

**THÈSE**

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE PARIS IX DAUPHINE**  
**U.F.R. MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

spécialité

**MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

par

**Chrysoula Tsogka**

Sujet de la thèse :

**Modélisation mathématique et numérique  
de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles  
dans des milieux fissurés.**

Soutenue le 7 Décembre 1999 devant le jury composé de :

MM. <b>Jean-Claude Nédélec</b>	Président
<b>Jean-Marie Thomas</b>	Rapporteurs
<b>George Papanicolaou</b>	
<b>Patrick Joly</b>	Directeur de thèse
<b>Éliane Bécache</b>	Examineurs
<b>Abderrahmane Bendali</b>	
<b>Guy Chavent</b>	
<b>Yvon Maday</b>	

“L’Université n’entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.”

*Je tiens tout d'abord à remercier Patrick Joly de m'avoir accueillie au sein du Projet Ondes de l'INRIA Rocquencourt. Il m'a proposé ce sujet de thèse très intéressant dont il a suivi l'évolution avec beaucoup d'attention. Tout au long de cette thèse, j'ai pu bénéficier de ses grandes compétences scientifiques, ses idées et ses suggestions qui m'ont toujours été très précieuses.*

*Éliane Bécache qui a assumé avec Patrick la charge d'encadrer cette thèse. Elle m'a consacré beaucoup de temps et d'énergie et elle m'a toujours encouragée. Ses idées, ses suggestions et ses remarques fructueuses ont été décisives pour la réalisation de cette thèse dont la valeur aurait été moindre sans son apport. Je la remercie pour sa grande disponibilité, son amitié et pour avoir toujours gardé le sourire.*

*Francis Collino spécialiste d'absorption des ondes mais aussi des tensions. Toujours présent avec un grand sens de l'humour...*

*Je remercie George Papanicolaou et Jean-Marie Thomas d'avoir accepté avec gentillesse d'être rapporteur sur cette thèse, malgré leur emploi du temps surchargé.*

*Monsieur Jean Claude Nédélec m'a fait l'honneur de participer au jury de cette thèse. Monsieur Abderrahmane Bendali, Guy Chavent et Yvon Maday ont également bien voulu en faire partie. Je les en remercie vivement.*

*Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Andreas Boudouvis du National Technical University of Athens. Il a guidé mes premiers pas dans la recherche, et a suivi mes travaux tout au long de ma thèse. Il m'a accordé sa confiance et il m'a aidé à franchir le pas et à venir en France. Le plaisir que j'y ai trouvé et ma vision de la recherche lui doivent sans doute beaucoup.*

*Je tiens aussi à remercier tous les membres, permanents ou non, des Projets ONDES et ESTIME. Ils m'ont toujours entouré d'amitié et ils ont tous apporté leur petite contribution à la rédaction de cette thèse. Non pas que je ne sois pas bilingue ... Je remercie particulièrement F. Clément et M. Kern spécialistes des problèmes techniques en informatique. T. Fouquet pour toutes ces petites astuces et les programmes en MATLAB (d'où les beaux dessins à la fin). Je veux aussi remercier, tout spécialement le groupe de thésards qui ont grandement contribué à faire régner la bonne humeur dans le bureau. Je veux aussi les remercier, pour le fameux week-end C.H.O que je n'oublierai? jamais (on sait tous pourquoi - depuis je déteste le vélo ....)*

*Je n'oublie pas, bien sûr, notre secrétaire, Muriel toujours disponible ...*

*Merci aussi au groupe multimedia de l'INRIA qui m'a aidé à réaliser trois films. Plus particulièrement à A. Paouri (la réalisatrice des films) pour sa patience, sa curiosité (elle a passé beaucoup de temps à comprendre à quoi servent tout ces équations?) et son amitié.*

*Merci aussi à l'équipe SMP de l'ENSTA et plus particulièrement à Patrick Ciarlet qui a toujours été disponible pour des discussions scientifiques ou non, je le remercie pour ses conseils et son amitié.*

*Merci enfin à ma famille pour leur appuis inconditionnel, leur compréhension et la confiance qu'ils m'ont toujours montré. Ils m'ont toujours encouragée à continuer et m'ont toujours dit que c'est l'effort qui compte, ..... Constantin, serait sans doute d'accord*

*Ithaque*

*Quand tu prendras le chemin d'Ithaque,  
souhaite que la route soit longue,  
pleine d'aventures, pleine d'enseignements.  
Les Lestrygons et les Cyclopes,  
ne les crains pas, ni la colère de Poséidon,  
jamais tu ne retrouveras rien de tel sur ton chemin,  
si ta pensée reste élevée, si une émotion rare  
étreint ton esprit et ton corps.  
Les Lestrygons et les Cyclopes,  
tu ne les rencontreras pas, ni l'irascible Poséidon,  
si tu ne les transportes pas dans ton âme,  
si ton âme ne les fait pas surgir devant toi.*

*Souhaite que la route soit longue.  
Que nombreux soient les matins d'été  
où –avec quel plaisir et quelle joie!–  
tu découvriras des ports que tu n'as jamais vus;  
arrête-toi dans les comptoirs phéniciens  
pour te procurer de précieuses marchandises,  
ambre, corail, ébène, nacre,  
et capiteux parfums de toutes sortes,  
le plus que tu pourras de capiteux parfums;  
visite aussi beaucoup de villes égyptiennes,  
et n'aie de cesse de t'instruire auprès de ceux qui savent.*

*Garde toujours Ithaque présente à ton esprit.  
Y parvenir est ta destination finale.  
Mais ne te hâte surtout pas dans ton voyage.  
Mieux vaut le prolonger pendant des années;  
et n'aborder dans l'île que dans ta vieillesse,  
riche de ce que tu auras gagné en chemin,  
sans attendre d'Ithaque aucun autre bienfait.*

*Ithaque t'a offert ce beau voyage.  
Sans elle, tu n'aurais pas pris la route.  
Elle n'a rien de plus à t'apporter.*

*Et même si elle est pauvre, Ithaque ne t'a pas trompé.  
Sage comme tu l'es, avec une expérience pareille,  
tu as sûrement déjà compris ce que les Ithagues signifient.*

*Constantin P. Cavafis (1911)*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Éléments finis mixtes pour la discrétisation spatiale</b>	<b>19</b>
<b>1 Problème simplifié : l'équation des ondes anisotropes</b>	<b>21</b>
1.1 Présentation de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes . . . . .	22
1.1.1 Le problème modèle : l'équation des ondes anisotropes . . . . .	22
1.1.2 Présentation de l'élément fini de plus bas degré . . . . .	23
1.1.3 Généralisation aux ordres supérieurs et condensation de masse . . . . .	27
1.2 Analyse de convergence: le problème elliptique . . . . .	30
1.2.1 Le problème elliptique . . . . .	30
1.2.2 Un résultat abstrait . . . . .	32
1.2.3 Application au problème de l'équation des ondes anisotropes . . . . .	38
1.2.3.1 Approximation avec l'élément fini de plus bas degré, $Q_1^{div} - Q_0$	38
1.2.3.2 Approximation avec les éléments finis d'ordre supérieur, $Q_{k+1}^{div} - Q_k$	41
1.2.3.3 Application à l'opérateur de projection elliptique . . . . .	45
1.3 Analyse de convergence: le problème d'évolution . . . . .	46
1.3.1 Obtention des estimations d'erreur pour le problème d'évolution à partir des estimations d'erreur pour le problème elliptique . . . . .	47
1.3.1.1 Le cas abstrait . . . . .	47
1.3.1.2 Le cas de l'équation des ondes anisotropes. . . . .	53
1.4 Extension au cas tridimensionnel . . . . .	54
<b>2 Les équations de l'élastodynamique</b>	<b>57</b>
2.1 Présentation de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes . . . . .	58
2.1.1 Le problème modèle : les équations de l'élastodynamique . . . . .	58
2.1.1.1 Notations . . . . .	58
2.1.1.2 Le problème de l'élastodynamique . . . . .	59
2.1.1.3 Formulation variationnelle "forte". . . . .	60
2.1.1.4 Formulation variationnelle "relaxée" . . . . .	61
2.1.2 Construction de l'élément fini de plus bas degré . . . . .	62
2.1.3 Extension aux ordres supérieurs et condensation de masse . . . . .	68
2.1.4 Extension au cas tridimensionnelle . . . . .	70

2.2	Analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour un problème elliptique: le problème stationnaire . . . . .	74
2.2.1	Le problème elliptique - formulation "forte" . . . . .	74
2.2.2	Difficultés de l'analyse de convergence . . . . .	75
2.2.3	Le problème elliptique - formulation "relaxée" . . . . .	77
2.2.4	Un résultat abstrait . . . . .	78
2.2.5	Application au problème élastique . . . . .	87
2.2.5.1	Les résultats principaux . . . . .	87
2.2.5.2	Équivalence avec le problème relaxé: Caractérisation de l'espace $L_h$ . . . . .	88
2.2.5.3	Preuve du théorème principale: Vérification des hypothèses (H1), (H0), (H3), (H4) et (H4b) . . . . .	93
2.2.5.4	Preuve du théorème principale: Vérification de l'hypothèse (H2) . . . . .	96
2.3	Estimations d'erreur pour le problème d'évolution . . . . .	107
2.3.1	L'erreur de projection elliptique . . . . .	108
2.3.2	Obtention des estimations d'erreur pour le problème d'évolution à partir des estimations d'erreur pour le problème elliptique . . . . .	109
<b>3</b>	<b>Étude de dispersion cas élastique</b> . . . . .	<b>115</b>
3.1	Le problème bidimensionnel . . . . .	117
3.1.1	Interprétation des schémas en maillage régulier . . . . .	117
3.1.1.1	Le schéma $Q_1 - Q_0$ et ces concurrents . . . . .	118
3.1.2	L'élément fini $Q_2 - Q_1$ et son concurrent . . . . .	122
3.1.3	L'élément fini $Q_3 - Q_2$ et son concurrent . . . . .	127
3.1.4	Analyse de dispersion - Généralités . . . . .	132
3.1.4.1	Dispersion du schéma $Q_1 - Q_0$ . . . . .	134
3.1.4.2	Dispersion du schéma $Q_2 - Q_1$ . . . . .	140
3.1.4.3	Dispersion du schéma $Q_3 - Q_2$ . . . . .	144
3.1.5	Conclusions . . . . .	148
3.2	Le problème tridimensionnel . . . . .	149
3.2.1	Interprétation du schéma . . . . .	149
3.2.2	Analyse de dispersion, le cas tridimensionnel . . . . .	156
<b>II</b>	<b>Discrétisation en temps</b> . . . . .	<b>167</b>
<b>4</b>	<b>Analyse de stabilité</b> . . . . .	<b>169</b>
4.1	Introduction - Généralités. . . . .	169
4.2	Stabilité de la classe générale des schémas d'ordre 2 en dimension 2. . . . .	172
4.3	Stabilité des schémas $Q_2 - Q_1$ et $Q_3 - Q_2$ . . . . .	177
4.4	Stabilité des schémas $Q_2$ et $Q_3$ . . . . .	178
4.5	Analyse de stabilité, le problème tridimensionnel. . . . .	179
4.5.1	Résultat Général. . . . .	179
4.5.2	Le schéma des différences finies. . . . .	181
4.5.2.1	Les sommets du cube. . . . .	181
4.5.2.2	Les arêtes du cube. . . . .	182
4.5.2.3	Les faces du cube. . . . .	182

4.5.2.4	L'intérieur du cube. . . . .	183
4.5.3	Le schéma des éléments finis $Q_1$ . . . . .	184
4.5.3.1	Les sommets du cube. . . . .	184
4.5.3.2	Les arêtes du cube. . . . .	185
4.5.3.3	Les faces du cube. . . . .	186
4.5.3.4	L'intérieur du cube. . . . .	187
4.5.4	Le schéma de l'élément fini $Q_1 - Q_0$ . . . . .	187
4.5.4.1	Les sommets du cube. . . . .	187
4.5.4.2	Les arêtes du cube. . . . .	188
4.5.4.3	Les faces du cube. . . . .	189
4.5.4.4	L'intérieur du cube. . . . .	190
<b>5</b>	<b>Analyse de dispersion pour les schémas discrets</b>	<b>193</b>
5.1	Généralités . . . . .	193
5.2	Dispersion numérique pour les schémas $Q_1$ , $Q_1 - Q_0$ et DF. . . . .	194
5.3	Élément fini $Q_2 - Q_1$ . . . . .	198
5.4	Élément fini $Q_3 - Q_2$ . . . . .	203
5.5	Analyse de dispersion, le cas tridimensionnel. . . . .	209
<b>III</b>	<b>Traitement des fissures et des surfaces libres</b>	<b>213</b>
<b>6</b>	<b>La méthode des domaines fictifs</b>	<b>215</b>
6.1	Description de la méthode . . . . .	216
6.1.1	Présentation du problème modèle 2D . . . . .	216
6.1.2	Méthodes d'approximation classiques . . . . .	218
6.1.3	Formulation du problème en domaines fictifs . . . . .	219
6.1.4	Équivalence entre les deux formulations . . . . .	221
6.1.5	Approximation en espace de la formulation en domaines fictifs . . . . .	222
6.1.6	Discrétisation en temps . . . . .	224
6.1.7	Résolution pratique . . . . .	227
6.2	Quelques aspects théoriques . . . . .	231
6.2.1	La formulation en domaines fictifs pour l'équation des ondes anisotropes . . . . .	231
6.2.2	Approximation en espace - Étude du problème elliptique. . . . .	232
6.2.3	Un résultat abstrait . . . . .	234
6.2.4	Application à la formulation en domaines fictifs pour l'équation des ondes anisotropes . . . . .	240
6.2.4.1	Estimations d'erreur pour le problème d'évolution . . . . .	242
6.2.5	Condition inf-sup discrète uniforme . . . . .	247
6.2.5.1	Démonstration du Théorème 6.2.4 . . . . .	248
6.2.6	Le cas élastique - Difficultés . . . . .	252
<b>IV</b>	<b>Traitement des bords</b>	<b>255</b>
<b>7</b>	<b>Conditions aux limites absorbantes</b>	<b>259</b>
7.1	Construction d'une condition transparente . . . . .	259

7.2	Les conditions Absorbantes . . . . .	263
7.2.1	Généralités . . . . .	263
7.2.2	La condition d'ordre 1/2 . . . . .	265
7.2.3	La condition d'ordre 1 de Chalindar . . . . .	267
7.2.4	Étude des conditions aux limites d'ordre 1/2 et 1 en termes de coefficients de réflexion . . . . .	268
7.2.4.1	Réflexion d'une onde P . . . . .	268
7.2.4.2	Réflexion d'une onde S . . . . .	271
7.2.5	Une famille des conditions absorbantes d'ordre élevé . . . . .	273
7.2.5.1	Stabilité des conditions approchées . . . . .	275
7.2.6	Étude des conditions approchées en termes de coefficients de réflexion . . . . .	277
7.2.6.1	Réflexion d'une onde P . . . . .	278
7.2.6.2	Réflexion d'une onde S . . . . .	281
7.3	Résultats Numériques . . . . .	282
7.4	Conclusions . . . . .	283
<b>8</b>	<b>Couches absorbantes parfaitement adaptées</b>	<b>287</b>
8.1	Introduction . . . . .	288
8.2	PML model for a general evolution problem . . . . .	289
8.3	PML model for elastodynamics . . . . .	292
8.3.1	The elastodynamic problem . . . . .	292
8.3.2	Plane wave analysis . . . . .	293
8.3.2.1	Infinite absorbing layer . . . . .	293
8.3.2.2	Finite absorbing layer . . . . .	294
8.4	The discrete PML model . . . . .	296
8.4.1	The Virieux finite-difference scheme . . . . .	296
8.4.2	The finite-element scheme . . . . .	297
8.5	Dispersion Analysis . . . . .	301
8.6	Numerical Results . . . . .	305
8.6.1	Homogeneous, isotropic elastic medium-Virieux scheme . . . . .	306
8.6.2	Heterogeneous, isotropic elastic medium-Virieux scheme . . . . .	307
8.6.3	Heterogeneous, isotropic elastic medium. Finite-element scheme . . . . .	307
8.6.4	Homogeneous, anisotropic elastic medium. Finite-element scheme . . . . .	307
8.6.5	Reflection Coefficients . . . . .	310
8.7	Conclusions . . . . .	313
<b>V</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>315</b>
<b>9</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>317</b>
9.1	Notations . . . . .	317
9.2	Résultats dans le cas bidimensionnel . . . . .	319
9.2.1	Milieu homogène isotrope, le cas du demi espace . . . . .	319
9.2.2	Milieu homogène anisotrope. . . . .	322
9.2.3	Applications en géophysique - milieu avec surface libre . . . . .	322
9.2.4	Application au contrôle non destructif - Milieu hétérogène anisotrope . . . . .	330
9.3	Résultats dans le cas tridimensionnel . . . . .	334



9.3.1	Milieu homogène isotrope . . . . .	334
9.3.2	Milieu homogène anisotrope . . . . .	335
9.3.3	Diffraction par une fissure plane circulaire en milieu isotrope homogène	337
9.3.4	Diffraction par une fissure plane milieu isotrope homogène . . . . .	345
9.3.5	Diffraction par une fissure plane en milieu anisotrope homogène . . . .	348
9.3.6	Diffraction par une fissure de géométrie complexe dans un milieu élas- tique anisotrope, homogène. . . . .	351
<b>A Les schémas semi-discrétisés en espace.</b>		<b>355</b>
A.1	L'élément fini $Q_2 - Q_1$ . . . . .	355
A.2	L'élément fini $Q_3 - Q_2$ . . . . .	360
<b>B Démonstration des lemmes 3.1.2 et 3.1.3</b>		<b>379</b>
<b>C Démonstration du Lemme 3.2.1</b>		<b>383</b>



# Introduction

## Le contexte applicatif

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à la modélisation numérique des phénomènes de propagation des ondes dans des milieux élastiques, les solides en général. La compréhension et la modélisation de ces phénomènes jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines d'applications tels que la géophysique, la sismique, le contrôle non destructif,...,etc. En géophysique, on utilise les ondes sismiques pour sonder le sous-sol et déterminer la nature des milieux qui le constituent. Le but est de calculer les réflexions dues aux interfaces entre les différentes couches du sous-sol. Les ondes ultrasonores sont utilisées en contrôle non destructif pour détecter la présence de défauts dans une structure. C'est ce type d'applications qui a en premier lieu motivé ce travail qui s'est inscrit en grande partie dans le cadre d'une convention de recherche entre le Département Études et Recherche d'EDF et le projet ONDES de l'INRIA. Dans ce cas le but est de calculer l'onde diffractée par le défaut (fissure). Dans les deux cas de figure, on comprend l'intérêt d'outils de modélisation. Il s'agit alors de résoudre l'équation des ondes **en régime transitoire** dans des **milieux de propagation 3D** qui peuvent être très **complexes**, tels que des matériaux élastiques **hétérogènes et anisotropes**. Pour ce type de milieux l'approximation numérique de l'équation des ondes est indispensable, car les méthodes analytiques sont inutilisables. Ceci est d'autant plus vrai pour des domaines de **géométrie quelconque** qui se rencontrent dans les applications: modélisation de la diffraction des ondes par des **fissures** de géométrie complexe dans le cadre du contrôle non-destructif et prise en compte de la **topographie** en géophysique.

## Le contexte scientifique

C'est pour ces raisons que plusieurs méthodes numériques ont été développées pour l'approximation de ce type de problèmes. Les méthodes les plus simples et sans doute les plus souvent utilisées dans le monde industriel sont les méthodes de différences finies. Elles sont basées sur l'utilisation d'une grille de points régulière pour la discrétisation en espace et elles conduisent à des systèmes explicites en temps. De ce fait elles sont très avantageuses tant du point de vue temps de calcul que celui du stockage. Ces méthodes ont été largement étudiées, pour l'acoustique et l'élastodynamique, d'abord à l'ordre deux [10, 88, 112] et puis à l'ordre quatre [99, 44, 53, 14, 13, 78]. Ces études ont mis en évidence la supériorité des méthodes d'ordre élevé, notamment à cause de la dispersion numérique qui est le facteur principal limitant les méthodes du second ordre. Nous rappelons ici, que dans un milieu homogène l'équation de l'élastodynamique n'est pas dispersive: pour une onde plane la vitesse de propagation ne dépend pas de la fréquence. Cette propriété n'est plus vraie pour le problème approché, la discrétisation induit de la **dispersion numérique**, qui est donc le premier phé-

nomène parasite à maîtriser. Ce qui se fait soit en choisissant des maillages assez fins, soit en optant pour des méthodes d'ordre supérieur, ce qui est reconnu comme plus efficace.

Par construction les différences finies sont bien adaptées pour des géométries rectangulaires et elles sont naturellement moins maniables dans le cas des géométries complexes. Leur inconvénient principal est l'introduction de diffractions parasites dues à une mauvaise approximation de la géométrie (voir Fig 0.0.1-(b)).

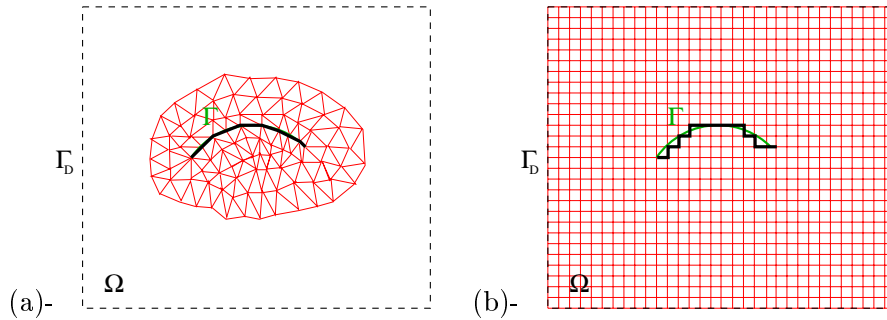


FIG. 0.0.1: *Les maillages : (a) en éléments finis irréguliers, (b) différences finies (approximation en escalier).*

Pour des géométries quelconques, les méthodes les mieux adaptées sont sans doute les méthodes d'éléments finis (cf. [34]). Cependant, du point de vue coût de calcul, elles sont moins avantageuses que les méthodes de différences finies d'une part, parce qu'elles nécessitent la construction d'un maillage, d'autre part à cause de la nature non structurée des données et parce qu'elles conduisent à des systèmes implicites en temps. Pour remédier à cet inconvénient et répondre aux exigences de précision, des méthodes d'éléments finis d'ordre élevé permettant la **condensation de masse** (c.à.d conduisant à des **schémas explicites** en temps) ont été développées. Citons par exemple [109, 35] pour l'équation des ondes, [36, 37, 49] pour le système de Maxwell. Dans la continuité de ces travaux, nous avons envisagé initialement d'utiliser les éléments finis proposés dans [109] (ou leur généralisation en 3D) pour la discrétisation des équations de l'élastodynamique. Néanmoins, en 3D les éléments finis tétraédriques d'ordre élevé et compatibles avec la condensation de masse [75, 63, 83] sont assez compliqués et chers (pour l'ordre 2 il y a 23 degrés de liberté par tétraèdre [63] et pour l'ordre 3 il y a 50 [75]). Ceci n'est pas le cas, pour les éléments finis cubiques (ou parallélépipèdes plus généralement). Un autre inconvénient est lié au choix du pas de temps, nous y reviendrons plus loin.

Il faut noter ici que dans le cas de maillages rectangulaires (en 2D) ou parallélépipèdes (en 3D) les éléments finis proposés dans [109, 35] entrent dans le cadre plus général des méthodes d'éléments finis spectraux. Ces méthodes ont été introduites par A.T. Patera [89, 81] pour la résolution de problèmes en mécanique des fluides et ensuite généralisées avec succès aux problèmes de propagation d'ondes (cf. [91, 101, 100]). D'une certaine façon, ils font le lien entre méthodes de différences finies et méthodes d'éléments finis dans la mesure où ils permettent une construction systématique de schémas numériques sur grille structurée, schémas qu'on peut à posteriori interpréter en termes des différences finies.

Pour le problème transitoire, les deux méthodes (EF avec condensation de masse et EF spectraux), conduisent à des systèmes explicites en temps. Le point clé est l'approximation numérique de la matrice de masse par des formules de quadrature adéquates. Le prix à payer est une **condition de stabilité**, dite CFL qui s'écrit généralement sous la forme suivante :

$$\Delta t \leq \alpha_{CFL} h_{min},$$

où  $\Delta t$  est le pas de discrétisation en temps,  $h_{min}$  est le plus petit pas de discrétisation en espace et  $\alpha_{CFL}$  est une constante, plus petite que un, qui dépend du schéma numérique utilisé. Un inconvénient apparaît alors dans le cas de géométries complexes (voir 0.0.1-(a)).

Dans ce cas afin de prendre en compte les détails de la géométrie, on est amené à utiliser des “petits” éléments, ce qui nous oblige en combinaison avec la CFL à avoir un pas de temps trop petit.

Évoquons enfin la méthode des équations intégrales [15, 16, 23] qui est une méthode bien adaptée pour les problèmes de diffraction d'ondes. Cette méthode permet de se ramener à un problème posé sur la frontière de l'obstacle (la fissure en l'occurrence), tout en prenant en compte ce qui se passe à l'infini par le biais de la solution fondamentale. De ce fait on gagne une dimension en espace car l'inconnue vit maintenant uniquement sur la surface de l'obstacle. L'autre avantage principal de la méthode est que les conditions à l'infini sont satisfaites de manière exacte. Cette méthode comporte toutes fois quelque défauts. Pour la résolution de problèmes de diffraction en régime harmonique [87, 76] on est amené à inverser des matrices pleines, ce qui est coûteux. En outre le calcul de ces matrices implique l'évaluation d'intégrales singulières, ce qui se révèle délicat sur le plan numérique. L'équivalent de ces méthodes en régime transitoire est la méthode dite des potentiels retardés [24, 46, 52, 80], développée notamment pour les équations de l'élastodynamique [15, 12]. Dans ce cas, grâce à la propagation à vitesse finie, les matrices à inverser à chaque pas de temps ont une structure bande, dont la taille est proportionnelle aux dimensions de l'obstacle diffractant. Mais il faut traiter un terme de convolution en temps qui oblige de stocker le passé de la solution. Enfin, l'obstacle majeure à nos yeux est que l'usage de ces méthodes est pour l'instant restreint aux milieux isotropes homogènes pour lesquels on dispose une fonction de Green explicite. Ce qui n'est pas en général le cas pour des milieux complexes.

### Une démarche aboutissant à une méthode originale

Afin de construire une méthode numérique qui rajoute à l'efficacité des différences finies la maniabilité géométrique des maillages irréguliers, nous proposons finalement l'utilisation de la **méthode des domaines fictifs**. Cette méthode a été initialement introduite pour la résolution de problèmes stationnaires dans des géométries complexes [5, 55, 58]. Ces dernières années elle à été généralisée avec succès dans le cas des problèmes d'évolution [57, 42, 54, 96]. Le principe est de prolonger la solution dans un domaine d'une forme très simple (typiquement un rectangle en 2D et un parallélépipède en 3D), indépendant de la géométrie complexe de l'obstacle. Ensuite, les conditions aux limites sont prises en compte d'une manière faible, par l'intermédiaire d'un **multiplicateur de Lagrange** qui vit uniquement sur le bord de l'obstacle. On peut alors distinguer deux types d'inconnues, celles qui correspondent à la solution prolongée du problème initial et les nouvelles inconnues auxiliaires correspondant au multiplicateur de Lagrange. Ceci est le point fondamental de la méthode, qui nous permet de

considérer deux maillages, un régulier sur le domaine de calcul (d'où l'efficacité des différences finies) et un maillage de surface irrégulier pour une bonne approximation de la géométrie de l'obstacle. En contrepartie de la maniabilité géométrique, il faut bien sur rajouter un coût supplémentaire pour le calcul des nouvelles inconnues. Cependant, ce surcoût peut être considéré comme marginal étant donné que ces inconnues sont d'une dimension inférieure en espace.

Un point important est que ces méthodes sont bien adaptées au traitement des conditions aux limites essentielles (i.e de type Dirichlet pour les problèmes du second ordre en espace). Ces conditions peuvent s'interpréter comme une contrainte égalité dans l'espace utilisé pour la formulation variationnelle. C'est cette contrainte qui est dualisée par l'introduction du multiplicateur de Lagrange. Considérons par exemple notre problème modèle, l'élastodynamique avec condition de surface libre sur les bords physiques du domaine de calcul: la composante normale du tenseur des contraintes s'annule sur les lèvres de la fissure ou sur la topographie. Pour que cette condition soit de type Dirichlet, il faut que le tenseur de contraintes soit une inconnue du problème. Ceci laisse deux possibilités, soit considérer la formulation en contraintes ou alors la **formulation mixte en vitesse-contraintes**. Nous avons opté pour la deuxième solution car elle présente l'avantage d'être compatible avec les **couches absorbantes parfaitement adaptées**, dites PML. Cette méthode a été initialement introduite par Bérenger [26] pour le problème de Maxwell et elle permet de traiter très efficacement les problèmes de propagation d'ondes dans des milieux non bornés. Ce point mérite d'être examiné à part et nous y reviendrons plus loin.

Nous avons donc fixé jusqu'ici les deux aspects principaux de la méthode: on considère la formulation en vitesse-contraintes et on utilise la méthode des domaines fictifs. Les inconnues sont alors,  $v$  la vitesse,  $\sigma$  le tenseur des contraintes et  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange qui correspond au saut de la vitesse à travers la surface libre.

Signalons, qu'il y a un lien très fort entre la méthode des domaines fictifs et celle des équations intégrales. Notamment, le prolongement de la solution respecte la continuité de  $\sigma \cdot n$  ( $n$  étant la normale) et  $\lambda$  correspond à l'inconnue des équations intégrales lorsqu'on représente la solution  $v$  sous forme d'un potentiel de double couche (cf. [16]). D'une certaine façon les méthodes de domaines fictifs permettent de faire des équations intégrales même quand on ne dispose pas de la fonction de Green du milieu de propagation. Celle ci est implicitement évaluée numériquement par l'intermédiaire des calculs sur les inconnues volumiques  $\sigma$  et  $v$ . Le parallèle s'arrête là, avec la méthode des domaines fictifs nous n'aurions pas à traiter de termes de convolution et donc à stocker le passé de la solution. En outre, l'évaluation de  $\lambda$  à chaque pas de temps se fera en inversant une matrice creuse.

Le principe de la méthode étant fixé, il reste à choisir la discrétisation en espace et en temps de notre problème. Pour la discrétisation en espace, une **méthode variationnelle** s'imposait: d'une part elle est inhérente à la méthode des domaines fictifs, d'autre part elle conduit automatiquement à une méthode numérique stable car elle garantit une **conservation d'énergie**. Le point délicat reste la condensation de masse, nécessaire pour aboutir in fine à des schémas explicites, ceux-ci découlant alors d'une discrétisation en temps par une méthode classique de différences finies centrées. Pouvoir obtenir de matrices de masse diagonales sera donc une contrainte pour choisir nos éléments finis et constituera l'une des principales difficultés de l'entreprise.

Plusieurs méthodes d'éléments finis mixtes ont déjà été développées pour le problème de l'élasticité (i.e. le problème stationnaire associé à l'élastodynamique). On peut citer par exemple, l'élément proposé par M. Amara et J.M. Thomas [3], l'élément PEER'S introduit par D. N. Arnold, F. Brezzi et J. Douglas [4] et les travaux de R. Stenberg [104, 105] et M. Morley [82]. Le point commun entre ces différents travaux est l'approche suivie pour remédier à un problème bien connu pour les éléments finis mixtes en élasticité : la **prise en compte de la symétrie du tenseur des contraintes**. Plus précisément cette approche repose sur la prise en compte de cette condition de façon faible : on considère la symétrie du tenseur comme une contrainte et on introduit une inconnue auxiliaire, le multiplicateur de Lagrange qui lui est associé. Une approche alternative, conduisant à des éléments finis dits "composites", qui prennent en compte la symétrie dans l'espace d'approximation, a été introduite par C. Johnson et B. Mercier [73]. Ces méthodes peuvent, bien évidemment, être utilisées pour le problème d'évolution. Cependant, aucune d'entre elles ne conduit à un système explicite en temps.

C'est pour cette raison que nous nous sommes fixés les objectifs suivants :

1. Construire une famille d'**éléments finis mixtes**, pouvant se généraliser aux ordres supérieurs et conduisant à des **schémas explicites en temps**.
2. Prendre en compte la **symétrie du tenseur de contraintes dans l'espace d'approximation**.
3. Analyser rigoureusement la précision de ces éléments : convergence et estimations d'erreur.

En réalité, le deuxième objectif est fortement lié au premier : nous avons, en effet remarqué qu'il serait beaucoup plus difficile d'obtenir un schéma explicite avec l'approche de la symétrie faible (cf. chapitre 2 - Remarque 2.1.3). Pour accomplir les deux premiers objectifs nous avons construit une famille d'éléments finis mixtes (inspirée de la deuxième famille d'éléments finis mixtes de Nédélec [86]). Malgré leur simplicité, ces éléments semblent être originaux. Ils peuvent être généralisés à des ordres arbitrairement élevés et dans ce sens nos travaux entrent dans le cadre plus général du développement des méthodes numériques d'ordre élevé pour les problèmes de propagation d'ondes (cf. [2, 53, 35, 36, 84, 91]).

En voulant atteindre le troisième objectif nous nous sommes heurtés à plusieurs difficultés : la première est due au fait que les éléments finis proposés ne satisfont pas la **théorie d'approximation de Babuska-Brezzi** (défaut de coercivité, cf. [32, 29, 8]). La deuxième est liée à la prise en compte de façon forte de la symétrie du tenseur de contraintes.

Dans un premier temps, nous avons abordé la première difficulté sur un problème modèle, l'équation des ondes scalaires en milieu anisotrope (le problème dû à la symétrie du tenseur des contraintes est alors éliminé). Nous considérons la formulation en vitesse-pression de ce problème et nous utilisons pour la discrétisation en espace la version scalaire des éléments finis mixtes introduits précédemment. Nous obtenons ainsi une formulation analogue à celle de l'élastodynamique en vitesse-contraintes. L'étude de ce problème est par ailleurs intéressante en elle-même car les éléments finis proposés réalisent dans ce cas la condensation de

masse en milieu acoustique anisotrope et se généralisent à des ordres élevés. Pour l'analyse de convergence, comme dans le cas élastique, la théorie d'approximation [32] reste mise en défaut (coercivité). C'est pourquoi nous avons été amenés à développer une **théorie abstraite** nouvelle conduisant à des estimations d'erreur. Cette théorie apparaît comme une modification de la théorie d'approximation de Babuska-Brezzi. Elle repose d'une part sur l'**affaiblissement de la coercivité**, d'autre part sur des hypothèses de **condition inf-sup et d'approximation "fortes"**.

Dans un deuxième temps, nous avons envisagé d'appliquer cette nouvelle théorie au cas élastique. Cependant, la prise en compte de la symétrie du tenseur des contraintes entraîne de nouvelles difficultés qui nous ont amenés à modifier de nouveau la théorie abstraite afin d'obtenir des estimations d'erreur. Dans ce cas, la **condition inf-sup** est également **affaiblie** et les hypothèses d'**approximation** sont **encore plus "fortes"**.

Nous avons également mené une analyse de type différences finies (justifiée par le fait qu'on utilise des maillages réguliers) qui est en fait une analyse de Fourier discrète. Ce type d'analyse, méconnu des spécialistes des éléments finis, permet d'abord d'aboutir à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité explicites pour les schémas obtenus après discrétisation en temps. Il permet aussi d'étudier finement le phénomène de dispersion numérique évoquer précédemment. Par l'intermédiaire de courbes de dispersion, il fournit de plus un guide indispensable pour choisir les paramètres de discrétisation en fonction d'une précision donnée. Enfin, c'est à notre connaissance le seul outil théorique permettant de comparer quantitativement la précision de méthodes du même ordre. Dans ce travail, cette analyse nous a permis de mettre en évidence des phénomènes de super-convergence liés à l'utilisation de maillages réguliers et de comparer notre méthode en termes de précision (étude de dispersion) et en termes de temps de calcul (étude de stabilité) avec des méthodes numériques déjà existantes.

Il restait enfin à aborder le sujet délicat concernant la modélisation des problèmes de propagation des ondes dans des milieux non bornés. Bien évidemment, la simulation numérique de ce type de problèmes nécessite un traitement adéquat des bords artificiels du domaine de calcul, celui-ci étant inévitablement tronqué dans le cas d'un calcul concret. Concernant cette question, deux solutions s'offraient à nous : les conditions aux limites absorbantes (CLA) et les couches absorbantes.

Dans le cas de l'équation des ondes acoustiques, les CLA ont été initialement introduites par Engquist et A. Majda [51] dans les années 70. Leur démarche consiste à écrire dans un premier temps la condition transparente, c'est à dire l'équation qui relie sur le bord absorbant la trace d'une solution de l'équation des ondes homogènes à celle de sa dérivée normale. Cette équation implique l'introduction d'un opérateur pseudo-différentiel scalaire. Les conditions absorbantes sont ensuite obtenues par l'approximation du symbole de cet opérateur à l'aide de fractions rationnelles. Ces conditions ont été depuis étendues et étudiées par plusieurs auteurs [62, 66, 110, 47, 11]. Ces études ont permis de mettre en évidence la nécessité de conditions d'ordre élevé afin d'obtenir une bonne précision pour des ondes se propageant avec une direction oblique par rapport au bord. Pour ce faire, des familles de conditions absorbantes d'ordre arbitrairement élevés et stables ont été développées (cf. [56, 39, 60]).



Dans le cas de l'élastodynamique les premières études concernant les conditions transparentes et les CLA d'ordre un ont été effectuées par A. Reynolds [95] et L. Halpern [61]. Cependant, comme dans le cas de l'équation des ondes, des CLA d'ordre élevé sont nécessaires afin d'obtenir une bonne précision. Dans ce sens, la seule méthode qui est actuellement bien analysée à été proposée par R. Higdon [65, 68]. La démarche est dans ce cas différente de celle suivie par Engquist et A. Majda. Plus précisément, ces conditions s'obtiennent comme le produit de CLA du premier ordre pour l'équation des ondes scalaire qui sont appliquées à chaque équation du système de l'élastodynamique. Ces conditions sont stables [67] et précises pour des ondes se propageant selon des directions proches de l'incidence normale. Cependant, des réflexions importantes peuvent apparaître pour des grands angles d'incidence (cf. [90]) et dans certains cas, des instabilités numériques ont été observées pour des schémas d'ordre élevé [102]. De plus, pour les ordres supérieurs à trois l'implémentation numérique de ces conditions devient très complexe.

C'est pour ces raisons que nous avons repris la démarche suivie par Engquist et A. Majda dans le cas acoustique pour construire des CLA d'ordres élevés pour l'élastodynamique. Avec le souci supplémentaire d'aboutir à des conditions aux limites compatibles avec une formulation variationnelle. La condition transparente relie la trace du déplacement à celle de la contrainte normale via l'introduction d'un opérateur pseudo-différentiel matriciel ce qui complique la construction des conditions approchées. Les résultats de notre étude sont mitigés : une condition d'ordre 1 stable et facile à implémenter a été développée mais dans le cas des CLA d'ordre supérieurs le schéma numérique que nous proposons est implicite, ce qui peut entraîner un coût de calcul élevé (spécialement en 3D).

Au même moment, en électromagnétisme, une méthode très originale faisait son apparition. Il s'agit, bien sûr, de la méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées introduite par J.P Bérenger [26]. La technique des couches absorbantes n'est pas nouvelle, elle est inspirée par la physique et elle consiste à entourer le domaine de calcul par un milieu artificiel dans lequel les ondes sont atténuées. Cependant son utilisation en pratique s'avère assez délicate. La difficulté principale est due au fait que les ondes "voient" le changement d'impédance entre le milieu physique et la couche, ce qui induit une réflexion parasite. L'originalité des couches de Bérenger est que le modèle continu est parfaitement adapté : il n'y a pas de réflexion à l'interface avec le milieu absorbant!

