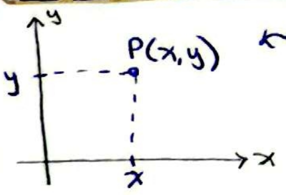
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΙΙ) ← κ. Σταύδης Φίλιππας

σαν τον Απ1 σε πολλές διαστάσεις (κατά κύριο λόγο 2 και 3)

Διάλεξη 1η 17/2

Υπενθύμιση από αναλυτική Γεωμετρία/Διανύσματα

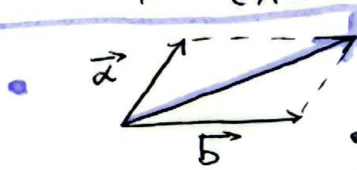


← Συντεταγμένες (x,y) του σημείου P

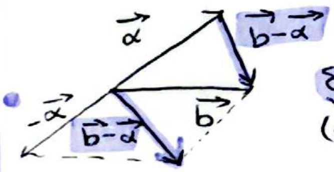
$\mathbb{R}^2$

(στον $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα)

Διάνυσμα: κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα (με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων)



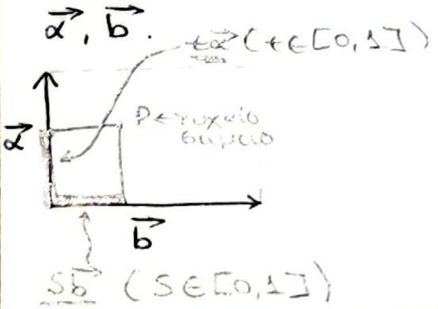
άθροισμα διανυσμάτων
- γεωμετρικά: κανόνας παραλληλογράμμου
- αλγεβρικά: πρόσθεση συντεταγμένων



διαφορά διανυσμάτων (αντίστοιχα με πρόσθεση)

παράδειγμα 1

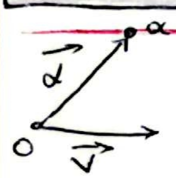
Περιγράψτε τα εσωτερικά σημεία του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{\alpha}, \vec{b}$.



- Το P περιγράφεται από το διάνυσμα $t\vec{\alpha}+s\vec{b}$

Άρα $E=\{t\vec{\alpha}+s\vec{b} : 0\le t,s\le 1\}$ και περιγράφει το εσωτερικό του παραλληλογράμμου

παράδειγμα 2 Ευθεία που περνάει από το σημείο $\alpha\in\mathbb{R}^3$ και είναι παράλληλη στο $\vec{V}$.

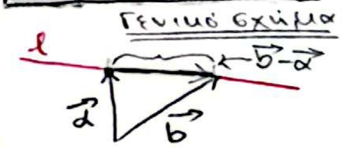


(εδώ θα κάνω παραμετρική αναπαράσταση της ευθείας)

$\ell(t)=\vec{\alpha}+t\vec{V}, \ t\in\mathbb{R}$

παράδειγμα 3 Ευθεία που περνάει από τα σημεία $\alpha=(-1,1,0)$ και $b=(0,0,1)$

Γενικό σχήμα:



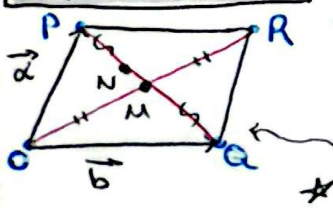
$\ell(t)=\vec{\alpha}+t(\vec{b}-\vec{\alpha}), t\in\mathbb{R}$

$\vec{b}-\vec{\alpha} = (0,0,1)-(-1,1,0)=(1,-1,1)$

Άρα $\ell(t)=(-1,1,0)+t(1,-1,1) \Leftrightarrow \ell(t)=(-1+t, 1-t, t), t\in\mathbb{R}$

πιο ενδιαφέρον →

παράδειγμα 4 Νδο οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται!



