

Διάλεξη 12 31/3

παράγωγα υψηλότερης τάξης

Παράδειγμα 1 $z = f(x, y) = e^x \sin y$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $k(s, t) = f(g(s, t), h(s, t))$

Δέχεται ότι όλες οι συναρτήσεις είναι C^2 .

Υπολογίστε την $k_{s,t}$ (δείτε τη z^a με τη παράγωγο της k)

$$k_s(s, t) = f_x g_s + f_y h_s$$

($\frac{\partial k}{\partial s}$ πιο εύκολα)

$$k_{st}(s, t) = (f_x g_s + f_y h_s)_t = (f_x g_s)_t + (f_y h_s)_t = (f_x)_t g_s + f_x (g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y (h_s)_t =$$

$$= (f_{xx} g_t + f_{xy} h_t) g_s + f_x g_{st} + (f_{yx} g_t + f_{yy} h_t) h_s + f_y h_{st} =$$

$$= f_{xx} g_t + f_{xy} (h_t g_s + g_t h_s) + f_x g_{st} + f_y h_{st} + f_{yx} g_t + f_{yy} h_t h_s = \dots$$

$$(*) (f_x(x, y))_t = f_{xx} g_t + f_{xy} h_t$$

$$(f_y(x, y))_t = f_{yx} g_t + f_{yy} h_t$$

$$(*) f_{xx} g_t = e^x \sin y g_t = e^{g(s, t)} \sin h(s, t) \frac{\partial g(s, t)}{\partial t}$$

χρήσιμο σε:

Διαφορίσιμες ... Από ... Φυσική ... → **ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ** και

ΑΠΟΚΛΙΣΗ διανυσματικού πεδίου

Ορισμός διανυσματικού πεδίου

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ δλδ $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$

Ορισμός στροβιλισμού

Έστω $f \in C^1$. Ορίστω τον στροβιλισμό

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (f_{3,y} - f_{2,z})\vec{i} + (f_{1,z} - f_{3,x})\vec{j} + (f_{2,x} - f_{1,y})\vec{k}$$

$\text{curl } \vec{F} =$
τελεστής
(συνιστώσες συνάρτησης)

Ισοδύναμος τρόπος γραφής: $\nabla \times \vec{F}$ ($\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$)

μετράει πόσο το διαν. πεδίο έχει την τάση να περιστρέφεται

Θεώρημα Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ υλάτος C^2 , τότε:

$$\text{curl}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = 0$$

Στη σωστή φυσική: Αν ένα διανυσματικό πεδίο grad κάποιας συνάρτησης, τότε δεν έχει στροβιλισμό (πεδίο μεδυναμικό)

Απόδειξη $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \text{ (μηρόμοιο)}$

Ορισμός απόκλισης

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^1$. Ορίστω την απόκλιση $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

Ισοδύναμος τρόπος γραφής $\nabla \cdot \vec{F}$

υλίσθ **στροβιλισμός** **απόκλιση** → 3 χρίσεις του ∇

Θεώρημα $\vec{F}$ είναι C^2 . τότε $\text{div}(\text{curl } \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

→ Αν ένα διαν/κό πεδίο προέρχεται από στροβιλισμό υαπόδιου άλλου, τότε έχει μηδενική απόκλιση

→ απόδειξη: απλές πράξεις

Για αναγνώριση $\rightarrow f \in C^2$
τελεστής Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \text{div}(\text{grad } f)$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR

(ΑπI) $\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{k+1}$

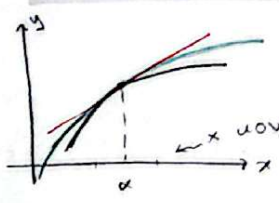
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_k(x,a)$$

αυτό είναι γνωστό
απόδειξη και $f \in C^k$

εδώ είναι που
θέλω $f \in C^{k+1}$

Σημαντική ιδιότητα: $\frac{R_k(x,a)}{|x-a|^k} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Το υπόλοιπο R_k παίρνει διάφορες μορφές



ολοκληρωτική
(μορφή υπολοίπου)

$$R_k(x,a) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x-a)^{k+1}$$

(όπου ξ μεταξύ a και x)

$$R_k(x,a) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$$

← παίρνω όλο και καλύτερες προσεγγίσεις

(ΑπII) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$

← (αρχίζω από τα εύκολα, έτσι κι αλλιώς δεν θα δω πάνω από 2^η τάξης)