Étant donné le succès de cette méthode en électromagnétisme nous avons donc envisagé sa généralisation au cas de l'élastodynamique. Une solution proposée dans [64] consiste à considérer la formulation en potentiels. Néanmoins, cette approche ne peut pas être utilisée dans le cas de milieux anisotropes. Pour ce faire, il est nécessaire de réécrire le problème de l'élastodynamique comme un système linéaire hyperbolique du premier ordre, en utilisant en l'occurrence la formulation en vitesse-contraintes.

## **Le plan de la thèse**

La thèse a été divisée en cinq parties.

Dans la première partie nous présentons les travaux concernant la discrétisation spatiale du problème. Plus précisément les deux premiers chapitres sont consacrés à la construction et l'analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes. Pour mieux expliquer notre démarche

et distinguer les différentes difficultés que nous avons rencontrées nous commençons par le problème scalaire de l'équation des ondes anisotropes et nous présentons ensuite le cas de l'élastodynamique. L'objectif principal de ces chapitres est l'analyse de ces éléments. Même si on sait actuellement que la théorie abstraite développée pour le problème scalaire ne s'applique pas au cas élastique, nous avons décidé de la présenter car sans elle nous n'aurions probablement pas réussi à faire face au cas plus complexe de l'élasticité.

Dans le troisième chapitre nous présentons l'analyse de dispersion associée aux schémas semi-discrétisés en espace en deux et trois dimensions pour le problème de l'élastodynamique.

La deuxième partie de la thèse concerne la discrétisation en temps. Plus précisément dans le chapitre 4 nous présentons l'analyse de stabilité et dans chapitre 5 l'étude de dispersion des schémas discrets. Les études de dispersion et de stabilité, utilisées habituellement pour les schémas de différences finies, semblent être nouvelles dans le cas 3D. Elle nous permettent notamment

1. d'aboutir à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité explicites pour les schémas obtenus après discrétisation en temps,
2. d'évaluer l'erreur due à la dispersion numérique,
3. et de comparer les nouveaux schémas avec des schémas plus classiques.

Dans la troisième partie (chapitre 6) on décrit la méthode des domaines fictifs pour l'élastodynamique. Nous présentons également dans ce chapitre un résultat abstrait nous permettant d'analyser la convergence de la méthode pour le problème de l'équation des ondes anisotropes avec une condition de type Neumann. Ce problème est toujours un problème modèle pour lequel les difficultés liées à la symétrie du tenseur des contraintes ne sont plus présentes. Malheureusement nous n'avons pas pu généraliser ces résultats au cas de l'élastodynamique.

La quatrième partie (chapitres 7 et 8) concerne le problème de la modélisation de la propagation des ondes élastiques dans des milieux ouverts. Plus précisément une méthode de conditions absorbantes est présentée dans le chapitre 7 et une méthode de couches absorbantes dans le chapitre 8.

Finalement dans la dernière partie (chapitre 9) plusieurs résultats numériques, qui montrent l'efficacité de la méthode, sont présentés.

Première partie

Éléments finis mixtes pour la  
discrétisation spatiale



# Chapitre 1

## Problème simplifié : l'équation des ondes anisotropes

Nous construisons et analysons une famille d'éléments finis mixtes quadrangulaires (2D) ou cubiques (3D), qui assurent la condensation de masse pour l'approximation de l'équation des ondes anisotropes. Des estimations d'erreur non classiques ont été obtenues pour ces éléments. Ce chapitre a donné lieu à deux publications [18, 20].

### Introduction

Dans un premier temps, nous allons étudier un problème modèle, l'équation des ondes anisotropes. Ce problème peut être considéré comme un modèle simplifié de la propagation des ondes dans des milieux élastiques anisotropes. Dans ce cas, plusieurs difficultés théoriques apparaissent déjà : les éléments finis mixtes qui sont proposés dans la littérature ne conduisent pas à un système explicite en temps (condensation de masse) dans le cas général d'un milieu anisotrope. Nous sommes, de ce fait, amenés à construire une famille d'éléments finis mixtes originale (inspirée par la deuxième famille des éléments finis de Nédélec [86]) qui permet d'obtenir la condensation de masse. Cette famille est la version scalaire des éléments finis mixtes que nous proposons pour l'élastodynamique.

Ces éléments peuvent être généralisés à des ordres arbitrairement élevés, ce qui est d'une importance majeure spécialement pour des problèmes de grande taille. Dans ce contexte, ces travaux peuvent être considérés comme une continuation des études menées par plusieurs auteurs (cf. [2, 53, 35, 36, 37, 84, 91, 49, 109]) pour développer des méthodes numériques d'ordre élevé pour les problèmes de propagation des ondes.

L'objectif principal de ce chapitre est l'analyse de ces éléments. Nous allons montrer que les hypothèses d'approximation classiques (cf. [32, 29, 8]), nécessaires pour obtenir des estimations d'erreur, ne sont pas satisfaites dans ce cas. C'est pourquoi nous avons été amenés à développer une nouvelle théorie abstraite qui nous a permis d'obtenir des estimations d'erreur non classiques.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 1.1 on propose une formulation variationnelle du problème de la propagation des ondes acoustiques. Nous montrons ensuite que les éléments finis de Raviart - Thomas [94] ne satisfont pas la condensation de masse dans le cas général d'un milieu anisotrope. Ce qui nous a conduit à construire la nouvelle famille d'éléments finis mixtes. Nous présentons l'élément de plus bas degré de cette famille

dans la section 1.1.2, et la généralisation aux ordres supérieurs dans 1.1.3. Ensuite dans la section 1.2 nous menons l'analyse de ces éléments en considérant un problème elliptique qui est le problème stationnaire associé au problème de l'équation des ondes. Cette analyse nous permet d'obtenir des estimations d'erreur pour le problème stationnaire. Finalement dans la section 1.3 nous obtenons des estimations d'erreur pour le problème d'évolution à partir des estimations sur le problème elliptique, en utilisant des techniques d'énergie ([48]).

## 1.1 Présentation de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes

### 1.1.1 Le problème modèle : l'équation des ondes anisotropes

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $A(x)$  une matrice symétrique définie positive qui satisfait

$$(1.1.1) \quad A(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Nous considérons le problème d'évolution scalaire

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u : [0, T] \mapsto H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(A^{-1}(x)\nabla u) = f, \quad f \in C^0(0, T; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$u(t=0) = u_0 \in H^1; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \in L^2.$$

**Remarque 1.1.1** *Dans cette section nous ne sommes pas intéressés par la régularité de  $u$  en temps. C'est pour cette raison que nous avons écrit simplement  $u : [0, T] \mapsto H_0^1(\Omega)$ .*

En introduisant maintenant

$$\begin{cases} p = A^{-1}(x)\nabla u, \\ v = \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases}$$

nous pouvons réécrire (1.1.2) comme le système du premier ordre suivant

$$(1.1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} p = f, \\ A \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla v = 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(1.1.4) \quad p(0) = p_0 = A^{-1}(x)\nabla u_0; \quad v(0) = v_0 = u_1.$$

Une formulation variationnelle mixte associée à (1.1.3) est

$$(1.1.5) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (p, v) : [0, T] \mapsto X \times M \equiv H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(p, q) + b(v, q) = 0, \quad \forall q \in X, \\ \frac{d}{dt} (v, w) - b(w, p) = (f, w), \quad \forall w \in M, \end{cases}$$

où

$$(1.1.6) \quad \begin{cases} a(p, q) = \int_{\Omega} A(x) p \cdot q \, dx, & \forall (p, q) \in X \times X, \\ b(w, q) = \int_{\Omega} w \operatorname{div} q \, dx, & \forall (w, q) \in M \times X, \\ (f, w) = \int_{\Omega} f w \, dx, & \forall w \in M. \end{cases}$$

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  (resp.  $b(\cdot, \cdot)$ ) est continue sur  $H \times H$  ( $H = (L^2(\Omega))^2$ ) (resp. sur  $X \times M$ ). Nous pouvons donc définir les opérateurs linéaires et continus  $\mathcal{A} : H \rightarrow H'$  et  $B : X \rightarrow M'$  par

$$\langle \mathcal{A}p, q \rangle_{H' \times H} = a(p, q),$$

$$\langle Bq, w \rangle_{M' \times M} = b(w, q).$$

Il est alors connu que les propriétés suivantes sont satisfaites (cf. [32]) :

$$(1.1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \text{La condition inf-sup continue:} \\ \quad \exists c > 0 / \forall w \in M, \exists q \in X / b(w, q) \geq c \|w\|_M \|q\|_X. \\ (ii) \quad \text{La coercivité de la forme } a(\cdot, \cdot) \text{ sur } V \equiv \operatorname{Ker} B : \\ \quad \exists \alpha > 0 / \forall p \in V, \quad a(p, p) \geq \alpha \|p\|_X^2. \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit, nous allons considérer la semi-discrétisation en espace de ce problème.

### 1.1.2 Présentation de l'élément fini de plus bas degré

Nous supposons ici que le domaine  $\Omega$  est une union de rectangles et nous considérons un maillage régulier  $(\mathcal{T}_h)$  de  $\Omega$  composé des carrés  $K$  de côté  $h > 0$ . Nous introduisons ensuite les espaces d'approximation

$$(1.1.8) \quad \begin{cases} X_h = \left\{ q_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \hat{X} \right\}, \\ M_h = \left\{ w_h \in M / \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in \hat{M} \right\}, \end{cases}$$

où  $\hat{X}$  (resp.  $\hat{M}$ ) est un espace de fonctions vectoriels (resp. scalaires) de dimension finie. Le problème discret associé à (1.1.5) et (1.1.4) est

$$(1.1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h, v_h) : [0, T] \mapsto X_h \times M_h \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(p_h, q_h) + b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ \frac{d}{dt} (v_h, w_h) - b(w_h, p_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in M_h, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$p_h(0) = p_{0,h} ; v_h(0) = u_{1,h}.$$

Pour la suite de l'exposé, nous noterons  $P_k$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  et  $P_{k_1 k_2}$  l'espace des polynômes défini par

$$(1.1.10) \quad P_{k_1 k_2} = \left\{ p(x_1, x_2) \mid p(x_1, x_2) = \sum_{i \leq k_1, j \leq k_2} a_{ij} x_1^i x_2^j \right\}.$$

Afin de satisfaire notre objectif concernant la condensation de masse, nous devons choisir les espaces des polynômes  $\hat{X}$  et  $\hat{M}$  de manière adéquate. Pour commencer, nous considérons le cas de l'élément fini de plus bas degré. Comme nous allons le voir, le choix habituel qui consiste à prendre comme espace  $\hat{X}$  l'élément de Raviart-Thomas de plus bas degré :

$$(1.1.11) \quad \hat{X} = RT_{[0]} = P_{10} \times P_{01},$$

et comme espace  $\hat{M}$  les fonctions constantes par morceaux :

$$(1.1.12) \quad \hat{M} = Q_0,$$

ne conduit pas à un système explicite en temps dans le cas général d'un milieu anisotrope. En effet, introduisons  $B_{N_1} = \{\tau_I\}_{I=1}^{N_1}$  et  $B_{N_2} = \{\phi_I\}_{I=1}^{N_2}$  les fonctions de base de  $X_h$  et  $M_h$  respectivement, avec  $N_1 = \dim X_h$  et  $N_2 = \dim M_h$ . Nous notons ensuite  $[P] = (P_1, \dots, P_{N_1})$  et  $[U] = (U_1, \dots, U_{N_2})$  les coordonnées des fonctions  $p_h$  et  $u_h$  sur ces bases. Nous pouvons maintenant réécrire le problème (1.1.9) sous la forme matricielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (P, U) \in L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_1})) \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_2})) \text{ tels que} \\ M_p \frac{dP}{dt} + C^T U = 0, \\ M_u \frac{dU}{dt} - CP = F, \\ + \text{conditions initiales,} \end{array} \right.$$

avec

$$(1.1.13) \quad \begin{array}{ll} (i) & (M_p)_{I,J} = (A\tau_I, \tau_J)_{(L^2(\Omega))^2}, \quad 1 \leq I, J \leq N_1, \\ (ii) & (M_u)_{I,J} = (\phi_I, \phi_J)_{L^2(\Omega)}, \quad 1 \leq I, J \leq N_2, \\ (iii) & (C)_{I,J} = (\phi_I, \operatorname{div} \tau_J)_{L^2(\Omega)}, \quad 1 \leq I \leq N_2, 1 \leq J \leq N_1, \\ (iv) & (F)_J = (f, \phi_J)_{L^2(\Omega)} \quad 1 \leq J \leq N_2; \end{array}$$

et où nous avons noté par  $C^T$  la transposée de la matrice  $C$ . Si on utilise maintenant un schéma de différences finies centrées pour la discrétisation en temps, la solution à chaque instant est obtenue en inversant les matrices de masse  $M_u$  et  $M_p$ . Remarquons que ceci ne pose pas de problème pour la matrice  $M_u$  car elle est diagonale ( $M_h$  étant défini par des fonctions constantes par morceaux). Bien que la matrice  $M_p$  soit symétrique et creuse, son inversion peut s'avérer assez coûteuse (pour des problèmes de grande taille). Pour éviter ce problème nous allons approcher la matrice  $M_p$  par une matrice diagonale (ou diagonale par



bloc) en utilisant des techniques de condensation de masse (cf [36, 109, 50]). Ceci consiste à évaluer les intégrales définissant les éléments de  $M_p$  (1.1.13 (i)) à l'aide d'une formule de quadrature adéquate.

Soit  $(\tau_I)$  les fonctions de base (globales) de l'espace  $X_h$ . Chaque fonction  $\tau_I$  est associée à une arête du maillage et son support est constitué par les deux éléments du maillage qui sont adjacents à cette arête, voir Fig. 1.1.2. La restriction de  $\tau_I$  à un élément  $K$  de son support correspond à une fonction locale notée  $\hat{\tau}_i$ , sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . Plus précisément  $\hat{\tau}_i$  correspond à la fonction  $\hat{\tau}_i^x$  (resp.  $\hat{\tau}_i^y$ ) si  $\tau_I$  est associée à une arête verticale (resp. horizontale) du maillage.

Nous présentons dans la figure Fig. 1.1.1 les quatre fonctions de bases locales dans  $RT_{[0]}(\hat{K})$ .

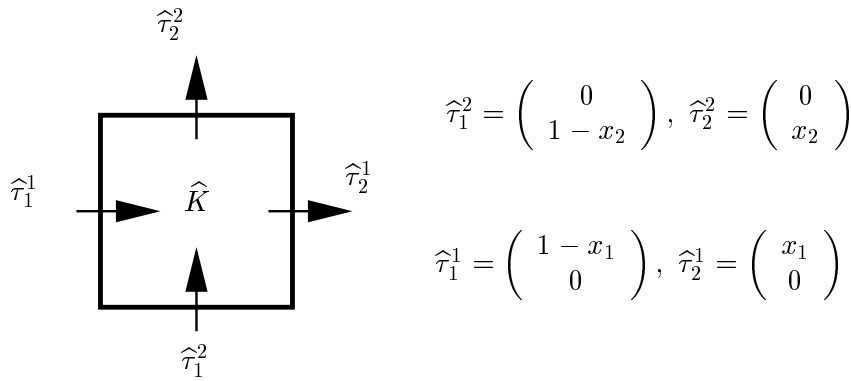


FIG. 1.1.1: Les fonctions de bases locales dans  $RT_{[0]}(\hat{K})$ .

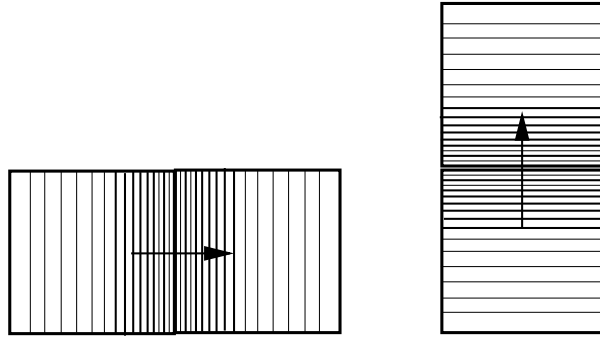


FIG. 1.1.2: Le support des fonctions de base globales de  $RT_{[0]}$ .

Nous considérons maintenant l'intégrale

$$(1.1.14) \quad a(\tau_I, \tau_J) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A \tau_I|_K \cdot \tau_J|_K dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{mes}(K) \int_{\hat{K}} A \hat{\tau}_i \cdot \hat{\tau}_j d\hat{x}$$

Si on utilise comme formule de quadrature sur  $\hat{K}$

$$\int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x} = \sum_{q=1}^N \omega_q \hat{f}(\hat{M}_q),$$

avec  $(\widehat{M}_q)_{q=1,\dots,N}$  les points de quadrature et  $(\omega_q)_{q=1,\dots,N}$  les poids associés pour approcher (1.1.14), on obtient

$$\int_{\widehat{K}} A\widehat{\tau}_i \cdot \widehat{\tau}_j d\widehat{x} \approx \sum_q \omega_q A\widehat{\tau}_i(\widehat{M}_q) \cdot \widehat{\tau}_j(\widehat{M}_q).$$

Ceci peut conduire à une matrice approchée diagonale si

$$(1.1.15) \quad A\widehat{\tau}_i(\widehat{M}_q) \cdot \widehat{\tau}_j(\widehat{M}_q) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Dans le cas d'un milieu isotrope ( $A = Id$ ), il est facile de trouver une formule de quadrature qui satisfait (1.1.15), on peut prendre par exemple la formule habituelle qui utilise les sommets des éléments comme points de quadrature ou celle qui utilise le milieu des arêtes. Toutes les deux conduisent à une matrice approchée diagonale. Néanmoins dans le cas général de l'équation des ondes anisotropes, il n'y a pas de formule de quadrature vérifiant (1.1.15). La difficulté vient du fait que pour deux fonctions  $\widehat{\tau}_1^y$  et  $\widehat{\tau}_1^x$  associées à deux arêtes orthogonales, le produit scalaire  $(A\widehat{\tau}_1^y, \widehat{\tau}_1^x)$  n'est plus nul.

C'est pourquoi nous proposons une solution alternative qui consiste à changer l'espace d'approximation  $X_h$ . Plus précisément on propose de choisir comme espace de polynômes  $\widehat{X}$  les fonctions bilinéaires par morceaux

$$(1.1.16) \quad \widehat{X} = Q_1 \times Q_1, \quad Q_1 = P_{11}.$$

Cet élément a été initialement introduit par Nédélec dans [86]. Nous présentons dans la figure 1.1.3 les huit fonctions de base dans l'élément de référence  $\widehat{K}$ . Dans ce qui suit nous notons  $Q_1^{div} - Q_0$  l'élément fini mixte défini par le couple des espaces  $X_h - M_h$ . La formule

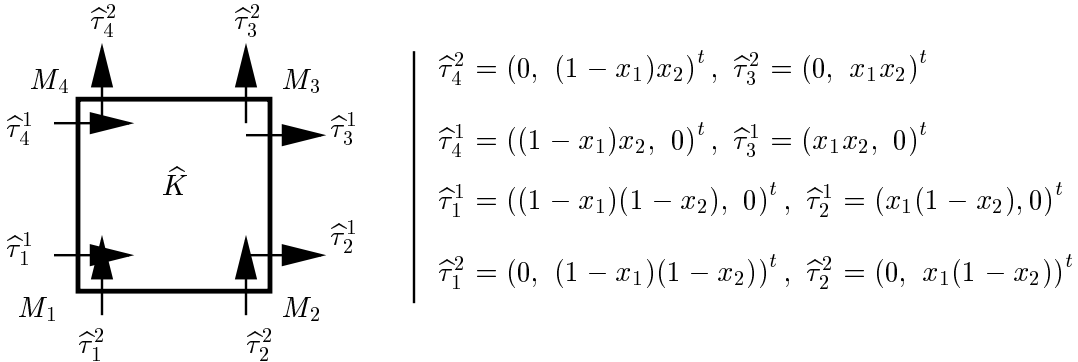
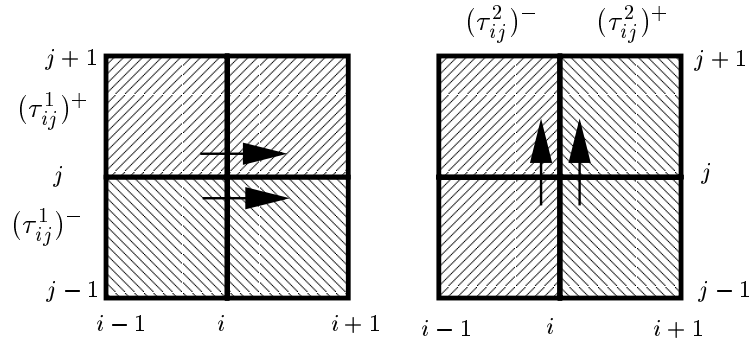


FIG. 1.1.3: Les fonctions de base locales de  $\widehat{X} = Q_1 \times Q_1$ .

de quadrature habituelle (les points de quadrature sont les sommets des éléments) vérifie maintenant la relation (1.1.15); le point clé est que les nouvelles fonctions de base vérifient

$$\tau_i^1(M_j) = \delta_{ij}(1, 0)^t, \quad \tau_i^2(M_j) = \delta_{ij}(0, 1)^t,$$

$M_j$  étant les points de quadrature qui coïncident dans ce cas avec les points auxquels les degrés de liberté sont associés. On peut remarquer que dans chaque élément il y a quatre points de quadrature mais huit degrés de liberté.


 FIG. 1.1.4: L'élément  $Q_1 \times Q_1$ .

Pour des études plus détaillées sur les formules de quadrature nous renvoyons aux travaux de G. Cohen, P. Joly et N. Tordjman pour le problème de l'équation des ondes [109, 35, 53] et aux travaux de P. Monk, G. Cohen [36] et A. Elmkies [50] pour les équations de Maxwell.

**Remarque 1.1.2** Avec ce nouveau choix pour l'espace  $X_h$  l'utilisation de la formule de quadrature habituelle conduit à une matrice approchée diagonale par bloc, chaque bloc correspond à un sommet du maillage et sa taille est égale au nombre de degrés de liberté qui lui sont associés (ie, 4 voir Fig. 1.1.4). Ceci conduit à un schéma explicite en temps (après inversion des matrices locales). Pour l'équation des ondes isotropes,  $A = Id$ , les blocs de la matrice deviennent  $2 \times 2$ , car dans ce cas les fonctions  $\tau_i^x$  and  $\tau_j^y$  sont orthogonales.

**Remarque 1.1.3** D'un point de vue physique l'utilisation de quatre degrés de liberté pour  $p$  à chaque sommet est justifiée par les discontinuités éventuelles que  $p$  peut avoir dans le cas des milieux hétérogènes (pour  $A$  discontinue par maille).

### 1.1.3 Généralisation aux ordres supérieurs et condensation de masse

La généralisation naturelle de l'élément  $Q_1^{div} - Q_0$  aux ordres supérieurs est la famille des éléments finis mixtes  $Q_{k+1}^{div} - Q_k$  définie par

$$(1.1.17) \quad \begin{cases} X_h = \{q_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in Q_{k+1} \times Q_{k+1}\}, \\ M_h = \{w_h \in M / \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in Q_k\}, \end{cases}$$

Nous présentons dans les figures 1.1.5 et 1.1.6 les degrés de liberté pour les éléments finis correspondant à  $k = 1$  et  $k = 2$ . Nous avons également indiqué dans ces figures le nombre des degrés de liberté qui sont associés à chaque noeud. Bien entendu, ces éléments ont été construit pour être compatibles avec la condensation de masse. Dans cette optique les points auxquels les degrés de liberté sont associés ont été judicieusement choisis. Plus précisément leur position correspond aux produits tensoriels des points de quadrature des formules de Gauss-Lobatto pour  $p$  et de Gauss-Legendre pour  $v$ . Nous rappelons ici les points de quadrature de ces formules et les poids associés.

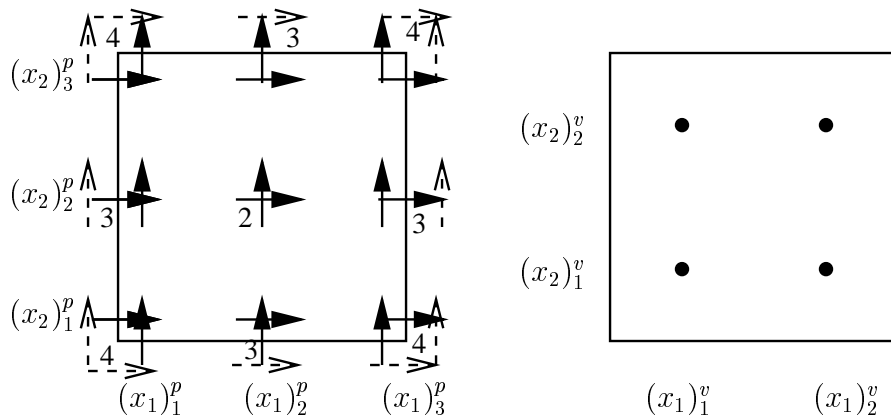


FIG. 1.1.5: Degrés de liberté pour l'élément  $Q_2^{div} - Q_1$ .

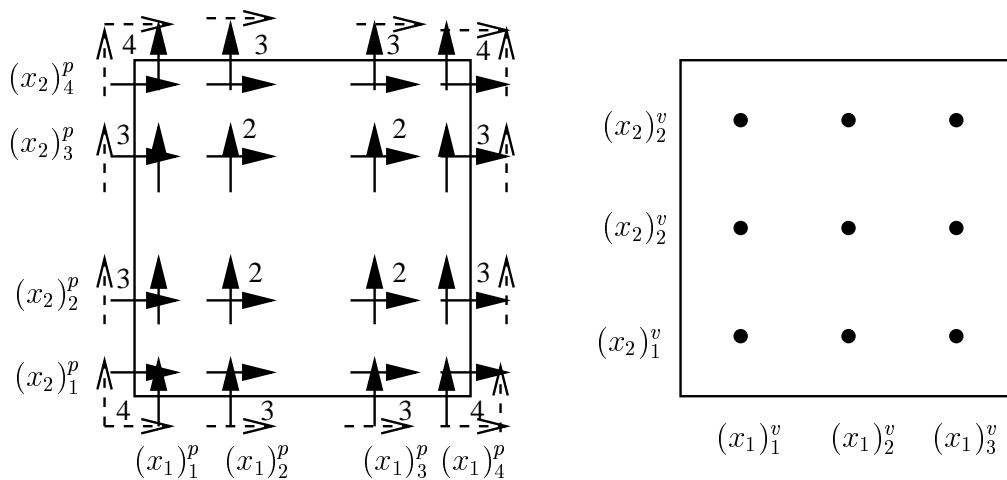


FIG. 1.1.6: Degrés de liberté pour l'élément  $Q_3^{div} - Q_2$ .

**Pour  $k = 1$**  (Fig. 1.1.5)

– La formule de Gauss-Lobatto:

$$(1.1.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1)_1^p = (x_2)_1^p = 0, \quad (x_1)_2^p = (x_2)_2^p = \frac{1}{2}, \quad (x_1)_3^p = (x_2)_3^p = 1; \\ \omega_{11}^p = \omega_{31}^p = \omega_{33}^p = \omega_{13}^p = \frac{1}{36}, \\ \omega_{21}^p = \omega_{32}^p = \omega_{23}^p = \omega_{12}^p = \frac{1}{9}, \\ \omega_{22}^p = \frac{4}{9}. \end{array} \right.$$

– La formule de Gauss-Legendre:

$$(1.1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1)_1^v = (x_2)_1^v = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \quad (x_1)_2^v = (x_2)_2^v = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}; \\ \omega_{11}^v = \omega_{21}^v = \omega_{22}^v = \omega_{12}^v = \frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

**Pour  $k = 2$**  (Fig. 1.1.6)

– La formule de Gauss-Lobatto:

$$(1.1.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1)_1^p = (x_2)_1^p = 0, \quad (x_1)_2^p = (x_2)_2^p = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}, \\ (x_1)_3^p = (x_2)_3^p = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}, \quad (x_1)_4^p = (x_2)_4^p = 1; \\ \omega_{11}^p = \omega_{41}^p = \omega_{44}^p = \omega_{14}^p = \frac{1}{144}, \\ \omega_{21}^p = \omega_{31}^p = \omega_{42}^p = \omega_{43}^p = \omega_{34}^p = \omega_{24}^p = \omega_{13}^p = \omega_{12}^p = \frac{5}{144}, \\ \omega_{22}^p = \omega_{32}^p = \omega_{33}^p = \omega_{23}^p = \frac{25}{144}. \end{array} \right.$$

– La formule de Gauss-Legendre:

$$(1.1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1)_1^v = (x_2)_1^v = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}, \quad (x_1)_2^v = (x_2)_2^v = \frac{1}{2}, \\ (x_1)_3^v = (x_2)_3^v = \frac{5 + \sqrt{15}}{10}; \\ \omega_{11}^v = \omega_{31}^v = \omega_{33}^v = \omega_{13}^v = \frac{25}{324}, \\ \omega_{21}^v = \omega_{32}^v = \omega_{23}^v = \omega_{12}^v = \frac{10}{81}, \\ \omega_{22}^v = \frac{16}{81}. \end{array} \right.$$

Pour obtenir maintenant la condensation de masse on approche les intégrales dans (1.1.13(i), (ii)) par les formules de quadrature adéquates, qui sont ici bien évidemment :

- Les formules de quadrature de Gauss-Lobatto pour l'approximation de la matrice  $M_p$ . La matrice approchée ainsi obtenue est une matrice diagonale par bloc. Chaque bloc correspond à un point de quadrature et sa dimension est donnée par le nombre des degrés de liberté qui lui sont associés (la dimension maximale est  $4 \times 4$  et correspond aux sommets des éléments).
- Les formules de quadrature de Gauss-Legendre pour l'approximation de la matrice  $M_v$ , ce qui conduit à une matrice approchée diagonale.

**Remarque 1.1.4** *La formule de quadrature de Gauss-Legendre est exacte pour l'intégration du produit  $v_h w_h$  qui est dans  $Q_{2k}$ . D'autre part si on considère le cas d'un milieu homogène ( $A$  constant) pour simplifier, le produit  $A p_h \cdot q_h$  est de degré  $Q_{2k+2}$ . Néanmoins, en suivant la même démarche que dans les travaux de P.G. Ciarlet, G.A. Baker, V.A. Dougalis et N. Tordjman [34, 9, 109], on peut prouver que l'intégration numérique n'induit pas de perte sur l'ordre de l'approximation pourvu que la formule de quadrature utilisée soit exacte pour  $Q_k$  (ce qui est le cas pour les formules de Gauss-Lobatto).*

**Remarque 1.1.5** *Enfin, signalons que le choix habituel dans le cas général consisterait à prendre*

$$\hat{X}^{RT} = RT_{[k]} = P_{k+1,k} \times P_{k,k+1} \quad \text{et} \quad \hat{M} = Q_k.$$

*On remarque alors que le nouvel espace d'approximation  $X_h$  contient l'espace  $X_h^{RT}$ . Ce qui met en évidence que nous avons enrichi l'espace d'approximation pour  $p$  sans en faire autant pour  $v$ . Ce point joue un rôle fondamental dans l'analyse de convergence de la méthode comme nous allons voir par la suite.*

## 1.2 Analyse de convergence: le problème elliptique

En suivant la technique décrite dans [29], nous allons étudier dans cette section l'approximation d'un problème elliptique. Plus précisément, il s'agit du problème stationnaire associé au problème initial (1.1.5). L'étude de ce problème entre dans le cadre de la théorie générale développée par I. Babuska and F. Brezzi [32] pour l'approximation de problèmes mixtes. Cependant, la nouvelle famille d'éléments finis mixtes ne satisfait pas une des hypothèses de cette théorie (l'hypothèse de coercivité). C'est pourquoi nous avons été amenés à introduire une nouvelle théorie abstraite qui nous permet d'obtenir des estimation d'erreur.

### 1.2.1 Le problème elliptique

Nous considérons ici le problème elliptique suivant

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\text{div}(A^{-1}(x)\nabla u) = f, \quad f \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

On sait que (1.2.1) admet un solution unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  et qu'il existe une constante  $c$  positive telle que

$$(1.2.2) \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme pour le problème d'évolution, on pose

$$(1.2.3) \quad p = A^{-1}(x)\nabla u,$$

ce qui implique

$$(1.2.4) \quad -\operatorname{div} p = f.$$

La formulation variationnelle mixte associée aux équations (1.2.3) et (1.2.4) est

$$(1.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, u) \in X \times M = H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tels que} \\ a(p, q) + b(u, q) = 0, \quad \forall q \in X, \\ b(w, p) = -(f, w), \quad \forall w \in M, \end{array} \right.$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  sont définis par (1.1.6) et satisfont les propriétés (1.1.7). On sait alors que le problème (1.2.5) admet une solution unique  $(p, u)$  dans  $X \times M$  (cf. [32]), avec  $u$  la solution du problème initial (1.2.1). En fait la théorie abstraite conduit à un résultat d'unicité pour  $u$  dans l'espace  $M / \operatorname{Ker} B^t$ , mais il est facile de vérifier que dans le cas de l'opérateur divergence nous avons  $\operatorname{Ker} B^t = \{0\}$ . Nous sommes maintenant intéressés par l'approximation du problème (1.2.5) qui s'écrit sous la forme suivante

$$(1.2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h, u_h) \in X_h \times M_h \text{ tels que} \\ a(p_h, q_h) + b(u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(w_h, p_h) = -(f, w_h), \quad \forall w_h \in M_h. \end{array} \right.$$

où  $X_h$  et  $M_h$  sont les espaces des nouveaux éléments finis mixtes définis par (1.1.8).

Le problème elliptique (1.2.5) et son approximation (1.2.6) ont été déjà étudiés par plusieurs auteurs [94, 32], on sait notamment que (1.2.6) admet une solution unique dans  $X_h \times M_h$  avec les propriétés d'approximation

$$(1.2.7) \quad (p_h, u_h) \longrightarrow (p, u) \in X \times M,$$

sous les hypothèses suivantes

$$(1.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \text{La condition inf-sup discrète uniforme:} \\ \quad \exists c > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que} \\ \quad \forall w_h \in M_h, \exists q_h \in X_h / b(w_h, q_h) \geq c \|w_h\|_M \|q_h\|_X; \\ (ii) \quad \text{La condition de coercivité uniforme de } a(\cdot, \cdot) \text{ sur } V_h : \\ \quad \exists \alpha > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que} \\ \quad \forall p_h \in V_h, \quad a(p_h, p_h) \geq \alpha \|p_h\|_X^2, \\ \quad \text{où } V_h = \operatorname{Ker} B_h = \{q_h \in X_h / b(w_h, q_h) = 0, \forall w_h \in M_h\} \end{array} \right.$$

Ces hypothèses sont satisfaites pour les espaces discrets  $(X_h^{RT}, M_h)$  définis par (1.1.8), avec  $\hat{X}$  l'élément de Raviart-Thomas de plus bas degré et  $\hat{M}$  les fonctions constantes par morceaux (1.1.12), (cf. [94]). Concernant maintenant le couple  $(X_h, M_h)$  correspondant aux nouveaux éléments finis mixtes, il est facile de vérifier qu'il satisfait la première hypothèse et non la deuxième. En effet, la première hypothèse découle d'une part du fait que l'espace  $X_h^{RT}$  vérifie (1.2.8-i) et d'autre part de la propriété  $X_h^{RT} \subset X_h$ . Pour montrer que la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée, il suffit de trouver une fonction de  $V_h$  pour laquelle l'hypothèse (1.2.8-ii) ne peut pas être respectée. En effet, considérons la fonction  $\vec{f}_h \in V_h$  (pour  $\hat{M} = Q_0$ ), définie par

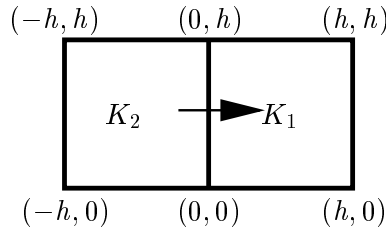


FIG. 1.2.1: La fonction  $\vec{f}_h$ .

$$\vec{f}_h|_{K_1} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{x}{h})(1 - 2\frac{y}{h}) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f}_h|_{K_2} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{x}{h})(1 - 2\frac{y}{h}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$a(f_h, f_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \\ \|f_h\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{2}{3}.$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (1.2.8-ii). Néanmoins, comme nous allons voir dans la section 1.2 le couple des espaces  $X_h - M_h$  entre dans le cadre d'une nouvelle théorie abstraite qui nous permet de montrer des résultats de convergence.

**Remarque 1.2.1** Pour préserver l'hypothèse (1.2.8-ii) nous aurions pu enrichir l'espace d'approximation  $\hat{M}$ . Le bon choix correspond à

$$\hat{M} = P_1,$$

le point clé étant que l'opérateur divergence est surjectif de  $Q_1 \times Q_1$  dans  $P_1^1$ . Nous n'avons pas opté pour ce choix car il est naturellement plus cher en termes de temps de calcul et de stockage.