- Φτιάχνω 2 διανύσματα που θα παράγουν το παραλληλόγραμμο
- έστω M μέσο της μίας διαγωνίου OR
- έστω N μέσο της άλλης διαγωνίου PQ

← Για λόγους σχήματος δεν τα ταυτίζω εξ αρχής

★ Θέλω νδο $M\equiv N$ ταυτίζονται

Στη γλώσσα των διανυσμάτων θέλω νδο $\vec{ON}=\vec{OM}$ (στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσω ιδιότητες δ/των)

Απόδειξη: $\vec{OM}=\frac{1}{2}\vec{OR}=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{b})$

$\vec{ON}=\vec{OP}+\vec{PN}=\vec{\alpha}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{\alpha})=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{b})$

} τα έχω εκφράσει εν συναρτήσει του $\vec{\alpha},\vec{b}$

Συνεπάγεται $\vec{OM}=\vec{ON} \Leftrightarrow M=N$

Με αντίστοιχο τρόπο: Οι διάμεσοι ενός τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο και χωρίζουν την κάθε μία στη μέση

Παράδειγμα 5 Έστω η ευθεία $l(t)=(t, 1-6t, 2t-8)$, $t\in\mathbb{R}$. Βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ // στην ευθεία.

$$l(t)=(0,1,-8)+(t,-6t,2t)=\underbrace{(0,1,-8)+t(1,-6,2)}_{\text{μορφή } \vec{\alpha}+t\vec{v}}$$ όπου $\begin{cases}\vec{\alpha}=(0,1,-8)\\ \vec{v}=(1,-6,2)\end{cases}$

άρα $\{\vec{v}=(1,-6,2)\ //\ l(t)\}$

Παράδειγμα 6 Ελέγξτε κατά πόσο οι ευθείες $(t, 1-6t, 2t-8)$ και $(3t+1, 2t, 0)$ τέμνονται. Ανεξάρτητες παράμετροι (βάζω t_1 και t_2)

προσοχή! Η τιμή της παραμέτρου t διαφέρει για την κάθε μία. Στο σημείο αυτό θα έχω:

Έστω ότι τέμνονται σε κοινό σημείο.

$$\left.\begin{aligned} t_1&=3t_2+1\\ 1-6t_1&=2t_2\\ 2t_1-8&=0\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{άλγεβρα}]{\text{με γραμμική}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1\\ -6 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -8\end{array}\right] \xrightarrow{r_1-\frac{3}{2}r_2\to r_1} \left[\begin{array}{cc|c} -8 & 0 & 5/2\\ -6 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -8\end{array}\right]$$

Από αυτόν τον πίνακα έχω
$t_1=-5/16$
$t_1=-4$ **Άτοπο**

Άρα οι 2 ευθείες δεν τέμνονται!

Παράδειγμα 7 Σε ποιο σημείο η ευθεία $(t+5, -2t-4, 3t+7)$ τέμνει το επίπεδο $3x+2y-7z=2$;

→ Βάζω τις συντεταγμένες της ευθείας στην εξίσωση του επιπέδου (εφόσον ξέρω από τα δεδομένα ότι τέμνονται)

Άρα στο σημείο τομής πρέπει: $3(t+5)+2(-2t-4)-7(3t+7)=2 \iff \dots \iff t=-2$

Άρα {Σημείο τομής: $A=(3,0,1)$}

Εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ για $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

← κάνει αριθμό!

↳ Ισοδύναμος τρόπος γραφής: $\langle \alpha, b\rangle$

κάποιες ιδιότητες:
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\geq 0$ ($=0$ ανν $\vec{\alpha}=0$)
- $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{b}=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{b}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{b})$, $\lambda\in\mathbb{R}$
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{\alpha}$

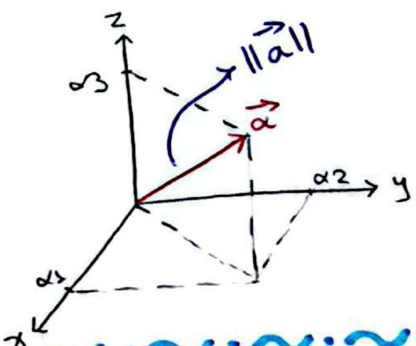
Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$ επιτρέπεται να ορίσουμε το **Ευκλείδειο μήκος**

$$\boxed{\|\vec{\alpha}\|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}}$$

νόρμα

- Γενίκευση απόλυτης τιμής σε πολλές διαστάσεις
- Απόσταση σημείου από αρχή αξόνων

