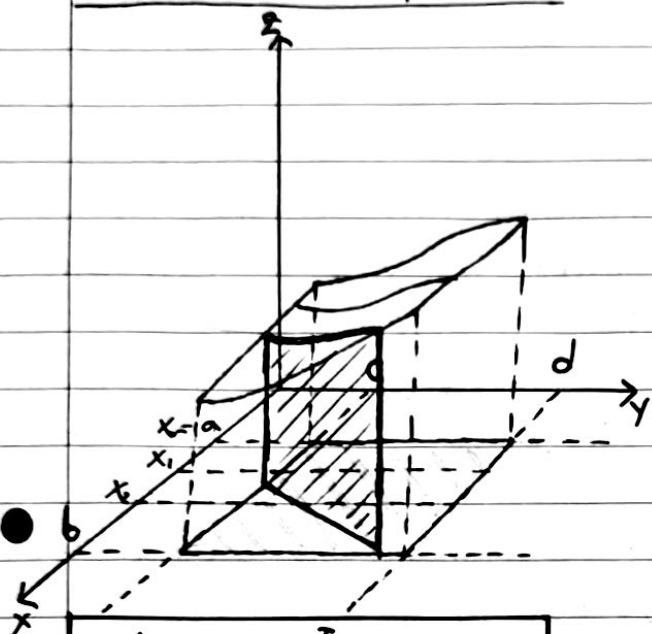
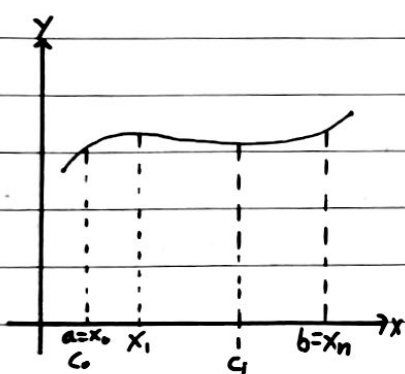


# ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ( $\mathbb{R}^2$ )



$R = [a, b] \times [c, d]$   
Θέλουμε να ορίσουμε το  
 $\int_R f(x, y) dA$   
ή  $\iint_R f(x, y) dA$   
ή  $\iint_R f(x, y) dx dy$   
και να μας δίνει τον  
όγκο κάτω απ' το γράφημα  
της  $f$

Από ΑΠ I

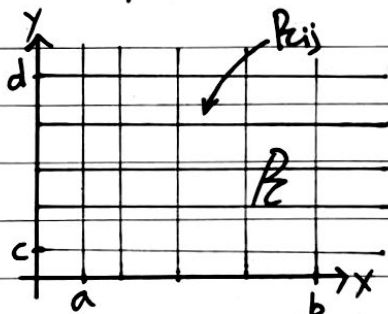


$\int_a^b f(x) dx = \text{εμβαδόν κάτω απ' το γράφημα}$

Αν υπάρχει όριο στο άθροισμα  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$

καθώς  $n \rightarrow +\infty$ , τότε το ονομάζουμε ολοκλήρωμα της  $f$   $\int_a^b f(x) dx$

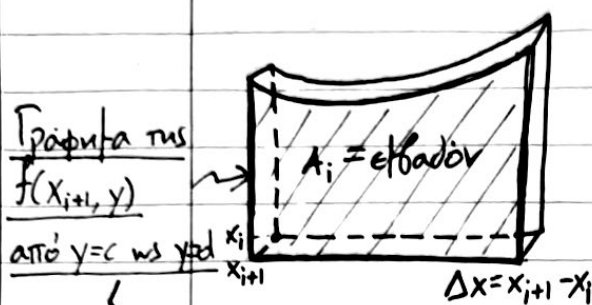
→ Κάνουμε το ίδιο:



$$\sum_{i,j=0}^n f(c_{ij}) (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

Αν υπάρχει το όριο του καθ'  $i, j \rightarrow \infty$ , τότε το ονομάζουμε διπλό ολοκλήρωμα στο ορθογώνιο  $R$  και το συμβολίζουμε  $\iint_R f(x, y) dA$

Πως το υπολογίζουμε:



$$\therefore A_i = \int_c^d f(x_{i+1}, y) dy \quad (1)$$

Αν έχει όγκο  $V_i$ , τότε:

$$\int_R f dA = V = \sum_i V_i = \sum_i A_i \cdot \Delta x = \sum_i \left\{ \int_c^d f(x_{i+1}, y) dy \cdot \Delta x \right\} \Rightarrow$$

