ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 6 Δεκεμβρίου 2024

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 5

1). Έστω οτι η $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ λύνει την κυματική εξίσωση στη μία διάσταση.

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), \end{aligned}$$

όπου g και h έχουν συμπαγή φορέα. Δείξτε οτι απο ένα χρόνο T και μετά ισχύει

$$\int_{\mathbf{R}} u_t^2 dx = \int_{\mathbf{R}} u_x^2 dx, \qquad t \geq T.$$

2) Έστω $f \in C^3(\mathbf{R}^3)$, και

$$u(x, t) = \int_{S(x,t)} \frac{f(y)}{t} dS_y, \qquad I(x, t) = \int_{B(x,t)} \Delta f(y) dy \ ,$$

όπου $B(x, t)$ η μπάλα κέντρου x και ακτίνας t και $S(x, t) = \partial B(x, t)$ η αντίστοιχη σφαίρα.

(α) Δείξτε οτι

$$u_t = \frac{u + I}{t}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

(γ) Τι αρχικές συνθήκες ικανοποιεί η u;

3). Έστω $u \in C^2(\mathbf{R}^3 \times [0,\infty))$ η λύση της

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x,0) &= h(x), \quad x \in \mathbf{R}^3, \end{aligned}$$

με g, h ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C_0 τ.ω.

$$|u(x,t)| \leq \frac{C_0}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

4). Υποθέτουμε οτι η $u(x,t)$ είναι ομαλή λύση της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u + u_x = 0, \qquad (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,T). \tag{1}$$

Για $(x_0,t_0) \in \mathbf{R} \times (0,T)$, ορίζουμε το τρίγωνο

$$C = C(x_0,t_0) := \{(x,t) : \; 0 \leq t \leq t_0, \;\; |x - x_0| \leq t_0 - t\},$$

και την ενέργεια

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{a(t)}^{b(t)} [u_t^2 + u_x^2 + u^2]dx, \qquad 0 \leq t \leq t_0,$$

όπου $a(t) = x_0 - (t_0 - t)$ και $b(t) = x_0 + (t_0 - t)$.

(**i**) Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C τ.ω.

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq CE(t), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

(**ii**) Δείξτε οτι αν $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ όταν $x_0 - t_0 \leq x \leq x_0 + t_0$, τότε $u(x,t) \equiv 0$ στο C. Δείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων της (1), ακόμα και στη περίπτωση της μη ομογενούς.

(**iii**) Αν $u(x,t)$ ομαλή λύση της (1) και τα αρχικά δεδομένα $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ έχουν συμπαγή φορέα (δηλ. είναι ταυτοτικά μηδέν έξω απο ένα διάστημα $[-R,R]$) τότε και η λύση $u(x,t)$, για κάθε $t \in [0,T)$ έχει συμπαγή φορέα στον $\mathbf{R}$, δηλ. ειναι ταυτοτικά ίση με μηδέν έξω απο κάποιο διαστημα (που εξαρτάται από το t).

5) Εστω η εξίσωση,

$$u_{tt} + u_t - u_{xx} + u = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \;\; t > 0.$$

Δίδεται οτι τα αρχικά δεδομένα είναι τέτοια ώστε η λύση να έχει συμπαγή φορέα (στον $\mathbf{R}$). Ορίζουμε την ενέργεια

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)dx.$$

(α) Αν $v = e^{\frac{t}{2}}u$, βρείτε κατάλληλη 'ενέργεια' της v που διατηρείται.

(β) Δείξτε οτι $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$.

6). Λύστε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

(α) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u, \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2).$

(β) $u_t + u_x^2 = t, \quad t > 0, \qquad u(x, 0) = x.$

(γ) $u u_{x_1} + u_{x_2} = 1, \quad u(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1.$

Παράδοση: Τρίτη 16 Δεκεμβρίου