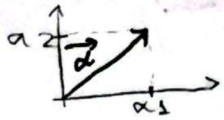
Αν $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3$ τυχαίο διάνυσμα τότε το $\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα



τέλος 1ης διάλεξης

Διάλεξη 2η 19/2

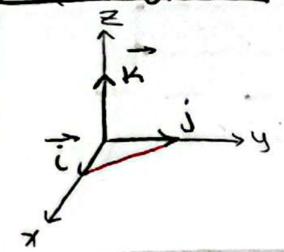
Εσωτερικό γινόμενο: $\|\vec{\alpha}\| = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})^{1/2}$
$(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{1/2}$



Βρίσκω αριθμό

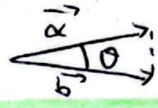
Παράδειγμα 1 Βρείτε την απόσταση από το άκρο $\vec{i}=(1,0,0)$ στο άκρο $\vec{j}=(0,1,0)$

$\mathbb{R}^3$



Απόσταση: $\|\vec{i}-\vec{j}\| = \|(1,0,0)-(0,1,0)\| = \|(1,-1,0)\| =$
$= (1^2+(-1)^2+0^2)^{1/2} = \sqrt{2}$

Θεώρημα $\vec{\alpha},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$) και $\theta\in[0,\pi]$ η γωνία που σχηματίζουν. Τότε:
$\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$!



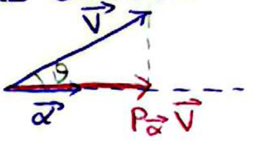
Απόδειξη Νόμος συνημιτόνων: $\|\vec{\alpha}-\vec{b}\| = \|\vec{\alpha}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$

Αριστερό μέλος: $\|\vec{\alpha}-\vec{b}\| = (\vec{\alpha}-\vec{b})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{b}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}\vec{b}+\vec{b}\vec{b} = \|\vec{\alpha}\|^2-2\vec{\alpha}\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$

Άρα έχω $\cancel{\|\vec{\alpha}\|^2}-2\vec{\alpha}\vec{b}+\cancel{\|\vec{b}\|^2} = \cancel{\|\vec{\alpha}\|^2}+\cancel{\|\vec{b}\|^2}-2\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta \iff$
$\iff \vec{\alpha}\cdot\vec{b} = \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$ ✓

Πόρισμα ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ Cauchy-Schwartz
$|\vec{\alpha}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{b}\|$ (διότι $|\cos\theta|\le 1$)

— μας βοηθάει πολύ όταν θέλουμε να προβάλουμε ένα διάνυσμα σε ένα άλλο —



$P_{\vec{\alpha}}\vec{V} = \|\vec{V}\|\cdot\cos\theta$ ← θέλω να του δώσω διανυσματικό χαρακτήρα, ξέρω μήκος, θέλω να του δώσω κατεύθυνση ↓

$P_{\vec{\alpha}}\vec{V} = \|\vec{V}\|\cdot\cos\theta\cdot\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$ ← μαγική λέξη: μοναδιαίο διάνυσμα !

Προβολή του $\vec{V}$ στο $\vec{\alpha}$ ως διάνυσμα

$= \dfrac{\|\vec{V}\|\cdot\|\vec{\alpha}\|\cdot\cos\theta}{\|\vec{\alpha}\|}\cdot\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|} = \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|^2}\cdot\vec{\alpha}$

Δεν χρειάζεται να τους αποστηθίσω, αλλά να είμαι σε θέση να τους παράγω

αν $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k} = (b_1,b_2,b_3)$

Εξωτερικό γινόμενο:
↑δεν μεταφέρεται σε $\mathbb{R}^n$ για $n>3$

$$\vec{\alpha}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2 b_3 - b_2\alpha_3)\vec{i} - (\alpha_1 b_3 - \alpha_3 b_1)\vec{j} + (\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)\vec{k}$$

Βρίσκω διάνυσμα

★ $\vec{b}\times\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}\times\vec{b}$ ★ $\vec{\alpha}\times\vec{\alpha} = 0$ ★ $\vec{\alpha}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{\alpha}\times\vec{b}+\vec{\alpha}\times\vec{c}$

Γεωμετρικός ορισμός εξωτερικού γινομένου $\vec{\alpha}\times\vec{b} = \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$!
+ κανόνας δεξιού χεριού