TAYLOR 1^{ης} ΤΑΞΗΣ

Θεώρημα Έστω $f \in C^1, f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) + R_1(\bar{x}_0, \bar{h})$

όπου $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$

Υπόλοιπο πολύ μικρό: $\frac{R_1(\bar{x}_0, \bar{h})}{\|\bar{h}\|} \xrightarrow{\bar{h} \rightarrow 0} 0$

↑
επίστωμα εφαπτόμενου
επιπέδου $\nabla f \cdot \bar{h}$

TAYLOR 2^{ης} ΤΑΞΗΣ

Θεώρημα Έστω $f \in C^2, f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0) + R_2(\bar{x}_0, \bar{h})$

Υπόλοιπο μικρό: $\frac{R_2(\bar{x}_0, \bar{h})}{\|\bar{h}\|^2} \xrightarrow{\bar{h} \rightarrow 0} 0$

↑
Αυτό λίγο extreme

αντίστοιχα για 3^η τάξη: $\frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\bar{x}_0)$

⊗ Ορίσω πίνακα $H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \vdots \\ \vdots & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

εξθισμός πίνακα
(πίνακας 2ων παραγώγων)

όρα $\sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} =$

$$\bar{h}^T H \bar{h}$$

↑
τετραγωνική
μορφή $\nabla^2 (x^T A x)$

Αρα

(Θ2) $\rightarrow f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T H(f)(\bar{x}_0) \bar{h} + R_2(x_i, a)$

Απόδειξη → Θεώρημα Taylor 1^{ης} τάξης

Έστω $g(t) = f(\bar{x}_0 + \bar{h}t)$ $\rightarrow$ (στο μυαλό μου το $\bar{x}_0$ και $\bar{h}$ είναι σταθερά)
 $g'(t) = \frac{d}{dt} f(\bar{x}_0 + \bar{h}t) =$ $[\bar{x}_0, \bar{h} \rightarrow \text{σταθεροποιημένα}, t \in [0, 1]]$

$= \nabla f(\bar{x}_0 + \bar{h}t) \cdot \bar{h} =$ $\rightarrow$ κανόνας αλυσίδας (όλα γνωστά από ΑπΙ)

$$= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) \quad \rightsquigarrow \int_0^1 g(t) dt = g(1) - g(0) = f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0)$$

$$\text{όμως } \int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) h_i \cdot dt$$

για κάποιο i έχω: $\int_0^1 f_{x_i}(\bar{x}_0 + \bar{h}) h_i dt = \int_0^1 f_{x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) h_i \cdot U'(t) dt$

Κόλπο: ολοκληρώσω κατά μέρη (για να ξεφορτωθώ το ολοκληρώμα)

όπου $U(t) = t-1$. Άρα $\int_0^1 f_{x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) h_i \cdot U'(t) dt =$

$$= h_i \int_0^1 \frac{d}{dt} f_{x_i}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) (1-t) dt + \left[h_i f_{x_i}(\bar{x}_0 + \bar{h}) (t-1) \right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= h_i \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) h_j (1-t) dt + h_i f_{x_i}(\bar{x}_0)$$

$$\text{Άρα } \underbrace{\int_0^1 g'(t) dt}_{f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0)} = \underbrace{\sum_{i,j=1}^n h_i h_j \int_0^1 f_{x_i x_j}(\bar{x}_0 + t\bar{h}) (1-t) dt}_{R_1(\bar{x}_0, \bar{h})} \quad (*)$$

Θεώρημα Taylor 2^{ης} τάξης

(*) + ολοκλήρωση κατά μέρη (τροποποίηση του υπολοίπου) ...

