Étude d'un nouvel élément fini mixte permettant la condensation de masse

Note de E. Bécache, P. Joly et C. Tsogka
INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, F-78153 Le Chesnay Cédex

Résumé

Nous présentons la construction et l'analyse d'un nouvel élément fini mixte quadrangulaire (2D) ou cubique (3D) conduisant à un schéma explicite (condensation de masse) des équations des ondes acoustiques ou élastiques y compris en milieu anisotrope. Nous établissons des estimations d'erreur non classiques pour cet élément.

Abstract

We present the construction and the analysis of a new family of quadrangular (2D) or cubic (3D) mixed finite elements, leading to an explicit scheme (mass lumping) for the approximation of the acoustic or elastic wave equations, including the case of an anisotropic medium. Non classical error estimates are given for this new element.

Abridged English Version

In this note we consider the finite element approximation of the classical variational problem consisting in finding (p,u) in $X\times M$, where X and M are Hilbert spaces, satisfying ($f\in M'$):

$$(1)\qquad \begin{cases} a(p,q)+b(u,q) &= 0 \qquad \forall q\in X \\ b(v,p) &= -\langle f,v\rangle \quad \forall v\in M, \end{cases}$$

where $a(\cdot,\cdot)$ and $b(\cdot,\cdot)$ are continuous bilinear forms on $X\times X$ and $M\times X$ respectively. We assume that they satisfy the usual assumptions:

$$(2)\qquad \left| \begin{array}{ll} (i) & \exists\ c>0\ /\ \ \forall\ v\in M,\ \exists\ q\in X\ /\ b(v,q)\geq c\,\|v\|_M\,\|q\|_X \\ (ii) & \exists\ \alpha>0\ /\ \ \forall\ p\in V=\{q\in X\ /\ b(v,q)=0,\ \forall v\in M\},\quad a(p,p)\geq\alpha\,\|p\|_X^2\,. \end{array}\right.$$

We introduce finite dimensional subspaces X_h and M_h of X and M. Consider the case where the usual uniform discrete coercivity assumption:

$$(3)\qquad \exists\ \alpha>0\ /\ \ \forall\ p_h\in V_h=\{q_h\in X_h\ /\ b(v_h,q_h)=0,\ \forall v_h\in M_h\}\quad a(p_h,p_h)\geq\alpha\,\|p_h\|_X^2$$

does not hold. We consider the approximate problem which consists in finding (p_h,u_h) in $X_h\times M_h$ such that:

$$(4)\qquad \begin{cases} a(p_h,q_h)+b(u_h,q_h) &= 0 \qquad \forall q_h\in X_h \\ b(v_h,p_h) &= -\langle f,v_h\rangle \quad \forall v_h\in M_h \end{cases}$$

and show that, in some cases, we still have convergence of the approximate solution under a weaker discrete coercivity assumption than (3), provided that a strong discrete inf-sup condition is satisfied.

More precisely we assume that X is continuously embedded in another Hilbert space H and that $a(\cdot,\cdot)$ is in fact defined in H: $a(p,q)=(\mathcal{A}p,q)$ for some $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(H)$. In this framework we consider the following hypotheses (see the french version):

$$\left| \begin{array}{ll} (H1) & \text{Orthogonal decomposition of } X_h \text{ in } H,\quad X_h=X_h^r\oplus X_h^s \\ (H2) & \text{Strong inf-sup condition} \\ (H3) & \text{Weak coercivity property} \\ (H4) & \text{Approximation properties} \end{array}\right.$$

Then we are able to show that the discrete solution (p_h, u_h) converges to (p, u) in $H \times M$. More precisely, if $p_h = p_h^s + p_h^r$, p_h^s converges to p in X and p_h^r converges to 0 in H. We also provide error estimates (Theorem 1). We then show that our result can be applied to the mixed finite element approximation of the Dirichlet problem:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -div(A^{-1}(x)\nabla u) = f \quad , \ f \in L^2(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \qquad u \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

where

$$\left| \begin{array}{l} A(x) \text{ is a positive definite symmetric matrix} \\ H = L^2(\Omega), \ X = H(div, \Omega) \text{ and } M = L^2(\Omega) \\ p = A^{-1}(x)\nabla u, \ a(p,q) = \displaystyle\int A(x) \ p \ q \ dx \text{ and } b(v,q) = \int v \text{ div } q \ dx. \end{array} \right.$$

More precisely, assume that $\mathcal{T}_h$ is a quadrangulation of Ω with squares of size h, we consider:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_h = \{q_h \in H(div, \Omega) \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad q_h|_K \in Q_1 \times Q_1\} \\ M_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \,/\, \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ v_h|_K \in Q_0\} \end{array} \right.$$

(X_h is nothing but the lowest order element introduced by Nédélec in [4]). We show that one can obtain $O(h)$ estimates provided that $f \in H^1(\Omega)$ (Theorem 2).

