ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 19 Νοεμβρίου 2024

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 4

1). Η $u(x,t)$ είναι φραγμένη λύση του προβλήματος Cauchy της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x) \ , \end{aligned}$$

όπου η $\phi \in C(\mathbf{R})$ ικανοποιεί

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = a, \qquad \lim_{x \to +\infty} \phi(x) = b.$$

Για $x \in \mathbf{R}$ υπολογίστε το όριο

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t).$$

(Απ. $= \frac{a+b}{2}$)

2) Έστω u ομαλή λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + c(x)u &= 0, \quad \text{στο} \ \ U \times (0,\infty) \\ u &= 0, \quad \text{στο} \ \ \partial U \times [0,\infty) \\ u &= g(x), \quad \text{στο} \ \ U \times \{t=0\}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε οτι $g \geq 0$ και οτι η c είναι φραγμένη συνάρτηση (οχι απαραίτητα μη αρνητική). Δείξτε οτι $u \geq 0$.

Υποδ. Τι εξίσωση ικανοποιεί η $v := e^{\lambda t} u$;

3). Εστω η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$\Phi(x-y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Η $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ είναι συνεχής συνάρτηση εκτός από το σημείο x_0, στο οποίο όμως τα πλευρικά όρια $g(x_0^+)$ και $g(x_0^-)$ υπάρχουν. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}} \Phi(y-x_0,t) g(y) dy = \frac{1}{2}(g(x_0^+) + g(x_0^-)).$$

4). (Παραβολικό Λήμμα Hopf, απλή περίπτωση) Έστω $U = (0,1)$, $U_T = U \times (0,T]$ και $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^1(\bar{U}_T)$ ικανοποιεί την

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad x \in U_T.$$

Υποθέτουμε οτι υπάρχουν $t_0 \in (0,T]$ και $m \in \mathbf{R}$ τ.ω. $u(0,t_0) = m$ και

$$u(x,t) > m, \quad \text{όταν} \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 < t < t_0,$$

(α) Βρείτε συνάρτηση $w(x,t)$ τ.ω. $w(0,t_0) = 0$, $w_x(0,t_0) > 0$ και σε μία γειτονιά R του $(0,t_0)$ να ικανοποιεί

$$w(x,t) \le u(x,t) - m,$$

Υποδ. Έστω $R = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{t_0}{2},\ t_0\right)$. Για την εύρεση της w χρησιμοποιήστε κατάλληλα τη συνάρτηση $z(x,t) = e^x - 1$.

(β) Δείξτε οτι

$$u_x(0,t_0) > 0.$$

5). Έστω $f \in C(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ και $u \in C^2(\mathbf{R}^n \times (0,\infty)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$ θετική λύση της

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

(α) Εστω $t_2 > t_1 > 0$. Δείξτε οτι $\forall x_1, x_2, y \in \mathbf{R}^n$,

$$\frac{|x_2 - y|^2}{t_2} \le \frac{|x_1 - y|^2}{t_1} + \frac{|x_1 - x_2|^2}{t_2 - t_1}.$$

(β) Δείξτε οτι

$$u(x_2,t_2) \ge \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x_1-x_2|^2}{4(t_2-t_1)}}\ u(x_1,t_1), \qquad x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n, \quad t_2 > t_1 > 0.$$

(γ) Διατυπώστε και αποδείξτε κατάλληλη ανισότητα Harnack για την εξίσωση (1).

6). (Αντιπαράδειγμα στην ανισότητα Harnack). Για $\xi \in \mathbf{R}^n$, έστω συνάρτηση

$$u_\xi(x,t) = (t+1)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x+\xi|^2}{4(t+1)}}.$$

(α) Δείξτε οτι η u_ξ ικανοποιεί την $u_t - \Delta u = 0$ στο $\mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$.

(β) Δείξτε οτι για κάθε $t > 0$ δεν υπάρχει $C = C(t) > 0$ με την ιδιότητα

$$\sup_{|x|\le 1} u_\xi(x,t) \le C \inf_{|x|\le 1} u_\xi(x,t), \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

7) Έστω το μή γραμμικό ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + g(t,x,u)u_x &= F(t,x), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

όπου g, F και f ομαλές συναρτήσεις.

(α) Δείξτε οτι η παραπάνω εξίσωση ικανοποιεί αρχή μεγίστου. Συγκεκριμένα αποδείξτε οτι αν

$$u_t - u_{xx} + g(t,x,u)u_x \le 0, \qquad (x,t) \in U_T,$$

τότε

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

όπου $U_T = (0,L) \times (0,T]$, και Γ_T το παραβολικό σύνορο.

(β) Αν $M = \max_{0\le x\le L} |f(x)|$, $N = \max_{\bar{U}_T} |F(x,t)|$ και u κλασική λύση της εξίσωσης (2) δείξτε οτι

$$|u(x,t)| \le M + NT\ , \qquad (x,t) \in U_T.$$

Παράδοση: Τρίτη 3 Δεκεμβρίου