### 1.2.2 Un résultat abstrait

La nouvelle théorie abstraite est basée sur trois espaces de Hilbert. Plus précisément, soit  $M, X, H$  trois espaces de Hilbert avec

$$(1.2.9) \quad X \subset H, \quad X \text{ dense dans } H \quad \text{et} \quad |\cdot|_H \leq \|\cdot\|_X.$$

---

1. ce qui implique  $V_h = \{q_h \in X_h / \text{div } q_h = 0\} \subset \text{Ker } B$ . Dans ce cas (1.2.8-ii) est une conséquence de (1.1.7-ii)



Dans le cas du problème modèle nous avons

$$H = (L^2(\Omega))^2, \quad X = H(\text{div}; \Omega) \text{ et } M = L^2(\Omega).$$

Considérons maintenant  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  deux formes bilinéaires continues dans  $H \times H$  et  $M \times X$  respectivement. Nous pouvons alors définir les opérateurs  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{L}(H)$ ,  $B : X \rightarrow M'$  et  $B^t : M \rightarrow X'$  par

$$\begin{cases} a(p, q) = (\mathcal{A}p, q)_H, & \forall (p, q) \in H \times H \\ \langle Bp, w \rangle_{M' \times M} = \langle p, B^t w \rangle_{X \times X'} = b(w, p), & \forall (p, w) \in X \times M. \end{cases}$$

Les noyaux des  $B$  et  $B^t$  sont

$$\begin{cases} V \equiv \text{Ker } B = \{p \in X / b(w, p) = 0, \forall w \in M\}, \\ \text{Ker } B^t = \{w \in M / b(w, p) = 0, \forall p \in X\}. \end{cases}$$

Nous faisons ensuite les hypothèses suivantes:

$$(1.2.10) \quad \begin{cases} (i) \quad \exists c > 0 / \forall w \in M, \exists q \in X / b(w, q) \geq c \|w\|_{M/\text{Ker } B^t} \|q\|_X, \\ (ii) \quad \exists \alpha > 0 / \forall p \in V, \quad a(p, p) \geq \alpha \|p\|_X^2. \end{cases}$$

où la norme dans l'espace quotient est définie par  $\|w\|_{M/\text{Ker } B^t} = \inf_{w_0 \in \text{Ker } B^t} \|w + w_0\|_M$ . Dans ce qui suit nous allons identifier l'espace  $M/\text{Ker } B^t$  avec le complément orthogonal de  $\text{Ker } B^t$

$$M/\text{Ker } B^t \equiv (\text{Ker } B^t)^\perp \equiv \{w \in M / (v, w)_M = 0, \forall v \in \text{Ker } B^t\}.$$

Nous sommes intéressés par l'approximation du problème modèle

$$(1.2.11) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (p, u) \in X \times M \text{ tels que} \\ a(p, q) + b(u, q) = 0, & \forall q \in X, \\ b(w, p) = -\langle f, w \rangle, & \forall w \in M, \end{cases}$$

avec  $f \in M'$ , l'espace dual de  $M$ . Sous les hypothèses précédentes, nous avons le résultat classique suivant (cf. [32])

**Théorème 1.2.1** *Pour tout  $f \in \text{Im } B$ , le problème (1.2.11) admet une solution unique  $(p, u)$  dans  $X \times (M/\text{Ker } B^t)$ , qui satisfait*

$$\|u\|_{M/\text{Ker } B^t} + \|p\|_X \leq C \|f\|_{M'}.$$

Soient  $X_h \subset X$  et  $M_h \subset M$  deux espaces d'approximation de dimension finie. Nous considérons alors le problème d'approximation

$$(1.2.12) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (p_h, u_h) \in X_h \times M_h \text{ tels que} \\ a(p_h, q_h) + b(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in X_h, \\ b(w_h, p_h) = -\langle f, w_h \rangle, & \forall w_h \in M_h, \end{cases}$$

Nous posons

$$(1.2.13) \quad \begin{cases} V_h(f) = \{q_h \in X_h / b(w_h, q_h) = -\langle f, w_h \rangle, \forall w_h \in M_h\} = B_h^{-1}(f), \\ V_h = V_h(0) = \text{Ker } B_h, \quad (B_h \text{ défini par (1.2.14)}) \end{cases}$$

et nous faisons les hypothèses suivantes

$$(H0) \quad \forall f \in \text{Im } B, \quad V_h(f) \neq \emptyset.$$

(H1) Décomposition orthogonale de  $X_h$ :

$$\left| \begin{array}{l} X_h = X_h^s \oplus X_h^r \quad (p_h = p_h^s + p_h^r), \quad X_h^r \subset V_h; \\ \forall (p_h^s, p_h^r) \in X_h^s \times X_h^r \quad (p_h^s, p_h^r)_H = 0. \end{array} \right.$$

(H2) Condition inf-sup discrète “forte” :

il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall w_h \in M_h, \quad \exists q_h^s \in X_h^s \quad / \quad b(w_h, q_h^s) \geq c \|w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \|q_h^s\|_X.$$

(H3) Condition de coercivité discrète “affaiblie” :

il existe une constante  $\alpha > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall p_h \in V_h, \quad a(p_h, p_h) \geq \alpha \left( \|p_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2 \right).$$

(H4) Propriétés d'approximation

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X = 0, \quad \forall p \in X, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M = 0, \quad \forall u \in M. \end{cases}$$

**Remarque 1.2.2** Par l'hypothèse (H4) et la densité de  $X$  dans  $H$ , nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h^s \in X_h^s} |p - q_h^s|_H = 0, \quad \forall p \in H.$$

Comme dans le cas du problème continu, nous introduisons les opérateurs  $B_h$  et  $B_h^t$  définis par

$$(1.2.14) \quad (B_h p_h, w_h)_{M' \times M} = (p_h, B_h^t w_h)_{X \times X'} = b(p_h, w_h), \quad \forall p_h \in X_h, \quad \forall w_h \in M_h,$$

et leurs noyaux respectifs  $\text{Ker } B_h = V_h$  (défini par (1.2.13)) et  $\text{Ker } B_h^t$

$$\text{Ker } B_h^t = \{w_h \in M_h / b(p_h, w_h) = 0, \forall p_h \in X_h\}.$$

**Remarque 1.2.3** *On peut aussi caractériser l'hypothèse (H0) en utilisant une des deux propriétés équivalentes*

$$(H0) - (ii) \quad \forall p \in X, \exists p_h \in X_h \text{ tel que } b(p - p_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h;$$

$$(H0) - (iii) \quad \text{Ker } B_h^t = \text{Ker } B^t \cap M_h \subset \text{Ker } B^t.$$

**Remarque 1.2.4** *On appelle l'hypothèse (H2) "forte" car elle suppose l'existence d'un  $q_h (= q_h^s)$  dans  $X_h^s$  au lieu de  $X_h$ , qui correspondrait à l'hypothèse classique. Plus précisément on a  $X_h^s \subsetneq X_h$ . Au contraire (H3) est une hypothèse de coercivité dite affaiblie, car dans notre application pour tout  $p_h \in X_h$  on a,*

$$\|p_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2 \leq \|p_h\|_X^2.$$

**Théorème 1.2.2** *Sous les hypothèses (H0) - (H4), le problème (1.2.12) admet une solution unique telle que*

$$(p_h = p_h^s + p_h^r, u_h) \in X_h \times (M_h / \text{Ker } B_h^t),$$

*et nous avons les résultats de convergence suivants*

- $(p_h^s, u_h) \rightarrow (p, u)$  dans  $X \times M$ ,
- $p_h^r \rightarrow 0$  dans  $H$ .

*Plus précisément, nous avons les estimations d'erreur:*

$$\begin{aligned} |p_h^r|_H + \|p - p_h^s\|_X + \|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq C \left( \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M \right. \\ \left. + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |\mathcal{A}p - z_h^s|_H \right). \end{aligned}$$

**Démonstration.**

**(i) Existence et unicité :**

L'existence et l'unicité de la solution  $(p_h, u_h) \in X_h \times (M_h / \text{Ker } B_h^t)$  du problème discret découlent de l'hypothèse (H0) et de la coercivité non-uniforme de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur le noyau  $\text{Ker } B_h$ , i.e.,

$$(1.2.15) \quad \exists \alpha_h > 0, \forall p_h \in V_h \quad a(p_h, p_h) \geq \alpha_h \|p_h\|_X^2.$$

Cette dernière propriété (1.2.15) est une conséquence de l'hypothèse (H3) étant donné qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Il reste maintenant à prouver les estimations d'erreur. Pour obtenir ensuite le résultat de convergence nous utilisons l'hypothèse (H4) et la remarque 1.2.2.

**(ii) Estimations sur  $|p_h^r|_H + \|p - p_h^s\|_X$**

La seconde équation du système (1.2.12) montre que nous avons  $p_h \in V_h(f)$  (cf. (1.2.13)). En considérant aussi  $q_h \in V_h(f)$ , nous avons

$$p_h - q_h \in V_h.$$

Nous pouvons écrire que

$$(1.2.16) \quad a(p_h - q_h, p_h - q_h) = a(p - q_h, p_h - q_h) + a(p_h - p, p_h - q_h),$$

en prenant ensuite la différence entre la première équation du problème discret (1.2.12) et du problème continu (1.2.11) on obtient

$$(1.2.17) \quad a(p_h - p, p_h - q_h) = b(u - w_h, p_h - q_h), \quad \forall w_h \in M_h.$$

D'où en utilisant (H1), on a

$$(1.2.18) \quad a(p_h - p, p_h - q_h) = b(u - w_h, p_h^s - q_h^s) + b(u, p_h^r - q_h^r).$$

Nous avons ici utilisé le fait que  $b(w_h, p_h^r - q_h^r) = 0$ , car  $X_h^r \subset V_h$ . Comme nous avons seulement une hypothèse de coercivité affaiblie nous voulons garder uniquement les termes qui font intervenir la norme dans  $H$  des éléments de  $X_h^r$ . C'est pour cette raison qu'on remplace dans (1.2.18) le terme  $b(u, p_h^r - q_h^r)$  par  $a(p, p_h^r - q_h^r)$  en utilisant la première équation du problème continu (1.2.11),

$$(1.2.19) \quad \begin{aligned} a(p_h - p, p_h - q_h) &= b(u - w_h, p_h^s - q_h^s) - a(p, p_h^r - q_h^r) \\ &= b(u - w_h, p_h^s - q_h^s) - (\mathcal{A}p, p_h^r - q_h^r)_H. \end{aligned}$$

On choisit maintenant

$$(1.2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_h = q_h^s \in V_h^s(f) = V_h(f) \cap X_h^s, \\ q_h^r = 0. \end{array} \right.$$

En combinant (1.2.16), (1.2.19) et (1.2.20), on obtient

$$a(p_h - q_h^s, p_h - q_h^s) = a(p - q_h^s, p_h - q_h^s) + b(u - w_h, p_h^s - q_h^s) - (\mathcal{A}p, p_h^r).$$

Grâce à l'hypothèse de la décomposition orthogonale (H1), on a

$$(1.2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p_h - q_h^s, p_h - q_h^s) = a(p - q_h^s, p_h - q_h^s) + b(u - w_h, p_h^s - q_h^s) \\ \quad - (\mathcal{A}p - z_h^s, p_h^r)_H, \quad \forall z_h^s \in X_h^s. \end{array} \right.$$

De plus, en reportant l'inégalité

$$|p_h - q_h^s|_H \leq \|p_h^s - q_h^s\|_X + |p_h^r|_H$$

dans (1.2.21) et en utilisant les hypothèses (H1) et (H3) on obtient,

$$\left| \begin{array}{l} \alpha(\|p_h^s - q_h^s\|_X^2 + |p_h^r|_H^2) \leq \|a\| |p - q_h^s|_H (\|p_h^s - q_h^s\|_X + |p_h^r|_H) \\ \quad + \|b\| \|u - w_h\|_M \|p_h^s - q_h^s\|_X + |\mathcal{A}p - z_h^s|_H |p_h^r|_H. \end{array} \right.$$

On déduit alors l'existence d'une constante  $C$  qui dépend de  $\|a\|$ ,  $\|b\|$ , et  $\alpha$  telle que, pour tout  $(q_h^s, w_h, z_h^s) \in V_h^s(f) \times M_h \times X_h^s$ ,

$$\|p_h^s - q_h^s\|_X + |p_h^r|_H \leq C(|p - q_h^s|_H + \|u - w_h\|_M + |\mathcal{A}p - z_h^s|_H).$$

Ce qui conduit, en utilisant (1.2.9), à

$$\left\{ \begin{array}{l} \|p - p_h^s\|_X \leq \|p - q_h^s\|_X + \|p_h^s - q_h^s\|_X, \quad \forall q_h^s \in V_h^s(f) \\ \leq (1 + C) \left( \inf_{q_h^s \in V_h^s(f)} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |\mathcal{A}p - z_h^s|_H \right), \\ |p_h^r|_H \leq C \left( \inf_{q_h^s \in V_h^s(f)} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |\mathcal{A}p - z_h^s|_H \right). \end{array} \right.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser la propriété suivante

$$\inf_{q_h^s \in V_h^s(f)} \|p - q_h^s\|_X \leq c_1 \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X,$$

qui est une conséquence de la condition inf-sup (cf. [32]).

**(ii) Estimations sur  $\|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t}$**

En prenant la différence entre la première équation du problème continu (1.2.11) et du problème discret (1.2.12), on obtient

$$a(p - p_h, q_h) + b(u - u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h,$$

d'où pour tout  $w_h$  dans  $M_h$ ,

$$b(u_h - w_h, q_h) = a(p - p_h, q_h) + b(u - w_h, q_h), \quad \forall q_h \in X_h.$$

On réécrit maintenant cette dernière relation pour  $q_h = q_h^s$ ,

$$(1.2.22) \quad b(u_h - w_h, q_h^s) = a(p - p_h, q_h^s) + b(u - w_h, q_h^s), \quad \forall q_h^s \in X_h^s.$$

En combinant (1.2.22) et la condition inf-sup, on a

$$\begin{aligned} \|u_h - w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} &\leq \frac{1}{c} \sup_{q_h^s \in X_h^s} \frac{b(u_h - w_h, q_h^s)}{\|q_h^s\|_X} \\ &\leq \frac{1}{c} \sup_{q_h^s \in X_h^s} \frac{a(p - p_h, q_h^s) + b(u - w_h, q_h^s)}{\|q_h^s\|_X} \\ &\leq \frac{1}{c} (\|a\| |p - p_h|_H + \|b\| \|u - w_h\|_M). \end{aligned}$$

D'où en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq C' \left\{ \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M + |p_h^r|_H + |p - p_h^s|_H \right\}.$$

■

**Remarque 1.2.5** *On peut remarquer que l'espace  $X_h^s$  satisfait les hypothèses (H0)-(H4). La question naturelle qu'on peut se poser est: pourquoi ne pas utiliser tout simplement l'espace  $X_h^s$  au lieu de  $X_h$ ? En fait, il faut imaginer le cas pour lequel l'utilisation de  $X_h$  est plus pratique soit parce que on ne sait pas caractériser  $X_h^s$  soit parce qu'on préfère  $X_h$  pour une autre raison. Dans notre cas  $X_h$  présente l'avantage d'être compatible avec la condensation de masse.*

### 1.2.3 Application au problème de l'équation des ondes anisotropes

Pour le problème (1.2.5) nous avons,

$$H = (L^2(\Omega))^2 ; X = H(\text{div} ; \Omega) ; M = L^2(\Omega)$$

Dans ce cas,  $B$  est l'opérateur divergence, qui est surjectif de  $X$  dans  $M$ , ce qui implique que nous avons  $\text{Ker } B^t = \{0\}$ . L'hypothèse (H0) est alors équivalente (cf. 1.2.3) à la surjectivité de l'opérateur discret  $B_h$  de  $X_h$  dans  $M_h$ . Cette propriété est satisfaite par les éléments finis de Raviart-Thomas [94]; i.e.  $B_h$  est surjectif de  $X_h^{RT}$  dans  $M_h$ . Comme le nouvel espace d'approximation  $X_h$  contient l'espace  $X_h^{RT}$ , (cf. remarque 1.1.5), il est facile de vérifier que l'hypothèse (H0) est aussi satisfaite pour les nouveaux éléments et nous avons  $\text{Ker } B_h^t = \{0\}$ .

#### 1.2.3.1 Approximation avec l'élément fini de plus bas degré, $Q_1^{div} - Q_0$

Nous considérons ici les espaces d'approximation suivants

$$\begin{cases} X_h = \{q_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in Q_1 \times Q_1\}, \\ M_h = \{w_h \in M / \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in Q_0\}. \end{cases}$$

Nous allons commencer par la vérification de l'hypothèse (H1). On définit comme espace  $X_h^s$  l'élément de Raviart-Thomas de plus bas degré  $RT_{[0]}$  donné par (1.1.11)

$$X_h^s = \{q_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in RT_{[0]} = P_{10} \times P_{01}\} \subset X_h, \quad \dim RT_{[0]} = 4$$

On veut maintenant construire l'espace  $X_h^r$  comme le complémentaire orthogonal de  $X_h^s$  dans  $X_h$ . On introduit les notations suivantes

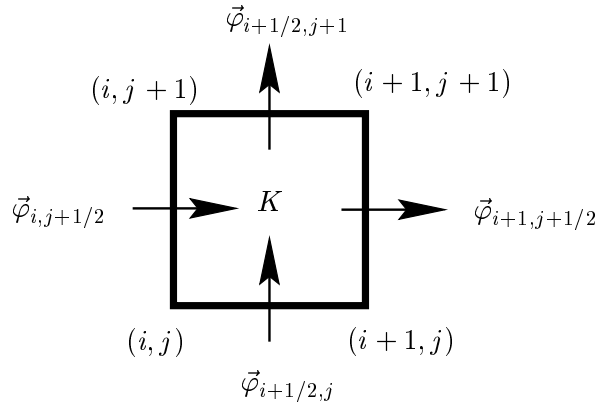


FIG. 1.2.2: L'élément  $RT_{[0]}$ .

- $(i, j)$ , pour le noeud de  $\mathcal{T}_h$  de coordonnées  $(ih, jh)$ ,
- $(i + \frac{1}{2}, j)$ , pour l'arête horizontale qui relie les noeuds  $(i, j)$  et  $(i + 1, j)$ ,
- $(i, j + \frac{1}{2})$ , pour l'arête verticale qui relie les noeuds  $(i, j)$  et  $(i, j + 1)$ .

Pour chaque élément  $K$ , on peut alors définir les quatre fonctions de base de l'élément fini  $RT_{[0]}$  (illustrées dans la figure 1.2.2)

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\varphi}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i+\frac{1}{2},j}(x_2) \end{pmatrix}, \\ \vec{\varphi}_{i+1,j+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2}}(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\varphi}_{i+\frac{1}{2},j+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1}(x_2) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}(x_1) = \frac{((x_1)_{i+1} - x_1)}{h} \in P_{10}, & \varphi_{i+\frac{1}{2},j}(x_2) = \frac{((x_2)_{j+1} - x_2)}{h} \in P_{01}, \\ \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2}}(x_1) = \frac{(x_1 - (x_1)_i)}{h} \in P_{10}, & \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1}(x_2) = \frac{(x_2 - (x_2)_j)}{h} \in P_{01}. \end{cases}$$

Il est alors facile de prouver le lemme suivant

**Lemme 1.2.1** *L'espace  $X_h^r|_K$ , c'est à dire la restriction dans l'élément  $K$  de  $X_h^r$ , est caractérisé par les quatre fonctions de base suivantes:*

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (x_1 - (x_1)_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_{i+\frac{1}{2},j}(x_2) \end{pmatrix}, & \vec{\psi}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} (x_2 - (x_2)_{j+\frac{1}{2}}) \varphi_{i,j+\frac{1}{2}}(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi}_{i+1,j+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (x_1 - (x_1)_{i+\frac{1}{2}}) \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1}(x_2) \end{pmatrix}, & \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+1} &= \begin{pmatrix} (x_2 - (x_2)_{j+\frac{1}{2}}) \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1}(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $(x_1)_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})h$  et  $(x_2)_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})h$ . En plus, on a  $X_h^r \subset V_h$ .

**Remarque 1.2.6** *La dimension de  $Q_1 \times Q_1$  (=8) est la somme de la dimension de  $X_h^s|_K$  (=  $\dim RT_{[0]} = 4$ ) et de la dimension de  $X_h^r|_K$  (=4).*

En utilisant maintenant les propriétés bien connues des espaces  $X_h^s$  et  $M_h$  [94, 97, 32], on obtient directement les hypothèses (H2) et (H4); pour conclure il nous reste à vérifier l'hypothèse (H3).

**Lemme 1.2.2** *Pour tout  $p_h$  dans  $V_h$ ,*

$$a(p_h, p_h) \geq \alpha \left( \|p_h^s\|_X^2 + \|p_h^r\|_H^2 \right),$$

où  $\alpha$  est définie par (1.1.1).

**Démonstration.**

La propriété (1.1.1) implique que la forme  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive dans  $(L^2)^2$ ,

$$a(p_h, p_h) \geq \alpha \|p_h\|_0^2 = \alpha \left( \|p_h^s\|_0^2 + \|p_h^r\|_0^2 \right).$$

On remarque ensuite que pour tout  $p_h \in V_h$  on a  $p_h^s \in V_h \cap X_h^s$  car l'espace  $X_h^r$  satisfait  $X_h^r \subset V_h$ . De plus, pour tout élément de  $X_h^s \cap V_h$  nous avons (cf. [32])

$$\begin{cases} (i) & \operatorname{div} p_h^s \in M_h, \\ (ii) & (\operatorname{div} p_h^s, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h. \end{cases}$$

D'après (i), on peut prendre

$$w_h = \operatorname{div} p_h^s$$

dans (ii), ce qui implique

$$\operatorname{div} p_h^s = 0. \quad \blacksquare$$

On peut maintenant appliquer le Théorème 1.2.2 au problème approché (1.2.6), et en utilisant les résultats d'interpolation habituels (cf. [97]) on obtient: (ici nous avons  $\operatorname{Ker} B_h^t = \{0\}$ )

**Théorème 1.2.3** *Le problème (1.2.6) admet une solution unique*

$$(p_h, u_h) \in X_h \times M_h,$$

avec

- $(p_h^s, u_h) \longrightarrow (p, u) \quad \text{dans } H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega),$
- $p_h^r \longrightarrow 0 \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^2.$

De plus, si la solution est suffisamment régulière, i.e.,  $(p, u) \in (H^1(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ ,  $\operatorname{div} p \in L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{A}p \in (H^1(\Omega))^2$ , alors

$$\|p_h^r\|_{(L^2(\Omega))^2} + \|p - p_h^s\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \left( |u|_{H^1} + |p|_{(H^1)^2} + |\operatorname{div} p|_{H^1} + |\mathcal{A}p|_{(H^1)^2} \right),$$

où par  $|\cdot|_{H^1}$  (resp.  $|\cdot|_{(H^1)^2}$ ) on note la semi-norme habituelle dans  $H^1(\Omega)$  (resp.  $(H^1(\Omega))^2$ ).

**Remarque 1.2.7** *Dans le cas de l'équation des ondes dans un milieu isotrope homogène, ou plus généralement hétérogène mais avec la matrice  $A(x)$  définie avec des constantes par morceaux, nous pouvons montrer que la partie  $p_h^r$  de la solution est identiquement nulle. En effet, on considère ici que la matrice  $A(x)$  dans (1.2.1) est diagonale  $A(x) = A_d(x)$  et définie par des valeurs constantes par morceaux. Dans ce cas, en appliquant la théorie abstraite comme précédemment on obtient que le problème approché*

$$(1.2.23) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (p_h, u_h) \in X_h \times M_h \text{ tels que} \\ a_d(p_h, q_h) + b(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in X_h, \\ b(w_h, p_h) = -\langle f, w_h \rangle, & \forall w_h \in M_h, \end{cases}$$



admet une solution unique  $(p_h = p_h^s + p_h^r, u_h)$  avec  $p_h^r \equiv 0$  et où  $(p_h^s, u_h)$  est la solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h^s, u_h) \in X_h^s \times M_h \text{ tels que} \\ a_d(p_h^s, q_h^s) + b(u_h, q_h^s) = 0, \quad \forall q_h^s \in X_h^s, \\ b(w_h, p_h^s) = -\langle f, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in M_h, \end{array} \right.$$

où  $a_d(\cdot, \cdot)$  est défini par (1.1.6) en remplaçant  $A(x)$  par  $A_d(x)$ .

Pour le montrer, on remarque d'abord que dans ce cas particulier, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} a_d(p_h^r, q_h^s) = 0, \quad \forall q_h^s \in X_h^s, \\ a_d(p_h^s, q_h^r) = 0, \quad \forall q_h^r \in X_h^r. \end{array} \right.$$

En utilisant ensuite le fait que

$$X_h^r \subset V_h,$$

on peut décomposer (1.2.23) en deux problèmes indépendants, un dans  $X_h^s$  et l'autre dans  $X_h^r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h^s, u_h) \in X_h^s \times M_h \text{ tels que} \\ a_d(p_h^s, q_h^s) + b(u_h, q_h^s) = 0, \quad \forall q_h^s \in X_h^s, \\ b(w_h, p_h^s) = -\langle f, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in M_h, \end{array} \right.$$

et

$$(1.2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p_h^r \in X_h^r \text{ tel que} \\ a_d(p_h^r, q_h^r) = 0, \quad \forall q_h^r \in X_h^r, \end{array} \right.$$

D'après la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  dans  $(L^2)^2$  on obtient  $p_h^r \equiv 0$ .

Cette remarque n'est plus vraie dans le cas général d'une matrice  $A(x)$ .

### 1.2.3.2 Approximation avec les éléments finis d'ordre supérieur, $Q_{k+1}^{div} - Q_k$

Nous avons vu dans la section 1.1.3 que la généralisation naturelle de l'élément fini  $Q_1^{div} - Q_0$  aux ordres supérieurs consiste à prendre

$$\hat{X} = X_k = Q_{k+1} \times Q_{k+1} \quad \text{et} \quad \hat{M} = M_k = Q_k;$$

et donc à introduire les espaces d'approximation suivants

$$(1.1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_h = \{q_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in X_k\}, \\ M_h = \{w_h \in M / \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in M_k\}. \end{array} \right.$$

Nous allons montrer ici que nous pouvons appliquer la théorie abstraite, développée dans la section 1.2.2, à ces espaces également. La difficulté principale repose sur la construction de la

décomposition orthogonale de  $X_h$ . En procédant comme dans la section précédente nous allons déduire les résultats de décomposition globale à partir d'une décomposition locale de l'espace  $\hat{X}$  sur  $L^2(K)$ ,  $K$  étant un élément. Tout d'abord, on rappelle la définition des éléments finis de Raviart-Thomas aux ordres supérieurs

$$RT_{[k]} = P_{k+1,k} \times P_{k,k+1}.$$

On a bien évidemment l'inclusion suivante

$$RT_{[k]} \subset X_k.$$

On définit maintenant l'espace  $\Psi_k$  comme le complémentaire orthogonal de  $RT_{[k]}$  dans  $X_k$  (pour le produit scalaire dans  $L^2(K)$ ):

$$\Psi_k = \left\{ \psi \in \hat{X} / \int_K \psi \phi dx = 0, \forall \phi \in RT_{[k]} \right\}.$$

Notons que

$$\dim \Psi_k = 2(k+2).$$

La propriété principale de l'espace  $\Psi_k$  est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 1.2.3** *Pour tout  $\psi$  dans  $\Psi_k$  et  $v$  dans  $M_k$ , on a*

$$(1.2.25) \quad \int_K \operatorname{div} \psi \ v \ dx = 0.$$

**Démonstration.**

Pour simplifier la preuve, nous considérons ici l'élément de référence  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ .

(i) Nous commençons par la caractérisation de  $\Psi_k$ . Soit  $\sigma_k$  le polynôme à une variable de degré  $k+1$  et tel que

$$P_{k+1} = P_k \oplus [\sigma_k].$$

De façon équivalente,  $\sigma_k$  est défini, à une constante multiplicative près, par

$$\begin{cases} \int_0^1 \sigma_k(x) p(x) dx = 0, \quad \forall p \in P_k, \\ \sigma_k \in P_{k+1}, \quad \sigma_k \neq 0 \end{cases}$$

Nous pouvons alors prouver que

$$\Psi_k = \tilde{\Psi}_k \equiv \left\{ \begin{pmatrix} p_x(x) \sigma_k(y) \\ p_y(y) \sigma_k(x) \end{pmatrix}, (p_x, p_y) \in P_{k+1} \times P_{k+1} \right\}.$$

En effet, comme  $\dim \tilde{\Psi}_k = 2(k+2)$ , il suffit de prouver que  $\tilde{\Psi}_k$  est orthogonale à  $RT_{[k]}$ . Pour ce faire, on rappelle d'abord que l'espace  $RT_{[k]}$  est généré par les fonctions de base vectorielles suivantes (cf. [94])

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} \tau_x(x) q_x(y) \\ \tau_y(y) q_y(x) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (\tau_x, \tau_y) \in P_{k+1} \times P_{k+1}, \quad (q_x, q_y) \in P_k \times P_k.$$

On définit ensuite

$$(1.2.26) \quad \psi(x, y) = \begin{bmatrix} p_x(x)\sigma_k(y) \\ p_y(y)\sigma_k(x) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (p_x, p_y) \in P_{k+1} \times P_{k+1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (\phi, \psi)_{(L^2(K))^2} &= \left( \int_0^1 \tau_x(x)p_x(x)dx \right) \left( \int_0^1 \sigma_k(y)q_x(y)dy \right) \\ &+ \left( \int_0^1 \sigma_k(x)q_y(x)dx \right) \left( \int_0^1 \tau_y(y)p_y(y)dy \right). \end{aligned}$$

Comme  $q_x$  et  $q_y$  sont dans  $P_k$ , par définition de  $\sigma_k$ , on obtient

$$\int_0^1 \sigma_k(y)q_x(y)dy = \int_0^1 \sigma_k(x)q_y(x)dx = 0 \Rightarrow (\phi, \psi)_{(L^2(K))^2} = 0.$$

(ii) Pour prouver (1.2.25) on utilise la formule de Green

$$\int_K \operatorname{div} \psi v dx = - \int_K \psi \cdot \nabla v dx + \int_{\partial K} (\psi \cdot n) v d\gamma.$$

Pour tout  $v$  dans  $Q_{k+1}$ , le  $\nabla v$  est dans l'espace  $RT_{[k]}$ . Donc, pour tout  $\psi \in \Psi_k$ , on a

$$\int_K \operatorname{div} \psi v dx = \int_{\partial K} (\psi \cdot n) v d\gamma.$$

On décompose ensuite le bord  $\partial K$  de l'élément  $K$ ,

$$\partial K = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4,$$

comme nous l'avons illustré dans la Figure 1.2.3. Ensuite, on peut vérifier que

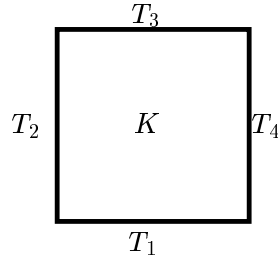


FIG. 1.2.3: Les arêtes de l'élément  $K$ .

$$\int_{T_j} (\psi \cdot n) q d\gamma = 0, \quad \forall j = 1, \dots, 4, \quad \forall q \in R_k(T_j),$$

où  $R_k(T_j)$  est l'ensemble des polynômes de degré  $k$  par rapport à l'abscisse le long de l'arête  $T_j$ . On considère, par exemple, l'arête qui correspond à  $j = 1$  et on définit  $\psi$  par (1.2.26). On obtient alors,

$$\int_{T_1} (\psi \cdot n) q d\gamma = - \left( \int_0^1 \sigma_k(x)q(x) \right) p_y(0) = 0.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tout  $v$  dans  $Q_{k+1}$ , on a  $v|_{T_j} \in R_k(T_j)$ . ■

Ce résultat nous conduit à définir les espaces globaux  $X_h^s$  et  $X_h^r$  par

$$(1.2.27) \quad \begin{cases} X_h^s = \{p_h \in H(\operatorname{div}; \Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, p_h|_K \in RT_{[k]}\}, \\ X_h^r = \{p_h \in H(\operatorname{div}; \Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, p_h|_K \in \Psi_k\}. \end{cases}$$

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section,

**Théorème 1.2.4** *Les espaces  $(X_h, M_h)$ , définis par (1.1.17), satisfont les hypothèses (H0) à (H4).*

**Démonstration.**

Les hypothèses (H0), (H3) et (H4) découlent des propriétés bien connues des espaces d'approximation de Raviart-Thomas [94]. La vérification des hypothèses (H1) et (H2) est une conséquence directe de la définition de  $\Psi_k$  et du Lemme 1.2.3 (en décomposant les intégrales sur  $\Omega$  comme la somme des intégrales sur les éléments  $K$ ). ■

**Remarque 1.2.8** *Nous illustrons par la figure 1.2.4 la décomposition orthogonale de  $X_h$  correspondant à  $k = 0$ , puis par la figure 1.2.5 celle correspondant à l'élément d'ordre  $k$ .*

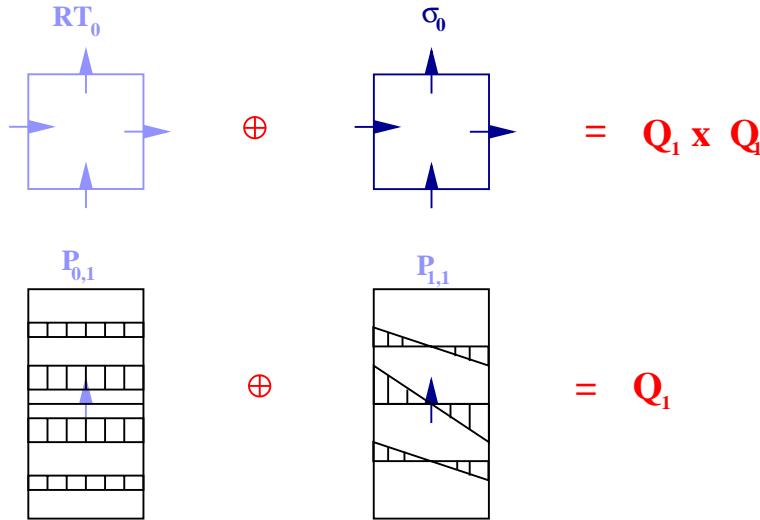
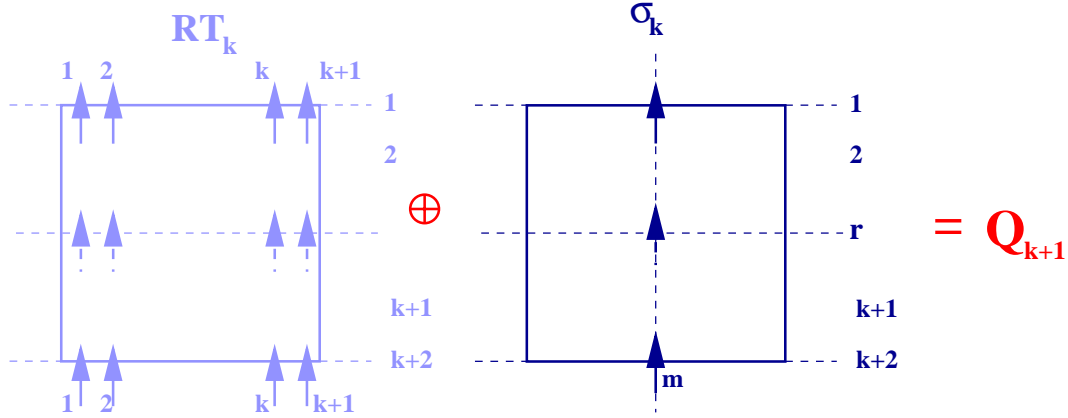


FIG. 1.2.4: Décomposition orthogonale de  $Q_1 \times Q_1$ .

En appliquant maintenant le Théorème 1.2.1 au problème approché (1.2.6), et en utilisant les résultats d'interpolation usuels (cf. [97]) des espaces  $X_h^s$  et  $M_h$ , définis par (1.1.17) et (1.2.27)), on obtient le résultat suivant.

**Théorème 1.2.5** *Le problème (1.2.6) admet une solution unique  $(p_h, u_h) \in X_h \times M_h$ , qui satisfait*

- $(p_h^s, u_h) \rightarrow (p, u)$  dans  $H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ ,
- $p_h^r \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$ .


 FIG. 1.2.5: Décomposition orthogonale de  $Q_{k+1}$ .

De plus, si on suppose que la solution  $(p, u)$  du problème continu (1.2.5) est assez régulière, i.e.,  $(p, u) \in (H^m(\Omega))^2 \times (H^m(\Omega))$ ,  $\operatorname{div} p \in H^m(\Omega)$  et  $\mathcal{A}p \in (H^m(\Omega))^2$  pour  $m = k + 1$ , alors

$$(1.2.28) \quad \begin{cases} \|p_h^r\|_{(L^2)^2} + \|p - p_h^s\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2} \leq C h^m \left( |u|_{H^m} + |p|_{(H^m)^2} \right. \\ \left. + |\operatorname{div} p|_{H^m} + |\mathcal{A}p|_{(H^m)^2} \right), \end{cases}$$

où  $|\cdot|_{H^m}$  (resp.  $|\cdot|_{(H^m)^2}$ ) est la semi-norme habituelle dans  $H^m(\Omega)$  (resp.  $(H^m(\Omega))^2$ ).

**Remarque 1.2.9** Les estimations d'erreur (1.2.28) impliquent que  $p_h$  est une bonne approximation de  $p$  dans l'espace  $(L^2)^2$ . Néanmoins, si on veut obtenir une bonne approximation dans l'espace  $H(\operatorname{div})$ , il suffit de projeter la solution discrète  $p_h$  sur l'espace  $X_h^s$ . C'est une procédure dite de post-processing qui est particulièrement facile dans notre cas, car elle est locale.

### 1.2.3.3 Application à l'opérateur de projection elliptique

On revient maintenant dans le cadre de la théorie abstraite présentée dans la section 1.2.2 et on cherche la solution  $(\hat{p}_h, \hat{u}_h) \equiv \Pi_h(p, u)$  du problème suivant

$$(1.2.29) \quad \begin{cases} a(p - \hat{p}_h, q_h) + b(u - \hat{u}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(w_h, p - \hat{p}_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h. \end{cases}$$

On pose

$$D(B^t) = \{w \in M / b(w, q) \leq C(w) |q|_H, \quad \forall q \in X\} = \{w \in M / B^t w \in H\}.$$

Pour tout  $w \in D(B^t)$ , on a

$$b(w, q) = (B^t w, q)_H, \quad \forall q \in X.$$

On introduit ensuite les notations suivantes

$$(1.2.30) \quad \begin{cases} |||p - \hat{p}_h||| = \|p - \hat{p}_h^s\|_X + |\hat{p}_h^r|_H, \\ |||(p, u) - \Pi_h(p, u)|||_C = |||p - \hat{p}_h||| + \|u - \hat{u}_h\|_M. \end{cases}$$

Il est alors facile de voir qu'on peut appliquer la théorie abstraite qui conduit aux résultats d'interpolation suivants

**Théorème 1.2.6** *On suppose que les hypothèses (H0) à (H4) sont vérifiées.*

(i) *Pour tout  $(p, u) \in X \times M$ , le problème (1.2.29) admet une solution unique*

$$\Pi_h(p, u) = (\widehat{p}_h^s + \widehat{p}_h^r, \widehat{u}_h) \in X_h \times (M_h / \text{Ker } B_h^t).$$

(ii) *Pour tout  $(p, u) \in X \times D(B^t)$ , il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que*

$$\| (p, u) - \Pi_h(p, u) \|_C \leq C \mathcal{E}_h(p, u),$$

où

$$\mathcal{E}_h(p, u) = \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |B^t u - z_h^s|_H.$$

*En particulier,  $\|p - \widehat{p}_h\|$  et  $\|u - \widehat{u}_h\|_M$  tendent vers zéro.*

**Démonstration.**

(i) L'existence et l'unicité est, dans ce cas aussi, une conséquence des hypothèses (H0) et (H3) (avec  $f = Bp$  qui appartient, bien évidemment à l'image de l'opérateur  $B$  ( $\text{Im } B$ )).

(ii) La preuve de ce point est une modification mineure de la preuve du Théorème 1.2.2. La seule différence concerne le traitement du terme  $b(u, p_h^r - q_h^r)$  dans l'équation (1.2.18). Afin d'obtenir l'estimation d'erreur, il est nécessaire de relier ce terme à la norme correspondant au produit scalaire dans  $H$ . Dans la démonstration du Théorème 1.2.2, nous avons remplacé ce terme par  $-a(p, p_h^r - q_h^r) \equiv -(\mathcal{A}p, p_h^r - q_h^r)_H$  en utilisant la première équation du problème continu. Ici, nous avons  $u \in D(B^t)$ , ce qui implique

$$b(u, p_h^r - q_h^r) = (B^t u, p_h^r - q_h^r)_H.$$

Le résultat s'obtient alors en remplaçant  $-\mathcal{A}p$  par  $B^t u$ . ■

### 1.3 Analyse de convergence: le problème d'évolution

Nous considérons ici, le problème d'évolution décrit par le système (1.1.5) et soumis aux conditions initiales (1.1.4). Notre objectif est de montrer des résultats de convergence pour ce problème en utilisant les résultats que nous avons obtenus pour le problème elliptique (1.2.5). Cette partie de l'analyse est inspirée par les travaux de T. Dupont (cf. [48]) qui concernent l'approximation de problèmes elliptiques de deuxième ordre avec des éléments finis conformes. Malgré le fait que la construction des nouveaux éléments finis a été motivée par la condensation de masse, nous présentons ici les résultats de convergence sans prendre en compte l'erreur induite par l'approximation numérique (utilisation des formules de quadrature, cf. 1.1.4).