(1)

$\Rightarrow$  Δεν υπάρχει εξάρτηση απ' το  $y$

Αν  $i \rightarrow +\infty$ :  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1**

Έστω  $f: R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$ -συνεχής

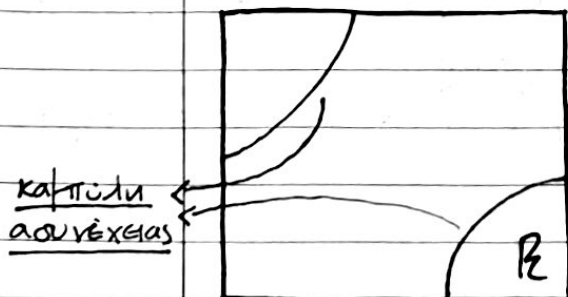
Τότε  $\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx =$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2**

$f: R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$ -φραγμένη και ασυνεχής.

Αν η ασυνέχεια είναι επιτρεπτή μόνο σε καμπύλες που είναι γράφημα συνεχών, τότε η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη



## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

### Γραμμικότητα

$$\int_R (f+g) dA = \int_R f dA + \int_R g dA$$

### Ομογένεια

$$\int_R c f dA = c \int_R f dA, \quad c \in \mathbb{R}$$

### Μονοτονία

$$f \geq g \Rightarrow \int_R f dA \geq \int_R g dA$$

### Προσθετικότητα (προϋποθέτει να έχουμε 2 περιοχές)

$$\int_{R_1 \cup R_2} f dA = \int_{R_1} f dA + \int_{R_2} f dA, \quad R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

→ Συνέπεια της μονοτονίας:

$$\left| \int_R f dA \right| \leq \int_R |f| dA \quad \text{διότι:}$$

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$-\int_R |f| dA \leq \int_R f dA \leq \int_R |f| dA$$

$$\left| \int_R f dA \right| \leq \int_R |f| dA$$

## ΘΕΩΡΗΜΑ FUBINI

A. Αν  $f$  συνεχής (όπως στο Θ1) στο  $R = [a, b] \times [c, d]$ ,  
τότε  $\int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f dy dx = \int_c^d \int_a^b f dx dy$

B. Αν  $f$  όπως στο Θ2 τότε αν  $\int_c^d f(x, y) dy \exists \forall x \in [a, b]$ ,  
τότε  $\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_R f(x, y) dA$

Αντίστοιχα

αν  $\int_a^b f(x, y) dx \exists \forall y \in [c, d]$ ,  $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx =$   
 $= \int_R f(x, y) dA$

Παράδειγμα 1

$R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Βρείτε το  $\int_R (x^2 y + y^2) dA$

α' τρόπος  $\int_R (x^2 y + y^2) dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 y + y^2) dx dy$   
 $y$  - σταθερά

$$\leadsto \int_0^1 (x^2 y + y^2) dx = \left[ y \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_0^1 = \frac{y}{3} + y^2$$

$$\therefore \int_0^1 \left( \frac{y}{3} + y^2 \right) dy = \left[ \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

- $$\text{1' τρόπος} \quad \int_R (x^2y + y^2) dA = \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 (x^2y + y^2) dy}_{x\text{-σταθερά}} dx$$

$$\leadsto \int_0^1 (x^2y + y^2) dy = \left[ \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{6} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

## Παράδειγμα 2

- $$R = \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{[-2, 1]} \times \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{[0, 1]}. \text{ Βρείτε το } \int_R ye^{xy} dA.$$

$$\text{α' τρόπος} \quad \int_R ye^{xy} dA = \int_0^1 \int_{-2}^1 ye^{xy} dx dy$$

$$\leadsto \int_{-2}^1 ye^{xy} dx = [e^{xy}]_{-2}^1 = e^y - e^{-2y}$$

$$\therefore \int_0^1 (e^y - e^{-2y}) dy = \left[ e^y + \frac{e^{-2y}}{2} \right]_0^1 = e + \frac{e^{-2}}{2} - 1 - \frac{1}{2} =$$

$$= e + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{3}{2}$$

- $$\text{β' τρόπος} \quad \text{Πρώτα θα πρέπει να βρούμε το ολοκλήρωμα} \int_0^1 ye^{xy} dy$$

