Éléments finis mixtes et condensation de masse en élastodynamique linéaire. (I) Construction

Note de Eliane Bécache, Patrick Joly et Chrysoula Tsogka
INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, F-78153 Le Chesnay Cédex

Résumé

Nous introduisons dans cette note une nouvelle famille des éléments finis mixtes pour l'élastodynamique linéaire. Nous présentons la construction de l'élément d'ordre le plus bas dans le cas 2D, ainsi que l'analyse de dispersion pour en milieu élastique isotrope homogène. Ces résultats peuvent être généralisé aux ordres supérieurs ainsi qu'en 3D.

Mixed finite elements and mass lumping for linear elastodynamics. (I) Construction

Abstract

We introduce in this note a new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. We present the construction of the lowest order element in the 2D case and the dispersion analysis for an isotropic homogeneous medium. This construction can be extended to higher orders as well as to the 3D case.

Abridged English Version

In this note, we consider the approximation of the velocity-stress mixed formulation of the classical elastodynamic equations :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \text{Find } (\sigma,u) \in X^s \times M \text{ such that :} & & \\ \varrho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{div}\sigma & = & f \\ A\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(u) & = & 0 \end{array}\right. ,$$

In the following we identify the space of 2×2 tensors with $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, space of linear maps on $\mathbb{R}^2$. The functional spaces are then defined as :

$M = L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, $H = L^2(\Omega;\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$, $X = \{\sigma \in H / \mathbf{div}\sigma \in M\}$, $X^s = \{\sigma \in X, \ \ \sigma \text{ symmetric }\}$

The approximation of this mixed formulation in finite dimensional subspaces $X_h^s \subset X^s$, $M_h \subset M$ leads to an evolution problem on the following form :

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Find } (\sigma_h,u_h) : \mathbb{R}^+ \to X_h^s \times M_h \text{ such that :} \\ \dfrac{d}{dt}a(\sigma_h(t),\tau_h) + b(\tau_h,u_h(t)) = 0 \ , \ \forall \tau_h \in X_h^s \\ \dfrac{d}{dt}c(u_h(t),v_h) - b(\sigma_h(t),v_h) = (f,v_h) \ , \ \forall v_h \in M_h \end{array}\right.$$

In order to get an explicit scheme, the mass matrices $a(\sigma_h(t),\tau_h)$ et $c(u_h(t),v_h)$ should be mass lumped. This can be easily done for $c(u_h(t),v_h)$. The major difficulty appearing here is to introduce an approximate space $X_h^s \subset X^s$ that includes strongly the symmetry of the tensors and allows the mass lumping. Actually, it is easy to check that this can not be achieved with classical mixed finite elements.

We present here a new family of mixed finite elements, based on the second family of elements introduced by Nédélec in [6], that leads to a block diagonal mass matrix $(a(\sigma_h(t),\tau_h))$, with blocks of size 5×5. We than obtain an explicit scheme by inverting by hand local 5×5 systems.

The behavior of the lowest order new element seems to be comparable (and even better) to the classical Q_1 finite element, from a dispersion point of view. This new element can be easily extended to higher orders and to the 3D case.

Version Française

1 Notations

Dans la suite, nous identifierons l'espace des tenseurs 2×2 à l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, sur lequel nous définissons la forme linéaire :

(1) $$a(\sigma) = \sigma_{12} - \sigma_{21}.$$

$\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2)$ désignera le sous espace des tenseurs symétriques :

(2) $$\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2) = \left\{\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \;/\; a(\sigma) = 0\right\}.$$

Nous munissons $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ d'une structure euclidienne à l'aide du produit scalaire :

(3) $$\sigma : \tau = \sigma_{ij}\tau_{ij} \quad \forall(\sigma,\tau) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2),$$

$|\sigma|$ désignera la norme associée. Enfin, à tout σ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ nous associerons :

(4) $$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Si maintenant, Ω désignant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, σ désigne un champ de tenseurs sur Ω ($\sigma \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$), nous posons :

(5) $$\mathbf{div}\sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{div}\, \sigma_1 \\ \\ \operatorname{div}\, \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

2 Le système de l'élastodynamique linéaire

Nous considérons maintenant que Ω est occupé par un milieu matériel et que $U(x,t)$ désigne le champ des déplacements (plans) dans Ω, à l'instant t ($x \in \Omega, t > 0$). Nous lui associons le tenseur des déformations $\varepsilon(U)$:

(6) $$\varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),$$

(dans la suite, nous considérons également ε comme un opérateur linéaire de $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2))$) et le champ de contraintes, donné par la loi de Hooke :

(7) $$\sigma(U)(x,t) = C(x)\varepsilon(U)(x,t),$$

où pour tout x dans Ω, $C(x)$ désigne une application linéaire, symétrique définie positive de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dans lui même, qui applique en outre $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2)$. Ceci revient à dire que $C(x)$ est un tenseur 4×4 ayant les propriétés de symétrie et de positivité habituelles [2]. Nous poserons $A(x) = C(x)^{-1}$ et supposerons que les propriétés de continuité et de coercivité de $A(x)$ sont uniformes en x :

(8) $$\forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2) \quad 0 < \alpha\, |\sigma|^2 \leq A(x)\sigma : \sigma \leq M\, |\sigma|^2$$

Les équations de l'élastodynamique qui régissent la propagation des ondes dans Ω peuvent être écrites sous la forme d'un système hyperbolique du premier ordre dont les inconnues sont :

$$\begin{array}{rcl} u = \dfrac{\partial U}{\partial t} & : & \text{le champ de vitesses dans } \Omega \\ \sigma = \sigma(U) & : & \text{le champ de contraintes dans } \Omega \end{array}$$

(9) $$\left\{\begin{array}{rcl} \varrho \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{div}\sigma & = & f \\ A\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(u) & = & 0 \end{array}\right.,$$

où $\varrho = \varrho(x)$ désigne la masse volumique qui vérifie

(10) $$0 < \varrho_- \leq \varrho(x) \leq \varrho_+ < +\infty \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Il convient d'adjoindre à (9) des données initiales (omises systématiquement ici) et une condition aux limites sur $\partial\Omega$. Nous considérerons ici la condition de bord rigide :

(11) $$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

3 Formulation variationnelle mixte

Les espace fonctionnels de base seront $M = L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et $H = L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ munis de leur structure hilbertienne naturelle. Nous introduisons par ailleurs :

$$X = \{\sigma \in H / \mathbf{div}\sigma \in M\} \tag{12}$$

ainsi que le sous espace fermé de X des tenseurs symétriques :

$$X^s = \{\sigma \in X \ / \ a(\sigma) = 0\} \tag{13}$$

Une formulation mixte du système (9, 11) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, u) : \mathbb{R}^+ \to X^s \times M \text{ tel que :} \\ \dfrac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau) + b(\tau, u(t)) = 0 \ , \ \forall \tau \in X^s \\ \dfrac{d}{dt} c(u(t), v) - b(\sigma(t), v) = (f, v) \ , \ \forall v \in M \end{array} \right. \tag{14}$$

où nous avons posé :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a(\sigma(t), \tau) = \displaystyle\int_\Omega A\sigma : \tau dx & \forall (\sigma, \tau) \in H \times H \\ c(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \varrho u \cdot v dx & \forall (u, v) \in M \times M \\ b(\tau, v) = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{div}\tau \cdot v dx & \forall (\tau, v) \in X \times M \end{array} \right. \tag{15}$$

Remarque 1 *Il est fondamental de se placer dans l'espace des tenseurs symétriques : c'est dans ce cadre que les opérateurs $-\varepsilon$ et* **div** *sont adjoints l'un de l'autre.*

4 Approximation spatiale et condensation de masse

Les applications que nous envisageons (contrôle non destructif, sismique) amènent à traiter des problèmes de grande de taille. C'est pourquoi nous nous imposerons, afin de garantir l'efficacité de la méthode numérique, de travailler sur des maillages réguliers structurés. L'idée est ensuite de prendre en compte la géométrie du domaine de calcul via la méthode des domaines fictifs [3], qui a la particularité de bien se marier avec une formulation mixte du type (14). Nous considérerons donc le cas où Ω est le carré $]0,1[\times]0,1[$, découpé en un maillage en petits carrés de taille $h = 1/N$. Nous désignerons par $\mathcal{T}_h$ le maillage ainsi construit et par K un carré quelconque de ce maillage. Le deuxième objectif que nous poursuivons est que l'approximation en espace puisse mener, après une discrétisation en temps, à un schéma explicite : ce point est crucial tant au niveau stockage qu'au niveau temps de calcul. Pour ce faire nous considérons les espaces d'approximation :

