ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 3 Οκτωβρίου 2024

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 1

1). Αν f συνεχής συνάρτηση δείξτε οτι

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)dx = u(x_0), \qquad \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|\partial B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u(x)dS_x = u(x_0).$$

2). (α) Αν $u \in C^2(U)$ και για κάθε μπάλα $B \subset U$ ισχύει

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

δείξτε οτι η u είναι αρμονική στο U. (Το ν είναι το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω στην επιφάνεια ∂B).

(β) Δείξτε οτι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει ακόμα και αν $u \in C^1(U)$.

(γ) Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Αν u αρμονική στο U και $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ σε ένα ομαλό κομμάτι του ∂U, τότε η u είναι ταυτοτικά μηδέν.

3). Έστω $k > 0$. Βρείτε ακτινικά συμμετρική συνάρτηση u που να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^3.$$

Για το σκοπό αυτό αναζητήστε την συνάρτηση στη μορφή $\Phi(r) = \frac{g(r)}{r}$ με $r = |x|$ και $g(0) > 0$.

(Απ. $\Phi(r) = \frac{A \sin k(r-R)}{r}$.)

Αν $f \in C_c^2(\mathbf{R}^3)$ βρείτε σχέση μεταξύ των σταθερών A και R ωστε η Φ να είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = -f(x), \qquad x \in \mathbf{R}^3,$$

δηλ. η συνάρτηση

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \Phi(x-y) f(y) dy,$$

να είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. (Απ. $4\pi A \sin(kR) = -1$)

4). Έστω $f \in C_c(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 3$ και

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Δείξτε οτι η u είναι φραγμένη. Δείξτε οτι

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

5). Έστω $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, όπου $B(0,1) \subset \mathbf{R}^2$, (δηλ. είμαστε στις **2 διαστάσεις**) η οποία ικανοποιεί

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in B(0,1), \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial B(0,1)\ , \end{aligned}$$

όπου f και g γνωστές συνεχείς συναρτήσεις. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε ότι

$$2\pi u(0) = \int_{\partial B(0,1)} g(x) dS_x - \int_{B(0,1)} f(x) \ln|x| dx\ . \tag{1}$$

Έστω

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(0,r)} u(x) dS_x, \qquad 0 < r \leq 1.$$

(α) Υπολογίστε το $\phi'(r)$ όπως στην τάξη.

(β) Ξεκινώντας απο τη σχέση

$$\phi(\varepsilon) = \phi(1) - \int_\varepsilon^1 \phi'(r) dr, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

και κάνοντας χρήση του αποτελέσματος του (α), δείξτε την (1).

6). (α) Έστω u αρμονική συνάρτηση στον $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ τ.ω. για κάποια θετική σταθερά C και κάποιο $k \in \mathbf{N}$,

$$|u(x)| \leq C(|x|^k + 1), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Δείξτε οτι η u είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

(β) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ που ικανοποιούν

$$-\Delta u = 1, \qquad x \in \mathbf{R}^2,$$

και επιπλέον υπάρχει θετική σταθερά C τ.ω.

$$|u(x)| \leq C(|x|^2 + 1), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^2.$$

7). Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ και $\{u_n\}$ ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων που συγκλίνει στη συνάρτηση u, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U. Δείξτε οτι η u είναι αρμονική.

Παράδοση: Πέμπτη 17 Οκτωβρίου