Remark: *The use of the spaces (6) is of particular interest for the approximation of linear wave propagation problems.*

Version Française

1 Introduction et motivation

Le travail que nous présentons ici entre dans le cadre de l'étude de méthodes numériques pour la simulation d'expériences de contrôle non destructif. Il s'agit de calculer en régime transitoire la propagation d'ondes dans un milieu tridimensionnel, anisotrope comportant de fissures. Les caractéristiques de ce problème (grande taille, géométrie complexe des fissures) et la volonté de concevoir une méthode efficace nous ont conduit à nous fixer les critères suivants:

1. afin de faciliter l'implémentation et favoriser la vitesse du calcul: utilisation de maillages réguliers en carrés (2D) ou cubes (3D).
2. afin d'assurer la prise en compte des fissures (qui sont des surfaces libres à deux faces): utiliser la méthode des domaines fictifs (cf. [2]). Ceci conduit de façon naturelle à une formulation en vitesses-contraintes.
3. assurer, grâce à la condensation de masse, le caractère explicite de la discrétisation en temps. Ce dernier point fondamental nous a amené à construire un élément fini original pour les contraintes inspiré de la deuxième famille des éléments finis mixtes de Nédélec (cf. [4]).

Dans cette note nous avons choisi de présenter et d'analyser ce nouvel élément sur un problème elliptique modèle très simple, en dimension 2 pour alléger l'exposé.

2 Présentation de l'élément fini

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, $A(x)$ un champ de matrices symétriques définies positives vérifiant:

$$(1) \qquad A(x) \geq \alpha I \qquad \alpha > 0, \ p.p. \ x \in \Omega.$$

Nous considérons le problème:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -div(A^{-1}(x)\nabla u) = f \quad , \ f \in L^2(\Omega) \\ \qquad u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

qui admet, en introduisant $p = A^{-1}(x)\nabla u$, la formulation mixte suivante:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Trouver } (p,u) \in X \times M = H(div;\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tels que} & & \\ a(p,q) + b(u,q) & = 0 & \forall q \in X \\ b(v,p) & = -(f,v) & \forall v \in M, \end{array} \right.$$

où nous avons posé:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a(p,q) = \displaystyle\int A(x)\ p\ q\ dx & \forall (p,q) \in X \times X \\ b(v,q) = \displaystyle\int v \ \ \mathrm{div}\ q\ dx & \forall (v,q) \in M \times X \\ (f,v) = \displaystyle\int f\ v\ dx & \forall v \in M. \end{array} \right.$$

On suppose que Ω est une réunion de rectangles dont on peut faire un maillage $\mathcal{T}_h$ en carrés de côté $h > 0$, et on introduit les espaces d'approximation:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_h = \left\{ q_h \in X \ / \ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ q_h|_K \in \hat{X} \right\} \\ M_h = \left\{ v_h \in M \ / \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_h|_K \in \hat{M} \right\} \end{array} \right.$$

où $\hat{X}$ (resp. $\hat{M}$) désigne un espace de fonctions vectorielles (resp. scalaires) de dimension finie. Le choix que nous désirons faire est:

$$(6) \qquad \hat{X} = Q_1 \times Q_1 \quad \hat{M} = Q_0$$

Rappelons que les critères habituels pour assurer la convergence de la solution (u_h, p_h) calculée en remplaçant dans (3) X par X_h et M par M_h sont les suivants (cf. [6], [1]): il existe deux constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$, indépendantes de h telles que :

$$(7) \qquad \left| \begin{array}{ll} (i) & \forall\ v_h \in M_h,\ \exists\ q_h \in X_h \ / \ b(v_h, q_h) \geq c \left\| v_h \right\|_M \left\| q_h \right\|_X \\ (ii) & \forall\ p_h \in V_h = \left\{ q_h \in X_h \ / \ b(v_h, q_h) = 0,\ \forall\ v_h \in M_h \right\}, \quad a(p_h, p_h) \geq \alpha \left\| p_h \right\|_X^2 . \end{array} \right.$$

Dans notre cas le critère (i) (condition inf-sup uniforme) est satisfait (cf. remarque ci après) mais le critère (ii) ne l'est pas. Nous allons néanmoins montrer que notre choix mène à un résultat de convergence.

