του W

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = 0 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{z}$$

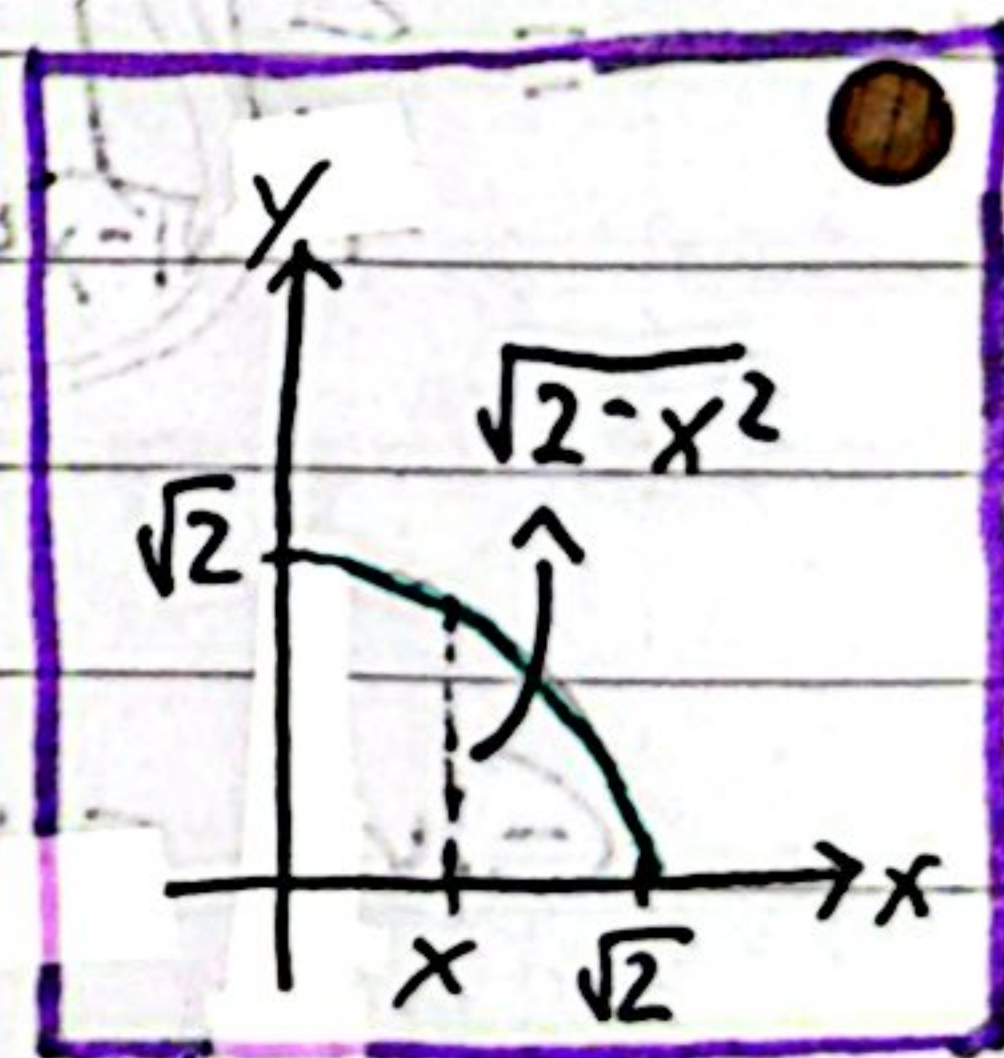
$$\int_D \int_{x^2+y^2}^2 x dz dx dy = \int_D x (2 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x (2 - x^2 - y^2) dy dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left[(2x - x^3)y - \frac{y^3}{3}x \right]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}x(2-x^2)^{3/2} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{3/2} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{5} (2-x^2)^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \dots = \frac{2}{15} \cdot 2^{5/2}$$



6' τρόπος υπολογισμού:

χρησιμοποιούμε το yz

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{z} \\ 0 \leq x \leq \sqrt{z-y^2} \end{array} \right\} \text{ περιγραφή του } \Omega$$

$$I = \int_{\Omega} x dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x dx dy dz$$