### 1.3.1 Obtention des estimations d'erreur pour le problème d'évolution à partir des estimations d'erreur pour le problème elliptique

#### 1.3.1.1 Le cas abstrait

Dans cette partie, on utilise les mêmes notations et hypothèses que dans la section 1.2.2. On considère le problème d'évolution

$$(1.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, v) : [0, T] \mapsto X \times M \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt}a(p, q) + b(v, q) = 0, \quad \forall q \in X, \\ \frac{d}{dt}(v, w) - b(w, p) = (f, w), \quad \forall w \in M, \\ p(0) = p_0 ; v(0) = v_0. \end{array} \right.$$

En supposant que la solution est assez régulière en temps, on peut réécrire (1.3.1), sous la forme suivante

$$(1.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, v) \in (C^1(0, T; H) \cap C^0(0, T; X)) \times C^1(0, T; M) \text{ tels que} \\ \mathcal{A} \frac{dp}{dt} + B^t v = 0 \quad \text{dans } X', \\ \frac{dv}{dt} - Bp = f \quad \text{dans } M', \\ p(0) = p_0 ; v(0) = v_0. \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit, on utilise la notation  $C^{m,r} = C^m(0, T; H) \cap C^r(0, T; X)$ . On suppose, comme dans la section 1.2.2, que les espaces  $X_h$  et  $M_h$  sont des espaces de dimension finie vérifiant les hypothèses (H0) à (H4) et on considère le problème d'approximation

$$(1.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h, v_h) : [0, T] \mapsto X_h \times M_h \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt}a(p_h, q_h) + b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ \frac{d}{dt}(v_h, w_h) - b(w_h, p_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in M_h, \\ p_h(0) = p_{0,h} ; v_h(0) = v_{0,h}. \end{array} \right.$$

D'après la théorie classique des EDO, nous avons le résultat:

**Théorème 1.3.1** *Soit  $f \in C^0(0, T; M_h)$ , le problème (1.3.3) admet alors une solution unique  $(p_h, v_h) \in C^1(0, T; X_h) \times C^1(0, T; M_h)$ .*

En procédant comme dans [42, 48], on introduit l'opérateur de projection elliptique défini par (1.2.29). En appliquant ensuite le Théorème 1.2.6, on obtient les résultats d'interpolation suivants

**Lemme 1.3.1** Soit  $(p, v)$  la solution du problème (1.3.2), on suppose en plus que  $(p, v) \in C^{1,0} \times C^1(0, T; M)$ , alors

(i) il existe une primitive de  $v$ ,  $u \in C^1(0, T; M)$ , et elle satisfait

$$(1.3.4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \mathcal{A}p_0 + B^t u(0) = 0. \end{cases}$$

Cette primitive est unique à un élément de  $\text{Ker } B^t$  près.

(ii)  $\forall t \in [0, T]$ , le problème (1.2.29) admet une solution unique  $\Pi_h(p, u)(t) = (\widehat{p}_h, \widehat{u}_h)(t) \in X_h \times (M_h/\text{Ker } B_h^t)$  et il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$(1.3.5) \quad \|\Pi_h(p, u) - \Pi_h(p, u)\|_C(t) \leq C \mathcal{E}_h(p, u)(t),$$

avec  $\mathcal{E}_h$  défini par,

$$\mathcal{E}_h(p, u)(t) = \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p(t) - q_h^s\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u(t) - w_h\|_M + \inf_{z_h^s \in X_h^s} |\mathcal{A}p(t) - z_h^s|_H.$$

En particulier,  $\|p - \widehat{p}_h\|$  et  $\|u - \widehat{u}_h\|_M$  tendent vers zéro uniformément en temps ( $t \in [0, T]$ ) ( $\|\cdot\|_C$  et  $\|\cdot\|$  étant définis par (1.2.30)).

(iii) De même, si on a  $(p, u) \in C^k(0, T; X) \times C^k(0, T; M)$ ,  $k \geq 1$ , alors il existe une constante  $C$  indépendant de  $h$  telle que

$$(1.3.6) \quad \left\| \left( \partial_t^k p, \partial_t^k u \right) - \Pi_h \left( \partial_t^k p, \partial_t^k u \right) \right\| (t) \leq C \mathcal{E}_h \left( \partial_t^k p, \partial_t^k u \right) (t),$$

avec  $\partial_t^k g = \frac{d^k g}{dt^k}$ .

**Démonstration.**

(i) On pose  $f_0 = -Bp_0 \in \text{Im } B$ . Par l'hypothèse (1.2.10), on sait qu'il existe une solution unique  $(p_0, u_0) \in X \times (M/\text{Ker } B^t)$  telle que

$$\begin{cases} a(p_0, q) + b(u_0, q) = 0, & \forall q \in X, \\ b(w, p_0) = -(f_0, w), & \forall w \in M, \end{cases}$$

ce qui implique que, pour  $p_0$  fixé, il existe un  $u_0 \in (M/\text{Ker } B^t)$  unique tel que  $\mathcal{A}p_0 + B^t u_0 = 0$ . On définit maintenant  $u$  par

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s) ds.$$

Il est alors clair que  $u \in C^1(0, T; M)$  est l'unique solution de (1.3.4).

(ii) Soit  $u \in C^1(0, T; M)$  la primitive de  $v$ , en remplaçant ceci dans la première équation de (1.3.2) on obtient

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{A}p + B^t u) = 0 \implies (\mathcal{A}p + B^t u)(t) = \mathcal{A}p_0 + B^t u(0) = 0;$$



et donc,  $(p, u) \in C^1(0, T; X) \times C^1(0, T; M)$  satisfait

$$a(p, q) + b(u, q) = 0, \quad \forall q \in X,$$

d'où  $u \in D(B^t)$  et  $B^t u = -\mathcal{A}p$ . En appliquant maintenant le Théorème 1.2.6, on obtient l'existence et l'unicité de la projection elliptique, pour  $t$  fixé, et les estimations d'erreur (1.3.5).

(iii) Si la solution  $(p, u)$  est assez régulière en temps, on peut dériver les équations par rapport au temps  $t$  et obtenir

$$\mathcal{A}\partial_t^k p + B^t \partial_t^k u = 0.$$

On applique à nouveau le Théorème 1.2.6 et on obtient (1.3.6). ■

**Remarque 1.3.1** Les opérateurs  $\Pi_h$  et  $\partial_t^k$  commutent, et on pose

$$(1.3.7) \quad \widehat{v}_h = \partial_t (\widehat{u}_h) = \left( \widehat{\partial_t u} \right)_h.$$

**Remarque 1.3.2** On peut remarquer que la régularité en temps n'est pas la même pour  $v$  et  $p$  ( $p \in C^k$  et  $v \in C^{k-1}$ ). Ceci est spécifique aux nouveaux éléments finis. Plus précisément, afin d'éliminer les termes conduisant à la norme dans  $X$  des éléments de  $X_h^r$  (i.e,  $b(v, p_h^r - q_h^r)$ ), nous avons utilisé la première équation du problème continu, ce qui fait intervenir le terme  $\frac{d}{dt}a(p, p_h^r - q_h^r)$  qui contient une dérivée supplémentaire en temps de  $p$  (voir la preuve du Théorème 1.2.2).

On présente maintenant le résultat principal.

**Théorème 1.3.2** Supposons (H0) – (H4). Soit  $(p, v)$  la solution du problème continu (1.3.2) et  $(p_h, v_h)$  celle du problème approché (1.3.3) avec les conditions initiales

$$(1.3.8) \quad (p_{0,h}, v_{0,h}) = \Pi_h(p_0, v_0).$$

- Si  $(p, v) \in C^2(0, T; X) \times C^1(0, T; M)$ , alors,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$|p - p_h^s|_H(t) \rightarrow 0 ; |p_h^r|_H(t) \rightarrow 0 ; \|v - v_h\|_M(t) \rightarrow 0.$$

Plus précisément,

$$(1.3.9) \quad \begin{cases} |p - p_h^s|_H(t) + |p_h^r|_H(t) \leq C \left( \mathcal{E}_h(p, u)(t) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t v)(s) ds \right), \\ \|v - v_h\|_M(t) \leq C \left( \mathcal{E}_h(\partial_t p, v)(t) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t v)(s) ds \right). \end{cases}$$

- Si, en plus, on a  $(p, v) \in C^3(0, T; X) \times C^2(0, T; M)$  et  $(p_h, v_h) \in C^2(0, T; X_h) \times C^2(0, T; M_h)$ , alors

$$\forall t \in [0, T], \|p - p_h^s\|_X(t) \rightarrow 0.$$

Plus précisément,

$$(1.3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|p - p_h^s\|_X(t) \leq C(\mathcal{E}_h(p, u)(t) + \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t v)(t) \\ \quad + \int_0^t (\mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t v)(s) + \mathcal{E}_h(\partial_t^3 p, \partial_t^2 v)(s)) ds). \end{array} \right.$$

Afin de prouver le Théorème 1.3.2 nous avons besoin du lemme suivant

**Lemme 1.3.2** *Soit  $(p, v)$  et  $(p_h, v_h)$  les solutions des problèmes (1.3.2) et (1.3.3) respectivement, avec les conditions initiales (1.3.8). Soit en plus  $\Pi_h(p, u) = (\widehat{p}_h^s + \widehat{p}_h^r, \widehat{u}_h)$  la projection elliptique définie par le Lemme 1.3.1 et  $\widehat{v}_h$  défini par (1.3.7). On pose  $\delta_h = v - \widehat{v}_h$ .*

(i) *Si  $(p, v) \in C^{1,0} \times C^1(0, T; M)$ , il existe une constante  $C_1$ , indépendant de  $h$  telle que,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$(1.3.11) \quad |\widehat{p}_h^s - p_h^s|_H(t) + |\widehat{p}_h^r - p_h^r|_H(t) + \|\widehat{v}_h - v_h\|_M(t) \leq C_1 \int_0^t \|\partial_t \delta_h\|_M(s) ds.$$

(ii) *De plus, si  $(p, v) \in C^{2,1} \times C^2(0, T; M)$  et  $(p_h, v_h) \in C^2(0, T; X_h) \times C^2(0, T; M_h)$ , il existe une constante  $C_2$ , indépendant de  $h$  telle que,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$(1.3.12) \quad \|\widehat{p}_h^s - p_h^s\|_X(t) \leq C_2 \left\{ \|\partial_t \delta_h\|_M(t) + \int_0^t (\|\partial_t \delta_h\|_M(s) + \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s)) ds \right\}.$$

**Démonstration.**

(i) Afin de prouver l'estimation (1.3.11), on réécrit les équations (1.3.1) pour des fonctions test  $q = q_h \in X_h \subset X$  et  $w = w_h \in M_h \subset M$  :

$$(1.3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a(p, q_h) + b(v, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in X_h \\ \frac{d}{dt} (v, w_h) - b(w_h, p) = (g, w_h) \quad \forall w_h \in M_h, \end{array} \right.$$

On prend ensuite la différence entre (1.3.3) et (1.3.13) et on obtient :

$$(1.3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a(p - p_h, q_h) + b(v - v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ \frac{d}{dt} (v - v_h, w_h) - b(w_h, p - p_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h, \\ (p - p_h)(0) = p_0 - p_{0,h} ; \quad (v - v_h)(0) = v_0 - v_{0,h}. \end{array} \right.$$

On introduit maintenant l'opérateur elliptique  $\Pi_h(p, u) = (\widehat{p}_h, \widehat{u}_h)$  et on décompose l'erreur entre la solution des problèmes continu et approché en deux parties

$$(1.3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p - p_h)(t) = (p - \widehat{p}_h)(t) + (\widehat{p}_h - p_h)(t), \\ (v - v_h)(t) = (v - \widehat{v}_h)(t) + (\widehat{v}_h - v_h)(t). \end{array} \right.$$

Pour définir les conditions initiales du problème approché on utilise la relation (1.3.8), et donc au temps  $t = 0$  on a

$$(\widehat{p}_h - p_h)(0) = 0 \ ; \ \widehat{v}_h - v_h(0) = 0.$$

D'après (1.3.14) et (1.3.15), pour tout  $(q_h, w_h) \in X_h \times M_h$ ,

$$(1.3.16) \quad \begin{cases} a(\partial_t(\widehat{p}_h - p_h), q_h) + b(\widehat{v}_h - v_h, q_h) = -a(\partial_t(p - \widehat{p}_h), q_h) - b(v - \widehat{v}_h, q_h), \\ (\partial_t(\widehat{v}_h - v_h), w_h) - b(w_h, \widehat{p}_h - p_h) = -(\partial_t(v - \widehat{v}_h), w_h) + b(w_h, p - \widehat{p}_h). \end{cases}$$

En dérivant la première équation de (1.2.29) par rapport au temps (écrit pour  $(p, u)$ ), on obtient que

$$\begin{cases} a(\partial_t(p - \widehat{p}_h), q_h) + b(v - \widehat{v}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(w_h, p - \widehat{p}_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h. \end{cases}$$

En remplaçant ceci dans (1.3.16), on a

$$(1.3.17) \quad \begin{cases} a(\partial_t(\widehat{p}_h - p_h), q_h) + b(\widehat{v}_h - v_h, q_h) = 0, \\ (\partial_t(\widehat{v}_h - v_h), w_h) - b(w_h, \widehat{p}_h - p_h) = -(\partial_t(v - \widehat{v}_h), w_h), \end{cases}$$

pour tout  $(q_h, w_h) \in X_h \times M_h$ .

Si on choisit maintenant  $q_h = \widehat{p}_h - p_h$  et  $w_h = \widehat{v}_h - v_h$  dans (1.3.16) et on rajoute les deux équations, on a

$$(1.3.18) \quad a(\partial_t(\widehat{p}_h - p_h), \widehat{p}_h - p_h) + (\partial_t(\widehat{v}_h - v_h), \widehat{v}_h - v_h) = -(\partial_t(v - \widehat{v}_h), \widehat{v}_h - v_h).$$

Ensuite, on pose

$$E_h(t) = \frac{1}{2} (a(\widehat{p}_h - p_h, \widehat{p}_h - p_h) + (\widehat{v}_h - v_h, \widehat{v}_h - v_h)) (t).$$

On sait alors qu'il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$E_h^{1/2}(t) \geq C (|\widehat{p}_h - p_h|_H^2(t) + \|\widehat{v}_h - v_h\|_M^2(t))^{1/2},$$

ce qui implique que

$$(1.3.19) \quad \frac{dE_h^{1/2}}{dt}(t) \leq C' \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M(t) \equiv C' \|\partial_t \delta_h\|_M(t),$$

où on a introduit  $\delta_h = v - \widehat{v}_h$ . D'après (1.3.8) on a,

$$E_h(0) = 0.$$

Il est alors facile de voir que (1.3.19) conduit à (1.3.11) (par la décomposition orthogonale de  $X_h (= X_h^s \perp X_h^r)$ , on a  $|q_h|_H^2 = |q_h^s|_H^2 + |q_h^r|_H^2, \forall q_h \in X_h$ ).

(ii) Pour obtenir l'estimation (1.3.12) en norme  $X$ , on rappelle d'abord que, pour tout  $\eta_h^s \in X_h^s$ , on a  $\eta_h^s = \eta_1 + \eta_2$  avec  $\eta_1 \in \text{Ker } B_h$  et  $\eta_2 \in (\text{Ker } B_h)^\perp$ , et donc

$$\|\eta_h^s\|_X^2 = |\eta_1|_H^2 + \|\eta_2\|_X^2$$

(car  $\|\eta_1\|_X = |\eta_1|_H$ ,  $\forall \eta_1 \in \text{Ker } B_h$ ). On pose maintenant  $\eta_h = \widehat{p}_h - p_h$ . Le terme  $|\eta_1|_H$  est déjà estimé par l'inégalité (1.3.11); pour obtenir alors (1.3.12), il suffit d'estimer le terme  $\|\eta_2\|_X$ . Pour ce faire, on utilise la condition inf-sup (hypothèse (H2)) sous la forme suivante équivalente,

$$(1.3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une constante } C > 0, \text{ indépendant de } h, \text{ telle que} \\ \forall q_h^s \in X_h^s, \quad \sup_{w_h \in M_h} \frac{b(w_h, q_h^s)}{\|w_h\|_M} \geq C \|q_h^s\|_{X/\text{Ker } B_h}. \end{array} \right.$$

On a aussi  $\|\eta_2\|_X = \|\eta_h^s\|_{X/\text{Ker } B_h}$ . D'où, en choisissant  $q_h^s = \eta_2$  dans (1.3.20),

$$\sup_{w_h \in M_h} \frac{b(w_h, \eta_2)}{\|w_h\|_M} \geq C \|\eta_2\|_X.$$

On utilise maintenant la deuxième équation de (1.3.17) pour obtenir

$$(1.3.21) \quad \|\eta_2\|_X \leq C' \{ \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M + \|\partial_t(\widehat{v}_h - v_h)\|_M \}.$$

Jusqu'à maintenant, on a seulement utilisé la régularité  $C^1$  de la solution. Cependant, pour majorer le terme  $\|\partial_t(\widehat{v}_h - v_h)\|_M$ , on a besoin de la régularité  $C^2$ . En effet, on peut appliquer (1.3.11) en remplaçant  $v_h$  par  $\partial_t v_h$ ,  $\widehat{v}_h$  par  $\partial_t \widehat{v}_h$ , ainsi de suite ... Plus précisément, on a

$$(1.3.22) \quad \|\partial_t(\widehat{v}_h - v_h)\|_M(t) \leq C \int_0^t \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s) ds.$$

Finalement, en combinant (1.3.21) et (1.3.22), on obtient

$$\|\eta_2\|_X(t) \leq C' \left\{ \|\partial_t \delta_h\|_M(t) + \int_0^t \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s) ds \right\},$$

ce qui termine la démonstration. ■

**Démonstration** (du Théorème 1.3.2).

Nous allons combiner ici les résultats des Lemmes 1.3.1 et 1.3.2.

- Estimations en normes  $H$  et  $M$ . Nous avons

$$(1.3.23) \quad |p - p_h^s|_H + |p_h^r|_H \leq |p - \widehat{p}_h^s|_H + |\widehat{p}_h^r|_H + |\widehat{p}_h^s - p_h^s|_H + |\widehat{p}_h^r - p_h^r|_H.$$

Le premier terme du second membre est majoré par  $\|p - \widehat{p}_h\|$  et donc par  $\|(p, u) - \Pi_h(p, u)\|_C$ . En supposant que  $(p, v) \in \mathcal{C}^{1,0} \times C^1(0, T; M)$ , par (1.3.5) on obtient

$$(1.3.24) \quad \|(p - \widehat{p}_h)\| (t) \leq C \mathcal{E}_h(p, u)(t).$$

Pour majorer le second terme on utilise (1.3.11) du Lemme 1.3.2. Ceci nécessite que le terme  $\|\partial_t \delta_h\|_M$  soit majoré. Pour ce faire, on suppose que  $(p, v) \in C^2(0, T; X) \times C^1(0, T; M)$  et on utilise l'équation (1.3.6) pour  $k = 2$ , on obtient alors

$$(1.3.25) \quad \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M(s) \leq C \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t v)(s);$$

Les inégalités (1.3.23), (1.3.24) et (1.3.25) conduisent à la première relation de (1.3.9). En ce qui concerne  $v$ , on écrit

$$\|v - v_h\|_M \leq \|v - \widehat{v}_h\|_M + \|\widehat{v}_h - v_h\|_M.$$

En appliquant ensuite (1.3.6) pour  $k = 1$  on obtient

$$\|v - \widehat{v}_h\|_M \leq C \mathcal{E}_h(\partial_t p, v).$$

En utilisant à nouveau (1.3.11) pour majorer  $\|\widehat{v}_h - v_h\|_M$ , on retrouve facilement la deuxième relation de (1.3.9).

- Estimation en norme  $X$ . On a,

$$\|p - p_h^s\|_X \leq \|p - \widehat{p}_h^s\|_X + \|\widehat{p}_h^s - p_h^s\|_X.$$

Le premier terme est encore majoré par  $\|p - \widehat{p}_h\|$  et on peut l'estimer en utilisant (1.3.5). Pour le deuxième terme, on va utiliser la relation (1.3.12) du Lemme 1.3.2, dans laquelle apparaît une dérivée seconde en temps de  $v - \widehat{v}_h$ , ce qui nécessite la régularité  $(p, v) \in C^{2,1} \times C^2(0, T; M)$  et  $(p_h, v_h) \in C^2(0, T; X_h) \times C^2(0, T; M_h)$ . On utilise alors l'estimation (1.3.6) pour  $k = 3$ , en supposant que  $(p, v) \in C^3(0, T; X) \times C^2(0, T; M)$ , et on obtient (1.3.10). ■

### 1.3.1.2 Le cas de l'équation des ondes anisotropes.

On revient maintenant à notre problème initial présenté dans la section 1.1. On considère les espaces d'approximation donnés par (1.1.17). Nous avons vu dans la section 1.2.3 que l'élément  $Q_{k+1}^{div} - Q_k$  entre dans le cadre de la théorie abstraite. On peut donc appliquer le Théorème 1.3.2 et obtenir les résultats suivants.

**Théorème 1.3.3** *Soit  $(p, v)$  la solution de (1.1.5), (1.1.4) et  $u \in C^2(0, T; M)$  la primitive de  $v$ , définie par*

$$\frac{du}{dt} = v ; \quad B^t u(0) = -\mathcal{A}p_0.$$

*Soit encore  $(p_h, u_h)$  la solution du problème approché (1.1.9) avec les conditions initiales*

$$(p_{0,h}, v_{0,h}) = \Pi_h(p_0, v_0).$$

- Convergence en norme  $L^2$  :

(i) Si  $(p, v) \in C^2(0, T; X) \times C^1(0, T; M)$ , alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$|p - p_h^s|_H(t) \rightarrow 0 ; |p_h^r|_H(t) \rightarrow 0 ; \|v - v_h\|_M(t) \rightarrow 0.$$

(ii) De plus, si  $(p, u) \in C^2(0, T; H^{k+1}(\text{div}, \Omega)) \times C^2(0, T; H^{k+1}(\Omega))$  et  $\mathcal{A}p \in C^2(0, t; (H^{k+1}(\Omega))^2)$ , alors

$$|p - p_h^s|_H(t) + |p_h^r|_H(t) + \|v - v_h\|_M(t) \leq C_1(t)h^k,$$

avec  $C_1(t) = O(\|p\|_{C^2(0,t;H^{k+1}(\text{div},\Omega))} + \|\mathcal{A}p\|_{C^2(0,t;(H^{k+1}(\Omega))^2)} + \|u\|_{C^2(0,t;H^{k+1}(\Omega))})$ .

• Convergence en norme  $H(\text{div})$ :

(iii) Si  $(p, v) \in C^3(0, T; X) \times C^2(0, T; M)$ , alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\|p - p_h^s\|_X(t) \rightarrow 0.$$

(iv) De plus, si  $(p, u) \in C^3(0, T; H^{k+1}(\text{div}, \Omega)) \times C^3(0, T; H^{k+1}(\Omega))$  et  $\mathcal{A}p \in C^3(0, t; (H^{k+1}(\Omega))^2)$ , alors

$$\|p - p_h^s\|_X(t) \leq C_2(t)h^k,$$

avec  $C_2(t) = O(\|p\|_{C^3(0,t;H^{k+1}(\text{div},\Omega))} + \|\mathcal{A}p\|_{C^3(0,t;(H^{k+1}(\Omega))^2)} + \|u\|_{C^3(0,t;H^{k+1}(\Omega))})$ .

**Démonstration.**

On applique ici le Théorème 1.3.2 qui relie l'erreur d'approximation pour le problème d'évolution à des termes du type  $\mathcal{E}_h(\partial_t^m p, \partial_t^l u)$ ; i.e., l'erreur due à l'approximation de  $H(\text{div}; \Omega)$  par des éléments finis de Raviart-Thomas ( $RT_{[k]}$ ) et à l'approximation de  $L^2(\Omega)$  par des éléments finis  $Q_k$  discontinus. ■

## 1.4 Extension au cas tridimensionnel

Nous présentons dans cette section la généralisation des nouveaux éléments finis au cas tridimensionnel. Nous considérons ici seulement l'élément fini de plus bas degré, l'extension aux ordres supérieurs étant similaire au cas 2D.

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ . On considère un maillage régulier  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  composé d'éléments cubiques  $K$  de côté  $h > 0$ . On introduit ensuite les espaces d'approximation  $X_h \subset X(= H(\text{div}; \Omega))$  et  $M_h \subset M(= L^2(\Omega))$  définis par (1.1.8) avec

$$\hat{X} = Q_1 \times Q_1 \times Q_1 ; \hat{M} = Q_0.$$

Notre objectif est alors d'appliquer le Théorème abstrait 1.2.2 au problème approché (1.2.6) afin d'obtenir les estimation d'erreur comme dans le cas 2D. On définit d'abord  $X_h^s$  comme l'élément  $RT_{[0]}$ :

$$X_h^s = \{q_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in P_{1,0,0}(K) \times P_{0,1,0}(K) \times P_{0,0,1}(K)\},$$

qui a été initialement introduit par Nédélec dans [85]. On peut alors utiliser les propriétés bien connues des espaces d'approximation  $X_h^s - M_h$  (cf. [32, 85]) afin d'obtenir les mêmes résultats que dans le cas 2D (donnés par le Théorème 1.2.2). Le seul point qui n'est pas trivial est la décomposition orthogonale de l'espace  $X_h$ .

Pour décrire l'espace  $X_h^s$ , on considère un élément  $K$  du maillage et on introduit

$$\left( \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}, \vec{\phi}_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}, \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}, \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}}, \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}, \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} \right)$$

les six fonctions de base de l'espace  $RT_{[0]}$  (avec les notations évidentes illustrées en figure 1.4.1). Ces fonctions de base sont définies par

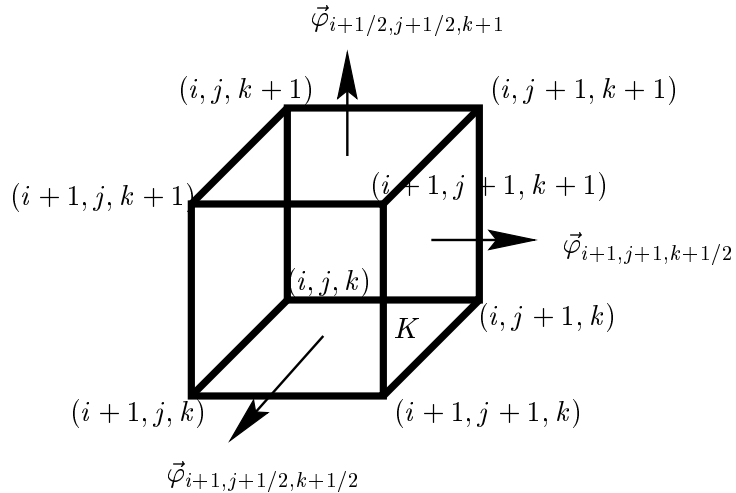


FIG. 1.4.1: L'élément  $RT_{[0]}$ , le cas 3D.

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \phi_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\phi}_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \phi_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}}(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(x_3) \end{pmatrix}, & \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}(x_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(x_1) = \frac{((x_1)_{i+1} - x_1)}{h} \in P_{100}, \quad \varphi_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(x_1) = \frac{(x_1 - (x_1)_i)}{h} \in P_{100}, \\ \varphi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(x_2) = \frac{((x_2)_{j+1} - x_2)}{h} \in P_{010}, \quad \varphi_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}}(x_2) = \frac{(x_2 - (x_2)_j)}{h} \in P_{010}, \\ \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(x_3) = \frac{((x_3)_{k+1} - x_3)}{h} \in P_{001}, \quad \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}(x_3) = \frac{(x_3 - (x_3)_k)}{h} \in P_{001}. \end{array} \right.$$

Il est alors facile de prouver le lemme suivant

**Lemme 1.4.1** *L'espace  $X_h^r|_K$ , c'est à dire la restriction dans l'élément  $K$  de  $X_h^r$ , est caractérisé par les six fonctions de base suivantes:*

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \phi_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(x_1)(x_2 - (x_2)_{i+\frac{1}{2}})(x_3 - (x_3)_{k+\frac{1}{2}}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi}_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \phi_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(x_1)(x_2 - (x_2)_{i+\frac{1}{2}})(x_3 - (x_3)_{k+\frac{1}{2}}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(x_2)(x_1 - (x_1)_{i+\frac{1}{2}})(x_3 - (x_3)_{k+\frac{1}{2}}) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}}(x_2)(x_1 - (x_1)_{i+\frac{1}{2}})(x_3 - (x_3)_{k+\frac{1}{2}}) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(x_3)(x_1 - (x_1)_{i+\frac{1}{2}})(x_2 - (x_2)_{j+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \\ \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}(x_3)(x_1 - (x_1)_{i+\frac{1}{2}})(x_2 - (x_2)_{j+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus,  $X_h^r \subset V_h$ .



## Chapitre 2

# Les équations de l'élastodynamique

Dans ce chapitre nous présentons la suite de nos travaux sur les éléments finis mixtes pour les problèmes de propagation des ondes. Nous considérons ici la formulation en vitesse-contraintes de l'élastodynamique et nous proposons une nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour la discrétisation spatiale. Ces éléments présentent la spécificité d'imposer la symétrie du tenseur des contraintes de façon forte et de conduire à des schémas explicites (condensation de masse) après discrétisation en temps. L'analyse de convergence de ces éléments n'est pas immédiate. En effet, dans ce cas on ne peut appliquer ni la théorie classique ni la théorie développée dans le chapitre précédent. C'est pourquoi nous avons de nouveau modifié la théorie abstraite afin d'obtenir des estimations d'erreur.

### Introduction

Nous considérons ici notre problème modèle, la formulation en vitesse-contraintes de l'élastodynamique. Nous sommes intéressés par la discrétisation en espace de ce problème. Notre objectif étant la condensation de masse nous devons choisir des espaces d'approximation de façon adéquate.

On pourrait penser qu'il suffit dans ce cas d'utiliser les éléments finis  $Q_{k+1}^{div} - Q_k$  introduits dans le chapitre précédent. Cependant en élasticité le tenseur des contraintes étant symétrique le bon espace d'approximation n'est pas un sous-espace de  $H(\text{div})$  mais de  $H^{sym}(\text{div})$ , l'espace de tenseurs symétriques. Ceci induit une difficulté lorsqu'on approche le problème avec des éléments finis mixtes. Notamment, les méthodes d'éléments finis mixtes introduites pour les problèmes elliptiques ([94, 85, 30]) ne conduisent pas à des approximations stables dans ce cas. Pour surmonter cette difficulté spécifique à l'élasticité plusieurs méthodes ont été proposées.

Dans [73] C. Johnson et B. Mercier ont introduit des éléments finis "composites" (macro-éléments) qui prennent en compte la symétrie du tenseur des contraintes dans l'espace d'approximation. Ces éléments ont été analysés pour le problème élastique bidimensionnel, en outre ils peuvent également être utilisés dans le cas de la plasticité. Une autre famille d'éléments finis mixtes avec des tenseurs des contraintes symétriques à été proposée par R. Stenberg [104]. Dans ce cas des fonctions bulles ont été systématiquement introduites pour stabiliser la méthode mixte.

Une approche alternative, qui a eu beaucoup de succès, consiste à prendre en compte la symétrie du tenseur des contraintes de façon faible en introduisant comme inconnue supplémentaire le multiplicateur de Lagrange associé. Cette idée a été initialement introduite dans

le cadre de la formulation hybride duale en contraintes par B.X. Fraijs de Veubeke [45]. Elle a été ensuite étudiée par M. Amara et J.M. Thomas [3]. Dans le cadre de la formulation mixte en vitesse-contraintes, les premiers travaux basés sur la même idée, sont dus à D. N. Arnold, F. Brezzi et J. Douglas [4]. L'avantage principal de cette méthode est que l'espace d'approximation pour les contraintes n'est plus nécessairement symétrique. Ce qui permet de généraliser à l'élasticité les méthodes d'éléments finis mixtes développées pour les problèmes elliptiques ([94, 85, 30]). Cette idée a été ensuite exploitée par plusieurs auteurs, ce qui a donné naissance à des familles d'éléments finis mixtes d'ordre élevé et stables pour le problème de l'élasticité en deux et trois dimensions (cf. [31, 105, 82]).

Ces différentes méthodes d'éléments finis mixtes qui ont été développées pour le problème stationnaire ne sont pas compatibles avec la condensation de masse. C'est pour cette raison que nous proposons ici une nouvelle famille d'éléments finis mixtes conduisant à des systèmes explicites en temps. Ces éléments utilisent des espaces de tenseurs symétriques car nous avons réalisé qu'afin d'obtenir la condensation de masse il était nécessaire de suivre l'approche de la symétrie forte.

Malgré la simplicité de ces éléments, l'analyse de convergence s'est avérée très délicate. D'une part les hypothèses d'approximation classiques (cf. [32, 29, 8]), nécessaires pour obtenir des estimations d'erreur, ne sont pas satisfaites : défaut de coercivité. D'autre part nous n'avons pas réussi à montrer la condition inf-sup "forte" de la théorie abstraite introduite dans le cas scalaire. Pour obtenir donc des estimations d'erreur nous sommes été amenés à affaiblir la condition inf-sup et à renforcer les hypothèses d'approximation.

La première partie de ce chapitre 2.1 est consacrée à la présentation de la nouvelle famille d'éléments finis en 2 et 3 dimensions. L'analyse de convergence de ces éléments est ensuite étudiée dans la section 2.2. Comme dans le cas scalaire on étudie d'abord l'erreur de projection elliptique, puis, en utilisant des techniques d'énergie, nous obtenons dans la section 2.3 des estimations d'erreur pour le problème d'évolution.

## 2.1 Présentation de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes

### 2.1.1 Le problème modèle : les équations de l'élastodynamique

#### 2.1.1.1 Notations

Dans ce qui suit, nous identifierons l'espace des tenseurs  $2 \times 2$  à l'espace  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  des applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans lui même, sur lequel nous définissons la forme linéaire :

$$(2.1.1) \quad \mathbf{as}(\sigma) = \sigma_{12} - \sigma_{21}.$$

$\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2)$  désignera le sous espace de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  des tenseurs symétriques :

$$(2.1.2) \quad \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2) = \{ \sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) / \mathbf{as}(\sigma) = 0 \}.$$

Nous munissons  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  d'une structure euclidienne à l'aide du produit scalaire :

$$(2.1.3) \quad \sigma : \tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad \forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2),$$

$|\sigma|$  désignera la norme associée. À tout  $\sigma$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  nous associerons :

$$(2.1.4) \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Si maintenant,  $\Omega$  désignant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sigma$  désigne un champ de tenseurs sur  $\Omega$  ( $\sigma \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ ), nous posons :

$$\mathbf{div} \sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{div} \sigma_1 \\ \operatorname{div} \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Finalement, pour tout  $(u, v) \in L^2(\Omega)^d$  ( $d=1,2,3$ ), on note par  $(u, v)_\Omega$  le produit scalaire habituel dans  $L^2(\Omega)^d$ .

### 2.1.1.2 Le problème de l'élastodynamique

Nous considérons maintenant que  $\Omega$  est occupé par un milieu matériel et que  $u(x, t)$  désigne le champ des déplacements (plans) dans  $\Omega$ , à l'instant  $t$  ( $x \in \Omega, t > 0$ ). Nous lui associons le tenseur des déformations  $\varepsilon(u)$  :

$$(2.1.5) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Dans la suite, nous considérons également  $\varepsilon$  comme un opérateur linéaire de  $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2))$ . On se place dans l'hypothèse des petites déformations. Dans ce cas le déplacement est régi par les équations linéaires de l'élastodynamique

$$(2.1.6) \quad \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div} \sigma(u) = f,$$

où  $\varrho = \varrho(x)$  est la masse volumique qui vérifie

$$(2.1.7) \quad 0 < \varrho_- \leq \varrho(x) \leq \varrho_+ < +\infty, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Il convient d'adjoindre à (2.1.6) des données initiales

$$(2.1.8) \quad u(t=0) = u_0 ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1,$$

et une condition aux limites sur  $\partial\Omega$ . Nous considérerons ici la condition de bord rigide :

$$(2.1.9) \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Le tenseur des contraintes  $\sigma(u)$  est relié au tenseur des déformations par la loi de Hooke

$$(2.1.10) \quad \sigma(u)(x, t) = C(x)\varepsilon(u)(x, t),$$

où pour tout  $x$  dans  $\Omega$ ,  $C(x)$  désigne une application linéaire, symétrique définie positive de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  dans lui même, qui applique en outre  $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2)$ . Ceci revient à dire que  $C(x)$  est un tenseur  $4 \times 4$  ayant les propriétés de symétrie et de positivité habituelles [7]. Nous poserons  $A(x) = C(x)^{-1}$  et supposons que les propriétés de continuité et de coercivité de  $A(x)$  sont uniformes en  $x$  :

$$(2.1.11) \quad 0 < \alpha |\sigma|^2 \leq A(x)\sigma : \sigma \leq M |\sigma|^2, \quad \forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^2), \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

Les équations de l'élastodynamique dans  $\Omega$  peuvent être écrites sous la forme d'un système hyperbolique du premier ordre dont les inconnues sont :

$$\begin{cases} v = \frac{\partial u}{\partial t} & : \quad \text{le champ de vitesses dans } \Omega, \\ \sigma = \sigma(u) & : \quad \text{le champ de contraintes dans } \Omega, \end{cases}$$

$$(2.1.12) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{div} \sigma = f, \\ A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(2.1.13) \quad v(0) = v_0 \equiv u_1 ; \quad \sigma(0) = \sigma_0 \equiv \sigma(u_0),$$

et la condition aux limites

$$(2.1.14) \quad v = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

**Remarque 2.1.1** *Nous avons considéré ici la condition Dirichlet homogène sur  $\partial\Omega$  pour simplifier la présentation. Nous présenterons au chapitre 6 le cas où la condition aux limites est une condition de Neumann sur une partie du bord  $\partial\Omega$ . Ce cas se présente lorsque  $\Omega$  est fissuré ou encore lorsqu'un des bords est une surface libre. Cette condition sera alors prise en compte avec la méthode des domaines fictifs.*

### 2.1.1.3 Formulation variationnelle "forte".

Les espace fonctionnels de base seront

$$\underline{M} = (L^2(\Omega; \mathbb{R}^2))^2, \quad \underline{H} = (L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)))^4$$

Nous introduisons par ailleurs :

$$(2.1.15) \quad \underline{X} = \{ \sigma \in \underline{H} / \mathbf{div} \sigma \in \underline{M} \}$$

ainsi que le sous espace fermé de  $\underline{X}$  des tenseurs symétriques :

$$(2.1.16) \quad \underline{X}^{sym} = \{ \sigma \in \underline{X} / \mathbf{as}(\sigma) = 0 \}.$$

Une formulation mixte du système (2.1.12, 2.1.14) s'écrit :

$$(2.1.17) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, v) : [0, T] \mapsto \underline{X}^{sym} \times \underline{M} \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau) + b(v(t), \tau) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{X}^{sym}, \\ \frac{d}{dt} c(v(t), w) - b(w, \sigma(t)) = (f, w), \quad \forall w \in \underline{M}, \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$(2.1.18) \quad \begin{cases} a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A\sigma : \tau dx, & \forall (\sigma, \tau) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\ c(v, w) = \int_{\Omega} \varrho v \cdot w dx, & \forall (v, w) \in \underline{\underline{M}} \times \underline{\underline{M}}, \\ b(w, \tau) = \int_{\Omega} \mathbf{div} \tau \cdot w dx, & \forall (w, \tau) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}}. \end{cases}$$

**Remarque 2.1.2** Dans cette section nous ne sommes pas intéressés par la régularité de la solution  $(\sigma, v)$  par rapport au temps. C'est pour cette raison que nous notons simplement  $(\sigma, v) : [0, T] \mapsto \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{\underline{M}}$ .