Remarque 1

- *Avec $\hat{M} = Q_0$, le choix classique pour $\hat{X}$ est l'élément de Raviart-Thomas (cf. [5], [1]):*

$$\hat{X} = P_{10} \times P_{01} = RT_{[0]}.$$

  Dans ce cas, (i) et (ii) sont satisfaits. En augmentant $\hat{X}$, nous préservons la condition inf-sup (i) et perdons le résultat de coercivité (ii).

- *De façon duale, en travaillant avec $\hat{X} = Q_1 \times Q_1$ on récupèrerait (ii), sans perdre (i), en choisissant:*

$$\hat{M} = P_1$$

  (le point clé est que l'opérateur divergence envoie $Q_1 \times Q_1$ dans P_1). Nous avons écarté cet élément pour nos applications parce qu'il est trop cher (stockage et temps de calcul).

- *Les problèmes de condensation de masse apparaissent lorsque on s'intéresse au problème d'évolution de l'équation des ondes anisotropes correspondant à (2). Les difficultés habituelles sont liées à l'apparition de la matrice de masse issue de la discrétisation du terme $a(p,q)$ (cette matrice doit être inverser à chaque pas de temps). La condensation de masse peut être obtenue avec notre élément à l'aide d'une formule de quadrature utilisant les sommets des éléments, et ca parce que tous les degrés de liberté peuvent être associés aux noeuds du maillage ce qui n'est pas le cas avec l'élément de Raviart-Thomas ($RT_{[0]}$) (cf [3]).*

3 Un résultat abstrait

Soient M, X, H trois espaces de Hilbert avec $X \subset H$ et $|\cdot|_H \leq \|\cdot\|_X$, $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ deux formes bilinéaires continues sur $H \times H$ et $M \times X$ vérifiant:

$$(8)\qquad \left| \begin{array}{ll} (i) & \exists\, c > 0 \,/\, \ \forall\, v \in M,\ \exists\, q \in X \,/\, b(v,q) \geq c\,\|v\|_M\,\|q\|_X \\ (ii) & \exists\, \alpha > 0 \,/\, \ \forall\, p \in V = \{q \in X \,/\, b(v,q) = 0,\ \forall v \in M\},\quad a(p,p) \geq \alpha\,\|p\|_X^2 \end{array} \right.$$

Par continuité de $a(\cdot,\cdot)$, nous savons qu'il existe un opérateur $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(H)$ tel que $a(p,q) = (\mathcal{A}p,q)_H$. On s'intéresse à l'approximation numérique de l'unique solution du problème mixte suivant, f désignant un élément de M', le dual de M:

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Trouver } (p,u) \in X \times M \text{ tels que} & & \\ a(p,q) + b(u,q) & = 0 & \forall q \in X \\ b(v,p) & = -\langle f,v\rangle & \forall v \in M. \end{array} \right.$$

Soient $X_h \times M_h$ une famille de sous espaces de dimension finie de $X \times M$. On pose

$$V_h(f) = \{q_h \in X_h \,/\, b(v_h,q_h) = -(f,v_h)\} \quad ; \quad V_h = V_h(0),$$

et on fait les hypothèses suivantes:

(H1) Décomposition orthogonale de l'espace X_h:

$$\left| \begin{array}{l} X_h = X_h^s \oplus X_h^r \ \ (p_h = p_h^s + p_h^r) \ \ , \ \ X_h^r \subset V_h \\ \forall (p_h^s,p_h^r) \in X_h^s \times X_h^r \ \ (p_h^s,p_h^r)_H = 0 \end{array} \right.$$

(H2) Condition inf-sup discrète uniforme “forte”: il existe une constante $c > 0$, indépendante de h, telle que :

$$\forall\, v_h \in M_h,\ \ \exists\, q_h^s \in X_h^s \quad / \quad b(v_h,q_h^s) \geq c\,\|v_h\|_M\,\|q_h^s\|_X$$

(H3) Coercivité “faible”: il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de h, telle que :

$$\forall\, p_h \in V_h,\ \ a(p_h,p_h) \geq \alpha\left(\|p_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2\right)$$

(H4) Propriétés d'approximation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X = 0 & \forall p \in X \\ \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_M = 0 & \forall u \in M. \end{array} \right.$$

Considérons alors le problème approché:

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Trouver } (p_h,u_h) \in X_h \times M_h \text{ tels que} & & \\ a(p_h,q_h) + b(u_h,q_h) & = 0 & \forall q_h \in X_h \\ b(v_h,p_h) & = -\langle f,v_h\rangle & \forall v_h \in M_h. \end{array} \right.$$

Théorème 1 *Avec les hypothèses (H1) à (H4), le problème (10) admet une unique solution:*

$$(p_h = p_h^s + p_h^r, u_h) \in X_h \times M_h$$

qui vérifie:

- $(p_h^s,u_h) \to (p,u)$ *dans* $X \times M$
- $p_h^r \to 0$ *dans* H.

