ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 21 Μαρτίου 2024

Σ. Φίλιππας

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Φυλλάδιο 6

1). Υποθέτουμε οτι η $u(x,t)$ είναι ομαλή λύση της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u + u_x = 0, \qquad (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,T). \tag{1}$$

Για $(x_0, t_0) \in \mathbf{R} \times (0,T)$, ορίζουμε το τρίγωνο

$$C = C(x_0,t_0) := \{(x,t) : \ 0 \le t \le t_0, \ \ |x - x_0| \le t_0 - t\},$$

και την ενέργεια

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{a(t)}^{b(t)} [u_t^2 + u_x^2 + u^2] dx, \qquad 0 \le t \le t_0,$$

όπου $a(t) = x_0 - (t_0 - t)$ και $b(t) = x_0 + (t_0 - t)$.

(**i**) Εργαζόμενοι όπως στη τάξη, δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C τ.ω.

$$\frac{dE(t)}{dt} \le CE(t), \qquad 0 \le t \le t_0.$$

(**ii**) Δείξτε οτι αν $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ όταν $x_0 - t_0 \le x \le x_0 + t_0$, τότε $u(x,t) \equiv 0$ στο C. Δείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων της (1), ακόμα και στη περίπτωση της μη ομογενούς.

(**iii**) Αν $u(x,t)$ ομαλή λύση της (1) και τα αρχικά δεδομένα $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ έχουν συμπαγή φορέα (δηλ. είναι ταυτοτικά μηδέν έξω απο ένα διάστημα $[-R,R]$) τότε και η λύση $u(x,t)$, για κάθε $t \in [0,T)$ έχει συμπαγή φορέα στον $\mathbf{R}$, δηλ. ειναι ταυτοτικά ίση με μηδέν έξω απο κάποιο διαστημα (που εξαρτάται από το t).