↑

εύκολες αποδείξεις (προϋπόθεση $f \in C^2$ και $f \in C^3$ για 1^η και 2^η τάξη αντίστοιχα)

Παράδειγμα 1 Έστω $f(x,y) = e^x \cos y$. Βρείτε Taylor 2^{ης} τάξης γύρω από το $(0,0)$ $\frac{1}{2} (f_{xx} h_1^2 + 2f_{xy} h_1 h_2 + f_{yy} h_2^2)$

$$\rightsquigarrow \text{Θέλω να βρω } f(h_1, h_2) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T H \bar{h}$$

$$\bullet f_y(x,y) = -e^x \sin y, f_y(0,0) = 0 \bullet f_{xx}(x,y) = e^x \cos y, f_{xx}(0,0) = 1$$

$$\bullet f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y, f_{xy}(0,0) = 0 \bullet f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y, f_{yy}(0,0) = -1$$

$$\text{Άρα } f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + 0 \cdot h_2 + \frac{1}{2} (h_1^2 - h_2^2) + R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(h_1, h_2) \approx 1 + h_1 + \frac{1}{2} (h_1^2 - h_2^2) \rightarrow \text{για } h_1, h_2 \text{ μικρά}$$

παίχνει με τιμές:

$$\left. \begin{matrix} h_1 = 0,2 \\ h_2 = 0,1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} f(h_1, h_2) \approx 1,215 \\ f(h_1, h_2) = 2,15 \dots \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{μαλή προσέγγιση} \\ \text{ακόρι έχω μικρά } h \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} h_1 = 0,4 \\ h_2 = 0,6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} f(h_1, h_2) \approx 1,3 \\ f(h_1, h_2) = 1,231 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{ακόρι μακριά από} \\ \text{το σημείο (γύρω-γύρω) κάνουμε} \end{matrix}$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Ορισμός τοπικού ελαχίστου

$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Το $\bar{x}_0 \in U$ είναι τοπικό ελαχίστο αν $\exists$ μία μπάλα $B(\bar{x}_0)$ με κέντρο $\bar{x}_0$ τ.ω.

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0) \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0)$$

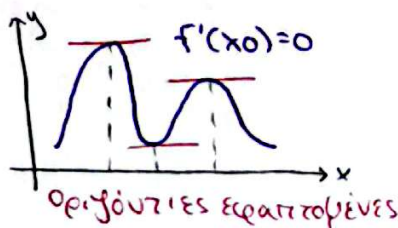
τοπικά
ακρότατα

Ορισμός τοπικού μεγίστου

$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Το $\bar{x}_0 \in U$ είναι τοπικό μέγιστο αν $\exists$ μια μπάλα $B(\bar{x}_0)$ με κέντρο $\bar{x}_0$ τ.ω.

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_0) \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0)$$

ΑπI



ΑπII



Θεώρημα $U \subset \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}$ παρ.μν. Αν $\bar{x}_0 \in U$ είναι ακρότατο, τότε $Df(\bar{x}_0) = 0$ ($\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}_0) = 0$)

Απόδειξη Έστω $\bar{x}_0$ τοπικό μέγιστο, και έστω $g(t) = f(\bar{x}_0 + t\bar{h})$

Η $g(t)$ έχει τοπικό μέγιστο για $t=0$, και είναι παραγωγίσιμη ως συνθεσι παραγωγίσιμων. Συνεπώς $g'(t)|_{t=0} = 0$

$$g'(t) = \nabla f(\bar{x}_0 + t\bar{h}) \cdot \bar{h}, \text{ άρα } g'(0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{h} = 0$$

Όμως ισχύει $\forall \bar{h} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nabla f(\bar{x}_0) = 0$

το
ανάχα/με
στον ΑπI

$$\nabla f(\bar{x}_0) = 0 \Leftrightarrow \text{όλες οι μερικές παράγωγοι στο } \bar{x}_0 = 0$$

Ορισμός κριτηρίου σημείου

Τα σημεία στα οποία $\nabla f(\bar{x}) = 0$ λέγονται κριτήριο σημεία (υποψήφια για ακρότατα).

Παράδειγμα 2 $f(x,y) = x^2 + y^2$, Βρες τοπικό ακρότατο

↑ παραβολοειδές

$$\text{Βρίσκω κριτήριο σημείο } \nabla f(x,y) = 0 \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Τώρα πάλι να δω αν είναι μέγιστο ή ελαχίστο

$f(0,0) = 0$, όμως $f(x,y) \geq 0$, άρα το $(0,0)$ τοπικό ελαχίστο (και ολικό)

Παράδειγμα 3 για $f(x,y) = x^2 - y^2$ (όπως πριν, κριτήριο το $(x,y) = (0,0)$)

$f(0,0) = 0$, όμως $f(0,y) \leq 0$ & $f(x,0) \geq 0$ } το κριτήριο σημείο που δεν είναι ακρότατο λέγεται εσθματικό σημείο