

Υλη, μέχρι στιγμής, από το βιβλίο του J. David Logan

2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 (έως σελ. 146 και σελ. 151-154), 3.5 (έως σελ. 170), 7.1, 7.2.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Ασκήσεις από βιβλίο J. David Logan

(α') Κεφ. 2: 3.2, 3.4, 5.2, 6.4, 6.7.
Κεφ. 3: 3.11, 4.2, 4.17, 5.8, 5.10.

2. Άλλες ασκήσεις

(α') Να υπολογιστούν οι δυο πρώτοι όροι της λύσης του προβλήματος

$$\begin{aligned}u'' &= u + \varepsilon e^u, & 0 \leq x \leq 1, \\u(0) &= 0, \\u(1) &= 0,\end{aligned}$$

για $0 < \varepsilon$ μικρό.

(β') Να προσεγγιστεί η λύση του παρακάτω προβλήματος με την μέθοδο WKB και με την μέθοδο ιδιομόρφων διαταραχών:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 u'' - (1 + x^2)u &= 0, & 0 \leq x, \\u(0) &= 1, \\u(\infty) &= 0.\end{aligned}$$

(γ') Να προσεγγιστούν τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\lambda(\cos t)} dt, \\ \int_0^{\pi/2} e^{\lambda(\cos t)} dt,\end{aligned}$$

για $\lambda \gg 1$.

(δ') Να προσδιοριστεί η εξίσωση Euler-Lagrange για το πρόβλημα

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}(y'')^2 + \frac{1}{4}(1 - (y')^2)^2 \right] dx, \\y(-1) &= 0, \\y(1) &= 0, \\y''(-1) &= 0, \\y''(1) &= 0.\end{aligned}$$

(ε') Να βρεθεί το διάγραμμα διακλάδωσης και να χαρακτηριστούν οι κλάδοι (και τα σημεία διακλάδωσης) ως προς την ευστάθεια ή αστάθεια για τα ακόλουθα:

$$\dot{u} = u(u - \mu)(u^2 - \mu),$$

$$\dot{u} = (1 - u)(u^2 - \mu),$$

$$\dot{u} = \mu u - u^3.$$

(ϛ') Να προσδιοριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά $t \rightarrow \infty$ για τα επόμενα:

i. $\dot{u} = 1 - e^u$,

(π.χ. $u(t) = \mathcal{O}(e^{-\lambda t})$, $t \rightarrow \infty$).

ii. $\dot{u} = u - u^3$ για τα σημεία ισορροπίας $u = \pm 1$ όταν $t \rightarrow \infty$, και $u = 0$ όταν $t \rightarrow -\infty$.