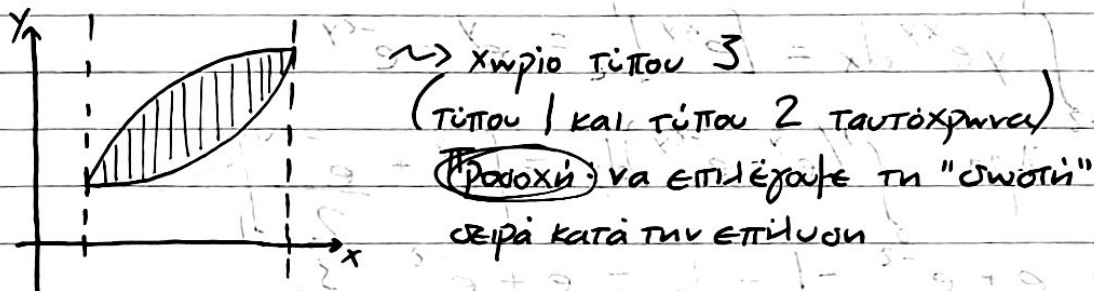
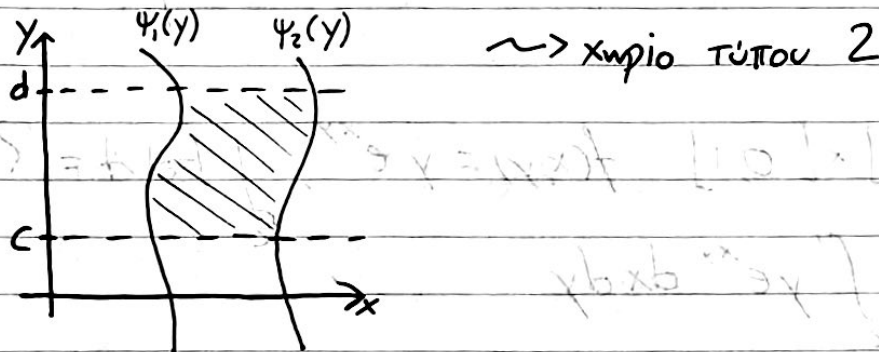
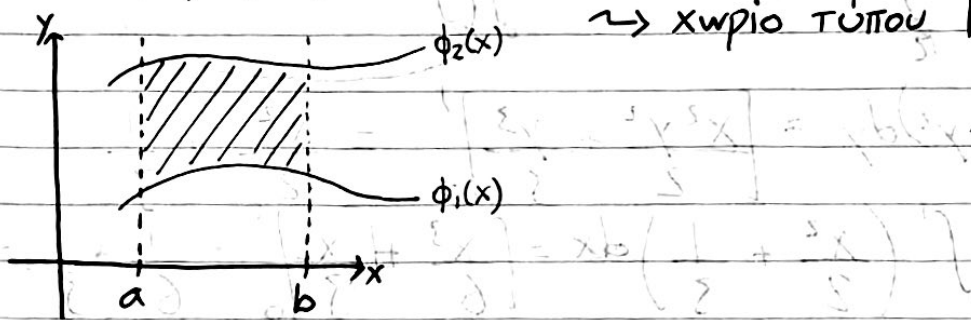
Δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση (ολοκλήρωση κατά μέρος)

Χρειάζονται παραπάνω βήματα

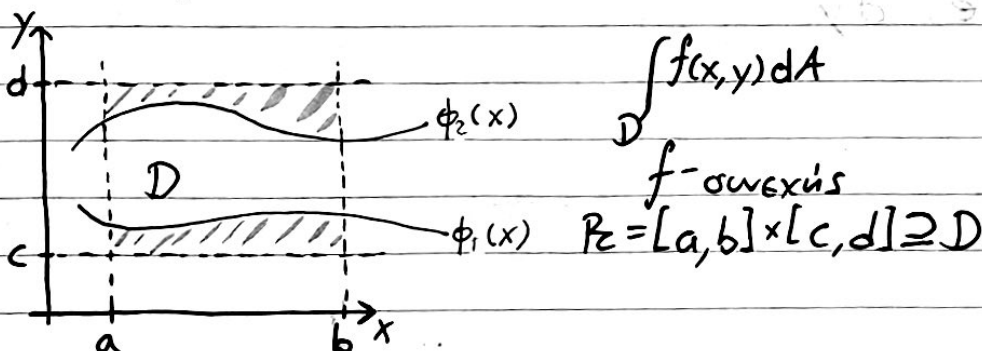
- $$\leadsto \text{Σε κάθε τρόπο καταλήγουμε σε ίδιο αποτέλεσμα, αλλά υπάρχουν διαφορές ως προς τη διαδικασία και επομένως οι 2 τρόποι δε "αυξάνουν" εφισον.}$$

# ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ σε πιο γενικά χωρία

## Τύποι χωρίων



## Παράδειγμα (Υπολογισμός)



Ορίζεται  $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$

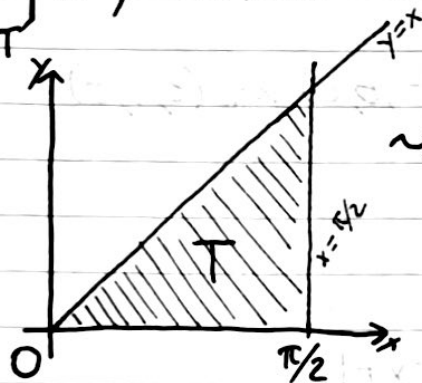
→ Από το Θεώρημα 2:

Το  $\int f^* dA$  υπάρχει και  $\int f dA = \int f^* dA$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^*(x,y) dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y) dy dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ολοκλήρωση πρώτα} \\ \text{ως προς } y \end{array} \right.$$

Παράδειγμα 1

$$\int_T (x^3 y + \cos x) dA = ? \quad T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq x\}$$



→ Χρησιμοποιούμε τύπου 3

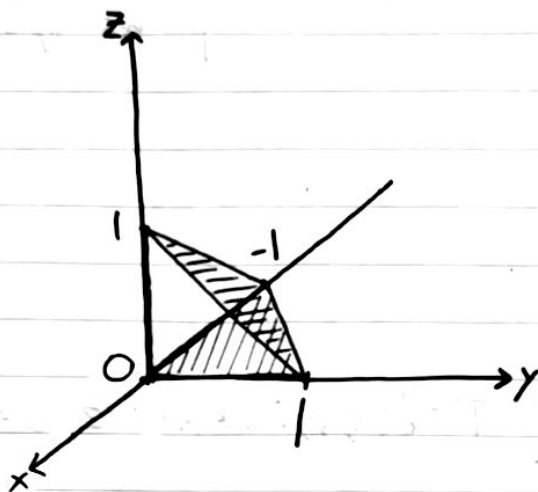
Το υπολογίζουμε ως τύπου 1:

$$\int_T (x^3 y + \cos x) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3 y + \cos x) dy dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{x^3 y^2}{2} + y \cos x \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx = \dots = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$

## Παράδειγμα 2

Βρείτε τον όγκο τετραέδρου με κορυφές:  
 $(0,0,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(-1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$



Γενική εξίσωση  
επιπέδου:  
 $ax+by+cz-d=0$

Εξίσωση του επιπέδου με κορυφές  $(0,0,1)$ ,  $(-1,0,0)$  και  $(0,1,0)$ :

Για  $(0,0,1)$ :  $z-d=0 \Leftrightarrow z=d$

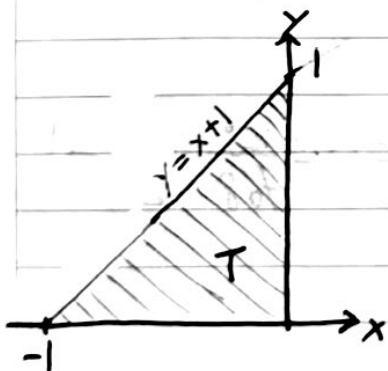
Για  $(-1,0,0)$ :  $-a-d=0 \Leftrightarrow a=-d$

Για  $(0,1,0)$ :  $b-d=0 \Leftrightarrow b=d$

Άρα  $-dx+dy+dz=d$

$-x+y+z=1 \Rightarrow f(x,y)=z=x-y+1$

Άρα  $V = \int_T f(x,y) dA$



Το χειρίζεστε σαν τύπου 1

Το ολοκλήρωμα:  $\int_{-1}^0 \int_0^{x+1} (x-y+1) dy dx =$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 \left[ xy - \frac{y^2}{2} + y \right]_0^{x+1} dx = \int_{-1}^0 \frac{(x+1)^2}{2} dx = \\ &= \left[ \frac{(x+1)^3}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