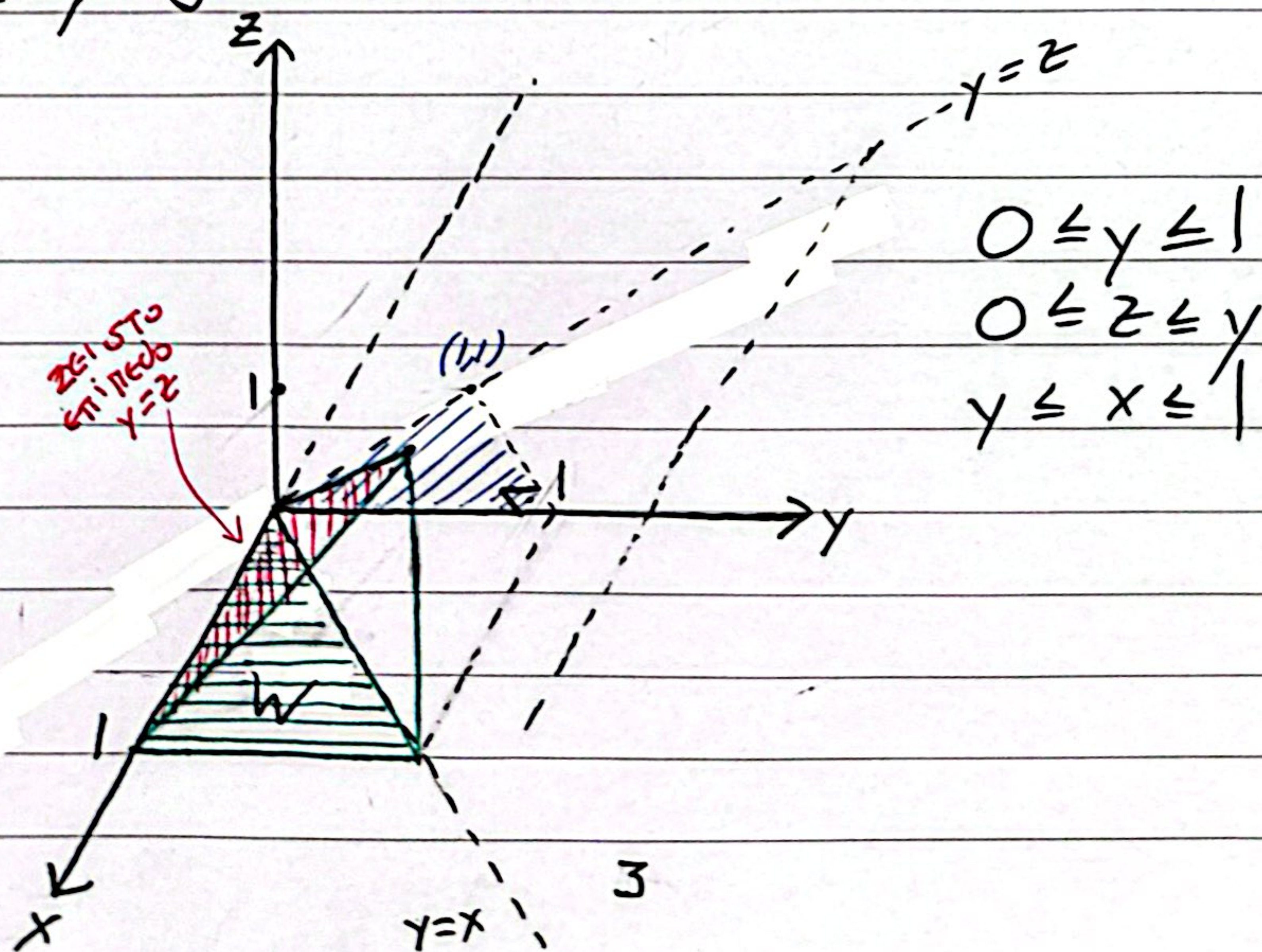
$$\begin{aligned} \leadsto I &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} (z - y^2) dy dz = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[zy - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} dz \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 z^{3/2} dz = \dots = \frac{2}{15} \cdot 2^{5/2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Γράψτε το ολοκλήρωμα $\int_0^x \int_0^y \int_0^x f dz dy dx$ με άλλους

τρόπους (με αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq y \end{array} \right\} \text{ (W) τετράεδρο}$$



$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^1 f dx dz dy$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ z \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f dx dy dz$$