ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή 1 Νοεμβρίου 2024

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 3

1). Η u είναι αρμονική στην 'τρύπια' μπάλα με ακτίνα $\frac{3}{2}$, $B(0,\frac{3}{2})\setminus\{0\}\subset\mathbf{R}^n$, $n\geq 2$. Έστω ότι γνωρίζουμε ότι καθώς $x\to 0$ έχουμε ότι $u(x)=o(|\ln|x||)$ όταν $n=2$ ή $u(x)=o(|x|^{2-n})$ αν $n\geq 3$.

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε οτι η u είναι φραγμένη. Έστω $n\geq 3$.

(α) Με χρήση αρχής μεγίστου δείξτε οτι υπάρχει σταθερα $C>0$ τ.ω.

$$u(x)\leq C+\varepsilon|x|^{2-n},\qquad r<|x|<1,\ \ \forall\varepsilon>0,\quad \forall r\in(0,1).$$

(β) Η u είναι φραγμένη στην $B(0,1)\setminus\{0\}$.

(γ) Δείξτε ότι μπορούμε να ορίσουμε την u στο μηδέν με τρόπο ωστε να είναι αρμονική σε όλη την $B(0,1)$.
Υπόδ. Έστω v η αρμονική συνάρτηση στην $B(0,1)$ που ικανοποιεί $v(x)=u(x)$ όταν $|x|=1$. Θέτουμε $w:=u-v$. Με χρήση αρχής μεγίστου δείξτε ότι $w=0$ στην $B(0,1)\setminus\{0\}$.

Εργαστείτε παρόμοια για $n=2$.

2). Έστω $U\subset\mathbf{R}^n$ φραγμένο ανοικτό σύνολο με C^2 σύνορο. Με χρήση αρχών μεγίστου δείξτε οτι οποιεσδήποτε δύο λύσεις του προβλήματος Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \qquad x\in U\\ \frac{\partial u}{\partial\nu} &= g, \qquad x\in\partial U, \end{aligned}$$

διαφέρουν κατά μία σταθερά.

3) Έστω η αρμονική συνάρτηση $u(x,y)=xy$ ορισμένη στον μοναδιαίο δίσκο $B(0,1)\subset\mathbf{R}^2$. Βρείτε τα ακρότατά της u στην $\overline{B(0,1)}$ και υπολογίστε στα σημεία αυτά την $\frac{\partial u}{\partial\nu}$, όπου ν το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε το Λήμμα του Hopf.

4). Η συνάρτηση $u = u(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, είναι C^2 για $|x| > R > 0$ και τείνει στο μηδέν καθώς $|x| \to \infty$. Επιπλέον ικανοποιεί

$$Lu = -\Delta u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) u_{x_j} + c(x) u \geq 0, \quad \text{για} \ \ |x| \geq R,$$

όπου c, b_j συνεχείς και

$$0 \leq c(x) \leq \frac{c_0}{|x|^p}, \qquad b_j(x) = O(|x|^{1-p}), \qquad p > 2. \tag{1}$$

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε οτι υπάρχει $\mu > 0$ τ.ω.

$$u(x) \geq \frac{\mu}{|x|^{n-2}}, \qquad |x| > R. \tag{2}$$

(α) Έστω η βοηθητική συνάρτηση

$$z(r) = \frac{1}{r^{n-2}} + \frac{1}{r^s}, \quad r = |x|, \quad \text{όπου} \ \ n-2 < s < n-4+p.$$

Δείξτε ότι για R μεγάλο

$$Lz < 0, \qquad |x| > R.$$

(β) Δείξτε οτι υπάρχει $\lambda > 0$ τ.ω για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει R_ε

$$u - \lambda z > -\varepsilon, \qquad \text{για} \ \ R < |x| \leq R_\varepsilon.$$

(γ) Δείξτε την (2).

(δ) Δείξτε την (2) οταν η συνθήκη για την $c(x)$ στην (1), αντικατασταθεί απο την $c(x) = O(|x|^{-p})$, $p > 2$ (δηλ. χωρίς η $c(x)$ να είναι απαραίτητα μη αρνητική).

5) Υποθέτοντας οτι η παρακάτω εξίσωση έχει κλασική λύση

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^3 &= f, \qquad x \in U \\ u &= g, \qquad x \in \partial U, \end{aligned}$$

με f, g ομαλές συναρτήσεις, δείξτε ότι η λύση είναι μοναδική.

(α) Με χρήση αρχής μεγίστου.

(β) Με χρήση ενεργειακών εκτιμήσεων.

6). Το $U \subset \mathbf{R}^n$ είναι φραγμένο, ομαλό και συνεκτικό. Η u είναι ομαλή και ικανοποιεί την

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) = 0, \qquad x \in U,$$

όπου ο L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και $a_{ij} \in C^1(\bar{U})$. Θέτουμε

$$v := |\nabla u|^2 + \lambda u^2.$$

(α) Δείξτε οτι για κατάλληλα μεγάλη σταθερά λ,

$$Lv \leq 0, \qquad x \in U.$$

(β) Συμπεράνετε οτι

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(U)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial U)} + \|u\|_{L^\infty(\partial U)}),$$

για κάποια θετική σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές του L.

Υπόδ. Για το (α), για ευκολία κοιτάξτε πρώτα την περίπτωση $n = 1$.

Παράδοση: Τρίτη 19 Νοεμβρίου