$$\begin{array}{l} M_h = \left\{ u_h \in M / \forall K \in \mathcal{T}_h, \ u_h|_K \in (P_0)^2 \right\} \\ X_h = \left\{ \sigma_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \sigma_h|_K \in (Q_1)^2 \right\} \\ X_h^s = \{\sigma_h \in X_h / a(\sigma_h) = 0\} \end{array} \tag{16}$$

auquel cas le problème approché s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, u_h) : \mathbb{R}^+ \to X_h^s \times M_h \text{ tel que :} \\ \dfrac{d}{dt} a(\sigma_h(t), \tau_h) + b(\tau_h, u_h(t)) = 0 \ , \ \forall \tau_h \in X_h^s \\ \dfrac{d}{dt} c(u_h(t), v_h) - b(\sigma_h(t), v_h) = (f, v_h) \ , \ \forall v_h \in M_h \end{array} \right. \tag{17}$$

Remarque 2 • *A priori le choix le plus naturel pour construire l'espace X_h consisterait à utiliser l'espace de Raviart Thomas $RT_{[0]}$:*

$$\begin{array}{l} X_h^{RT} = \left\{ \sigma_h \in X / (\sigma_{h1}, \sigma_{h2}) \in (RT_{[0]})^2 \right\} \\ RT_{[0]} = P_{1,0} \times P_{0,1} \end{array} \tag{18}$$

Le problème est que l'on s'aperçoit que l'espace $X_h^{RT} \cap X^s$ est trop petit pour constituer un bon espace d'approximation de X_s : si σ_h est un tenseur symétrique dans X_h^{RT}, le terme extra-diagonal σ_{12} est nécessairement constant! (Il suffit de remarquer que σ_{12} est linéaire en x_2 et constant en x_1 alors que σ_{21} est linéaire en x_1 et constant en x_2). L'approche adoptée en élastostatique pour contourner cette difficulté consiste à considérer $a(\sigma) = 0$ comme une contrainte égalité et à introduire le multiplicateur de Lagrange associé. C'est à partir d'une telle formulation, ou de son *équivalent statique, qu'a été notamment construit l'élément PEERS pour l'élastostatique plane (c.f [1]) : la symétrie du tenseur σ n'est alors imposée que de façon faible. Nous avons écarté ce type de méthode car il ne permet pas d'aboutir à un schéma explicite.*

- *Notre espace X_h^s est construit à partir de la deuxième famille d'éléments mixtes introduite par Nédélec dans [6]. Il présente l'avantage de tenir compte de façon forte (c'est à dire dans l'espace d'approximation lui même) de la symétrie des tenseurs. Ce principe a déjà été appliqué par Johnson-Mercier dans [5]. Toutefois leurs éléments ne mènent pas à des schémas explicites, c'est le cas en revanche de notre espace X_h^s grâce à la condensation de masse.*

- *Si σ_h est un élément de X_h^s, on s'aperçoit que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ est automatiquement continu sur Ω (il appartient à l'espace d'approximation de H^1 par éléments finis Q_1) alors que le vecteur $(\sigma_{11}, \sigma_{22})^t$ se retrouve dans l'espace $H(div)$: σ_{11} n'est discontinu qu'à travers les lignes du maillage parallèles à la direction x_2 et σ_{22} à travers celles parallèles à la direction x_1. On peut démontrer que ces propriétés sont une conséquence de la prise en compte de la condition de symétrie dans l'espace d'approximation.*

L'obtention d'un schéma explicite pose le problème du traitement de la matrice de masse associée à la forme bilinéaire $a(\sigma_h, \tau_h)$ (le lecteur vérifiera aisément que celle associé à $c(u_h, v_h)$ est diagonale dans la base usuelle de M_h) : on est alors amené à réaliser la condensation de masse en approchant $a(\sigma_h, \tau_h)$ par :

$$a_h(\sigma_h, \tau_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K(A\sigma_h : \tau_h)$$

où nous avons utilisé la formule de quadrature sur K

$$I_K(f) = \frac{h^2}{4} \sum_{M \text{ sommet de } K} f(M) \qquad \forall f \in C^o(K)$$