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  (resp.  $b(\cdot, \cdot)$ ) est continue dans  $\underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}$  (resp.  $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}}$ ). On peut donc définir les opérateurs linéaires continus  $\mathcal{A} : \underline{\underline{H}} \rightarrow \underline{\underline{H}}'$  par  $\langle \mathcal{A}\sigma, \tau \rangle_{\underline{\underline{H}}' \times \underline{\underline{H}}} = a(\sigma, \tau)$  et  $B : \underline{\underline{X}} \rightarrow \underline{\underline{M}}'$  par  $\langle B\tau, w \rangle_{\underline{\underline{M}}' \times \underline{\underline{M}}} = b(w, \tau)$  ( $\underline{\underline{H}}'$  est l'espace dual de  $\underline{\underline{H}}$ , et ainsi suite). Il est alors connu que les conditions suivantes sont satisfaites (cf. [32])

$$(2.1.19) \quad \left. \begin{array}{l} (i) \quad \text{La condition inf-sup continue} \\ \exists \beta > 0 / \forall w \in \underline{\underline{M}}, \exists \tau \in \underline{\underline{X}} / b(w, \tau) \geq \beta \|w\|_{\underline{\underline{M}}} \|\tau\|_{\underline{\underline{X}}}. \\ (ii) \quad \text{La coercivité de } a(\cdot, \cdot) \text{ sur } \text{Ker} B \\ \exists \alpha > 0 / \forall \sigma \in \text{Ker} B, a(\sigma, \sigma) \geq \alpha \|\sigma\|_{\underline{\underline{X}}}^2, \\ \text{avec } \text{Ker} B = \{ \tau \in \underline{\underline{X}} / b(w, \tau) = 0, \forall w \in \underline{\underline{M}} \}. \end{array} \right\}$$

Pour obtenir la formulation (2.1.17) il est nécessaire de travailler dans l'espace des tenseur symétriques  $\underline{\underline{X}}^{sym}$ . En effet, l'opérateur  $-\varepsilon$  n'est pas l'adjoint de la divergence dans tout l'espace  $\underline{\underline{X}}$ . Nous appellerons cette formulation "forte" car la symétrie du tenseur des contraintes est prise en compte dans l'espace  $\underline{\underline{X}}^{sym}$ . Cependant, on peut écrire une formulation équivalente à (2.1.17) tout en travaillant dans l'espace  $\underline{\underline{X}}$ . C'est la formulation "relaxée" proposée dans [4]. Dans ce cas, la symétrie du tenseur des contraintes est considérée comme une contrainte égalité et elle est imposée avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La méthode des éléments finis mixtes que nous proposons est basée sur la formulation "forte". Néanmoins, pour l'analyse de convergence nous allons utiliser la formulation équivalente dans  $\underline{\underline{X}}$ .

#### 2.1.1.4 Formulation variationnelle "relaxée"

Nous présentons brièvement ici la formulation variationnelle proposée par D. N. Arnold, F. Brezzi et J. Douglas [4]. Si on pose  $\gamma = \frac{1}{2} \mathbf{rot} v$  (avec  $\mathbf{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ ), on obtient

$$\varepsilon(v) = \nabla v - \gamma \chi \quad \text{où} \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors réécrire le problème de l'élastodynamique sous la forme suivante

$$(2.1.20) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{div} \sigma & = f, \\ A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla v + \gamma \chi & = 0, \\ \mathbf{as}(\sigma) & = 0. \end{cases}$$

Les systèmes (2.1.20) et (2.1.12) sont équivalents:  $(\sigma, v, \gamma)$  est une solution de (2.1.20) si et seulement si  $\gamma = 1/2 \mathbf{rot} v$  et  $(\sigma, v)$  est solution de (2.1.12). On introduit maintenant la formulation variationnelle du problème (2.1.20)

$$(2.1.21) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) : [0, T] \mapsto \underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}} \times L \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau) + b(v(t), \tau) + (\gamma, \mathbf{as}(\tau))_L = 0, & \forall \tau \in \underline{\underline{X}}, \\ \frac{d}{dt} c(v(t), w) - b(w, \sigma(t)) = (f, w), & \forall w \in \underline{\underline{M}}, \\ (\eta, \mathbf{as}(\sigma))_L = 0, & \forall \eta \in L, \end{cases}$$

avec  $L = L^2(\Omega)$ . Le problème (2.1.21) admet une solution unique  $(\sigma, v, \gamma)$ , qui est notamment la solution du système (2.1.20). Pour simplifier les notations, on introduit la forme bilinéaire  $d(\cdot, \cdot)$  continue dans  $L \times \underline{\underline{H}}$ , définie par

$$d(\eta, \tau) = (\eta, \mathbf{as}(\tau))_L, \quad \forall (\eta, \tau) \in L \times \underline{\underline{H}},$$

et on associe à  $d(\cdot, \cdot)$  l'opérateur linéaire continu  $D : \underline{\underline{H}} \rightarrow L'$  avec  $\langle D\tau, \eta \rangle_{L' \times L} = d(\eta, \tau)$ . Les propriétés suivantes sont alors vérifiées (cf. [32])

$$(2.1.22) \quad \begin{cases} (i) & \text{La condition inf-sup continue} \\ & \exists \beta > 0 / \forall (w, \eta) \in \underline{\underline{M}} \times L, \exists \tau \in \underline{\underline{X}} / \\ & b(w, \tau) + d(\eta, \tau) \geq \beta \left( \|w\|_{\underline{\underline{M}}} + \|\eta\|_L \right) \|\tau\|_{\underline{\underline{X}}}. \\ (ii) & \text{La coercivité de } a(\cdot, \cdot) \text{ sur } V = \text{Ker} B \cap \text{Ker} D \\ & \exists \alpha > 0 / \forall \sigma \in V, a(\sigma, \sigma) \geq \alpha \|\sigma\|_{\underline{\underline{X}}}^2. \end{cases}$$

Notons que  $V$  est caractérisé par

$$V = \{ \tau \in \underline{\underline{X}} / b(w, \tau) + d(\eta, \tau) = 0, \forall (w, \eta) \in \underline{\underline{M}} \times L \},$$

### 2.1.2 Construction de l'élément fini de plus bas degré

Dans ce qui suit, nous utiliserons les mêmes notations que dans la section 1.1.2 pour les espaces de polynômes à deux variables. Plus précisément  $P_k$  désigne l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à  $k$ , et  $P_{k_1 k_2}$  est défini par (1.1.10). On suppose maintenant que  $\Omega$

est une union de rectangles et on considère un maillage régulier  $(\mathcal{T}_h)$  de  $\Omega$  composé de carrés  $(K)$  de côté  $h > 0$ . Nous considérons les espaces d'approximation définis de façon générale par

$$(2.1.23) \quad \begin{aligned} \underline{M}_h &= \{u_h \in \underline{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, u_h|_K \in \mathcal{P}\}, \\ \underline{X}_h &= \{\sigma_h \in \underline{X} / \forall K \in \mathcal{T}_h, \sigma_h|_K \in \mathcal{Q}\}, \\ \underline{X}_h^{sym} &= \{\sigma_h \in \underline{X}_h; / \mathbf{as}(\sigma_h) = 0\}, \end{aligned}$$

Pour obtenir la condensation de masse, nous devons déterminer les espaces des polynômes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  de façon adéquate. Pour ce faire nous adoptons une approche constructive, qui exploite le caractère régulier du maillage. Notons que nous avons choisi de travailler avec la formulation "forte", car elle est mieux adaptée à la condensation de masse (voir remarque 2.1.3). Le problème approché associé à cette formulation s'écrit alors sous la forme suivante

$$(2.1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h) : [0, T] \mapsto \underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt}a(\sigma_h, \tau_h) + b(v_h, \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h^{sym}, \\ \frac{d}{dt}c(v_h, w_h) - b(w_h, \sigma_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\sigma_h(0) = \sigma_{0,h} ; v_h(0) = v_{0,h}.$$

Notre objectif étant de construire les espaces d'approximation  $\underline{X}_h$  et  $\underline{M}_h$  de plus bas degré, il paraît naturel de définir  $\underline{M}_h$  à l'aide des fonctions constantes par morceaux,

$$(2.1.25) \quad \underline{M}_h = \left\{ v_h \in \underline{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in (P_0)^2 \right\}.$$

Un choix possible pour  $\underline{X}_h$  est alors l'élément de Raviart-Thomas de plus bas degré,  $RT_{[0]}$

$$\underline{X}_h^{RT} = \left\{ \sigma_h \in \underline{X} / \forall K \in \mathcal{T}_h, (\sigma_{h1}, \sigma_{h2})|_K \in (RT_{[0]})^2 \right\}, \quad \text{où } RT_{[0]} = P_{1,0} \times P_{0,1}.$$

Cependant, ce choix n'est pas satisfaisant car l'espace  $\underline{X}_h^{RT} \cap \underline{X}_h^{sym}$  est trop petit pour constituer un bon espace d'approximation de  $\underline{X}_h^{sym}$  : si  $\sigma_h$  est un tenseur symétrique dans  $\underline{X}_h^{RT}$ , le terme extra-diagonal  $\sigma_{12}$  est nécessairement constant! En effet, on note premièrement, que localement dans chaque élément,  $\sigma_{12}$  est linéaire dans la direction  $x_2$  et constant en  $x_1$  alors que  $\sigma_{21}$  est linéaire en  $x_1$  et constant en  $x_2$ . Donc, en imposant  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ , cela implique qu'ils sont tous les deux constants par maille. En utilisant ensuite les relations de continuité dans  $H(\text{div})$  on démontre facilement qu'ils doivent être constants dans  $\Omega$ . Il s'agit d'une sorte de verrouillage numérique qui conduit à une mauvaise approximation de  $\underline{X}_h^{sym}$ .

**Remarque 2.1.3** Dans la cadre de la formulation "relaxée" (2.1.21) on peut approcher le tenseur des contraintes dans l'espace  $X_h^{RT}$  si on l'enrichit par des fonctions bulles (ceci pour

stabiliser la méthode mixte). Cette approche à été développée dans ([4, 105, 82]). Dans ce cas, il faut définir également un espace d'approximation pour le multiplicateur de Lagrange,

$$(2.1.26) \quad L_h = \left\{ \eta_h \in L/\forall K \in \mathcal{T}_h, \eta_h|_K \in \hat{L} \right\},$$

où  $\hat{L}$  est un espace de polynômes sur  $K$ . Le problème approché s'écrit alors sous la forme suivante :

$$(2.1.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \gamma_h) : [0, T] \mapsto \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que :} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma_h, \tau_h) + b(v_h, \tau_h) + (\gamma_h, \mathbf{as}(\tau_h))_L = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h, \\ \frac{d}{dt} c(v_h, w_h) - b(w_h, \sigma_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h, \\ (\eta_h, \mathbf{as}(\tau_h))_L = 0, \quad \forall \eta_h \in L_h. \end{array} \right.$$

Cette formulation a été étudiée par plusieurs auteurs [4, 105, 82] dans le cas du problème stationnaire. Sans entrer dans les détails on veut expliquer ici pourquoi cette méthode n'est pas compatible avec la condensation de masse. En effet, introduisons  $B_{N_1} = \{\tau_I\}_{I=1}^{N_1}$ ,  $B_{N_2} = \{\phi_I\}_{I=1}^{N_2}$  et  $B_{N_3} = \{\mu_I\}_{I=1}^{N_3}$  les fonctions de base de  $\underline{X}_h$ ,  $\underline{M}_h$  et  $L_h$  respectivement, avec  $N_1 = \dim \underline{X}_h$ ,  $N_2 = \dim \underline{M}_h$  et  $N_3 = \dim L_h$ . Nous notons ensuite  $[\Sigma] = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_{N_1})$ ,  $[V] = (V_1, \dots, V_{N_2})$  et  $[\Gamma] = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{N_3})$ , les coordonnées des fonctions  $\sigma_h$ ,  $v_h$  et  $\gamma_h$  sur ces bases. Nous pouvons alors réécrire le problème (2.1.27) sous la forme matricielle suivante : trouver  $(\Sigma, V, \Gamma) \in L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_1})) \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_2})) \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_3}))$  tels que

$$(2.1.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{d\Sigma}{dt} + B^T V + D^T \Gamma = 0, \\ M_v \frac{dV}{dt} - B \Sigma = F, \\ D \Sigma = 0, \end{array} \right.$$

avec

- (i)  $(M_\sigma)_{I,J} = (A\tau_I, \tau_J)_{(L^2(\Omega))^4}$ ,  $1 \leq I, J \leq N_1$ ,
- (ii)  $(M_v)_{I,J} = (\varrho\phi_I, \phi_J)_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $1 \leq I, J \leq N_2$ ,
- (iii)  $(B)_{I,J} = (\phi_I, \text{div}\tau_J)_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $1 \leq I \leq N_2$ ,  $1 \leq J \leq N_1$ ,
- (iv)  $(D)_{I,J} = (\mu_I, \mathbf{as}(\tau_J))_{L^2(\Omega)}$ ,  $1 \leq I \leq N_3$ ,  $1 \leq J \leq N_1$ ,
- (v)  $(F)_J = (f, \phi_J)_{(L^2(\Omega))^2}$   $1 \leq J \leq N_2$  ;

et où  $B^T$  (resp.  $D^T$ ) désigne la transposée de la matrice  $B$  (resp.  $D$ ). La difficulté supplémentaire dans ce cas vient du multiplicateur de Lagrange. En effet, après discrétisation en temps le système (2.1.28) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma^{n+1/2} = \Sigma^{n-1/2} - \Delta t M_\sigma^{-1} B^T V^n - \Delta t M_\sigma^{-1} D^T \Gamma^n, \\ V^{n+1} = V^n + \Delta t M_v^{-1} B \Sigma^{n+1/2} + \Delta t M_v^{-1} F^{n+1/2}, \\ D M_\sigma^{-1} D^T \Gamma^{n+1} = -D M_\sigma^{-1} B^T V^n \end{array} \right.$$



ou  $\Sigma^{n+1/2}$  est la solution à l'instant  $(n + 1/2)\Delta t$  et ainsi de suite. Pour obtenir alors un système explicite en temps il faut réaliser la condensation de masse sur les matrices  $M_\sigma$ ,  $M_v$  et également sur  $DM_\sigma^{-1}D^T$ , ce qui paraît particulièrement difficile.

C'est à cause de cette difficulté que nous avons choisi la formulation "forte". Pour la construction de notre espace d'approximation  $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$  nous avons été guidés par le théorème suivant.

**Théorème 2.1.1** *Pour tout  $\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h$ , avec  $\underline{\underline{X}}_h$  défini par (2.1.23), nous avons*

$$\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{array} \right) \in H(\text{div}; \Omega) \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \in H^1(\Omega) \end{array} \right]$$

**Démonstration.**

Nous allons prouver ici seulement l'implication directe, l'inverse étant évidente. Nous rappelons d'abord que pour tout  $\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h$ , nous avons  $\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \in H(\text{div}; \Omega)$  et  $\sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} \in H(\text{div}; \Omega)$ . Grâce à la géométrie particulière de notre maillage on déduit que

- $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{21}$  sont continus dans la direction  $x_1$  et discontinus en  $x_2$ , ce qui implique qu'ils peuvent avoir un saut seulement à travers les arêtes verticales du maillage,
- de même  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  peuvent admettre un saut seulement à travers les arêtes horizontales du maillage.

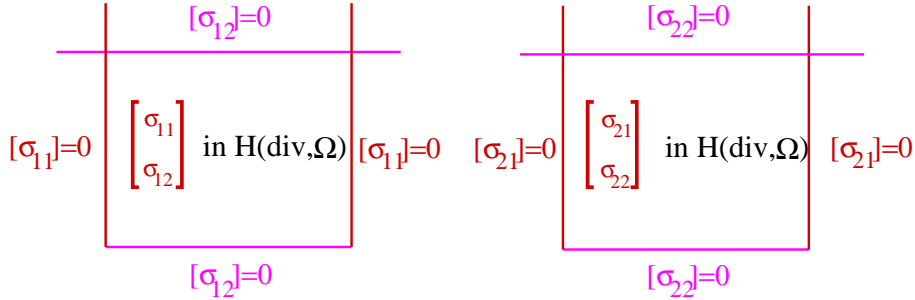


FIG. 2.1.1: Les continuités de  $\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h$ .

Si de plus  $\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}$ , alors  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  est continu à travers toutes les arêtes du maillage (voir figure 2.1.2) et donc il appartient à  $H^1(\Omega)$ . Par ailleurs, pour tout  $K$  on a  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})^t|_K \in H(\text{div}; K)$ , de plus  $\sigma_{11}$  (resp.  $\sigma_{22}$ ) est continu en  $x_1$  (resp. en  $x_2$ ), on déduit alors que le vecteur  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})^t$  appartient à  $H(\text{div}; \Omega)$ . ■

Le Théorème 2.1.1 montre, que sur des maillages réguliers l'imposition de la symétrie du tenseur des contraintes d'une façon forte implique que  $\sigma_{12}$  doit être approché dans un sous espace de  $H^1$ . Pour définir l'élément de plus bas degré nous avons donc choisi

$$\sigma_{12} \in H^1(\Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \sigma_{12}|_K \in Q_1.$$

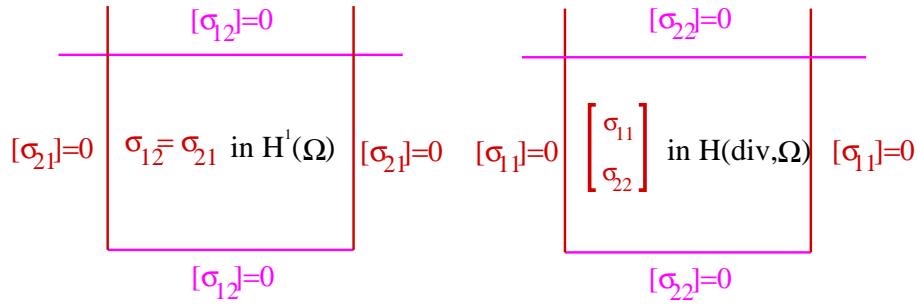


FIG. 2.1.2: Les continuités de  $\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}$ .

Il nous reste maintenant à choisir un espace d'approximation de  $H(\text{div}; \Omega)$  pour le vecteur  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})^t$ . Le choix le plus naturel est alors, l'élément de Raviart-Thomas de plus bas degré  $RT_{[0]}$ . Ce qui consiste à prendre

$$\underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{sym} = \{ \sigma_h \in \underline{\underline{X}} / \forall K \in \mathcal{T}_h, \sigma_{12}|_K \in Q_1 \text{ and } (\sigma_{11}, \sigma_{22})|_K \in RT_{[0]} \}.$$

Néanmoins, une fois de plus, ce choix n'est pas satisfaisant car il n'est pas compatible avec la condensation de masse. La difficulté vient du fait que les degrés de liberté sont associés soit aux arêtes (pour  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ ) soit aux sommets (pour  $\sigma_{12}$ ) des éléments, comme nous l'avons illustré dans la figure 2.1.3. En effet, pour obtenir un schéma explicite en temps, nous allons

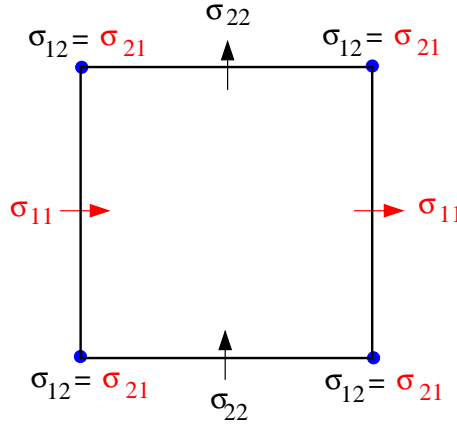


FIG. 2.1.3: Degrés de liberté associés au tenseur des contraintes pour l'espace  $\underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{sym}$ .

utiliser des techniques de condensation de masse pour approcher la matrice associée à la forme bilinéaire  $a(\sigma_h, \tau_h)$  (celle associée à  $c(v_h, w_h)$  étant déjà diagonale pour les fonctions de base habituelles de  $\underline{\underline{M}}_h$ ). Plus précisément, cela consiste à approcher  $a(\sigma_h, \tau_h)$  par

$$a_h(\sigma_h, \tau_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K(A\sigma_h : \tau_h),$$

où  $I_K$  est une formule de quadrature judicieusement choisie afin de conduire à une matrice approchée diagonale (ou diagonale par bloc). Malheureusement, nous n'avons pas réussi à trouver une telle formule.

C'est pourquoi, de la même façon que dans le cas scalaire, nous proposons un autre espace d'approximation pour  $H(\text{div}; \Omega)$ . L'idée est de regrouper tous les degrés de liberté aux points de quadrature, ie., les sommets des éléments. Le choix adéquat est alors l'élément de plus bas degré de la deuxième famille de Nédélec [86] :

$$\{q_h \in H(\text{div}; \Omega) \text{ tel que } q_h|_K \in (Q_1(K))^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

ce qui correspond à définir l'espace  $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$  par

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym} = \{ \sigma_{12} \in H^1(\Omega) / \sigma_{12}|_K, \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } (\sigma_{11}, \sigma_{22}) \in H(\text{div}; \Omega) / (\sigma_{11}, \sigma_{22})|_K \in (Q_1)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Maintenant, tous les degrés de liberté sont associés aux sommets des éléments (voir figures 2.1.4 et 2.1.5). Dans ce cas, l'utilisation de la formule de quadrature habituelle :

$$(2.1.29) \quad \int_k f dx \approx I_K(f) = \frac{h^2}{4} \sum_{M \text{ sommets de } K} f(M), \quad \forall f \in C^0(K),$$

conduit à une matrice  $a_h(\sigma_h, \tau_h)$  diagonale par bloc. Chaque bloc correspond à un noeud du maillage et sa dimension est égale au nombre de degrés associés à ce noeud (ie, 5 voir figure 2.1.5).

**Remarque 2.1.4** L'espace  $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$  peut être aussi caractérisé de la façon suivante

- On approche d'abord  $\sigma_{h1}$  et  $\sigma_{h2}$  (définis par 2.1.4) avec l'élément de plus bas de degré de la deuxième famille d'éléments finis mixtes de Nédélec [86], ce qui consiste à considérer

$$\underline{\underline{X}}_h = \{ \sigma_h \in \underline{\underline{X}} / (\sigma_{h1}, \sigma_{h2})|_K \in (Q_1(K))^2 \times (Q_1(K))^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

- et on impose ensuite la symétrie du tenseur des contraintes de façon forte

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym} = \underline{\underline{X}}_h \cap \underline{\underline{X}}^{sym}.$$

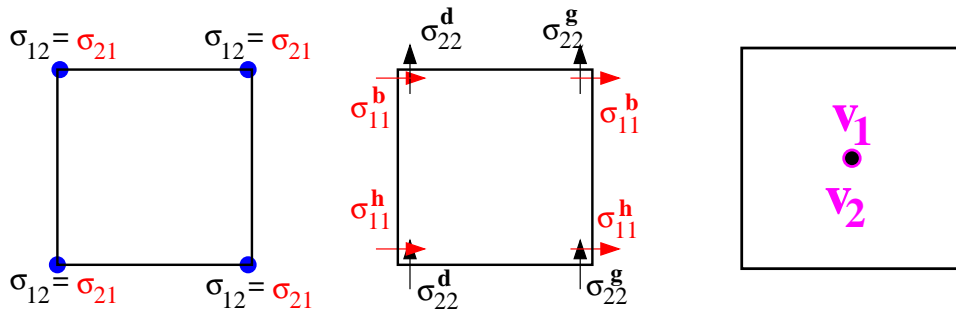


FIG. 2.1.4: Degrés de liberté pour le nouvel élément fini: associés au tenseur des contraintes (à gauche et au centre) et à la vitesse (à droite).

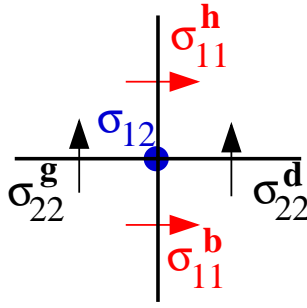


FIG. 2.1.5: Les degrés de liberté associés à un noeud du maillage.

### 2.1.3 Extension aux ordres supérieurs et condensation de masse

La généralisation naturelle de l'élément fini de plus bas degré, que nous avons présenté dans la section précédente, est l'élément d'ordre  $k + 1$  défini par

$$(2.1.30) \quad \begin{aligned} \underline{M}_h &= \{u_h \in \underline{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, u_h|_K \in (Q_k)^2\} \\ \underline{X}_h &= \{\sigma_h \in \underline{X} / \forall K \in \mathcal{T}_h, (\sigma_h)_{ij}|_K \in Q_{k+1}\} \\ \underline{X}_h^{sym} &= \{\sigma_h \in \underline{X}_h / \mathbf{as}(\sigma_h) = 0\} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous appellerons cet élément  $Q_{k+1} - Q_k$ .

**Remarque 2.1.5** La famille des éléments finis définie par (2.1.30) est la généralisation naturelle des éléments finis  $Q_{k+1}^{div} - Q_k$  présentés au chapitre précédent. En effet, soit  $X_h - M_h$  les espaces définis par (1.1.17), on peut alors réécrire (2.1.30) comme

$$\begin{cases} \underline{M}_h = M_h \times M_h, \\ \underline{X}_h = X_h \times X_h, \\ \underline{X}_h^{sym} = \underline{X}_h \cap \underline{X}^{sym}. \end{cases}$$

Dans ce paragraphe nous allons nous restreindre aux éléments finis correspondant à  $k = 1, 2$  qu'on utilise en pratique. Les degrés de liberté associés à ces éléments sont illustrés dans les figures 2.1.6 et 2.1.7.

Comme dans le cas scalaire de l'équation des ondes anisotropes, la position des degrés de liberté correspond aux produits tensoriels des points de quadrature des formules de Gauss-Lobatto pour  $\sigma$  (cf. relations (1.1.18), (1.1.20)) et de Gauss-Legendre pour  $v$  (cf. relations (1.1.19), (1.1.21)).

Dans les figures 2.1.8 (resp. 2.1.9) nous avons représenté les supports des différentes fonctions de base associées à  $\sigma_h$  pour l'élément  $Q_2 - Q_1$  (resp.  $Q_3 - Q_2$ ). Les fonctions de base associées à la vitesse étant discontinues, elles ont toujours comme support un seul élément. Bien évidemment, pour obtenir la condensation de masse on approche les intégrales définissant les matrices  $a(\sigma_h, \tau_h)$  et  $c(v_h, w_h)$  par les formules de quadrature de Gauss-Lobatto et de Gauss-Legendre respectivement. On obtient alors,

- une matrice  $a_h(\sigma_h, \tau_h)$  approchée, diagonale par bloc. Chaque bloc correspond à un

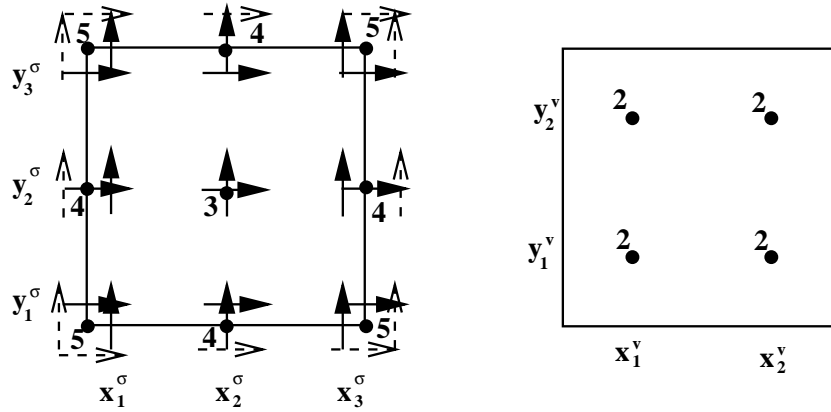


FIG. 2.1.6: Degrés de liberté pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ .

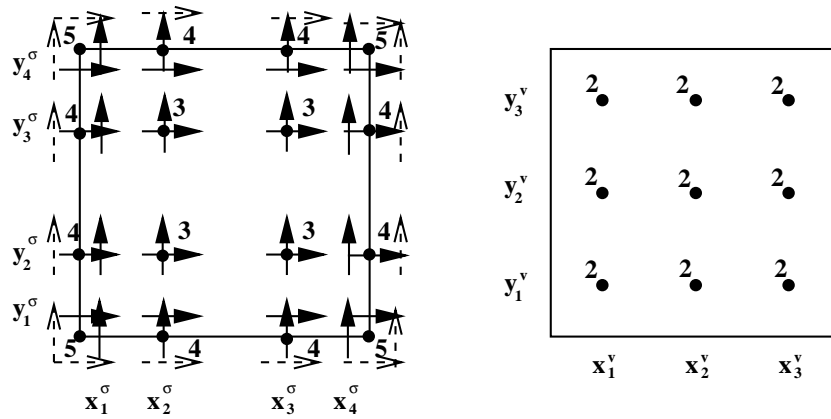


FIG. 2.1.7: Degrés de liberté pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ .

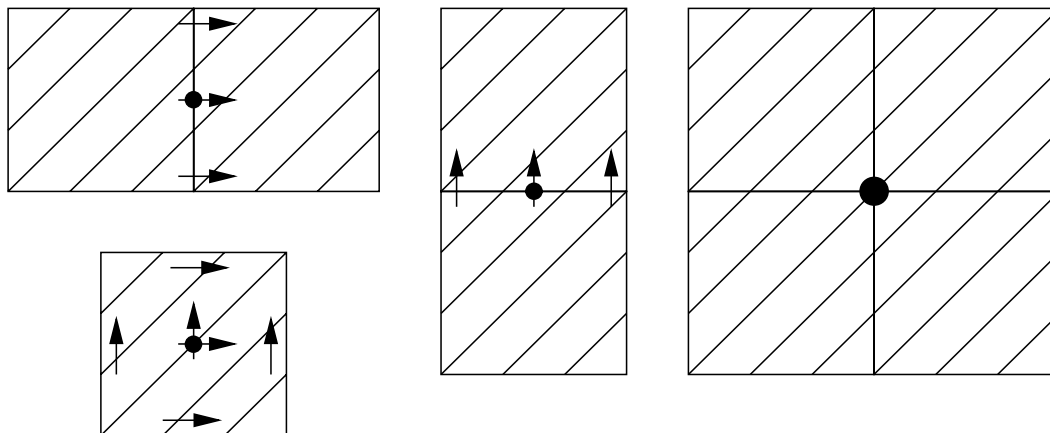


FIG. 2.1.8: Le support des fonctions de base associées à  $\sigma_h$  pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ .

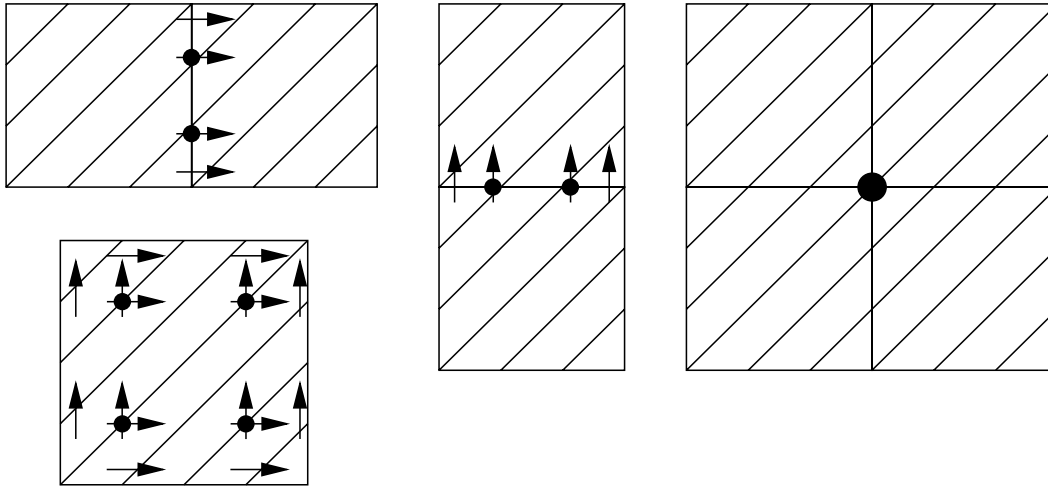


FIG. 2.1.9: Le support des fonctions de base associées à  $\sigma_h$  pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ .

point de quadrature et sa dimension varie entre  $3 \times 3$ , pour les noeuds intérieurs aux éléments, et  $5 \times 5$  pour les sommets.

- une matrice  $c(v_h, w_h)$  diagonale.

**Remarque 2.1.6** On peut remarquer que l'espace  $\underline{M}_h$  étant choisi discontinu la matrice  $c(u_h, v_h)$  ne pose pas vraiment un problème, elle est toujours diagonale par blocs (la taille de ces blocs dépend seulement de l'élément fini considéré : pour  $Q_k$  on obtient de blocs  $(k + 1)^2 \times (k + 1)^2$ ). Toutefois l'utilisation d'une formule de quadrature permet l'obtention d'une matrice diagonale.

### 2.1.4 Extension au cas tridimensionnelle

Nous allons présenter ici la généralisation de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes au cas tridimensionnel. Nous considérons seulement l'élément fini de plus bas degré, son extension aux ordres supérieurs se réalise, sans difficulté, en utilisant des techniques similaires à celles que nous avons présenté dans le cas 2D.

#### Présentation du problème en 3D

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , occupé par un milieu élastique. Les équations de l'élastodynamique qui régissent la propagation des ondes dans  $\Omega$  sont toujours décrites par le système hyperbolique du premier ordre (2.1.12) auquel on associe des données initiales et la condition aux limites (2.1.14). Comme dans le cas 2D, on identifie l'espace des tenseurs  $3 \times 3$  à l'espace  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  des applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$  dans lui même, sur lequel on définit la forme linéaire :

$$(2.1.31) \quad \vec{\mathbf{a}}\mathbf{s}(\sigma) = (\sigma_{12} - \sigma_{21}, \sigma_{13} - \sigma_{31}, \sigma_{23} - \sigma_{32}).$$

$\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^3)$  désignera le sous espace des tenseurs symétriques :

$$(2.1.32) \quad \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^3) = \{ \sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / \vec{\mathbf{a}}\mathbf{s}(\sigma) = 0 \}.$$

Enfin, à tout  $\sigma$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  nous associerons :

$$(2.1.33) \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

et nous posons :

$$(2.1.34) \quad \mathbf{div} \sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{div} \sigma_1 \\ \operatorname{div} \sigma_2 \\ \operatorname{div} \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Les espace fonctionnels de base sont  $\underline{M} = (L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))^2$  et  $\underline{H} = (L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)))^2$  munis de leur structure hilbertienne naturelle. Nous introduisons également les espaces  $\underline{X}$  et  $\underline{X}^{sym}$  définis par les relations (2.1.15) et (2.1.16) respectivement. La formulation mixte du problème de l'élastodynamique que nous considérons est donnée par le système (2.1.17).

### L'élément fini de plus bas degré.

Pour simplifier la présentation et sans perte de généralité nous allons considérer le cas où  $\Omega$  est le cube  $]0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , découpé en un maillage de petits cubes de taille  $h = 1/N$ . Nous désignerons par  $\mathcal{T}_h$  le maillage ainsi construit et par  $K$  un cube quelconque de ce maillage.

En suivant la même technique que dans le cas bidimensionnel, on peut montrer que la condition de symétrie "forte" sur des maillage réguliers implique que

- $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \in H(\operatorname{div}; \Omega)$  car  $\sigma_{11}$  est continu en  $x_1$ ,  $\sigma_{22}$  en  $x_2$  et  $\sigma_{33}$  en  $x_3$ ,
- $\sigma_{12}, \sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sont continus dans deux directions. Plus précisément, soit  $i, j, k$  une permutation circulaire de 1, 2, 3, alors

$$x_i \rightarrow \sigma_{jk}(\cdot, x_i) \in L^2_{x_i}(H^1_{x_j, x_k}).$$

Nous avons résumé les différentes continuités des composantes de  $\sigma_h \in \underline{X}_h^{sym}$  sur la figure 2.1.10. L'extension naturelle de notre méthode dans le cas tridimensionnel consiste à définir les espaces d'approximation  $\underline{X}_h \subset \underline{X}$ ,  $\underline{X}_h^{sym} \subset \underline{X}^{sym}$  et  $\underline{M}_h \subset \underline{M}$  par (2.1.23) avec

$$\mathcal{Q} = (Q_1)^9, \quad \mathcal{P} = (Q_0)^3.$$

Dans ce cas aussi tous les degrés de liberté du tenseur des contraintes sont associés aux mêmes points : les sommets des éléments  $K$ . Nous avons illustré sur la figure 2.1.11 les degrés de liberté pour le nouvel élément fini : nous avons représenté d'une part les composantes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  par des flèches qui indiquent l'unique direction dans laquelle chacune de ces composantes est continue, d'autre part les composantes  $\sigma_{12}, \sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  par des croix qui montrent, les deux directions de continuité de chaque composante. Pour mieux montrer les différents types de continuité nous présentons séparément chacune des composantes de  $\sigma_h$  sur la figure 2.1.12 : Les faces hachurées correspondent aux faces à travers lesquelles la composante est continue, en particulier cela veut dire qu'elle peut admettre un saut à travers les autres faces. Nous

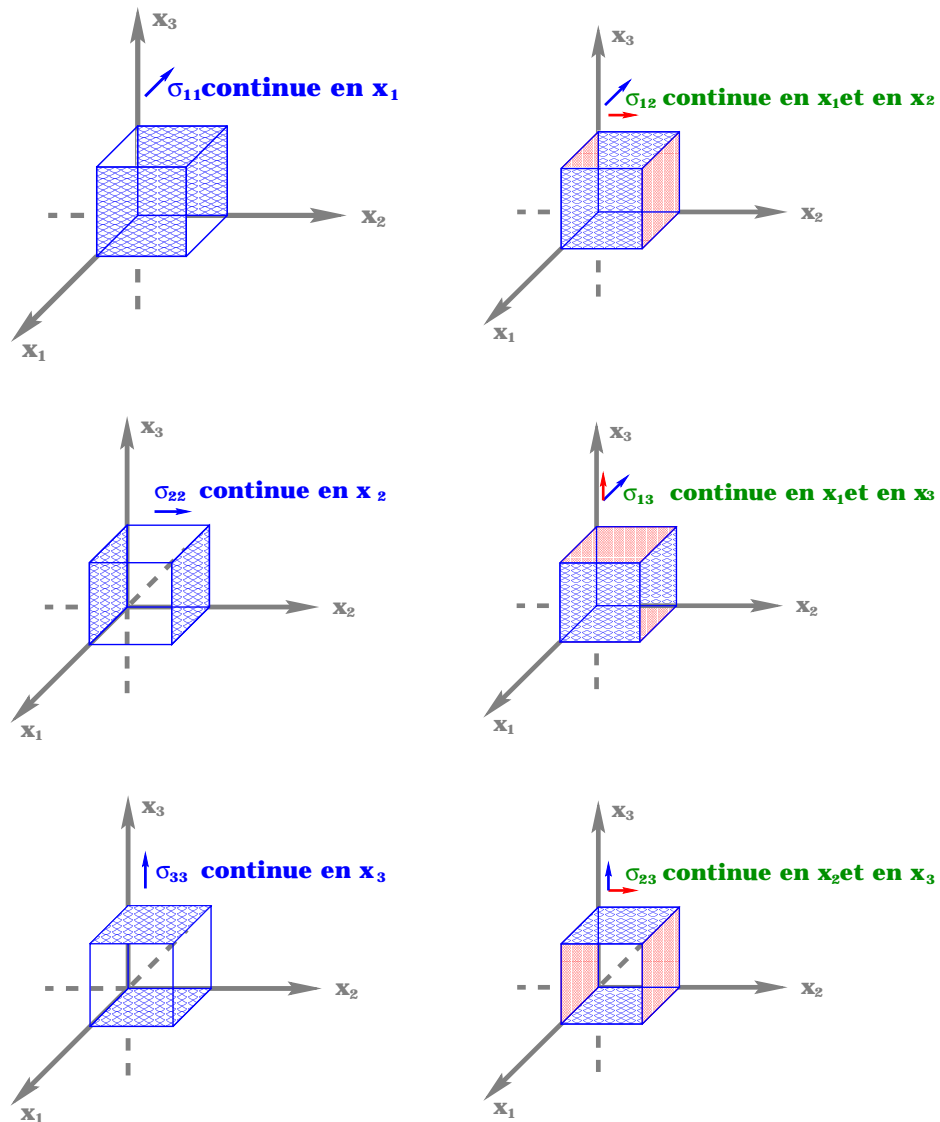


FIG. 2.1.10: Continuité de  $\sigma_h \in \underline{X}_h^{sym}$ .