⊕ Το $\vec{\alpha}$ πάει μέσα στον πίνακα

Παράδειγμα 2 Βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα διανύσματα: $\vec{i}+\vec{j}$ και $\vec{j}+\vec{k}$

• $\vec{i}+\vec{j} = (1,0,0)+(0,1,0) = (1,1,0)$ • $\vec{j}+\vec{k} = (0,1,0)+(0,0,1) = (0,1,1)$

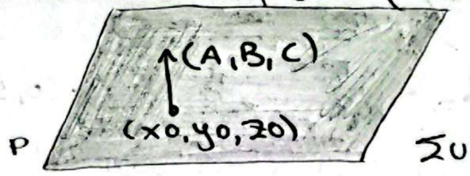
Για να βρω κάθετο διάνυσμα, παίρνω εξωτερικό γινόμενο αυτών των 2

$$(\vec{i}+\vec{j})\times(\vec{j}+\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k} = (1,0,0)-(0,1,0)+(0,0,1) = (1,-1,1)$$

(Για να το κάνω μοναδιαίο το διαιρώ με το μήκος του)

$\|(+1,-1,+1)\| = \sqrt{3}$ Άρα $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ ← Είναι 2 ⊙ ⊗

Εξίσωση επιπέδου P: το P είναι κάθετο στο διάνυσμα (A,B,C) και περνάει από το σημείο (x_0,y_0,z_0).



Έστω (x,y,z) τυχαίο σημείο του P

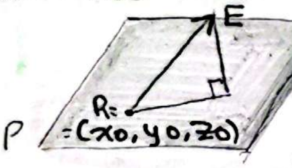
Άρα $(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \perp (A,B,C)$

Συνεπώς $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(A,B,C)=0 \iff$

$\iff A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \iff \boxed{Ax+By+Cz=D}$

όπου $D=Ax_0+By_0+Cz_0$

Παράδειγμα 3 Βρείτε την απόσταση του σημείου $E(x_1,y_1,z_1)$ από το επίπεδο $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, $E(x_1,y_1,z_1)$



μοναδιαίο κάθετο στο $P = \vec{n} = \dfrac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Απόσταση του E από το P = προβολή του $\vec{RE}$ στο $\vec{n} = |\vec{RE}\cdot\vec{n}| = |\vec{RE}|\cdot\cos\theta$

$\vec{RE}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$

Άρα έχω $\vec{n} = |\vec{RE}\cdot\vec{n}| = \dfrac{|(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)\cdot(A,B,C)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$

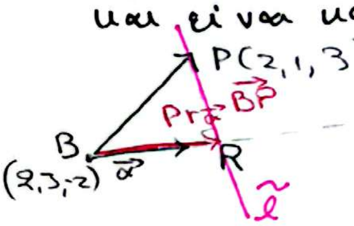
$= \dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Παράδειγμα 4 (i) Απόσταση σημείου $P(2,1,3)$ από την ευθεία $l(t)=(2,3,-2)+t(-1,1,-2)$

(ii) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το P και είναι κάθετη στην $l(t)$

(i)

$\vec{\alpha}=(-1,1,-2)$



έστω $\vec{BR}$ η προβολή του $\vec{BP}$ στο $\vec{\alpha}$

$Pr_{\vec{\alpha}}\vec{BP} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{BP}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}\cdot\vec{\alpha} = \dfrac{(-1,1,-2)\cdot(0,-2,5)}{(\quad)\cdot(-1,1,-2)}(-1,1,-2) =$

$= \dfrac{-12}{6}(-1,1,-2)=(2,-2,4)=\vec{BR}$

$\vec{BP}=(2,1,3)-(2,3,-2)=(0,-2,5)$

όμως $\vec{BR}+\vec{RP}=\vec{BP} \Rightarrow \vec{RP}=\vec{BP}-\vec{BR}=(0,-2,5)-(2,-2,4)=(-2,0,1)$

άρα η απόσταση του P από την $l(t)$ είναι $\|\vec{RP}\|=\sqrt{5}$

(ii) $\tilde{l}$ γνωρίζω ότι περιέχει το σημείο $P=(2,1,3)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{RP}=(-2,0,1)$. Άρα $\tilde{l}(t)=(2,1,3)+t(-2,0,1),\ t\in\mathbb{R}$