On s'aperçoit alors que la matrice de masse résultante est diagonale par blocs de taille 5×5 (au plus) dans une base adéquate. En effet, les degrés de liberté $(x_i = ih, y_j = jh)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^+(M_{ij}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{11}(x_i, y_j + \varepsilon) & 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le N-1 \\
\sigma_{11}^-(M_{ij}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{11}(x_i, y_j - \varepsilon) & 0 \le i \le N,\ 1 \le j \le N \\
\sigma_{22}^+(M_{ij}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{22}(x_i + \varepsilon, y_j) & 0 \le i \le N-1,\ 0 \le j \le N \\
\sigma_{22}^-(M_{ij}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{22}(x_i - \varepsilon, y_j) & 1 \le i \le N,\ 0 \le j \le N \\
\sigma_{12}(M_{ij}) &= \sigma_{12}(x_i, y_j) & 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le N
\end{aligned} \tag{19}$$

sont associés aux noeuds du maillage et ont un sens dans l'espace X_h^s. Ils sont en outre X_h^s unisolvants. La base de X_h^s associée à ces degrés de liberté est la base adéquate

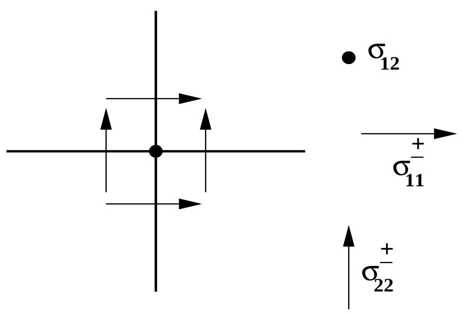

Figure 1: Degrés de liberté associés à un noeud intérieur.

Figure 1: Degrees of freedom associated to a mesh point

Remarque 3 *On obtient des schémas explicites après élimination à la main des systèmes locaux en chaque noeud. On peut même éliminer l'inconnue contrainte σ_h, ce qui mène à des substantielles économies de calcul.*

5 Interprétation en différences finies en milieu isotrope

Si Σ_h est le vecteur associé à σ_h et $U_h = \{u_{ij}\}$ celui associé à u_h le système (17) s'écrit :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} A_h \Sigma_h(t) + B_h U_h(t) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} U_h(t) - B_h^t \Sigma_h(t) = 0 \end{array} \right.$$

Après élimination de Σ_h on peut écrire (20) sous la forme :

$$(21) \qquad \frac{d^2 U_h}{dt^2} + \underbrace{B_h A_h^{-1} B_h^t}_{\mathbb{K}_h} U_h = 0$$

L'opérateur $\mathbb{K}_h$ s'écrit sous la forme bloc :

$$(22) \qquad \mathbb{K}_h = \left[\begin{array}{ll} V_p^2 \mathcal{D}^2_{x_1,\alpha} + V_s^2 \mathcal{D}^2_{x_2,\beta} & (V_p^2 - V_s^2) \mathcal{D}^2_{x_1 x_2} \\ (V_p^2 - V_s^2) \mathcal{D}^2_{x_1 x_2} & V_p^2 \mathcal{D}^2_{x_2,\alpha} + V_s^2 \mathcal{D}^2_{x_1,\beta} \end{array} \right]$$

où V_p est la vitesse des ondes de pression et V_s est la vitesse des ondes de cisaillement, l'opérateur aux différences $\mathcal{D}^2_{\alpha,x_1}$ (idem pour $\mathcal{D}^2_{\alpha,x_2}$) est défini par :

$$(23) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{D}^2_{\alpha,x_1} f(i,j) = \alpha D^2_{x_1} f(i,j-1) + (1-2\alpha) D^2_{x_1} f(i,j) + \alpha D^2_{x_1} f(i,j+1) \\ D^2_{x_1} f(i,j) = \dfrac{f(i+1,j) - 2f(i,j) + f(i-1,j)}{h^2} \end{array}$$

et $D^2_{x_1 x_2}$ est l'opérateur :

$$D^2_{x_1 x_2} f(i,j) = \frac{f(i+1,j+1) + f(i-1,j-1) - f(i+1,j-1) - f(i-1,j+1)}{h^2}$$

où les coefficients de pondération α et β sont donnés par :

$$\alpha = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{4V_p^4}, \ \beta = \frac{1}{4}$$

On voit alors que le système (20) n'est qu'une approximation des équations de l'élastodynamique écrit en vitesse :

$$(24) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} V_p^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + V_s^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & (V_p^2 - V_s^2) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (V_p^2 - V_s^2) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & V_p^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V_s^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{array} \right]}_{\mathbb{K}} \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right]$$

En fait (20) définit une classe des schémas numériques d'ordre 2 à deux paramètres α et β, qui contient notamment deux schémas étudiés dans [4] :

- Le schéma aux différences finies classiques centrées pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
- Le schéma éléments finis Q_1 pour $\alpha = \beta = 1/6$.