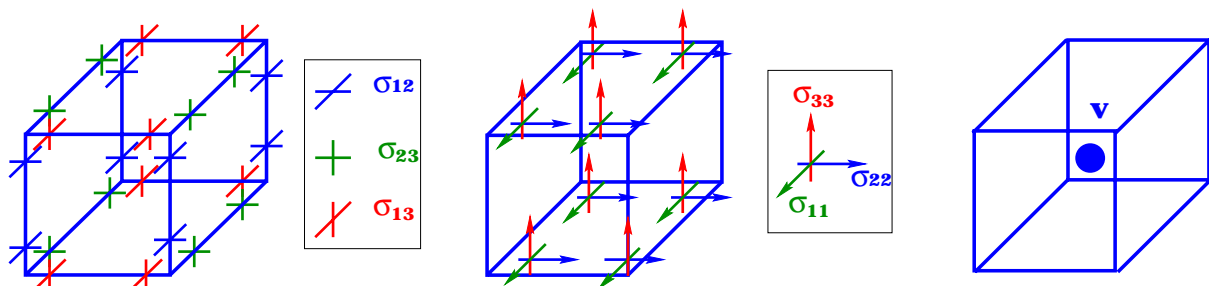


FIG. 2.1.11: Degrés de liberté associés au tenseur des contraintes (à gauche et au centre) et à la vitesse (à droite).



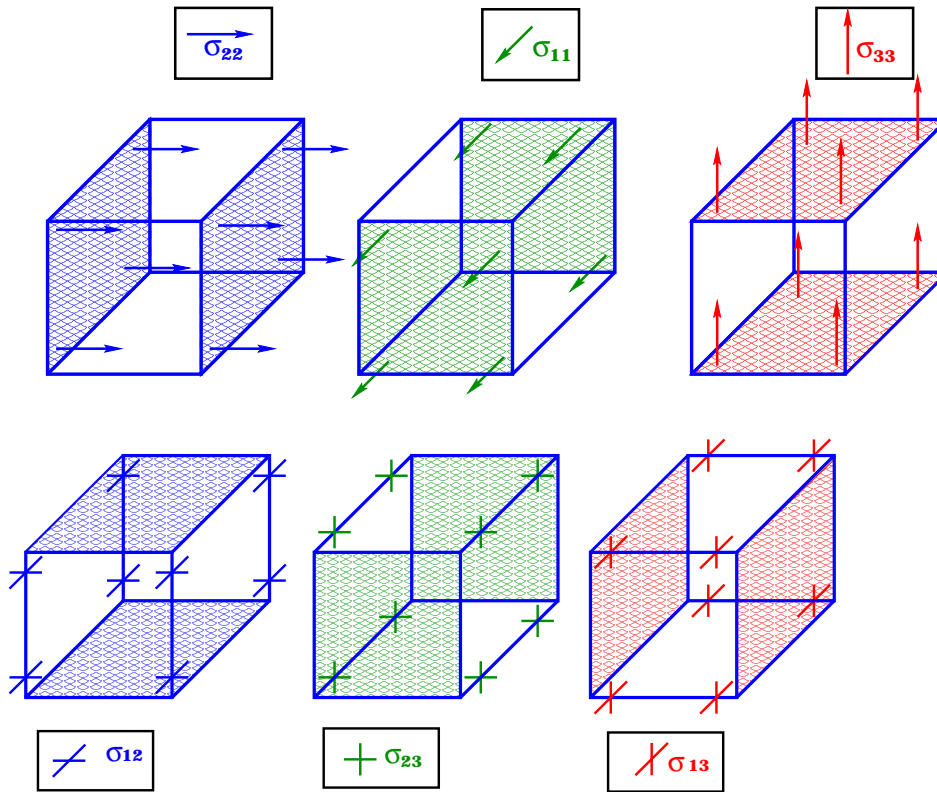


FIG. 2.1.12: La continuité de chaque composante du tenseur des contraintes.

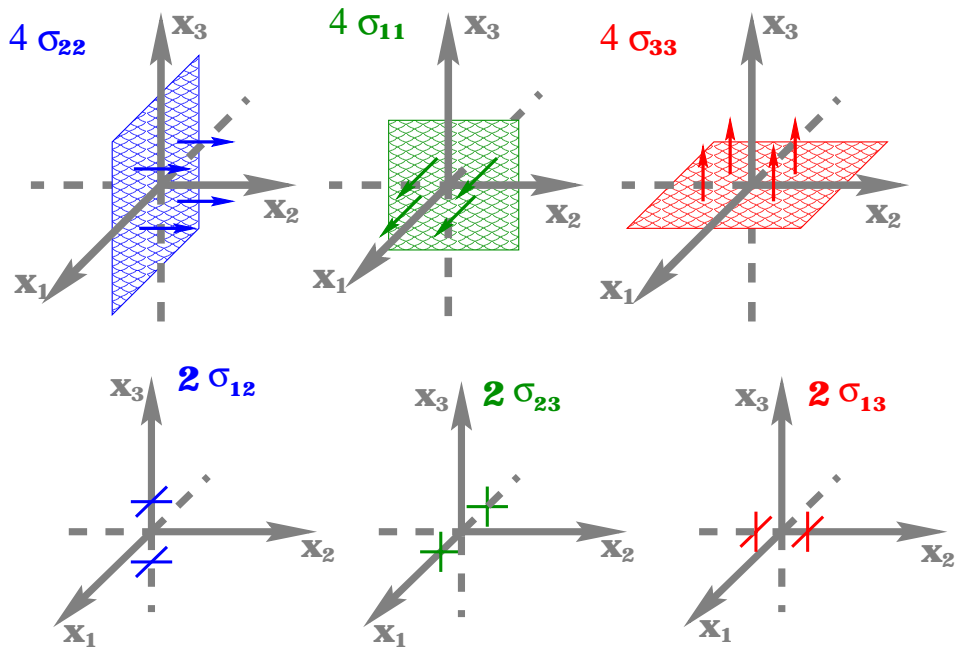


FIG. 2.1.13: Degrés de liberté associés à un sommet du maillage.

considérons maintenant un noeud du maillage, i.e un sommet qui est commun à huit cubes, nous avons alors 18 degrés de liberté associés à ce sommet (voir figure 2.1.13). Pour obtenir la condensation de masse on approche la matrice associée à la forme bilinéaire  $a(\sigma_h, \tau_h)$  avec la formule de quadrature suivante

$$(2.1.35) \quad \int_k f dx \approx I_K(f) = \frac{h^3}{8} \sum_{M \text{ sommets de } K} f(M), \quad \forall f \in C^0(K),$$

Dans ce cas la matrice approchée est diagonale par bloc, chaque bloc est associé à un sommet du maillage et sa dimension est égale au nombre de degrés de liberté associés à ce sommet (ce qui correspond ici à 18).

**Remarque 2.1.7** *Le nombre de degrés de liberté associés au tenseur des contraintes étant assez important même pour l'élément de plus bas degré, le lecteur pourrait penser naturellement que notre méthode est assez chère. Cependant, grâce à la condensation de masse nous pouvons éliminer l'inconnue associée à  $\sigma$  et donc obtenir un schéma de deuxième ordre en temps, avec une seule inconnue correspondant à la vitesse. Dans ce cas, nous avons 3 inconnues par maille pour l'élément de plus bas degré.*

## 2.2 Analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour un problème elliptique : le problème stationnaire

Dans ce qui suit, pour simplifier la présentation, nous allons considérer le cas où  $\Omega$  est le carré  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ , découpé en un maillage en carrés de taille  $h = 1/N$ . Nous désignerons par  $\mathcal{T}_h$  le maillage ainsi construit et par  $K$  un élément quelconque de ce maillage. Soient  $\underline{X}_h, \underline{X}_h^{sym}$  et  $\underline{M}_h$  les espaces d'approximation correspondant à la nouvelle famille d'éléments finis mixtes, définis de façon générale par

$$\begin{cases} \underline{X}_h = \{ \tau_h \in X / \forall K \in \mathcal{T}_h, \tau_h|_K \in (Q_{k+1})^4 \}, \\ \underline{X}_h^{sym} = \underline{X}_h \cap \underline{X}^{sym}, \\ \underline{M}_h = \{ w_h \in \underline{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in (Q_k)^2 \}. \end{cases}$$

### 2.2.1 Le problème elliptique - formulation "forte"

Le problème stationnaire associé au problème d'évolution (2.1.17) s'écrit

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, v) \in \underline{X}^{sym} \times \underline{M} \text{ tels que} \\ a(\sigma, \tau) + b(v, \tau) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{X}^{sym}, \\ b(w, \sigma) = -(f, w), \quad \forall w \in \underline{M}, \end{cases}$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  sont définis par (2.1.18) et satisfont les propriétés (2.1.19). On sait alors (cf. [32]) que le problème (2.2.1) admet une solution unique  $(\sigma, v)$  dans  $\underline{X}^{sym} \times \underline{M}$ . Notre objectif

est ici d'étudier le problème suivant

$$(2.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h) \in \underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h \text{ tels que} \\ a(\sigma_h, \tau_h) + b(v_h, \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h^{sym}, \\ b(w_h, \sigma_h) = -(f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h. \end{array} \right.$$

qui est le problème approché associé à (2.2.1).

### 2.2.2 Difficultés de l'analyse de convergence

Nous avons d'abord essayé d'appliquer la théorie classique d'approximation de Babuska-Brezzi (cf. [32]). D'après cette théorie le problème (2.2.2) admet une solution unique  $(\sigma_h, v_h)$  dans  $\underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h$  avec

$$(2.2.3) \quad (\sigma_h, v_h) \longrightarrow (\sigma, v) \in \underline{X} \times \underline{M},$$

sous les hypothèses suivantes

$$(H0.0) \quad \forall f \in \text{Im } B, V_h(f) \neq \emptyset, \text{ avec}$$

$$V_h(f) = \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h^{sym} / b(w_h, \tau_h) = -(f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h \right\}$$

$$(H0.1) \quad \text{La condition inf-sup discrète uniforme}$$

$$\exists \beta > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que}$$

$$\forall w_h \in \underline{M}_h, \exists \tau_h \in \underline{X}_h^{sym} / b(w_h, \tau_h) \geq \beta \|w_h\|_{\underline{M}} \|\tau_h\|_{\underline{X}}.$$

$$(H0.2) \quad \text{La coercivité de la forme } a(\cdot, \cdot) \text{ sur } V_h \stackrel{def}{=} V_h(0)$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que}$$

$$\forall \sigma_h \in V_h, \quad a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha \|\sigma_h\|_{\underline{X}}^2.$$

$$(H0.3) \quad \text{Les propriétés d'approximation}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_{\underline{X}} = 0, \quad \forall \sigma \in \underline{X}^{sym}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v - w_h\|_{\underline{M}} = 0, \quad \forall v \in \underline{M}. \end{array} \right.$$

Cependant, comme dans le cas scalaire (cf. section 1.2.1) on peut montrer facilement que la nouvelle famille d'éléments finis mixtes ne satisfait pas l'hypothèse (H0.2).

Nous avons voulu ensuite appliquer la théorie abstraite développée dans la section 1.2.2.

D'après le Théorème 1.2.2, le problème (2.2.2) admet une solution unique  $(\sigma_h = \sigma_h^s + \sigma_h^r, v_h)$  dans  $\underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h$  avec

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} (\sigma_h^s, v_h) &\longrightarrow (\sigma, v) \quad \text{dans} \quad \underline{X} \times \underline{M}, \\ \sigma_h^r &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \underline{H}, \end{aligned}$$

sous les hypothèses (H0)-(H4) qui s'écrivent dans ce cas sous la forme suivante

$$(H1.0) \quad \forall f \in \text{Im } B, V_h(f) \neq \emptyset, \text{ avec}$$

$$V_h(f) = \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h^{sym} / b(w_h, \tau_h) = -(f, w_h), \forall w_h \in \underline{M}_h \right\}, \quad V_h = V_h(0).$$

$$(H1.1) \quad \text{Décomposition orthogonale de } \underline{X}_h^{sym}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{X}_h^{sym} = \underline{X}_h^s \oplus \underline{X}_h^r \quad (\sigma_h = \sigma_h^s + \sigma_h^r) \quad , \quad \underline{X}_h^r \subset V_h, \\ (\sigma_h^s, \sigma_h^r)_{\underline{H}} = 0, \quad \forall (\sigma_h^s, \sigma_h^r) \in \underline{X}_h^s \times \underline{X}_h^r. \end{array} \right.$$

$$(H1.2) \quad \text{Condition inf-sup "forte"}$$

$$\exists \beta > 0, \text{ indépendant de } h, \text{ tel que}$$

$$\forall w_h \in \underline{M}_h, \quad \exists \tau_h^s \in \underline{X}_h^s \quad / \quad b(w_h, \tau_h^s) \geq \beta \|w_h\|_{\underline{M}/\text{Ker } B_h^t} \|\tau_h^s\|_{\underline{X}}.$$

$$(H1.3) \quad \text{Coercivité "affaiblie"}$$

$$\exists \alpha > 0, \text{ indépendant de } h, \text{ tel que}$$

$$\forall \sigma_h \in V_h, \quad a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha \left( \|\sigma_h^s\|_{\underline{X}}^2 + \|\sigma_h^r\|_{\underline{H}}^2 \right).$$

$$(H1.4) \quad \text{Propriétés d'approximation}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\tau_h^s \in \underline{X}_h^s} \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} = 0, \quad \forall \sigma \in \underline{X}^{sym} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v - w_h\|_{\underline{M}} = 0, \quad \forall v \in \underline{M}. \end{array} \right.$$

où  $\underline{H}$  est un troisième espace de Hilbert, tel que  $\underline{X} \subset \underline{H}$ , avec  $\underline{X}$  dense dans  $\underline{H}$ . Pour notre application,  $\underline{H}$  correspond à l'espace  $L^2$  pour les tenseurs  $2 \times 2$  et le bon espace d'approximation  $\underline{X}_h^s$  est

$$\underline{X}_h^s = \underline{X}_h^{RT} \cap \underline{X}^{sym}.$$

avec

$$\underline{X}_h^{RT} = \{ \sigma_h = (\sigma_{1,h}, \sigma_{2,h}) \in \underline{X} / \forall K \in \mathcal{T}_h, (\sigma_{1,h}, \sigma_{2,h})|_K \in (P_{k+1,k} \times P_{k,k+1})^2 \}.$$

Avec ce choix les hypothèses (H1.0) à (H1.3) sont satisfaites. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué dans la section 2.1.2, l'espace  $\underline{X}_h^s$  est trop petit pour constituer un bon espace d'approximation de  $\underline{X}^{sym}$ . En d'autres termes l'hypothèse (H1.4) n'est pas satisfaite. À ce stade, il est clair que la difficulté principale est due à la "forte" prise en compte de la symétrie du tenseur des contraintes. Pour remédier à cette difficulté nous allons considérer pour l'analyse la formulation variationnelle "relaxée".

### 2.2.3 Le problème elliptique - formulation "relaxée"

Le problème stationnaire associé à (2.1.21) est

$$(2.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L \text{ tels que} \\ a(\sigma, \tau) + b(v, \tau) + (\gamma, \mathbf{as}(\tau))_L = 0, \quad \forall \tau \in \underline{X}, \\ b(w, \sigma) = -(f, w), \quad \forall w \in \underline{M}, \\ (\eta, \mathbf{as}(\sigma))_L = 0, \quad \forall \eta \in L, \end{array} \right.$$

avec  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  définis par (2.1.18). On peut réécrire (2.2.5) sous la forme suivante

$$(2.2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L \text{ tels que} \\ a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(v, \gamma; \tau) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{X}, \\ \tilde{b}(w, \eta; \sigma) = -(f, w), \quad \forall (w, \eta) \in \underline{M} \times L, \end{array} \right.$$

où nous avons posé

$$(2.2.7) \quad \tilde{b}(w, \eta; \tau) = b(w, \tau) + (\eta, \mathbf{as}(\tau))_L, \quad \forall (\tau, w, \eta) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L.$$

On sait alors (cf. [4]) que les problèmes (2.2.6) et (2.2.1) sont équivalents. On introduit ensuite  $L_h$ , un sous espace de dimension finie de  $L$  et on considère le problème approché associé à (2.2.6)

$$(2.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que} \\ a(\sigma_h, \tau_h) + b(v_h, \tau_h) + (\gamma_h, \mathbf{as}(\tau_h))_L = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h, \\ b(w_h, \sigma_h) = -(f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h, \\ (\eta_h, \mathbf{as}(\sigma_h))_L = 0, \quad \forall \eta_h \in L_h, \end{array} \right.$$

qui s'écrit aussi sous la forme suivante

$$(2.2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que} \\ a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(v_h, \gamma_h; \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h, \\ \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma_h) = -(f, w_h), \quad \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h. \end{array} \right.$$

L'idée est maintenant de définir l'espace  $L_h$  de façon à obtenir l'équivalence entre les problèmes (2.2.2) et (2.2.9). Cela nous permettra d'obtenir des estimations d'erreur pour le problème (2.2.2) à partir de celles du problème relaxé, qui sont plus faciles à obtenir. Toutefois, notons que les techniques classiques ne s'appliquent pas au problème relaxé. En effet, on peut facilement montrer que l'hypothèse (H0.2) (coercivité) n'est pas satisfaite (la preuve est la même que dans la section 1.2.1). Concernant maintenant la théorie abstraite développée pour le problème scalaire (Théorème 1.2.2) nous n'avons pas réussi à montrer la condition inf-sup

forte (hypothèse (H1.2)). Il faudra donc développer des techniques originales pour obtenir les estimations d'erreur.

**Remarque 2.2.1** *Notons que l'introduction du problème équivalent (2.2.9) est nécessaire seulement d'un point de vue technique pour l'analyse. En pratique on résout numériquement le problème d'évolution correspondant à la formulation "forte".*

#### 2.2.4 Un résultat abstrait

Avant de commencer, nous introduisons une flopée de notations nécessaires à l'expression de notre résultat (nous n'avons pas réussi à éviter cela et nous nous en excusons auprès du lecteur). Soient donc  $\underline{M}$ ,  $\underline{X}$ ,  $\underline{H}$  et  $L$  quatre espaces de Hilbert, avec

$$(2.2.10) \quad \underline{X} \subset \underline{H}, \quad \underline{X} \text{ dense dans } \underline{H} \text{ et } |\cdot|_{\underline{H}} \leq \|\cdot\|_{\underline{X}}.$$

Nous noterons  $\underline{M}'$ ,  $\underline{X}'$ ,  $\underline{H}'$  et  $L'$  leur espace dual respectif. Notons que pour l'application, nous aurons,

$$\underline{H} = (L^2(\Omega))^4, \quad \underline{X} = (H(\operatorname{div}; \Omega))^2, \quad \underline{M} = (L^2(\Omega))^2 \text{ et } L = L^2(\Omega).$$

Soient  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  et  $d(\cdot, \cdot)$  trois formes bilinéaires continues dans  $\underline{H} \times \underline{H}$ ,  $\underline{M} \times \underline{X}$  et  $L \times \underline{H}$  respectivement. On définit  $\tilde{b}(\cdot, \cdot; \cdot)$  par

$$\tilde{b}(w, \eta; \tau) = b(w, \tau) + d(\eta, \tau), \quad \forall (w, \eta, \tau) \in \underline{M} \times L \times \underline{X}.$$

Nous verrons, dans ce qui suit, que les formes bilinéaires  $b(\cdot, \cdot)$  et  $d(\cdot, \cdot)$  joueront un rôle différent dans l'analyse. Essentiellement à cause du fait que leur continuité par rapport à la deuxième variable  $\tau$  implique deux topologies différentes.

Par la continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ , on peut introduire un opérateur  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{L}(\underline{H})$ , défini par

$$a(\sigma, \tau) = (\mathcal{A}\sigma, \tau)_{\underline{H}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \underline{H} \times \underline{H}.$$

Nous introduisons par ailleurs les opérateurs  $B : \underline{X} \rightarrow \underline{M}'$  et  $B^t : \underline{M} \rightarrow \underline{X}'$  définis par

$$\langle B\tau, w \rangle = \langle \tau, B^t w \rangle = b(w, \tau), \quad \forall (\tau, w) \in \underline{X} \times \underline{M},$$

et leur noyaux respectifs

$$\operatorname{Ker} B = \{ \tau \in \underline{X} / b(w, \tau) = 0, \forall w \in \underline{M} \},$$

$$\operatorname{Ker} B^t = \{ w \in \underline{M} / b(w, \tau) = 0, \forall \tau \in \underline{X} \}.$$

De même, on définit  $D : \underline{H} \rightarrow L'$  et  $D^t : L \rightarrow \underline{H}'$  par

$$\langle D\tau, \eta \rangle = \langle \tau, D^t \eta \rangle = d(\eta, \tau), \quad \forall (\tau, \eta) \in \underline{H} \times L,$$

et

$$\operatorname{Ker} D = \{ \tau \in \underline{H} / d(\eta, \tau) = 0, \forall \eta \in L \},$$

$$\operatorname{Ker} D^t = \{ \eta \in L / d(\eta, \tau) = 0, \forall \tau \in \underline{H} \}.$$

## 2.2 Analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour un problème elliptique : le problème stationnaire

---

Finalement, nous introduisons  $\tilde{B} : \underline{X} \rightarrow \underline{M}' \times L'$  et  $\tilde{B}^t : \underline{M} \times L \rightarrow \underline{X}'$  avec

$$\langle \tilde{B}\tau; w, \eta \rangle = \langle \tau; \tilde{B}^t(w, \eta) \rangle = \tilde{b}(w, \eta; \tau), \quad \forall (\tau, w, \eta) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L,$$

et leur noyaux  $\tilde{B}$  et  $\tilde{B}^t$ ,

$$\text{Ker } \tilde{B} \equiv V = \left\{ \tau \in \underline{X} / \tilde{b}(w, \eta; \tau) = 0, \forall (w, \eta) \in \underline{M} \times L \right\},$$

$$\text{Ker } \tilde{B}^t \equiv V^t = \left\{ (w, \eta) \in \underline{M} \times L / \tilde{b}(w, \eta; \tau) = 0, \forall \tau \in \underline{X} \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous identifierons l'espace quotient  $(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}^t$  avec le complément orthogonal de  $\text{Ker } \tilde{B}^t$

$$\begin{aligned} (\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}^t &\equiv (\text{Ker } \tilde{B}^t)^\perp \\ &\equiv \left\{ (w, \eta) \in \underline{M} \times L / (v, w)_{\underline{M}} + (\gamma, \eta)_L = 0, \forall (v, \gamma) \in \text{Ker } \tilde{B} \right\}, \end{aligned}$$

et nous supposons que les propriétés suivantes sont satisfaites ( $\|(w, \eta)\|_{\underline{M} \times L} = \|w\|_{\underline{M}} + \|\eta\|_L$ .)

$$(2.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \exists c > 0 / \forall (w, \eta) \in \underline{M} \times L, \exists \tau \in \underline{X} / \\ \quad \quad \quad \tilde{b}(w, \eta; \tau) \geq c \|(w, \eta)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}^t} \|\tau\|_{\underline{X}}, \\ (ii) \quad \exists \alpha > 0 / \forall \tau \in V, \quad a(\tau, \tau) \geq \alpha \|\tau\|_{\underline{X}}^2, \end{array} \right.$$

Nous sommes intéressés par l'approximation du problème suivant

$$(2.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L \text{ tels que} \\ a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(v, \gamma; \tau) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{X}, \\ \tilde{b}(w, \eta; \sigma) = -\langle f, w \rangle, \quad \forall (w, \eta) \in \underline{M} \times L, \end{array} \right.$$

avec  $f \in \underline{M}'$ . La théorie classique (voir [32]), nous permet alors (grâce aux hypothèses (2.2.11)) d'obtenir le théorème suivant.

**Théorème 2.2.1** *Pour tout  $(f, 0) \in \text{Im } \tilde{B}$ , le problème (2.2.12) admet une solution unique  $(\sigma, v, \gamma)$  dans  $\underline{X} \times ((\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}^t)$ . De plus*

$$\|(v, \gamma)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}^t} + \|\sigma\|_{\underline{X}} \leq C \|f\|_{\underline{M}'}$$

Soient maintenant  $\underline{X}_h \subset \underline{X}$ ,  $\underline{M}_h \subset \underline{M}$  et  $L_h \subset L$  trois espaces d'approximation de dimension finie. Nous considérons le problème approché suivant

$$(2.2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que} \\ a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(v_h, \gamma_h; \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h, \\ \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma_h) = -\langle f, w_h \rangle, \quad \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h. \end{array} \right.$$

Comme pour le problème continu, nous ne pouvons pas éviter l'introduction des notations qui suivent. Nous définissons donc les opérateurs  $B_h : \underline{X}_h \rightarrow \underline{M}_h$  et  $B_h^t : \underline{M}_h \rightarrow \underline{X}_h$  par

$$(B_h \tau_h, w_h)_{\underline{M}} = (\tau_h, B_h^t w_h)_{\underline{X}} = b(w_h, \tau_h), \quad \forall (\tau_h, w_h) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h,$$

et leur noyaux respectifs

$$Z_h \equiv \text{Ker } B_h = \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h / b(w_h, \tau_h) = 0, \forall w_h \in \underline{M}_h \right\},$$

$$\text{Ker } B_h^t = \left\{ w_h \in \underline{M}_h / b(w_h, \tau_h) = 0, \forall \tau_h \in \underline{X}_h \right\}.$$

De même,  $D_h : \underline{H}_h \rightarrow L_h$  et  $D_h^t : L_h \rightarrow \underline{H}_h$  sont définis par

$$(D_h \tau_h, \eta_h)_L = (\tau_h, D_h^t \eta_h)_{\underline{H}} = d(\eta_h, \tau_h), \quad \forall (\tau_h, \eta_h) \in \underline{X}_h \times L_h,$$

et nous avons

$$\text{Ker } D_h = \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h / d(\eta_h, \tau_h) = 0, \forall \eta_h \in L_h \right\},$$

$$\text{Ker } D_h^t = \left\{ \eta_h \in L_h / d(\eta_h, \tau_h) = 0, \forall \tau_h \in \underline{X}_h \right\}.$$

Finalement nous introduisons  $\tilde{B}_h : \underline{X}_h \rightarrow \underline{M}_h \times L_h$ ,  $\tilde{B}_h^t : \underline{M}_h \times L_h \rightarrow \underline{X}_h$  tels que

$$\begin{aligned} \left( \tilde{B}_h \sigma_h; w_h, \eta_h \right)_{(\underline{M} \times L)} &= \left( \sigma_h; \tilde{B}_h^t(w_h, \eta_h) \right)_{\underline{X}} \\ &= \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma_h), \quad \forall \sigma_h \in \underline{X}_h, \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h. \end{aligned}$$

et

$$V_h \equiv \text{Ker } \tilde{B}_h = \left\{ \sigma_h \in \underline{X}_h / \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma_h) = 0, \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h \right\},$$

$$\text{Ker } \tilde{B}_h^t = \left\{ (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h / \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma_h) = 0, \forall \sigma_h \in \underline{X}_h \right\}.$$

La nouvelle théorie abstraite repose sur les hypothèses suivantes

$$(H0) \quad \forall (f, 0) \in \text{Im } \tilde{B}, V_h(f) = \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h / \tilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h) = -(f, w_h) \right\} \neq \emptyset.$$

(H1) Décomposition orthogonale de  $X_h$

$$\left| \begin{array}{l} \underline{X}_h = \underline{X}_h^s \oplus \underline{X}_h^r \quad (\tau_h = \tau_h^s + \tau_h^r) \quad , \quad \underline{X}_h^r \subset Z_h, \\ (\tau_h^s, \tau_h^r)_{\underline{H}} = 0, \quad \forall (\tau_h^s, \tau_h^r) \in \underline{X}_h^s \times \underline{X}_h^r. \end{array} \right.$$

(H2) Condition inf-sup discrète "faible" :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Il existe une constante } \beta > 0, \text{ indépendante de } h, \text{ telle que} \\ \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h, \exists \tau_h \in \underline{X}_h / \\ \tilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h) \geq \beta \|(w_h, \eta_h)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } B_h^t} (\|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}}). \end{array} \right.$$



(H3) Condition de coercivité “faible” :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Il existe une constante } \alpha > 0, \text{ indépendante de } h, \text{ telle que} \\ \forall \tau_h \in V_h, \quad a(\tau_h, \tau_h) \geq \alpha \left( \|\tau_h^s\|_{\underline{X}}^2 + |\tau_h^r|_{\underline{H}}^2 \right). \end{array} \right.$$

(H4) Propriétés d'approximation “habituelles”

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\tau_h^s \in \underline{X}_h^s} \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} = 0, \quad \forall \sigma \in \underline{X}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v - w_h\|_{\underline{M}} = 0, \quad \forall v \in \underline{M}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma - \eta_h\|_L = 0, \quad \forall \gamma \in L. \end{array} \right.$$

(H4b) Propriété d'approximation supplémentaire sur  $L$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L = 0, \quad \forall \gamma \in L,$$

où

$$\Lambda_r^{(h)} = \left\{ \eta^{(h)} \in L / d(\eta^{(h)}, \tau_h^r) = 0, \quad \forall \tau_h^r \in \underline{X}_h^r \right\}.$$

**Remarque 2.2.2** Nous avons utilisé le terme “habituelles” pour les propriétés d'approximation (H4), car elles sont très proches des hypothèses classiques. La seule différence concerne l'approximation de l'espace  $\underline{X}$  par  $\underline{X}_h^s$  au lieu de  $\underline{X}_h$  (comme dans le cas du problème scalaire). Au contraire, l'hypothèse (H4b) n'est pas classique. En effet, l'espace  $\Lambda_r^{(h)}$  est un sous espace de  $L$  de dimension infinie et il n'est donc pas inclus dans  $L_h$ . En pratique, pour vérifier l'hypothèse (H4b), nous allons chercher à déterminer  $L^{(h)}$ , un sous espace de dimension finie de  $\Lambda_r^{(h)}$ , tel que

$$(2.2.14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta^{(h)} \in L^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L = 0 \quad \forall \gamma \in L.$$

Cela nous permettra d'obtenir (H4b), car nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L \leq \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta^{(h)} \in L^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L \quad \forall \gamma \in L.$$

**Remarque 2.2.3** Notons que, par la densité de  $\underline{X}$  dans  $\underline{H}$  et l'hypothèse (H4), on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\tau_h^s \in \underline{X}_h^s} |\sigma - \tau_h^s|_{\underline{H}} = 0, \quad \forall \sigma \in \underline{H}.$$

**Remarque 2.2.4** On peut aussi caractériser l'hypothèse (H0) par

$$(H0) - (ii) \quad \text{Ker } \tilde{B}_h^t = \text{Ker } \tilde{B}^t \cap (\underline{M}_h \times L_h)$$

**Théorème 2.2.2** *Sous les hypothèse (H0) à (H4b), le problème (2.2.13) admet une solution unique*

$$(\sigma_h = \sigma_h^s + \sigma_h^r, v_h, \gamma_h) \in \underline{\underline{X}}_h \times ((\underline{\underline{M}}_h \times L_h)/\text{Ker } \widetilde{B}_h^t),$$

avec

- $(\sigma_h^s, v_h, \gamma_h) \rightarrow (\sigma, v, \gamma)$  dans  $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}} \times L$ ,
- $\sigma_h^r \rightarrow 0$  dans  $\underline{\underline{H}}$ .

Plus précisément, nous obtenons les estimations d'erreur suivantes

$$(2.2.15) \quad \begin{aligned} & |\sigma_h^r|_{\underline{\underline{H}}} + \|\sigma - \sigma_h^s\|_{\underline{\underline{X}}} + \|(v - v_h, \gamma - \gamma_h)\|_{(\underline{\underline{M}} \times L)/\text{Ker } \widetilde{B}_h^t} \leq \\ & \leq C \left\{ \inf_{\tau_h^s \in \underline{\underline{X}}_h^s} \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{\underline{X}}} + \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \|v - w_h\|_{\underline{\underline{M}}} + \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma - \eta_h\|_L \right. \\ & \quad \left. + \inf_{z_h^s \in \underline{\underline{X}}_h^s} |\mathcal{A}\sigma - z_h^s|_{\underline{\underline{H}}} + \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L \right\}. \end{aligned}$$

On déduit alors la convergence à partir de (2.2.15), grâce aux propriétés d'approximation (H4) et la remarque 2.2.3.

### Démonstration.

#### (i) Existence et unicité

Notons d'abord que l'hypothèse (H3) implique la condition de coercivité discrète suivante (a priori non-uniforme),

$$(2.2.16) \quad \exists \alpha_h > 0, \forall \sigma_h \in V_h, a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha_h \|\sigma_h\|_{\underline{\underline{X}}}^2.$$

car en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. En utilisant ensuite (2.2.16) et (H0) nous obtenons (avec des techniques classiques) l'existence et l'unicité de la solution  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h)$  du problème discret (2.2.13) dans  $\underline{\underline{X}}_h \times ((\underline{\underline{M}}_h \times L_h)/\text{Ker } \widetilde{B}_h^t)$ .

#### (ii) Estimations d'erreur pour le terme $\sigma - \sigma_h$

Les grandes lignes de la démonstration reposent sur les techniques de la théorie classique. Notamment, nous allons utiliser d'une part l'inégalité triangulaire sur l'identité  $\sigma - \sigma_h = \sigma - \tau_h + \tau_h - \sigma_h$  où  $\tau_h$  est un élément quelconque de  $V_h(f)$ , d'autre part nous utiliserons l'hypothèse de coercivité de la forme  $a$  pour estimer le terme  $\tau_h - \sigma_h$ .

La différence vient du fait que nous avons ici à travailler avec une norme spécifique sur l'espace  $\underline{\underline{X}}_h$ ,

$$\tau_h \rightarrow (\|\tau_h^s\|_{\underline{\underline{X}}}^2 + |\tau_h^r|_{\underline{\underline{H}}}^2)^{\frac{1}{2}},$$

car, c'est cette norme qui intervient dans les hypothèses de coercivité (H3) et de condition inf-sup (H2). Ceci induit une difficulté technique car nous devons nous débarrasser systématiquement de termes du type  $b(\cdot, \tau_h^r)$ , pour lesquels la norme  $\|\tau_h^r\|_{\underline{\underline{X}}}$  intervienne naturellement par la continuité de la forme  $b$ .