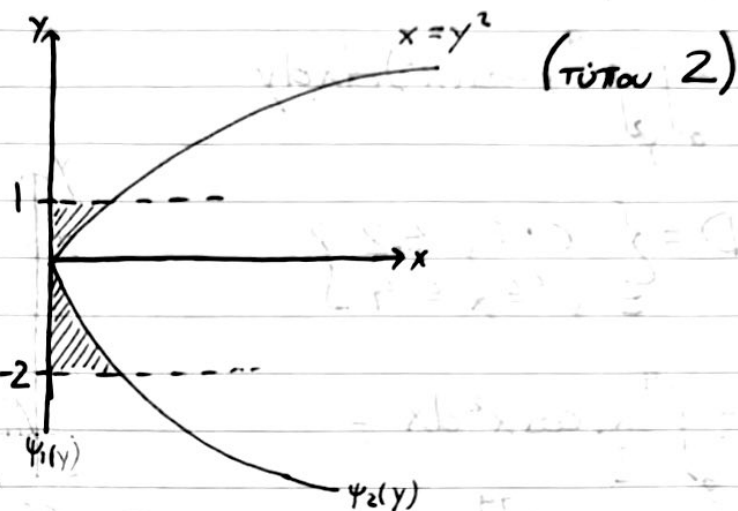
### Παράδειγμα 3

$$I = \int_D (x+y) dA = ?$$

$$I = \int_{-2}^1 \int_0^{y^2} (x+y) dx dy =$$

$$= \int_{-2}^1 \left[ \frac{x^2}{2} + yx \right]_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_{-2}^1 \left( \frac{y^4}{2} + y^3 \right) dy = \dots$$



### Άλλαξι Σειράς Ολοκλήρωσης

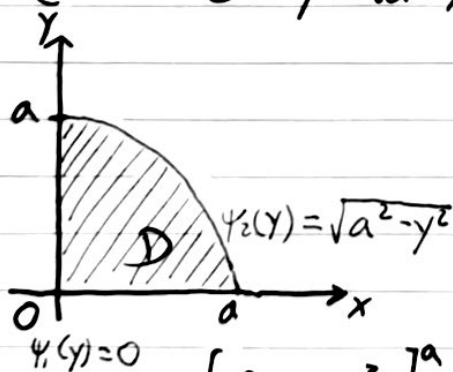
#### Παράδειγμα 4

SOS

Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2-y^2)^{1/2} dy dx$$

$$D = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \end{array} \right\}$$



Το βλέπουμε ως τύπου 2:

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx dy =$$

$$= \int_0^a \left( x \sqrt{a^2-y^2} \right)_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_0^a (a^2-y^2) dy =$$

$$= \left[ a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

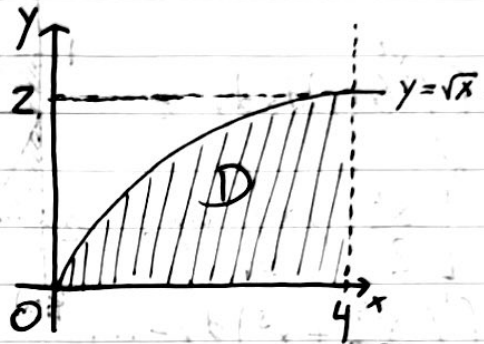
# Παράδειγμα 5

$$I = \int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos x^2 dx dy$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq 4 \end{array} \right\}$$

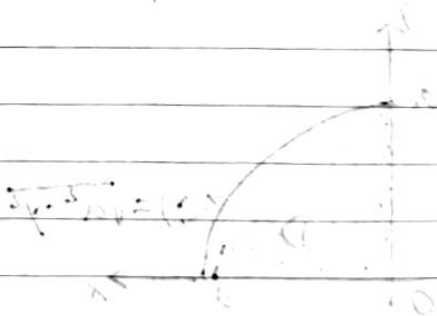
$$I = \int_0^4 \frac{x}{2} \cos x^2 dx =$$

$$= \left[ \frac{1}{4} \sin x^2 \right]_0^4 = \dots$$



$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x \geq 0 : (x, y) = 0 \\ y = y \geq 0 : (x, y) = 0 \end{array} \right\}$$



$$\frac{2}{3} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots$$