6 Étude de dispersion

On cherche des solutions particulières de (21) sous la forme :

$$(25) \qquad U_{ij} = U_o \exp \imath (k_1 x_1^i + k_2 x_2^j - \omega t), \quad U_o \in \mathbb{R}^2, \ \ k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \ \ \omega \in \mathbb{R}$$

qui est une onde plane numérique de vecteur d'onde k se propageant avec la vitesse de phase ω / k. On met alors en évidence l'existence d'ondes P et S numériques qui sont dispersives à cause de la discrétisation. Les courbes de dispersion numérique représentent pour chaque type d'onde et pour une direction de propagation ϕ donnée ($k_1 = |k| \cos\phi, \ k_2 = |k| \sin\phi$) les variations de la vitesse de phase adimensionnelle en fonction de l'inverse du nombre de points par longueur d'onde. Sur chaque figure (2) nous comparons les courbes de dispersion obtenues pour le nouveau schéma (trait continu) avec celles du schéma éléments finis Q_1 (trait en pointillé) pour un matériau qui correspond à un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

Pour les ondes planes qui se propagent dans une direction parallèle au maillage ($\phi = 0$) les deux schémas ont les mêmes courbes de dispersion, par contre pour les autres directions de propagation la dispersion est moins importante pour le nouveau schéma. On peut aussi noter que la différence entre les deux schémas est plus importante pour les ondes S.

$\phi = 0$ $\phi = 45$ $\phi = 0$ $\phi = 45$

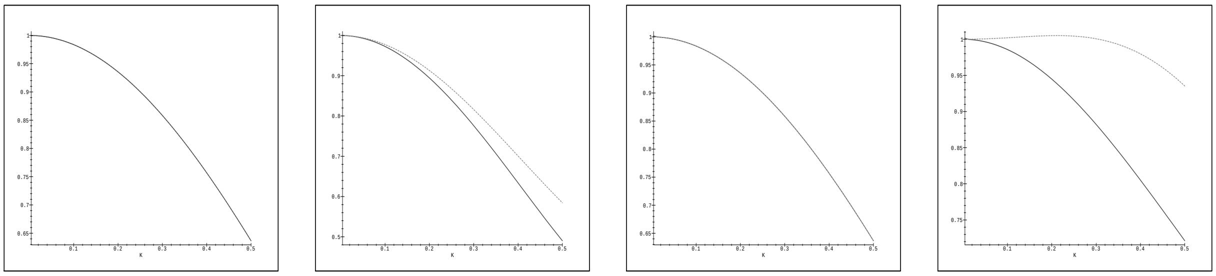

Figure 2: Courbes de dispersion, pour les ondes P à gauche et les ondes S à droite.

Figure 2: Dispersion curves, P waves on the left and S waves on the right.

Remarque 4 • *Il est important de remarquer que pour le nouveau schéma le paramètre* α *dépend du coefficient de Poisson* ν *et donc du milieu élastique considéré. C'est à dire qu'il s'agit d'un schéma qui s'adapte au milieu de propagation.*

• *Nous avons aussi mener une analyse de stabilité pour le schéma (21) en utilisant pour la discrétisation en temps le schéma classique de saute mouton suivant :*

$$\frac{d^2}{dt^2} f = \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{26}$$

Nous avons montré que la condition de stabilité pour le schéma (21) est la même que celle du schéma éléments finis Q_1*, c'est à dire :*

$$\Delta t \leq \frac{h}{V_p}$$

• *L'analyse de ce nouvel élément, en particulier l'obtention d'estimations d'erreur, seront présentés dans un prochain papier.*

References

[1] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi, and Jim Douglas. PEERS: A new mixed finite element for plane elasticity. *Japan J. Appl. Math.*, 1:347–367, 1984.

[2] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids*, volume I et II. Wiley, 1973.

[3] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: Application to electromagnetic scattering. Technical Report 2963, INRIA, Août 1996.

[4] P. Lailly G. Chavent, A. Bamberger. 'Etude de schémas numériques pour les équations de l' élastodynamique linéaire. Technical report, INRIA, 1980. Rapport Interne n^o 41.

[5] C. Johnson and B. Mercier. Some equilibrum finite element methods for two-dimensional elasticity problems. *Numer. Math.*, 30:103–116, 1978.

[6] J.C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.*, 50:57–81, 1986.