## 2.2 Analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour un problème elliptique : le problème stationnaire

---

La deuxième équation de (2.2.13), implique que  $\sigma_h$  appartient dans  $V_h(f)$ . Donc, pour tout  $\tau_h$  dans  $V_h(f)$  nous avons

$$\sigma_h - \tau_h \in V_h.$$

Nous pouvons écrire que

$$(2.2.17) \quad a(\sigma_h - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) = a(\sigma - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) + a(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \tau_h),$$

en prenant ensuite la différence entre la première équation du problème discret (2.2.13) et du problème continu (2.2.12) on obtient

$$(2.2.18) \quad a(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \tau_h) = \tilde{b}(v - w_h, \gamma - \eta_h; \sigma_h - \tau_h), \quad \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h.$$

D'où en utilisant (H1), on a

$$(2.2.19) \quad \begin{aligned} a(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \tau_h) &= b(v - w_h, \sigma_h^s - \tau_h^s) \\ &+ b(v, \sigma_h^r - \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \sigma_h - \tau_h). \end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que  $b(w_h, \sigma_h^r - \tau_h^r) = 0$ , car  $\underline{X}_h^r \subset Z_h$ . On veut maintenant remplacer dans (2.2.19) le terme  $b(u, \sigma_h^r - \tau_h^r)$ . Pour ce faire on utilise la première équation du problème continu (2.2.12),

$$(2.2.20) \quad \left\{ \begin{aligned} a(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \tau_h) &= b(v - w_h, \sigma_h^s - \tau_h^s) - a(\sigma, \sigma_h^r - \tau_h^r) \\ &\quad - d(\gamma, \sigma_h^r - \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \sigma_h - \tau_h) \\ &= b(v - w_h, \sigma_h^s - \tau_h^s) - (\mathcal{A}\sigma, \sigma_h^r - \tau_h^r)_{\underline{H}} \\ &\quad - d(\gamma, \sigma_h^r - \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \sigma_h - \tau_h). \end{aligned} \right.$$

Grâce aux hypothèses (H1) et (H4), on obtient

$$(2.2.21) \quad \begin{aligned} a(\sigma_h - \sigma, \sigma_h - \tau_h) &= b(v - w_h, \sigma_h^s - \tau_h^s) - (\mathcal{A}\sigma - z_h^s, \sigma_h^r - \tau_h^r)_{\underline{H}} \\ &\quad - d(\gamma - \eta^{(h)}, \sigma_h^r - \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \sigma_h - \tau_h), \end{aligned}$$

pour tout couple  $(z_h^s, \eta^{(h)}) \in \underline{X}_h^s \times \Lambda_r^{(h)}$ . En combinant ensuite (2.2.17), (2.2.20) et (2.2.21), il suit

$$(2.2.22) \quad \begin{aligned} a(\sigma_h - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) &= a(\sigma - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) + b(v - w_h, \sigma_h^s - \tau_h^s) \\ &\quad - (\mathcal{A}\sigma - z_h^s, \sigma_h^r - \tau_h^r)_{\underline{H}} \\ &\quad - d(\gamma - \eta^{(h)}, \sigma_h^r - \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \sigma_h - \tau_h), \end{aligned}$$

d'où par (H3), on a

$$\left| \begin{aligned} \alpha(\|\sigma_h^s - \tau_h^s\|_{\underline{X}}^2 + |\sigma_h^r - \tau_h^r|_{\underline{H}}^2) &\leq \|a\| |\sigma - \tau_h|_{\underline{H}} |\sigma_h - \tau_h|_{\underline{H}} \\ &+ \|b\| \|v - w_h\|_{\underline{M}} \|\sigma_h^s - \tau_h^s\|_{\underline{X}} \\ &+ |\mathcal{A}\sigma - z_h^s|_{\underline{H}} |\sigma_h^r - \tau_h^r|_{\underline{H}} \\ &+ \|d\| \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L |\sigma_h^r - \tau_h^r|_{\underline{H}} \\ &+ \|d\| \|\gamma - \eta_h\|_L |\sigma_h - \tau_h|_{\underline{H}}. \end{aligned} \right.$$

On déduit alors l'existence d'une constante  $C$  positive qui dépend de  $\|a\|$ ,  $\|b\|$ ,  $\|d\|$  et  $\alpha$  telle que, pour tout  $(\tau_h, w_h, \eta_h, z_h^s, \eta^{(h)}) \in V_h(f) \times \underline{M}_h \times L_h \times \underline{X}_h^s \times \Lambda_r^{(h)}$  nous avons  $(|\sigma - \tau_h|_{\underline{H}} \leq \|\sigma_h^s - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r - \tau_h^r|_{\underline{H}})$

$$(2.2.23) \quad \begin{aligned} \|\sigma_h^s - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r - \tau_h^r|_{\underline{H}} &\leq C \left( |\sigma - \tau_h^s|_{\underline{H}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} + \|v - w_h\|_{\underline{M}} + \|\gamma - \eta_h\|_L \right. \\ &\left. + |\mathcal{A}\sigma - z_h^s|_{\underline{H}} + \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L \right). \end{aligned}$$

En utilisant ensuite l'inégalité triangulaire on obtient, pour tout  $\tau_h \in V_h(f)$

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h^s\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r|_{\underline{H}} &= \|\sigma - \tau_h^s + \tau_h^s - \sigma_h^s\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r - \tau_h^r + \tau_h^r|_{\underline{H}} \\ &\leq \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + \|\tau_h^s - \sigma_h^s\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r - \tau_h^r|_{\underline{H}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}}, \end{aligned}$$

ce qui implique en combinaison avec (2.2.23) que

$$\left| \begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h^s\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r|_{\underline{H}} &\leq (1 + C) \left( \inf_{\tau_h \in V_h(f)} \left( \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} \right) \right) \\ &+ C \left( \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v - w_h\|_{\underline{M}} + \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma - \eta_h\|_L \right. \\ &\left. + \inf_{z_h^s \in \underline{X}_h^s} |\mathcal{A}\sigma - z_h^s|_{\underline{H}} + \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L \right). \end{aligned} \right.$$

Pour conclure, nous rappelons que la condition inf-sup implique la propriété suivante (cf. [32], Proposition 2.5)

$$\inf_{\tau_h \in V_h(f)} \left( \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} \right) \leq c_1 \inf_{\tau_h \in \underline{X}_h^s} \left( \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} \right),$$

en particulier

$$\inf_{\tau_h \in V_h(f)} \left( \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} \right) \leq c_1 \inf_{\tau_h^s \in \underline{X}_h^s} \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}}.$$

**(iii) Estimations d'erreur sur les termes  $v - v_h$  et  $\gamma - \gamma_h$**

Une fois de plus nous utiliserons l'inégalité triangulaire

$$(2.2.24) \quad \begin{aligned} \|(v - v_h, \gamma - \gamma_h)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}_h^t} &\leq \|(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}_h^t} + \\ &\|(v - w_h, \gamma - \eta_h)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}_h^t}, \end{aligned}$$

où  $(w_h, \eta_h)$  sont des éléments quelconques de  $\underline{M}_h \times L_h$ . Par l'hypothèse (H2), pour tout  $(w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h$ , nous avons

$$(2.2.25) \quad \|(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h)\|_{(\underline{M} \times L)/\text{Ker } \tilde{B}_h^t} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\tau_h \in \underline{X}_h} \frac{\tilde{b}(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h; \tau_h)}{\|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + \|\tau_h^r\|_{\underline{H}}}.$$

En utilisant ensuite la décomposition orthogonale de  $\tau_h$  ( $\tau_h = \tau_h^s + \tau_h^r$ ) et le fait que  $\underline{X}_h^r \subset Z_h$ , on obtient l'expression suivante de  $\tilde{b}(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h; \tau_h)$

$$(2.2.26) \quad \tilde{b}(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h; \tau_h) = b(v_h - w_h, \tau_h^s) + d(\gamma_h - \eta_h, \tau_h^s) + d(\gamma_h - \eta_h, \tau_h^r)$$

On veut se débarrasser du terme  $b(v_h - w_h, \tau_h^r)$  dans l'équation ci-dessus. Pour cela, soustrayons la première équation de (2.2.13) de la première équation de (2.2.12). On obtient

$$a(\sigma - \sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(v - v_h, \gamma - \gamma_h; \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h.$$

En particulier, pour tout  $\tau_h^s \in \underline{X}_h^s$ , on a

$$a(\sigma - \sigma_h, \tau_h^s) + b(v - v_h, \tau_h^s) + d(\gamma - \gamma_h, \tau_h^s) = 0, \quad \forall \tau_h^s \in \underline{X}_h^s,$$

ce qui, en introduisant  $(w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h$ , peut s'écrire

$$a(\sigma - \sigma_h, \tau_h^s) + b(v - w_h, \tau_h^s) + b(w_h - v_h, \tau_h^s) + d(\gamma - \eta_h, \tau_h^s) + d(\eta_h - \gamma_h, \tau_h^s) = 0,$$

que nous utilisons dans (2.2.26)

$$b(v_h - w_h, \tau_h^s) + d(\gamma_h - \eta_h, \tau_h^s) = a(\sigma - \sigma_h, \tau_h^s) + b(v - w_h, \tau_h^s) + d(\gamma - \eta_h, \tau_h^s),$$

pour obtenir

$$(2.2.27) \quad \begin{aligned} \tilde{b}(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h; \tau_h) &= a(\sigma - \sigma_h, \tau_h^s) + b(v - w_h, \tau_h^s) \\ &+ d(\gamma - \eta_h, \tau_h^s) + d(\gamma_h - \eta_h, \tau_h^r). \end{aligned}$$

Le terme  $\sigma - \sigma_h$  ayant été déjà estimé dans (i), les termes  $b(v - w_h, \tau_h^s)$  et  $d(\gamma - \eta_h, \tau_h^s)$  pouvant être facilement majorés par  $C \|\tau_h^s\|_{\underline{X}}$  ( $\|v - w_h\|_{\underline{M}} + \|\gamma - \eta_h\|_L$ ), il ne reste plus qu'à étudier le terme  $d(\gamma_h - \eta_h, \tau_h^r)$ . Celui-ci, peut être réécrit comme suit (grâce à (H4b))

$$(2.2.28) \quad \begin{aligned} d(\gamma_h - \eta_h, \tau_h^r) &= d(\gamma_h - \gamma, \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \tau_h^r) \\ &= d(\gamma_h, \tau_h^r) + d(\eta^{(h)} - \gamma, \tau_h^r) + d(\gamma - \eta_h, \tau_h^r), \quad \forall \eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}. \end{aligned}$$

Prenons  $\tau_h = \tau_h^r$  dans la première équation du problème discret (2.2.13), on obtient

$$a(\sigma_h, \tau_h^r) + d(\gamma_h, \tau_h^r) = 0,$$

ou, de façon équivalente

$$(2.2.29) \quad d(\gamma_h, \tau_h^r) = -a(\sigma_h, \tau_h^r) = -(\mathcal{A}\sigma_h, \tau_h^r) = (z_h^s - \mathcal{A}\sigma_h, \tau_h^r), \quad \forall z_h^s \in \underline{X}_h^s.$$

À partir de (2.2.27) via (2.2.28) et (2.2.29), on obtient,

$$(2.2.30) \quad \begin{aligned} \tilde{b}(v_h - w_h, \gamma_h - \eta_h; \tau_h) &= a(\sigma - \sigma_h, \tau_h^s) + b(v - w_h, \tau_h^s) + d(\gamma - \eta_h, \tau_h^s + \tau_h^r) \\ &\quad + (z_h^s - \mathcal{A}\sigma_h, \tau_h^r) + d(\eta^{(h)} - \gamma, \tau_h^r) \\ &\leq C \{ |\sigma - \sigma_h|_{\underline{H}} + \|v - w_h\|_{\underline{M}} + \|\gamma - \eta_h\|_L \\ &\quad + |z_h^s - \mathcal{A}\sigma_h|_{\underline{H}} + \|\eta^{(h)} - \gamma\|_L \} \{ \|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + \|\tau_h^r\|_{\underline{H}} \}, \end{aligned}$$

où le terme  $|z_h^s - \mathcal{A}\sigma_h|_{\underline{H}}$  peut être majoré par

$$(2.2.31) \quad \begin{aligned} |z_h^s - \mathcal{A}\sigma_h|_{\underline{H}} &= |z_h^s - \mathcal{A}\sigma + \mathcal{A}\sigma - \mathcal{A}\sigma_h|_{\underline{H}} \\ &\leq |z_h^s - \mathcal{A}\sigma|_{\underline{H}} + \|a\| |\sigma - \sigma_h|_{\underline{H}}. \end{aligned}$$

En reportant (2.2.30) et (2.2.31) dans (2.2.24) et (2.2.25), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \|(v - v_h, \gamma - \gamma_h)\|_{\underline{M} \times L / \text{Ker } \tilde{B}_h^t} &\leq C' \left\{ |\sigma - \sigma_h^s|_{\underline{H}} + |\sigma_h^r|_{\underline{H}} \right. \\ &\quad + \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v - w_h\|_{\underline{M}} + \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma - \eta_h\|_{\underline{M}} \\ &\quad \left. + \inf_{z_h^s \in \underline{X}_h^s} |z_h^s - \mathcal{A}\sigma|_{\underline{H}} + \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\eta^{(h)} - \gamma\|_L \right\}. \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.2.5** Si  $\text{Ker } \tilde{B}_h^t = 0$  (ce qui est vrai pour l'application), on obtient les estimations d'erreur dans la norme habituelle  $\|(v - v_h, \gamma - \gamma_h)\|_{\underline{M} \times L}$ .

**Remarque 2.2.6** Le Théorème 2.2.2 peut être facilement généralisé dans le cas du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L \text{ tels que} \\ a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(v, \gamma; \tau) = (g, \tau)_{\underline{H}}, \quad \forall \tau \in \underline{X}, \\ \tilde{b}(w, \eta; \sigma) = -\langle f, w \rangle, \quad \forall (w, \eta) \in \underline{M} \times L, \end{array} \right.$$

avec  $g \in \underline{H}$ . Les estimations d'erreur pour ce problème, sont alors légèrement différentes de celles obtenues précédemment. Plus précisément on obtient

$$(2.2.32) \quad \begin{aligned} |\sigma_h^r|_{\underline{H}} + \|\sigma - \sigma_h^s\|_{\underline{X}} + \|(v - v_h, \gamma - \gamma_h)\|_{(\underline{M} \times L) / \text{Ker } \tilde{B}_h^t} &\leq C \left\{ \inf_{\tau_h^s \in \underline{X}_h^s} \|\sigma - \tau_h^s\|_{\underline{X}} \right. \\ &\quad + \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v - w_h\|_{\underline{M}} + \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma - \eta_h\|_L \\ &\quad \left. + \inf_{z_h^s \in \underline{X}_h^s} |(g - \mathcal{A}\sigma) - z_h^s|_{\underline{H}} + \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L \right\}. \end{aligned}$$

### 2.2.5 Application au problème élastique

#### 2.2.5.1 Les résultats principaux

Nous considérons ici le problème de l'élasticité. Dans ce cas, les espaces fonctionnels de base sont

$$\underline{\underline{H}} = (L^2(\Omega))^4, \quad \underline{\underline{X}} = (H(\operatorname{div}; \Omega))^2, \quad \underline{\underline{M}} = (L^2(\Omega))^2 \text{ et } L = L^2(\Omega).$$

Les opérateurs abstraits  $B$ ,  $D$  et  $\mathcal{A}$  sont définis par

$$(2.2.33) \quad \begin{aligned} B\tau &= \operatorname{div} \tau, \quad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}, \quad D\tau = \operatorname{as}(\tau) \quad \forall \tau \in \underline{\underline{H}}, \\ \mathcal{A}\tau(x) &= A(x)\tau(x). \end{aligned}$$

Pour la discrétisation du problème, nous considérons les espaces  $\underline{\underline{X}}_h$ ,  $\underline{\underline{M}}_h$  correspondant à la nouvelle famille des éléments finis mixtes, définis par (2.1.30). Notre objectif est maintenant de définir un espace  $L_h$  particulier qui nous permet d'obtenir l'équivalence entre les problèmes (2.2.2) et (2.2.9). Pour ce faire nous définissons  $L_h$  par la relation suivante

$$(2.2.34) \quad L_h = D(\underline{\underline{X}}_h) = \operatorname{as}(\underline{\underline{X}}_h).$$

Notons que, dans ce cas,  $D_h$  est la restriction de l'opérateur continu  $D$  dans l'espace  $\underline{\underline{X}}_h$ . De plus, nous avons

$$L_h = \operatorname{Im} D_h, \quad \underline{\underline{X}}_h^{sym} = \operatorname{Ker} D_h.$$

Nous allons ensuite montrer que le problème (2.2.9) entre dans le cadre de la théorie abstraite, ce qui nous permettra d'obtenir les résultats suivants.

Le premier résultat concerne l'équivalence entre les problèmes (2.2.2) et (2.2.9).

**Théorème 2.2.3** *Supposons que les espaces  $\underline{\underline{X}}_h, \underline{\underline{M}}_h, L_h$  définis en (2.1.30) et (2.2.34) satisfont les hypothèses (H0) à (H4b), alors le problème (2.2.9) admet une solution unique  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{\underline{X}}_h \times \underline{\underline{M}}_h \times L_h$  avec  $(\sigma_h, v_h)$  l'unique solution du problème (2.2.2).*

Le résultat principal de cette section est le théorème de convergence suivant. On se restreint ici au cas des éléments finis correspondant à  $k = 0, 1$  et  $2$  pour des raisons techniques (voir remarque 2.2.9).

**Théorème 2.2.4** *Supposons  $k \leq 2$ . Soient  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{\underline{X}}_h \times \underline{\underline{M}}_h \times L_h$  et  $(\sigma, v, \gamma) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}} \times L$  les solutions des problèmes (2.2.9) et (2.2.6) respectivement, alors  $(\sigma_h = \sigma_h^s + \sigma_h^r)$*

- $(\sigma_h^s, v_h, \gamma_h) \rightarrow (\sigma, v, \gamma)$  dans  $(H(\operatorname{div}; \Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$ ,
- $\sigma_h^r \rightarrow 0$  dans  $(L^2(\Omega))^4$ .

*De plus, si la solution est suffisamment régulière, i.e.,  $(\sigma, v, \gamma) \in (H^m(\Omega))^4 \times (H^m(\Omega))^2 \times H^m(\Omega)$  et  $(\mathcal{A}\sigma, \operatorname{div} \sigma) \in (H^m(\Omega))^4 \times (H^m(\Omega))^2$  pour  $m = k+1$ , alors on obtient les estimations d'erreur suivantes (on note par  $|\cdot|_{(H^m)^d}$  la semi-norme habituelle dans  $(H^m)^d$ )*

$$(2.2.35) \quad \begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h^s\|_{(H(\operatorname{div}))^2} + \|\sigma_h^r\|_{(L^2)^4} + \|v - v_h\|_{(L^2)^2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2} &\leq \\ &\leq C h^m (|\sigma|_{(H^m)^4} + |\operatorname{div}(\sigma)|_{(H^m)^2} + |v|_{(H^m)^2} + |\mathcal{A}\sigma|_{(H^m)^4}). \end{aligned}$$

Pour prouver les théorèmes 2.2.3 et 2.2.4, nous allons appliquer la théorie abstraite, présentée dans la section précédente, au problème continu (2.2.6) et son approximation (2.2.9). Les étapes principales de la démonstration sont les suivantes. On commence par justifier le choix de l'espace  $L_h$  défini par (2.2.34), puis, nous caractérisons cet espace à l'aide des fonctions de base locales. Dans un deuxième temps, nous vérifions les hypothèses (H0)-(H4) pour la nouvelle famille d'éléments finis mixtes. Finalement, on obtient les estimations d'erreur (2.2.35) en utilisant les résultats d'interpolation habituels (cf. [97]) dans les espaces  $\underline{X}_h^s, \underline{M}_h, L_h$  (voir section 2.2.5.3-d et lemme 2.2.3).

**Remarque 2.2.7** *Le Théorème 2.2.4 nous donne des estimations d'erreur pour l'approximation de la formulation relaxée. Ceci nous permet d'obtenir les estimations d'erreur pour la formulation forte, car nous avons d'une part l'équivalence entre les deux formulations (relaxée et forte) du problème continu et d'autre part grâce au Théorème 2.2.3 l'équivalence entre les deux formulations (relaxée et forte) du problème discret.*

**Remarque 2.2.8** *Le Théorème 2.2.4 implique la convergence de  $\sigma_h$  vers  $\sigma$  seulement dans l'espace  $\underline{H}$  (c.à.d,  $(L^2)^4$ ). Pour obtenir une bonne approximation du tenseur de contraintes dans l'espace  $\underline{X}$  (c.à.d,  $(H(\text{div}))^2$ ), il suffit de projeter la solution discrète  $\sigma_h$  sur l'espace  $\underline{X}_h^s$ . Cela consiste à calculer  $\sigma_h^s$ . Dans le cadre de notre application, il s'agit d'un post-traitement qui est particulièrement facile, car il est local.*

**Remarque 2.2.9** *Nous montrerons dans la section 2.2.5.4, que l'obtention du résultat de convergence pour  $k$  quelconque se ramène à vérifier qu'une certaine matrice rectangulaire est de rang plein. Il nous a semblé difficile de vérifier cette propriété à la main. C'est pourquoi, nous avons implémenté un algorithme avec MAPLE qui nous a permis de la vérifier pour  $k = 0, 1$  et  $2$ . Pour des  $k$  supérieurs on pourrait utiliser la même méthode bien que nous ne l'ayons pas fait.*

### 2.2.5.2 Équivalence avec le problème relaxé : Caractérisation de l'espace $L_h$

La démonstration des théorèmes 2.2.3 et 2.2.4 est une conséquence immédiate du lemme suivant. Il nous restera alors à vérifier que les hypothèses de ce Lemme sont satisfaites pour le choix particulier de  $L_h$  que nous avons fait. Ceci sera l'objet des deux prochains paragraphes.

**Lemme 2.2.1** *Supposons que les espaces  $\underline{X}_h, \underline{M}_h, L_h$  définis en (2.1.30) et (2.2.34) satisfont les hypothèses (H0) à (H4b), alors les théorèmes 2.2.3 et 2.2.4 sont vrais.*

#### Démonstration.

##### (i) Existence et unicité de la solution du problème (2.2.9)

Tout d'abord, notons que les hypothèses (H0) à (H4b) entraînent l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2.9). Ceci est une conséquence directe du théorème 2.2.1.

##### (ii) Existence et unicité de la solution du problème (2.2.2)

Maintenant, nous remarquons que choisir  $L_h = D(\underline{X}_h)$  implique la caractérisation suivante de  $V_h(f)$

$$(2.2.36) \quad V_h(f) \equiv \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h^{sym} / b(w_h, \tau_h) = -(f, w_h), \forall w_h \in \underline{M}_h \right\}.$$



En fait, l'égalité  $\tilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h) = -(f, w_h)$  qui est vraie pour tout couple  $(w_h, \eta_h)$  implique en particulier, en choisissant  $w_h = 0$ , que  $d(\eta_h, \tau_h) = (D\tau_h, \eta_h) = 0$  pour tout  $\eta_h$  dans  $L_h$ . Puis, en prenant  $\eta_h = D\tau_h \in L_h$ , on obtient facilement  $D\tau_h = 0$ , soit, en d'autres termes  $\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}$ . Maintenant, il suffit de remarquer que  $\tilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h) = b(w_h, \tau_h)$  lorsque  $\tau_h$  est élément de  $\underline{X}_h^{sym}$ , pour déduire que

$$V_h(f) \subset \left\{ \tau_h \in \underline{X}_h^{sym} / b(w_h, \tau_h) = -(f, w_h), \forall w_h \in \underline{M}_h \right\}.$$

L'inclusion inverse est immédiate. Finalement les hypothèses (H0), (H1) et (H3) impliquent (de par l'équivalence des normes en dimension finie) le résultat de coercivité discrète

$$(2.2.37) \quad \exists \alpha_h > 0, \forall \sigma_h \in V_h(0), \quad a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha_h \|\sigma_h\|_{\underline{X}}^2.$$

Il suffit pour conclure d'utiliser la théorie classique des problèmes mixtes, (hypothèse (H0), (2.2.36) et la condition de coercivité discrète (2.2.37)) pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution  $(\sigma_h, v_h)$  du problème discret (2.2.2) dans  $\underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h$  (Ker  $B_h^t = 0$ ).

(iii) **Équivalence entre les problèmes (2.2.9) et (2.2.2)**

Soit  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h$  la solution de (2.2.9), il est clair que  $\sigma_h$  est dans  $V_h(f)$ , ce qui implique, cf. (2.2.36), que  $\sigma_h \in \underline{X}_h^{sym}$ . Prenant ensuite  $\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}$  dans la première équation du problème (2.2.9), on obtient que  $(\sigma_h, v_h)$  est aussi la solution du problème (2.2.2). ■

Nous caractérisons maintenant l'espace  $L_h$ . Introduisons les espaces suivants :

- L'espace de fonctions  $Q_k$  discontinues

$$Q_{h,k}^d = \{q_h \in L^2(\Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in Q_k\}.$$

- L'espace de fonctions  $Q_k$  continues

$$Q_{h,k}^c = \{q_h \in H^1(\Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in Q_k\}.$$

Nous définissons  $\tilde{L}_h \subset L$  comme suit

**Définition:**  $\tilde{L}_h$  est le sous espace de  $Q_{h,k+1}^d$ , défini à l'aide des fonctions  $Q_{k+1}$  discontinues qui satisfont une relation supplémentaire à chaque sommet intérieur du maillage  $\mathcal{T}_h$ . Plus précisément, notons  $q_k, 1 \leq k \leq 4$  les 4 valeurs de la fonction  $q_h \in \tilde{L}_h$  associée à un sommet intérieur  $M_j$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  (voir Figure 2.2.1), alors la relation suivante doit être satisfaite

$$(2.2.38) \quad q_1 + q_3 = q_2 + q_4.$$

**Lemme 2.2.2** L'espace  $L_h = D(\underline{X}_h)$  est un sous espace de  $\tilde{L}_h$ .

**Démonstration.**

Par définition de  $L_h$ , on a :

$$\forall \eta_h \in L_h, \exists \tau_h \in \underline{X}_h \text{ tel que } \eta_h = \text{as}(\tau_h) = \tau_h^{21} - \tau_h^{12}.$$

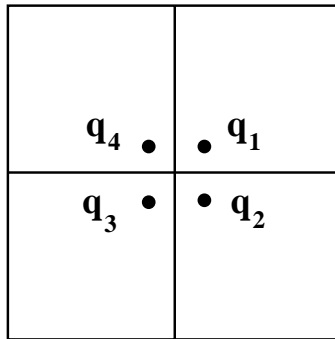


FIG. 2.2.1: Degrés de liberté associés à un sommet intérieur du maillage.

Utilisant ensuite la définition de  $\underline{X}_h$  on déduit que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \eta_h|_K \in Q_{k+1}.$$

Pour conclure, il reste à prouver que  $\eta_h$  satisfait aussi la relation locale (2.2.38) à chaque sommet intérieur du maillage. En effet, considérons  $M_j$  un sommet intérieur du maillage (illustré par la Figure 2.2.2). Par définition de  $\text{as}(\cdot)$ , on a

$$\eta_{K_1}|_{M_j} = \tau_{K_1}^{21}|_{M_j} - \tau_{K_1}^{12}|_{M_j},$$

$$\eta_{K_2}|_{M_j} = \tau_{K_2}^{21}|_{M_j} - \tau_{K_2}^{12}|_{M_j},$$

$$\eta_{K_3}|_{M_j} = \tau_{K_3}^{21}|_{M_j} - \tau_{K_3}^{12}|_{M_j},$$

$$\eta_{K_4}|_{M_j} = \tau_{K_4}^{21}|_{M_j} - \tau_{K_4}^{12}|_{M_j},$$

où  $\eta_{K_i}|_{M_j}$  désigne la valeur de  $\eta_h|_{K_i}$  (la restriction de la fonction  $\eta_h$  dans l'élément  $K_i$ ) au point  $M_j$  (de même pour  $\tau_h^{12}$  et  $\tau_h^{21}$ ).

Les relations de continuité dans  $\underline{X}_h$  impliquent les égalités suivantes

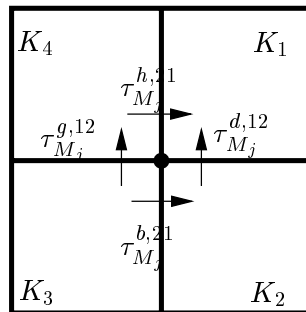


FIG. 2.2.2: Relations de continuité dans  $\underline{X}_h$ .

$$\begin{aligned}\tau_{K_1}^{21}|_{M_j} &= \tau_{K_4}^{21}|_{M_j} \equiv \tau_{M_j}^{h,21}, \\ \tau_{K_2}^{21}|_{M_j} &= \tau_{K_3}^{21}|_{M_j} \equiv \tau_{M_j}^{b,21}, \\ \tau_{K_1}^{12}|_{M_j} &= \tau_{K_2}^{12}|_{M_j} \equiv \tau_{M_j}^{d,12}, \\ \tau_{K_3}^{12}|_{M_j} &= \tau_{K_4}^{12}|_{M_j} \equiv \tau_{M_j}^{g,12},\end{aligned}$$

d'où, on obtient

$$\begin{aligned}\eta_{K_1}|_{M_j} &= \tau_{M_j}^{h,21} - \tau_{M_j}^{d,12}, \\ \eta_{K_2}|_{M_j} &= \tau_{M_j}^{b,21} - \tau_{M_j}^{d,12}, \\ \eta_{K_3}|_{M_j} &= \tau_{M_j}^{b,21} - \tau_{M_j}^{g,12}, \\ \eta_{K_4}|_{M_j} &= \tau_{M_j}^{h,21} - \tau_{M_j}^{g,12}.\end{aligned}$$

On peut alors montrer facilement que

$$\eta_{K_1}|_{M_j} + \eta_{K_3}|_{M_j} = \eta_{K_2}|_{M_j} + \eta_{K_4}|_{M_j}.$$

■

Le résultat suivant termine la caractérisation de l'espace  $L_h$ .

**Théorème 2.2.5** *La dimension de  $L_h$  est égale à la dimension de l'espace  $\tilde{L}_h$ , ce qui implique l'égalité*

$$L_h = \tilde{L}_h.$$

**Démonstration.**

Nous commençons par le calcul de la dimension de  $\tilde{L}_h$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{Dim} \tilde{L}_h &= \mathbf{Dim} Q_{h,k+1}^d - \text{Le nombre des sommets intérieurs} \\ &= N^2 (k+2)^2 - (N-1)^2 \\ &= N^2(k^2 + 4k + 3) + 2N - 1.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$(2.2.39) \quad \mathbf{Dim} L_h = \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h - \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h^{sym},$$

car  $L_h = D(\underline{\underline{X}}_h) \equiv \text{Im } D_h$  et  $\underline{\underline{X}}_h^{sym} = \text{Ker } D_h$ . Considérons  $\underline{\underline{X}}_h$  comme un sous espace de  $(Q_{h,k+1}^d)^4$ , on a alors

$$(2.2.40) \quad \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h = \mathbf{Dim} Q_{h,k+1}^d \times 4 - \text{Nombre des relations de continuité.}$$

Comme  $\tau_h^{11}$ ,  $\tau_h^{21}$  (resp.  $\tau_h^{12}$ ,  $\tau_h^{22}$ ) sont continus à travers les arêtes verticales (resp. horizontales), le nombre des relations de continuité dans  $\underline{\underline{X}}_h$  est donné par

$$\begin{aligned}\text{Nom. de relations de continuité} &= \text{Nom. des arêtes} \times \text{Nom. de deg. de lib. par arête} \times 2 \\ &= 2N(N-1) \times (k+2) \times 2.\end{aligned}$$

En reportant ceci dans (2.2.40), on obtient

$$(2.2.41) \quad \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h = 4N^2(k^2 + 3k + 2) + 4N(k + 2).$$

Pour calculer maintenant la dimension de  $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$ , on réécrit cet espace comme la somme directe des deux espaces correspondant à la décomposition d'un tenseur en une partie diagonale et une extra-diagonale,

$$(2.2.42) \quad \underline{\underline{X}}_h^{sym} = \underline{\underline{X}}_h^{sym,d} + \underline{\underline{X}}_h^{sym,e},$$

où

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym,d} \text{ est isomorphe à } \{(\tau_h^{11}, \tau_h^{22}) \in H(\text{div}), \forall K \in \mathcal{T}_h, (\tau_h^{11}, \tau_h^{22})|_K \in (Q_{k+1})^2\},$$

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym,e} \text{ est isomorphe à } \{\tau_h^{12} = \tau_h^{21} \in H^1 / \forall K \in \mathcal{T}_h, \tau_h^{12}|_K \in Q_{k+1}\}.$$

On obtient alors

$$(2.2.43) \quad \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h^{sym,e} = \mathbf{Dim} Q_{h,k+1}^c = (N + 1)^2 + 2N(N + 1)k + N^2k^2,$$

et (comme pour le calcul de  $\mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h$ ),

$$(2.2.44) \quad \begin{aligned} \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h^{sym,d} &= \mathbf{Dim} Q_{h,k+1}^d \times 2 - \text{Nom. des relations de continuité} \\ &= 2N^2(k + 2)^2 - 2N(N - 1) \times (k + 2) \\ &= 2N^2(k^2 + 3k + 2) + 2N(k + 2) \quad (= \frac{1}{2} \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h), \end{aligned}$$

En reportant (2.2.43) et (2.2.44) dans (2.2.42), on obtient

$$(2.2.45) \quad \begin{aligned} \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h^{sym} &= \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h^{sym,d} + \mathbf{Dim} \underline{\underline{X}}_h^{sym,e} \\ &= N^2(3k^2 + 8k + 5) + N(4k + 6) + 1. \end{aligned}$$

À partir de (2.2.39) via (2.2.41) et (2.2.45), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{Dim} L_h &= 4N^2(k^2 + 3k + 2) + 4N(k + 2) - N^2(3k^2 + 8k + 5) - N(4k + 6) - 1 \\ &= N^2(k^2 + 4k + 3) + 2N - 1. \end{aligned}$$

■

Dans ce qui suit, nous poserons  $NL_h = \mathbf{Dim} L_h$  et noterons par

$$(2.2.46) \quad \{q_j, 1 \leq j \leq NL_h\}$$

les fonctions de base de  $L_h$  associées aux degrés de liberté suivants (nous distinguerons ici les sommets des éléments, des autres "noeuds", qui correspond à un maillage plus fin obtenu par la division de chaque élément  $K$  en  $k^2$  carrés égaux):

- Degrés de liberté associés au bord du maillage:
  - La valeur de la fonction en chaque sommet du domaine  $\Omega$ , noeud de type 1, (il y en a 4),

## 2.2 Analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour un problème elliptique : le problème stationnaire

---

- La valeur de la fonction en chaque noeud du bord, intérieur à une arête du maillage, noeud de type 2 (il y en a  $4kN$ ),
- Les deux valeurs de la fonction en chaque point du bord, qui est un sommet d'un élément, (différent des 4 sommets de  $\Omega$ ), noeud de type 3 (il y en a  $4(N - 1) \times 2$ ).
- Degrés de liberté associés à l'intérieur:
  - La valeur de la fonction en chaque noeud, qui est intérieur à un élément, noeud de type 4 (il y en a  $k^2N^2$ ),
  - Les deux valeurs de la fonction en chaque noeud, qui est situé à l'intérieur d'une arête, noeud de type 5 (il y en a  $2kN(N - 1) \times 2$ ),
  - Les trois valeurs  $(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)/4$ ,  $(q_1 - q_2 - q_3 + q_4)/4$ ,  $(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)/4$ , en chaque sommet intérieur du maillage, noeud de type 6 (il y en a  $(N - 1)^2 \times 3$ ).

Nous présentons dans la Figure 2.2.3 les différents types des noeuds dans  $L_h$ . Il est facile

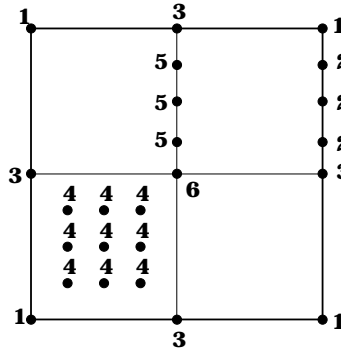


FIG. 2.2.3: Les six types des noeuds dans  $L_h$ .

de vérifier que le support de chaque fonction de base est constitué d'un seul élément  $K$ , à l'exception des fonctions de base associées aux sommets intérieurs qui ont un support sur quatre éléments.

Afin de pouvoir appliquer le lemme 2.2.1, il nous reste à prouver que les hypothèses (H0) à (H4b) sont satisfaites pour les espaces  $\underline{X}_h, \underline{M}_h$  et  $L_h$ . La section 2.2.5.3 est consacrée à la vérification de (H1), (H0), (H3), (H4) et (H4b), dans cette ordre particulier. L'hypothèse (H2) qui est la plus délicate est démontrée dans la section 2.2.5.4

### 2.2.5.3 Preuve du théorème principale : Vérification des hypothèses (H1), (H0), (H3), (H4) et (H4b)

**a - Hypothèse (H1)** La décomposition orthogonale de l'espace  $\underline{X}_h$  est une généralisation des résultats présentés pour le problème scalaire. Soient  $X_h - M_h$  les espaces des éléments finis  $Q_{k+1}^{div} - Q_k$  introduits dans le chapitre précédent. Nous avons montré que  $X_h$  admet une décomposition orthogonale  $X_h = X_h^s \oplus X_h^r$  avec  $X_h^s, X_h^r$  définis par (1.2.27). Par définition de  $\underline{X}_h$  on a

$$\underline{X}_h = X_h \times X_h,$$

d'où on obtient immédiatement la décomposition orthogonale suivante pour  $\underline{\underline{X}}_h$

$$(2.2.47) \quad \underline{\underline{X}}_h = \underline{\underline{X}}_h^s \oplus \underline{\underline{X}}_h^r,$$

avec

$$(2.2.48) \quad \underline{\underline{X}}_h^s = X_h^s \times X_h^s \text{ et } \underline{\underline{X}}_h^r = X_h^r \times X_h^r.$$

De plus, on a

$$\underline{\underline{X}}_h^r \subset Z_h.$$

Ceci est un corollaire de la propriété locale suivante (voir Lemme 1.2.3).

$$(2.2.49) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall w \in Q_k, \forall p_h \in X_h^r, (\operatorname{div} p_h, w)_K = 0.$$

**b - Hypothèse (H0)** On sait que (cf. Remarque 2.2.4), l'hypothèse (H0) est équivalente à

$$\operatorname{Ker} \tilde{B}_h^t = 0.$$

Il suffit donc de prouver que pour tout couple  $(w_h, \eta_h) \in \underline{\underline{M}}_h \times L_h$  qui satisfait

$$(2.2.50) \quad \tilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h) \equiv b(w_h, \tau_h) + d(\eta_h, \tau_h) = 0, \forall \tau_h \in \underline{\underline{X}}_h,$$

nous avons

$$w_h = 0 \text{ et } \eta_h = 0.$$

En effet, prenons d'abord  $\tau_h = \tau_h^d$  (un tenseur diagonal de  $\underline{\underline{X}}_h$ ) dans (2.2.50), on obtient alors

$$(2.2.51) \quad \tilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h^d) \equiv b(w_h, \tau_h^d) = 0, \forall \tau_h^d \in \underline{\underline{X}}_h.$$

Ce qui entraîne que  $w_h = 0$ , en utilisant les propriétés bien connues de l'espace de Raviart-Thomas. Pour conclure, il nous reste à prouver que

$$(\operatorname{as}(\tau_h), \eta_h) = 0, \forall \tau_h \in \underline{\underline{X}}_h$$

implique que  $\eta_h = 0$ . Ceci est vrai, car par définition de  $L_h$  nous avons

$$L_h = D(\underline{\underline{X}}_h) \left( \equiv \operatorname{as}(\underline{\underline{X}}_h) \right).$$

**c - Hypothèse (H3)** La vérification de cette hypothèse est aussi une généralisation immédiate des résultats obtenus pour le problème scalaire. À partir de (2.1.11), on obtient

$$a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha |\sigma_h|_{\underline{\underline{H}}}^2 = \alpha \left( |\sigma_h^s|_{\underline{\underline{H}}}^2 + |\sigma_h^r|_{\underline{\underline{H}}}^2 \right).$$

Remarquons maintenant que  $\sigma_h \in V_h$  implique que

$$\begin{cases} (a) & (\operatorname{as}(\sigma_h), \eta_h) = 0, \quad \forall \eta_h \in L_h, \\ (b) & (\operatorname{div}(\sigma_h), w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \underline{\underline{M}}_h. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} (i) & \operatorname{div} \sigma_h^s \in \underline{M}_h, \\ (ii) & (\operatorname{div} \sigma_h^s, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \underline{M}_h, \end{cases}$$

En effet, (i) est une propriété bien connue de l'espace de Raviart-Thomas et (ii) est une conséquence immédiate de (b) et du fait que  $\underline{X}_h^r \subset Z_h$ . Grâce à la propriété (i) on peut prendre  $w_h = \operatorname{div} \sigma_h^s$  dans (ii), ce qui entraîne que

$$\operatorname{div} \sigma_h^s = 0.$$

D'où on obtient  $\|\sigma_h^s\|_{\underline{X}}^2 = |\sigma_h^s|_{\underline{H}}^2$  et en conséquence

$$\forall \sigma_h \in V_h, \quad a(\sigma_h, \sigma_h) \geq \alpha \left( \|\sigma_h^s\|_{\underline{X}}^2 + |\sigma_h^r|_{\underline{H}}^2 \right).$$

**d - Hypothèses (H4) - (H4b)** Il est bien connu que les espaces  $\underline{X}_h^s$  et  $\underline{M}_h$  vérifient les propriétés d'approximation (H4) (cf. [94], [97], [32]). De plus, comme l'espace  $L_h$  contient les fonctions  $Q_{k+1}$  continues, il est clair que nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma - \eta_h\|_L = 0 \quad \forall \gamma \in L.$$

Pour vérifier maintenant l'hypothèse (H4b) (cf. Remarque 2.2.2) nous allons chercher à déterminer  $L^{(h)}$ , un sous espace de dimension finie de  $\Lambda_r^{(h)}$ , satisfaisant la propriété d'approximation (2.2.14).

**Lemme 2.2.3** *L'espace  $L^{(h)} = Q_{h,k}^d$  est un sous espace de  $\Lambda_r^{(h)}$ . De plus, il satisfait*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta^{(h)} \in L^{(h)}} \|\gamma - \eta^{(h)}\|_L = 0, \quad \forall \gamma \in L.$$

**Démonstration.**

La propriété d'approximation est bien connue. Nous allons prouver ici que  $L^{(h)} = Q_{h,k}^d$  est en effet un sous espace de  $\Lambda_r^{(h)}$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda_r^{(h)} &= \left\{ \eta^{(h)} \in L / d(\eta^{(h)}, \tau_h^r) = 0, \quad \forall \tau_h^r \in \underline{X}_h^r \right\} \\ &= \left\{ \eta^{(h)} \in L / (\operatorname{as}(\tau_h^r), \eta^{(h)}) = 0, \quad \forall \tau_h^r \in \underline{X}_h^r \right\}. \end{aligned}$$

Pour ce faire, il suffit de prouver que

$$(2.2.52) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (\operatorname{as}(\tau_h^r), \eta^{(h)})_{L^2(K)} = 0, \quad \forall (\tau_h^r, \eta^{(h)}) \in \underline{X}_h^r \times L^{(h)}.$$

Ceci est une propriété de l'espace  $\underline{X}_h^r$ . En effet, considérons pour simplifier et sans perte de généralité l'élément de référence  $K = \hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$ . Notons par  $\hat{\Psi}$  la restriction d'une fonction de  $\underline{X}_h^r$  dans l'élément  $\hat{K}$  (voir Lemme 1.2.3), elle s'écrit alors

$$\hat{\Psi} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} \hat{\psi}_{11} & \hat{\psi}_{12} \\ \hat{\psi}_{21} & \hat{\psi}_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} p_1(x_1)\sigma_k(x_2) & p_2(x_2)\sigma_k(x_1) \\ p_3(x_1)\sigma_k(x_2) & p_4(x_2)\sigma_k(x_1) \end{array} \right), \quad p_{i,1 \leq i \leq 4} \in P_{k+1} \right\},$$

où la fonction  $\sigma_k$  est définie, à une constante multiplicative près, par

$$\begin{cases} \int_0^1 \sigma_k(x)p(x)dx = 0, \quad \forall p \in P_k, \\ \sigma_k \in P_{k+1}, \quad \sigma_k \not\equiv 0. \end{cases}$$

Donc, du fait que toute fonction  $q(x_1, x_2) \in Q_k$  peut être écrite comme une combinaison linéaire de termes de la forme  $q_1(x_1)q_2(x_2)$  avec  $(q_1(x_1), q_2(x_2)) \in P_k(x_1) \times P_k(x_2)$ , on déduit que

$$\int_{\hat{K}} \sigma_k(x_2)q_1(x_1)q_2(x_2)dx_1dx_2 = \int_{\hat{K}} \sigma_k(x_1)q_1(x_1)q_2(x_2)dx_1dx_2 = 0,$$

d'où on obtient

$$\forall (i, j), i = 1, 2, j = 1, 2, \quad \left( \hat{\psi}_{ij}, q \right)_{L^2(\hat{K})} = 0, \quad \forall q \in Q_k(\hat{K}).$$

Ce qui implique en particulier (2.2.52). ■

#### 2.2.5.4 Preuve du théorème principale : Vérification de l'hypothèse (H2)

Finalement nous allons vérifier la condition inf-sup discrète. Pour ce faire, nous allons la séparer en deux parties via les lemmes suivants.