Plus précisément, on a les estimations d'erreur:

$$|p_h^r|_H + \|p - p_h^s\|_X + \|u - u_h\|_M \leq C\left\{ \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} \|\mathcal{A}p - z_h^s\|_M \right\}.$$

Preuve: L'existence et l'unicité de (p_h, u_h) découlent de (H2) et (H3). Soit q_h, un élément quelconque de $V_h(f)$, comme $p_h \in V_h(f)$ (10), on a $(p_h - q_h) \in V_h$.

$$a(p_h - q_h, p_h - q_h) = a(p_h - p, p_h - q_h) + a(p - q_h, p_h - q_h). \tag{11}$$

En utilisant (9) et (10), il vient:

$$a(p_h - p, p_h - q_h) = b(u - v_h, p_h - q_h) \quad \forall v_h \in M_h.$$

En utilisant la propriété (H1), puis (9) nous obtenons

$$\left| \begin{aligned} a(p_h - p, p_h - q_h) &= b(u - v_h, p_h^s - q_h^s) + b(u, p_h^r - q_h^r) \\ &= b(u - v_h, p_h^s - q_h^s) - a(p, p_h^r - q_h^r) \\ &= b(u - v_h, p_h^s - q_h^s) - (\mathcal{A}p, p_h^r - q_h^r). \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Nous choisissons maintenant $q_h = q_h^s \in V_h^s = V_h \cap X_h^s$ de telle sorte que $q_h^r = 0$, d'après (11), (12) et l'orthogonalité dans H de X_h^r et X_h^s nous avons, pour tout $z_h^s \in X_h^s$:

$$a(p_h - q_h^s, p_h - q_h^s) = a(p - q_h^s, p_h - q_h^s) + b(u - v_h, p_h^s - q_h^s) - (\mathcal{A}p - z_h^s, p_h^r).$$

Grâce à (H3) et l'inégalité $|p_h - q_h^s|_H \leq \|p_h^s - q_h^s\|_X + |p_h^r|_H$, il vient:

$$\left| \begin{aligned} \alpha(\|p_h^s - q_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2) &\leq \|a\| \, |p - q_h^s|_H \, (\|p_h^s - q_h^s\|_X + |p_h^r|_H) \\ &\quad + \|b\| \, \|u - v_h\|_M \, \|p_h^s - q_h^s\|_X + |\mathcal{A}p - z_h^s|_H \, |p_h^r|_H \, . \end{aligned} \right.$$

On en déduit l'existence d'une constante C qui ne dépend que de f, p, $\|a\|$, $\|b\|$, et α tel que

$$\|p_h^s - q_h^s\|_X + |p_h^r|_H \leq C\,(|p - q_h^s|_H + \|u - v_h\|_M + |\mathcal{A}p - z_h^s|_H) \quad \forall (q_h^s, v_h, z_h^s) \in V_h^s(f) \times M_h \times X_h^s.$$

Par conséquent on obtient aisément que:

$$\left| \begin{aligned} \|p - p_h^s\|_X &\leq (1 + C) \left(\inf_{q_h^s \in V_h^s(f)} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |\mathcal{A}p - z_h^s|_H \right) \\ |p_h^r|_H &\leq C \left(\inf_{q_h^s \in V_h^s(f)} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{v_h \in M_h} \|u - v_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |\mathcal{A}p - z_h^s|_H \right). \end{aligned} \right.$$

Pour conclure, il suffit de rappeler que la condition inf-sup (H2) entraîne que (cf. [1]):

$$\inf_{q_h^s \in V_h^s(f)} \|p - q_h^s\|_X \leq c_1 \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X \, .$$

Nous ne détaillons pas l'obtention de l'estimation de $\|u - u_h\|_M$ qui découle essentiellement de la condition inf-sup (cf. [1]). Il faut toutefois faire attention à utiliser la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ dans H.

