ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 17 Οκτωβρίου 2024

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μετ/κό)

Φυλλάδιο 2

1). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Poisson για την μπάλα και την ιδιότητα της μέσης τιμής για αρμονικές συναρτήσεις στη μπαλα $B(0,r)$, δείξτε οτι αν $u(x)$ είναι θετική αρμονική συνάρτηση στη μπάλα $B(0,r)$ και συνεχής στην $\overline{B(0,r)}$, τότε

(α)

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0), \qquad x \in B(0,r).$$

(β) Αν $V \subset\subset B(0,r)$, βρείτε θετική σταθερά $C = C(V)$ τ.ω.

$$\sup_V u(x) \le C \inf_V u(x).$$

2). Έστω $x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$,

$$B_1^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1, \quad x_n > 0\},$$

και συνάρτηση $u \in C^2(\overline{B_1^+})$ τ.ω.

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x_n \ge 0 \\ -u(x', -x_n) & x_n < 0. \end{cases}$$

(α) Αν u αρμονική δείξτε οτι και v είναι αρμονική στην $B_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$

(β) Αν μόνο $u \in C^2(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ και αρμονική στην B_1^+ τότε η v πάλι είναι αρμονική στην B_1.

3). Όπως έχουμε πεί, η $v \in C^2(\bar{U})$ λέγεται υφαρμονική εαν

$$-\Delta v \leq 0, \qquad \text{in} \quad U.$$

(α) Αν $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομαλή και κυρτή και u αρμονική, τότε $v = \phi(u)$ υφαρμονική.

(β) Αν u αρμονική τότε $v = |Du|^2$ υφαρμονική.

4). Αν $u \in C^2(\mathbf{R}^n_+) \cap C^0(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ είναι αρμονική, φραγμένη και τ.ω.

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0, \qquad \forall x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

δείξτε ότι

$$u(x) \equiv 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n_+.$$

5). Έστω u η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad && \text{in} \quad \mathbf{R}^n_+ \\ u &= g \quad && \text{on} \quad \partial\mathbf{R}^n_+, \end{aligned}$$

όπου η g είναι μία φραγμένη συνάρτηση με $g(x) = |x|$ για $x \in \partial\mathbf{R}^n$, $|x| \leq 1$. Εκτιμώντας το όριο

$$\frac{u(he_n) - u(0)}{h}, \qquad 0 < h \to 0,$$

δείξτε οτι η Du δεν είναι φραγμένη κοντά στο $x = 0$.

6). Έστω $u \in C(\overline{B(0,1)})$ με την ιδιότητα $\forall x \in B(0,1)$, $\exists r = r(x) > 0$ τ.ω. $B(x,r) \subset B(0,1)$ και

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y.$$

(α) Δείξτε οτι η u λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\partial B(0,1)$.

(β) Δείξτε οτι η u είναι αρμονική.

7). Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ και

$$B_+ = \{x : |x| < 1 \text{ και } x_n > 0\},$$

η μισή μπάλα. Πώς μπορεί να υπολογιστεί η συνάρτηση Green της B_+;

Παράδοση: Πέμπτη 31 Οκτωβρίου