Remarque 2 *Sortie de ce contexte, l'étude de ce problème abstrait semble étrange: l'espace X_h^s ayant toutes les bonnes propriétés, pourquoi ne pas remplacer X_h par X_h^s ? En fait, il faut penser à une situation où, soit on ne saurait pas caractériser X_h^s, soit on saurait faire plus simplement les calculs dans X_h (c'est notre cas avec la condensation de masse pour le problème d'évolution).*

4 Application au problème modèle

Nous avons $H = L^2(\Omega)^2$. Il s'agit d'abord de vérifier l'hypothèse (H1). Nous définissons X_h^s comme étant l'élément de Raviart-Thomas (cf. [5]) d'ordre minimal:

$$X_h^s = \left\{ v_h \in X \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \ v_h \in RT_{[0]} \right\} \subset X.$$

Pour décrire son orthogonal X_h^r, nous indéxons par (i, j) le noeud de $\mathcal{T}_h$ de coordonnées (ih, jh), par $(i + \dfrac{1}{2}, j)$ l'arête "horizontale" joignant les noeuds (i, j) et $(i + 1, j)$, et par $(i, j + \dfrac{1}{2})$ l'arête "verticale" joignant les noeuds (i, j) et $(i, j + 1)$. Nous désignons par $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$ et $\phi_{i,j+\frac{1}{2}}$ les fonctions de base de X_h^s canoniquement associées à ces arêtes. Il est alors très facile de démontrer le lemme suivant ((x, y) désigne le point courant de $\mathbb{R}^2$).

Lemme 1 *L'espace* $X_h^r = (X_h^s)^\perp$ *est engendré par les fonctions*

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j} = \left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right) \phi_{i+\frac{1}{2},j} \text{ et } \psi_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(y - y_{j+\frac{1}{2}}\right) \phi_{i,j+\frac{1}{2}}$$

avec $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})h$ *et* $y_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})h$. *De plus il est inclus dans* V_h.

A partir de là, compte tenu des propriétés bien connues de l'espace X_h^s (cf. [5], [6], [1]), seule la vérification de l'hypothèse (H3) est non standard.

Lemme 2 *Pour tout* p_h *dans* V_h, *on a,* α *étant défini par (1):*

$$a(p_h, p_h) \geq \alpha \left(\|p_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2\right).$$

Preuve: Il est clair que, grâce à (1):

$$a(p_h, p_h) \geq \alpha \, \|p_h\|_0^2 = \alpha \left(\|p_h^s\|_0^2 + \|p_h^r\|_0^2\right)$$

Notons que $p_h \in V_h$ entraine $p_h^s \in V_h \cap X_h^s$. On sait alors que (cf. [1]):

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} (i) & \text{div } p_h^s \in M_h \\ (ii) & (\text{ div } p_h^s, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in M_h. \end{cases}$$

D'après (i) on peut choisir $v_h = $ div p_h^s dans (ii) ce qui implique:

$$\text{div } p_h^s = 0.$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. Nous pouvons alors appliquer le Théorème 1 abstrait au problème défini dans la section 1. En utilisant les résultats d'interpolation usuels (cf. [6]), on démontre le:

Théorème 2 *On adopte les notations de la section 2. Alors le problème (10) admet une unique solution:*

$$(p_h, u_h) \in X_h \times M_h.$$

Elle vérifie:

- $(p_h^s, u_h) \to (p, u)$ *dans* $H(div, \Omega) \times L^2(\Omega)$
- $p_h^r \to 0$ *dans* $L^2(\Omega)$.

Si de plus $f \in H^1(\Omega)$, *on a:*

$$|p_h^r|_{L^2} + \|p - p_h^s\|_{H(div)} + \|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch\left(|u|_{H^1} + |p|_{H^1} + |div\ p|_{H^1} + |\mathcal{A}p|_{H^1}\right) \leq Ch\,\|f\|_{H^1}.$$

Remarque 3

- *Lorsque* A *est diagonale, les problèmes en* p_h^s *et* p_h^r *se découplent. Ce n'est pas le cas sinon.*
- *Notons que le théorème n'assure la convergence de* p_h *vers* p *que dans* L^2, *et non dans* $H(div)$. *Pour obtenir une solution convergeant dans* $H(div)$, *il suffit de projeter* p_h *sur* X_h^s, *ce qui est particulièrement simple dans le cas considéré ici.*
- *Nos résultats peuvent être étendus aux éléments d'ordre supérieur et en dimension 3.*

References

[1] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springen–Verlag, 1991.

[2] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: Application to electromagnetic scattering. Technical Report 2963, INRIA, Août 1996.

[3] A. Elmkies and P. Joly. Éléments finis et condensation de masse pour les équations de maxwell: le cas 2d. Technical Report 3035, INRIA, Novembre 1996.

[4] J.C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.*, 50:57–81, 1986.

[5] P.A. Raviart and J.M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. Number 606, pages 292–315. Proc. of math. aspects on the finite element method, 1977.

[6] J.E. Roberts and J.M. Thomas. *Mixed and Hybrid Methods, in Handbook of Numerical Analysis.* 1989.