**Lemme 2.2.4** *Pour tout  $v_h \in \underline{M}_h$ , il existe un  $\tau_h^1 = \tau_h^{1,s} \in \underline{X}_h^s$  tel que*

- (i)  $(\operatorname{div} \tau_h^1, w_h) = (v_h, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h,$
- (ii)  $(as(\tau_h^1), \mu_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in L_h,$
- (iii)  $\|\tau_h^{1,s}\|_{\underline{X}} + |\tau_h^{1,r}|_{\underline{H}} = \|\tau_h^{1,s}\|_{\underline{X}} \leq c_1 \|v_h\|_{\underline{M}},$

où  $c_1$  est une constante positive indépendante de  $h$ .

**Lemme 2.2.5** *Pour tout  $\eta_h \in L_h$  il existe un  $\tau_h^2 \in \underline{X}_h$  tel que*

- (i)  $(\operatorname{div} \tau_h^2, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \underline{M}_h,$
- (ii)  $(as(\tau_h^2), \eta_h) \geq c_2 \|\eta_h\|_L^2,$
- (iii)  $\|\tau_h^{2,s}\|_{\underline{X}} + |\tau_h^{2,r}|_{\underline{H}} \leq c_3 \|\eta_h\|_L,$

avec  $c_2, c_3$  quelques constantes positives indépendantes de  $h$ .

Avant de prouver ces deux lemmes, nous allons d'abord démontrer qu'ils impliquent le théorème suivant, équivalent à la condition inf-sup.

**Théorème 2.2.6** *Pour tout  $(v_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h$  il existe un  $\tau_h \in \underline{X}_h$  tel que*

$$(\operatorname{div} \tau_h, v_h) + (as(\tau_h), \eta_h) \geq C \left( \|v_h\|_{\underline{M}} + \|\eta_h\|_L \right) \left( \|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} \right),$$

avec  $C$  une constante positive indépendante de  $h$ .



**Démonstration.**

Pour tout couple  $(v_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h$ , prenons  $\tau_h = \tau_h^1 + \tau_h^2 \in \underline{X}_h$ , avec  $\tau_h^1$  (resp.  $\tau_h^2$ ) vérifiant le Lemme 2.2.4 (resp. le Lemme 2.2.5). Nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \tau_h, v_h) + (\operatorname{as}(\tau_h), \eta_h) &= (\operatorname{div} \tau_h^1, v_h) + (\operatorname{as}(\tau_h^2), \eta_h) \quad (\text{Lemme 2.2.4(ii) et 2.2.5-(i)}) \\ &\geq \|v_h\|_{\underline{M}}^2 + c_2 \|\eta_h\|_L^2 \quad (\text{Lemme 2.2.4(i) et 2.2.5-(ii)}) \\ &\geq c \left( \|v_h\|_{\underline{M}} + \|\eta_h\|_L \right)^2 \\ &\geq C \left( \|v_h\|_{\underline{M}} + \|\eta_h\|_L \right) \left( \|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}} \right) \quad (\text{Lemme 2.2.4 et 2.2.5,(iii)}) \end{aligned}$$

■

Pour démontrer le Lemme 2.2.4, nous suivons les techniques habituelles utilisées pour prouver la condition inf-sup (cf. [32]). Plus précisément, dans le Lemme 2.2.6, on obtient tout d'abord un résultat analogue au Lemme 2.2.4 pour le problème continu. Ensuite, on conclut en exploitant les propriétés de l'espace des éléments finis Raviart-Thomas.

**Lemme 2.2.6** *Pour tout  $v \in \underline{M}$  il existe un  $\tau \in \underline{X}$  tel que*

- (i)  $\tau$  est diagonal (donc  $\operatorname{as}(\tau) = 0$ ),
- (ii)  $\operatorname{div} \tau = v$ ,
- (iii)  $\|\tau\|_{\underline{X}} \leq C_1 \|v\|_{\underline{M}}$ .

**Démonstration.**

Dans le cas d'un domaine  $\Omega$  rectangulaire, il est facile de montrer que, pour tout  $v = (v_1, v_2) \in (L^2(\Omega))^2 (= \underline{M})$ , il existe un  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in (H(\operatorname{div}; \Omega))^2 (= \underline{X})$  avec

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{22} \end{pmatrix},$$

et où  $\tau_1, \tau_2$  satisfont

$$\operatorname{div} \tau_1 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} = v_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \tau_2 = \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} = v_2.$$

En effet, introduisons  $\tilde{v}_1$  (resp.  $\tilde{v}_2$ ) l'extension par zéro de  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) à l'extérieur du domaine  $\Omega$ . Nous définissons ensuite  $\tau_{11}$  (resp.  $\tau_{22}$ ) comme une primitive de  $\tilde{v}_1$  (resp.  $\tilde{v}_2$ )

$$\tau_{11}(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \tilde{v}_1(s, x_2) ds, \quad \tau_{22}(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \tilde{v}_2(x_1, s) ds.$$

Il est alors clair, que  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  satisfont les propriétés (i), (ii) et (iii) du Lemme 2.2.6.

■

**Preuve du Lemme 2.2.4.** Soit  $v_h$  un élément quelconque de  $\underline{M}_h$ . Le Lemme 2.2.6, entraîne qu'on peut construire un  $\tau^h \in \underline{X}$  tel que

$$(2.2.53) \quad \begin{aligned} (a1) \quad & \tau^h \text{ est diagonal} \Rightarrow \text{as}(\tau^h) = 0, \\ (a2) \quad & \text{div} \tau^h = v_h, \\ (a3) \quad & \|\tau^h\|_{\underline{X}} \leq C_1 \|v_h\|_{\underline{M}}. \end{aligned}$$

Soit  $\Pi_h^s$  l'opérateur d'interpolation habituel dans l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas ( $\underline{X}_h^s$ ). On sait alors que  $\Pi_h^s$  satisfait (cf. [32])

$$(2.2.54) \quad \begin{aligned} (b1) \quad & (\text{div}(\tau - \Pi_h^s \tau), w_h) = 0, \quad \forall (\tau, w_h) \in \underline{X} \times \underline{M}_h, \\ (b2) \quad & \|\Pi_h^s \tau\|_{\underline{X}} \leq C_2 \|\tau\|_{\underline{X}}, \quad \forall \tau \in \underline{X}. \end{aligned}$$

De plus, la structure particulière des maillages réguliers que nous considérons, entraîne que

$$(2.2.55) \quad \text{Pour tout } \tau \text{ diagonal} \Rightarrow \Pi_h^s \tau \text{ est également diagonal.}$$

Posons ensuite  $\tau_h^1 = \tau_h^{1,s} = \Pi_h^s \tau^h$  et vérifions qu'il satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii) du Lemme 2.2.4. En effet,

(i) est une conséquence de (2.2.53)-(a2) et (2.2.54)-(b1).

(ii) est une conséquence de (2.2.53)-(a1) et (2.2.55).

(iii) est une conséquence de (2.2.53)-(a3) et (2.2.54)-(b2). ■

**La technique de macro-éléments** Pour prouver la deuxième partie de la condition inf-sup (le Lemme 2.2.5) nous allons utiliser la technique de macro-éléments (cf. [106]). Cette technique nous permettra d'obtenir une estimation globale par le biais des estimations locales adéquates obtenues sur des macro-éléments. Nous commençons par l'introduction de quelques notations.

Soit  $\widehat{M}$  le macro-élément de référence défini comme l'union des quatre carrés unitaires disjoints.

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \bigcup_{j=1, \dots, 4} \widehat{K}_j \text{ où } \widehat{K}_j, j = 1, \dots, 4 \text{ sont des carrés unitaires,} \\ \widehat{K}_j &= T_j(\widehat{K}), \quad \widehat{K} = [0, 1]^2 \text{ et } T_j \text{ est une translation, } T_j(\widehat{x}) = \widehat{x} + t_j, \quad t_j \in \{-1, 0\}^2 \end{aligned}$$

Chaque macro-élément courant  $M_e$  sera associé à un sommet  $S_e$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  et il est défini par

$$M_e = \bigcup_{j=1, \dots, 4} K_j^e \text{ avec } K_j^e = F_e(\widehat{K}_j) = F_e \circ T_j(\widehat{K}),$$

où  $F_e$  est une transformation affine :

$$F_e(\hat{x}) = S_e + h \hat{x}.$$

Nous avons bien évidemment

$$\Omega \subset \bigcup_{e=1, \dots, N^2} M_e,$$

et la propriété du recouvrement fini

(2.2.56) Chaque élément  $K \in \mathcal{T}_h$  est contenu dans 4 macro-éléments au plus .

Nous noterons par  $\mathcal{M}_h$  la partition de  $\Omega$  en macro-éléments.

Sur le macro-élément de référence on définit les espaces suivants qui sont les espaces locaux associés à  $\underline{X}_h$  et  $\underline{M}_h$

$$\underline{\hat{X}} = \{\hat{\tau} \in (H_0(\text{div}, \widehat{M}))^2 / \forall \widehat{K} \in \widehat{M}, \hat{\tau}|_{\widehat{K}} \in Q_{k+1}^4\},$$

$$\underline{\hat{M}} = \{\hat{w} \in (L^2(\widehat{M}))^2 / \forall \widehat{K} \in \widehat{M}, \hat{w}|_{\widehat{K}} \in Q_k^2\}.$$

où  $H_0(\text{div}, \widehat{M})$  est défini par

$$H_0(\text{div}, \widehat{M}) = \{\hat{\tau} \in H(\text{div}; \widehat{M}) / \hat{\tau} \cdot n|_{\partial \widehat{M}} = 0\}.$$

L'analogie de la décomposition orthogonale globale (2.2.47), (2.2.48), s'écrit sous la forme suivante

$$\underline{\hat{X}} = \underline{\hat{X}}^s \oplus \underline{\hat{X}}^r, \quad \underline{\hat{X}}^s = \{\hat{\tau} \in \underline{\hat{X}} / \forall \widehat{K} \in \widehat{M}, \hat{\tau}|_{\widehat{K}} \in RT_k^2\},$$

$\underline{\hat{X}}^r$  est le complément orthogonal de  $\underline{\hat{X}}^s$  dans  $\underline{\hat{X}}$  pour le produit scalaire dans  $(L^2(\widehat{M}))^4$ ,

où on rappelle que  $\underline{\hat{X}}^r$  vérifie la propriété fondamentale (cf. (2.2.49))

$$(2.2.57) \quad \forall \widehat{K} \in \widehat{M}, \forall \hat{w} \in Q_k^2, \forall \hat{\tau}^r \in \underline{\hat{X}}^r, \quad (\text{div} \hat{\tau}^r, \hat{w})_{\widehat{K}} = 0.$$

Nous introduisons ensuite l'espace local correspondant à  $L_h$

$$\widehat{L} = \text{as}(\underline{\hat{X}}).$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du Lemme 2.2.5, on peut caractériser  $\widehat{L}$  par

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{L} = \{\hat{\eta} \in L^2(\widehat{M}) / \forall \widehat{K} \in \widehat{M}, \hat{\eta}|_{\widehat{K}} \in Q_{k+1} \text{ et } \hat{\eta} \text{ satisfait (i), (ii), (iii)}\}. \\ \text{(i) } \hat{\eta} \text{ satisfait la condition de continuité (2.2.38) en chaque sommet intérieur de } \widehat{M}. \\ \text{(ii) } \hat{\eta} \text{ est continu sur } \partial \widehat{M}. \\ \text{(iii) } \hat{\eta} = 0 \text{ aux quatre sommets de } \widehat{M}. \end{array} \right.$$

La différence entre cette caractérisation et celle de  $L_h$  vient des conditions supplémentaires imposées au bord du macro-élément de référence  $\widehat{\partial M}$ . Notons que la dimension de  $\widehat{L}$  est  $NL = 4(k^2 + 4k + 3) - 9$ . Dans ce qui suit, nous noterons  $\{\widehat{\mu}_i, 1 \leq i \leq NL\}$  les fonctions de base dans  $\widehat{L}$  associées aux degrés de liberté suivants:

- la valeur de la fonction en chaque sommet appartenant au bord du macro-élément (à l'exception des sommets de  $\widehat{M}$ ), (il y en a  $8(k + 1) - 4$ ),
- la valeur de la fonction en chaque noeud situé à l'intérieur d'un élément de  $\widehat{M}$  (il y en a  $4k^2$ ),
- les deux valeurs de la fonction en chaque noeud situé sur une arête intérieure, (il y en a  $8k$ ),
- en chaque sommet intérieur, les trois quantités suivantes  $(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)/4$ ,  $(q_1 - q_2 - q_3 + q_4)/4$ ,  $(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)/4$ , avec  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  illustrés dans la Figure (2.2.1) (il y en a 3).

Nous définissons ensuite les espaces  $\underline{X}_e$ ,  $\underline{M}_e$  et  $L_e$  sur un macro-élément quelconque

$$\begin{aligned}\underline{X}_e &= \{\tau_e = \widehat{\tau} \circ F_e^{-1}, \widehat{\tau} \in \widehat{X}\}, \\ \underline{M}_e &= \{w_e = \widehat{w} \circ F_e^{-1}, \widehat{w} \in \widehat{M}\}, \\ L_e &= \{\eta_e = \widehat{\eta} \circ F_e^{-1}, \widehat{\eta} \in \widehat{L}\}.\end{aligned}$$

L'espace  $\underline{X}_e$  admet la décomposition orthogonale suivante,

$$\left| \begin{array}{l} \underline{X}_e = \underline{X}_e^s + \underline{X}_e^r, \quad \underline{X}_e^s = \{\tau_e \in \widehat{X}_e / \forall \widehat{K}_e \subset \widehat{M}_e, \tau_e|_{K_e} \in RT_k^2\} = \{\widehat{\tau} \circ F_e^{-1}, \widehat{\tau} \in \widehat{X}^s\} \\ \underline{X}_e^r \text{ est le complément orthogonal de } \underline{X}_e^s \text{ dans } \underline{X}_e \text{ pour le produit scalaire dans } (L^2(\widehat{M}_e))^4. \end{array} \right.$$

Par (2.2.57), nous avons

$$\forall K_e \in M_e, \forall w_e \in Q_k^2, \forall \tau_e^r \in \underline{X}_e^r, \quad (\text{div} \tau_e^r, w_e)_{K_e} = 0.$$

Nous rappelons que les propriétés de l'espace  $RT_k$  entraînent que:

$$\text{L'opérateur divergence est surjectif de } \underline{X}_e^s \text{ dans } \underline{M}_e.$$

Soit maintenant,  $\mu_i^e = \widehat{\mu}_i \circ F_e^{-1}$ , alors  $\{\mu_i^e, 1 \leq i \leq NL\}$  est une base de  $L_e$ . Dans ce qui suit, nous utiliserons la définition suivante

**Definition 2.2.1** Soit  $u_e$  une fonction définie dans le macro-élément  $M_e$ ,  $\widetilde{u}_e$  désignera la restriction dans  $\Omega$  de l'extension de  $u_e$  par zéro à l'extérieur de  $M_e$ .

Par construction les espaces  $\underline{X}_e$ ,  $\underline{M}_e$  et  $L_e$  satisfont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}(\tau_e, w_e, \eta_e) \in \underline{X}_e \times \underline{M}_e \times L_e &\implies (\widetilde{\tau}_e, \widetilde{w}_e, \widetilde{\eta}_e) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h, \\ (\tau_e^s, \tau_e^r) \in \underline{X}_e^s \times \underline{X}_e^r &\implies (\widetilde{\tau}_e^s, \widetilde{\tau}_e^r) \in \underline{X}_h^s \times \underline{X}_h^r.\end{aligned}$$

Pour éviter l'utilisation de notations lourdes, nous noterons par  $\|\cdot\|_{\underline{X}}$  la norme dans  $(H(\operatorname{div}))^2$  pour les espaces  $\underline{X}$ ,  $\widehat{\underline{X}}$  et  $\underline{X}_e$ . La même convention sera utilisée sur les normes  $\|\cdot\|_{\underline{M}}$ ,  $\|\cdot\|_L$  et  $|\cdot|_{\underline{H}}$ .

Le lemme suivant démontre une propriété importante de l'espace  $L_h$ .

**Lemme 2.2.7** *Tout  $\eta_h \in L_h$  peut être réécrit sous la forme suivante*

$$(2.2.58) \quad \eta_h = \sum_e \tilde{\eta}_e, \quad \eta_e \in L_e.$$

où chaque  $\eta_e$  satisfait ( $C$  étant une constante indépendante de  $h$  et de  $\eta_e$ ):

$$(2.2.59) \quad \|\eta_e\|_L \leq C \|\eta_h|_{M_e}\|_L$$

ce qui implique

$$(2.2.60) \quad \sum_{e \in \mathcal{E}} \|\eta_e\|_L^2 \leq C \|\eta_h\|_L^2$$

**Démonstration.**

(i) Nous démontrons d'abord (2.2.58). En exprimant  $\eta_h \in L_h$  dans la base (2.2.46), nous avons

$$\eta_h = \sum_{j=1}^{NL_h} \eta_j q_j.$$

Une conséquence de la partition  $\mathcal{M}_h$  est que, pour chaque  $q_j$ , il existe au moins un macro-élément  $M_e$  (on en choisit un qu'on note  $e = E(j)$ ) et une fonction de base  $\mu_i^e$  ( $i = I(e, j)$ ) de  $L_e$  telle que

$$q_j = \tilde{\mu}_i^e.$$

Par commodité, on notera  $\zeta_i^e = \eta_j$ . Donc, tout  $\eta_h$  dans  $L_h$  peut être écrit comme

$$\eta_h = \sum_{j=1}^{NL_h} \zeta_i^e \cdot \tilde{\mu}_i^e, \quad \text{où } e = E(j), \quad i = I(e, j)$$

En introduisant maintenant les indices  $\mathcal{I}_1^e = \{I(e, j), \forall j \text{ tel que } E(j) = e\}$ , la dernière relation s'écrit

$$\eta_h = \sum_e \sum_{i \in \mathcal{I}_1^e} \zeta_i^e \tilde{\mu}_i^e,$$

ce qui entraîne (2.2.58), si on pose

$$(2.2.61) \quad \eta_e = \sum_{i \in \mathcal{I}_1^e} \zeta_i^e \mu_i^e.$$

(ii) L'inégalité (2.2.59) est une conséquence du fait que (cf. (2.2.61))  $\eta_e$  est défini seulement en fonction des degrés de liberté de  $\eta_h$  appartenant au macro-élément  $M_e$  (le nombre de ces degrés de liberté étant borné indépendamment de  $h$ ).

(iii) Pour prouver (2.2.60), on utilise la propriété de recouvrement fini (2.2.56)

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \|\eta_h|_{M_e}\|_L^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{j=1,4} \|\eta_h|_{K_j^e}\|_L^2 \leq 4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\eta_h|_K\|_L^2 = 4\|\eta_h\|_L^2.$$

**Preuve du Lemme 2.2.5.** La démonstration repose sur les résultats locaux suivants:

$$(\widehat{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\eta} \in \widehat{L}, \exists \hat{\tau} = \hat{\tau}^s + \hat{\tau}^r \in \widehat{\underline{X}} = \widehat{\underline{X}}^s + \widehat{\underline{X}}^r \quad \text{tel que} \\ (i) \quad (\operatorname{div} \hat{\tau}, \hat{w})_{\widehat{K}} = 0, \quad \forall \hat{w} \in \widehat{M}, \forall \widehat{K} \in \widehat{M}, \\ (ii) \quad \operatorname{as}(\hat{\tau}) = \hat{\eta}, \quad \forall \hat{\mu} \in \widehat{L}, \\ (iii) \quad \|\hat{\tau}^s\|_{\underline{X}} + |\hat{\tau}^r|_{\underline{H}} \leq C \|\hat{\eta}\|_L, \end{array} \right.$$

**Lemme 2.2.8** *Supposons que  $(\widehat{P}_1)$  est satisfait, alors le Lemme 2.2.5 est vrai.*

**Démonstration.**

Selon le Lemme 2.2.7, on sait que  $\eta_h \in L_h$  peut être écrit comme suit

$$\eta_h = \sum_e \tilde{\eta}_e, \quad \eta_e \in L_e.$$

Les relations locales (i) et (ii) entraînent que, pour chaque  $\eta_e$ , il existe un  $\tau_e \in \underline{X}_{M_e}$  (pour  $\eta_e = \hat{\eta} \circ F_e^{-1}$ , on choisit  $\tau_e = \hat{\tau} \circ F_e^{-1}$ , où  $\hat{\tau}$  satisfait les propriétés  $(\widehat{P}_1)$ ), tel que, (soit  $K_e = F_e(\widehat{K})$ ),

$$(a) \quad \forall w_e \quad (= \hat{w} \circ F_e^{-1}) \in \underline{M}_e, \quad (\operatorname{div} \tau_e, w_e)_{K_e} = h (\operatorname{div} \hat{\tau}, \hat{w})_{\widehat{K}} = 0,$$

$$(b) \quad \operatorname{as}(\tau_e) = \eta_e \quad (\operatorname{as}(\tilde{\tau}_e) = \tilde{\eta}_e).$$

Soit maintenant  $\tau_e = \tau_e^r + \tau_e^s$ , comme l'opérateur divergence est surjectif de  $\underline{X}_e^s$  dans  $\underline{M}_e$ , on peut choisir  $w_e = \operatorname{div} \tau_e^s$  dans (a), ce qui implique  $\operatorname{div} \tau_e^s = 0$ . En utilisant ensuite (iii), on obtient

$$(c) \quad \|\tau_e^s\|_{\underline{X}} + |\tau_e^r|_{\underline{H}} = |\tau_e^s|_{\underline{H}} + |\tau_e^r|_{\underline{H}} = h (|\hat{\tau}^s|_{\underline{H}} + |\hat{\tau}^r|_{\underline{H}}) \leq c h \|\hat{\eta}\|_L \leq C \|\eta_e\|_L.$$

Définissons  $\tau_h^2$  par

$$\tau_h^2 = \sum_e \tilde{\tau}_e.$$

On remarque tout d'abord que les relations (a) et (b) entraînent

$$(\operatorname{div} \tau_h^2, w_h) = \sum_{K_e} (\operatorname{div} \tilde{\tau}_e, w_h) = \sum_e (\operatorname{div} \tau_e, w_h|_{M_e \cap \Omega})_{K_e} = 0, \quad \forall w_h \in M_h,$$

$$\operatorname{as}(\tau_h^2) = \sum_e \operatorname{as}(\tilde{\tau}_e) = \sum_e \tilde{\eta}_e = \eta_h.$$

## 2.2 Analyse de la nouvelle famille d'éléments finis mixtes pour un problème elliptique : le problème stationnaire

D'autre part, on a  $\tau_h^2 = \tau_h^{2,s} + \tau_h^{2,r}$ ,  $(\tau_h^{2,s}, \tau_h^{2,r}) \in \underline{\underline{X}}_h^s \times \underline{\underline{X}}_h^r$ , avec  $\tau_h^{2,s} = \sum_e \tilde{\tau}_e^s$  et  $\tau_h^{2,r} = \sum_e \tilde{\tau}_e^r$ .

D'où, par (c) et (2.2.60) on obtient

$$(iii) \quad \|\tau_h^{2,s}\|_{\underline{\underline{X}}} + |\tau_h^{2,r}|_{\underline{\underline{H}}} \leq \sum_e (\|\tau_e^s\|_{\underline{\underline{X}}} + |\tau_e^r|_{\underline{\underline{H}}}) \leq C \sum_e \|\eta_e\|_L \leq C' \|\eta_h\|_L.$$

■

Pour conclure il nous reste à prouver que les propriétés  $(\widehat{P}_1)$  sont effectivement satisfaites. Nous introduisons ici l'opérateur rot défini par

$$\varphi \in H^1 \rightarrow \text{rot } \varphi = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^t \in (L^2)^2,$$

qui satisfait

$$\text{div}(\text{rot } \varphi) = 0.$$

L'idée est de chercher à construire  $\hat{\tau}$  ( $\hat{\tau} = \hat{\tau}^s + \hat{\tau}^r$ ) dans un sous espace  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^s \oplus \mathcal{N}^r$  de  $\widehat{\underline{\underline{X}}}$  ( $\mathcal{N}^s \subset \widehat{\underline{\underline{X}}}^s$  et  $\mathcal{N}^r \subset \widehat{\underline{\underline{X}}}^r$ ) pour lequel la propriété (i) du Lemme 2.2.8 est automatiquement satisfaite. Plus précisément, on cherche  $\hat{\tau}$  sous la forme suivante

$$\hat{\tau} = \hat{\Phi}(\hat{\eta}),$$

où  $\hat{\Phi}$  est une application linéaire de  $\widehat{L}$  dans  $\mathcal{N}$ . Comme l'espace  $\widehat{L}$  est de dimension finie la propriété (iii) sera alors automatiquement satisfaite. Il faudra donc déterminer  $\hat{\Phi}$  de façon à satisfaire la propriété (ii).

Construisons d'abord l'espace  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^s \oplus \mathcal{N}^r$ . Nous rappelons que la propriété (i) sera satisfaite pour tout  $\hat{\tau} = \hat{\tau}^s + \hat{\tau}^r$  si et seulement si  $\mathbf{div} \hat{\tau}^s = 0$ . De plus, la propriété (ii) est indépendante de  $\hat{\tau}_{11}$  et  $\hat{\tau}_{22}$ . Ce qui justifie le choix suivant pour  $\mathcal{N}^s$  et  $\mathcal{N}^r$

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{N}^s = \left\{ \hat{\tau} = (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) = (\text{rot } \varphi_1, \text{rot } \varphi_2), \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \widehat{V} \times \widehat{V} \right\}, \\ \text{avec } \widehat{V} = \left\{ \varphi \in H_0^1(\widehat{M}) / \varphi|_{\widehat{K}} \in Q_{k+1}, \forall \widehat{K} \in \widehat{M} \right\}, \\ \mathcal{N}^r = \left\{ \hat{\tau}^r \in \underline{\underline{X}}^r / \hat{\tau}^r \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} 0 & \hat{\psi}_{12} \\ \hat{\psi}_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{array} \right.$$

Remarquons que  $\varphi \in \widehat{V} \rightarrow \text{rot } \varphi$  est injectif, et donc on obtient

$$\mathbf{Dim} \mathcal{N}^s = N_s = 2\mathbf{Dim} \widehat{V} = 8k^2 + 8k + 2.$$

De plus, il est facile de calculer la dimension de  $\mathcal{N}^r$  (en utilisant la caractérisation de l'espace  $\underline{\underline{X}}^r$ )

$$\mathbf{Dim} \mathcal{N}^r = N_r = 8k + 4$$

Ainsi, le nombre de degrés de liberté définissant  $\hat{\tau}$  est donné par

$$N_f = N_r + N_s = 8k^2 + 16k + 6.$$

D'autre part, (ii) est tout simplement un système linéaire de  $N_{eq}$  équations, que  $\hat{\tau}$  doit satisfaire. Un simple calcul montre

$$N_{eq} = \mathbf{Dim} \hat{L} = 4k^2 + 16k + 7.$$

Remarquons que  $N_{eq} \leq N_f$  si et seulement si

$$k \geq 1.$$

En pratique, on écrit le système des équations linéaires correspondant à (ii), en exprimant  $\hat{\tau}$  dans la base  $\{\hat{\tau}_l^s, 1 \leq l \leq N_s\}$ ,  $\{\hat{\tau}_m^r, 1 \leq m \leq N_r\}$  de  $\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^r$  et  $\hat{\eta}$  dans la base  $\{\hat{\eta}_q, 1 \leq q \leq N_{eq}\}$  de  $\hat{L}$ . On écrit dans ce cas,

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \sum_{l=1}^{N_s} x_l^s \hat{\tau}_l^s + \sum_{m=1}^{N_r} x_m^r \hat{\tau}_m^r \\ \hat{\eta} &= \sum_{q=1}^{N_{eq}} b_q \hat{\eta}_q \end{aligned}$$

Introduisons  $\hat{x}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{N_f}$  dont les  $N_s$  premières composantes sont les  $x_l^s$  tandis que les  $N_r$  autres sont les  $x_m^r$ , ainsi que  $\hat{b}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{N_{eq}}$  de composantes  $b_q$ , alors (ii) se réécrit

$$(2.2.62) \quad \hat{A}\hat{x} = \hat{b}$$

où  $\hat{A}$  est une matrice  $N_f \times N_{eq}$  qui peut se calculer explicitement dans la base formée des  $\{\hat{\tau}_l^s\}$ ,  $\{\hat{\tau}_m^r\}$  et  $\{w_q\}$ .

Supposons que nous soyons capable de montrer que  $\hat{A}$  est de rang plein, c'est à dire qu'elle est surjective. Alors, nous savons que (2.2.62) a au moins une solution  $\hat{x}$ , non nécessairement unique, lorsque  $N_f > N_{eq}$ . Nous pouvons par exemple choisir la solution de norme minimale dans  $\mathbb{R}^{N_f}$  à l'aide du pseudo inverse de  $\hat{A}$

$$\hat{x} = \hat{A}^* (\hat{A}\hat{A}^*)^{-1} \hat{b}$$

On définit alors l'application  $\hat{\Phi}$  par

$$\hat{\tau} = \hat{\Phi}(\hat{\eta}) \iff \hat{x} = \hat{A}^* (\hat{A}\hat{A}^*)^{-1} \hat{b}.$$

**Les cas  $k = 1$  et  $k = 2$ .** Il reste à vérifier que  $\hat{A}$  est surjective. Il semble difficile de donner une preuve générale et abstraite pour tout  $k$  (en tous cas, on n'y est pas arrivé). Toutefois, une démonstration spécifique peut être construite à l'aide d'un programme informatique pour les valeurs petites de  $k$ . En fait, pour  $k = 1, 2$ , nous avons formé  $\hat{A}$  et calculé son rang à l'aide de MAPLE. Les résultats sont les suivants:

- Pour  $k = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\hat{A}$  est  $(27 \times 30)$  et  $\text{rang}(\hat{A}) = 27$  ( $\widehat{P}_1$  est vrai).
- Pour  $k = 2$ ,  $n = 2$ ,  $\hat{A}$  est  $(57 \times 70)$  et  $\text{rang}(\hat{A}) = 57$  ( $\widehat{P}_1$  est vrai).

Selon le Lemme 2.2.8, nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

**Lemme 2.2.9** *Le Lemme 2.2.5 et l'hypothèse (H2) sont satisfaites pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .*



**Le cas  $k = 0$**  . Dans ce cas le nombre d'équations ( $= 7$ ) est plus grand que le nombre de degrés de liberté ( $= 6$ ). (En d'autres termes la matrice  $\hat{A}$  est  $7 \times 6$  et son rang est égal à 6). Nous devons donc modifier la preuve pour les éléments de plus bas degré. Soit  $\hat{L}^*$  le sous espace de  $\hat{L}$  (de dimension 6), qui est l'image de  $\mathcal{N}$  par l'application linéaire as. On doit dans ce cas remplacer la propriété  $(\hat{P}_1)$  par

$$(\widehat{P}_1^*) \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\eta} \in \hat{L}^*, \exists \hat{\tau} = \hat{\tau}^s + \hat{\tau}^r \in \hat{X} = \hat{X}^s + \hat{X}^r \text{ tel que} \\ (i) \quad (\text{div } \hat{\tau}, \hat{w})_{\hat{K}} = 0, \quad \forall \hat{w} \in \hat{M}, \quad \forall \hat{K} \in \hat{M}, \\ (ii) \quad \text{as}(\hat{\tau}) = \hat{\eta}, \\ (iii) \quad \|\hat{\tau}^s\|_X + |\hat{\tau}^r|_H \leq C \|\hat{\eta}\|_L, \end{array} \right.$$

Il n'est pas difficile de caractériser  $\hat{L}^*$ . On trouve (on omet les calculs)

$$\hat{L}^* = \left\{ \hat{\eta} \in \hat{L}, / \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 \hat{\eta}|_{K_j}(S_j^i) = 0 \right\}$$

Cet espace est généré par les 6 fonctions de bases  $\{\hat{\mu}_1^d, \hat{\mu}_2^d\} \cup \{\hat{\mu}_1^c, \hat{\mu}_2^c, \hat{\mu}_3^c, \hat{\mu}_4^c\}$ , où les fonctions  $\hat{\mu}_i^d, i = 1, 2$  sont discontinues et représenté sur la Figure 2.2.4. Les 4 fonctions  $\hat{\mu}_i^c, i = 1, 4$

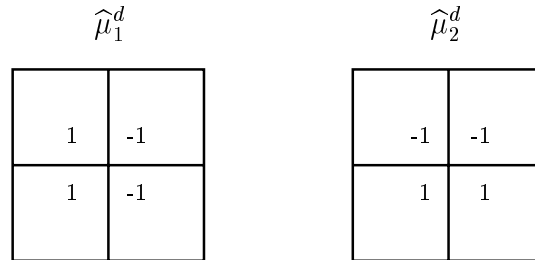


FIG. 2.2.4: Les fonctions de base  $\hat{\mu}_1^d$  et  $\hat{\mu}_2^d$ .

sont continues et représentées sur la Figure 2.2.5-à gauche. Nous complétons l'espace  $\hat{L}$  en

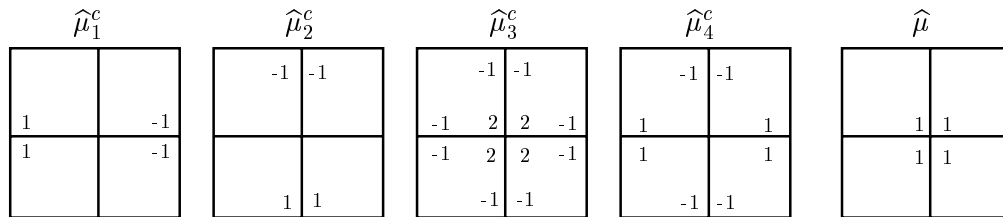


FIG. 2.2.5: Les fonctions de base  $\hat{\mu}_j^c, j = 1, \dots, 4$  (à gauche) et  $\hat{\mu}$  (à droite).

ajoutant les fonctions continues usuelles de  $Q_1$ , soient les  $\hat{\mu}$  associées au centre de chaque macro-élément, voir Fig. 2.2.5-à droite. Sur les figures 2.2.4 et 2.2.5 nous avons représenté les fonctions  $\hat{\mu}_i^d, i = 1, 2, \hat{\mu}_i^c, i = 1, 4$  et  $\hat{\mu}$  en indiquant pour chaque élément les 4 valeurs de la fonction à ses sommets (par convention, cette valeur est omise si elle est égale à 0).

À partir de  $\hat{L}^*$  nous définissons pour chaque macro-élément

$$L_e^* = \{\eta_e = \hat{\eta} \circ F_e^{-1}, \hat{\eta} \in \hat{L}^*\}.$$

et nous introduisons l'espace

$$L_h^* = \{\eta_h = \sum_e \tilde{\eta}_e, \eta_e \in L_e^*\}$$

À l'aide des mêmes arguments que ceux utilisés précédemment pour montrer les lemmes 2.2.7 et 2.2.8, nous obtenons le résultat suivant: pour tout  $\eta_h \in L_h^*$  il existe un  $\tau_h^2 \in \underline{X}_h$  tel que

$$(i) \quad (\text{div } \tau_h^2, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \underline{M}_h,$$

$$(ii) \quad (\text{as}(\tau_h^2), \eta_h) \geq C_2 \|\eta_h\|_L^2,$$

$$(iii) \quad \|\tau_h^{2,s}\|_{\underline{X}} + |\tau_h^{2,r}|_{\underline{H}} \leq C_3 \|\eta_h\|_L,$$

avec  $C_2, C_3$  des constantes positives indépendantes de  $h$ . Ceci n'est rien d'autre que le Lemme 2.2.5 à condition de montrer que  $L_h^* = L_h$ . Puisque

$$L_h = \{\eta_h = \sum_e \tilde{\eta}_e, \eta_e \in L_e, \}$$

il reste à démontrer que chaque  $\tilde{\eta}_e$  est dans  $L_h^*$ . Comme chaque  $\eta_e \in L_e$  peut être écrit comme

$$\eta_e = \eta_e^* + \alpha_e \mu_e \quad \text{avec} \quad \eta_e^* \in L_e^* \quad \text{et} \quad \mu_e = \hat{\mu} \circ F_e^{-1}$$

il suffit de montrer que  $\tilde{\mu}_e \in L_h^*$ . Comme nous le verrons, ceci est vrai grâce au recouvrement entre les macro-éléments.

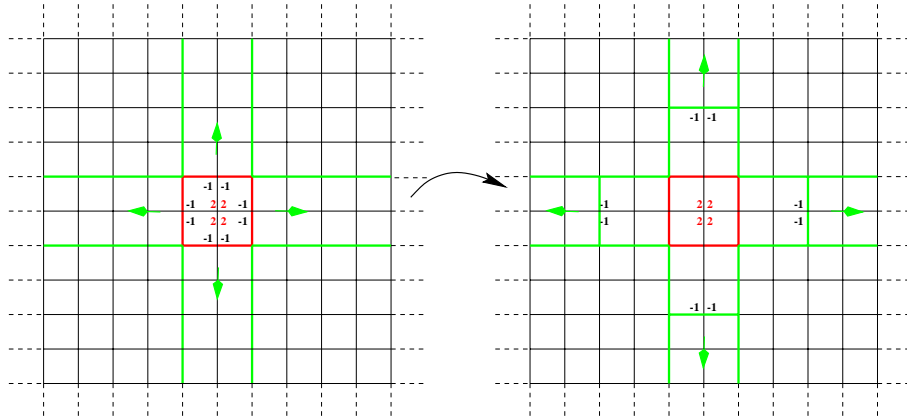
Pour la démonstration on considère le maillage  $\mathcal{T}_h$  comme un sous-ensemble d'un maillage infini et uniforme de  $\mathbb{R}^2$  et on identifie l'indice  $e$  au couple  $(i, j)$ , le point  $S_e$  désignant le sommet de coordonnées  $(ih, jh)$ . Dans ce qui suit, nous travaillerons avec les fonctions de  $L_h^*$  associées à ce maillage infini. Nous les représenterons sur les figures par leur quatre valeurs en chaque sommet. Soit  $S_e$  l'un des sommet de  $\mathcal{T}_h$ , nous noterons  $(\mu_k^d)^e = \hat{\mu}_k^d \circ F_e^{-1}$  pour  $k = 1, 2$  et  $(\mu_k^c)^e = \hat{\mu}_k^c \circ F_e^{-1}$  pour  $k = 1, 4$ . Soit  $t_1 = (1, 0)$  et  $t_2 = (0, 1)$ , nous représentons sur les Figures 2.2.6 les fonctions:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_e^1 &= (\tilde{\mu}_3^c)^e + (\tilde{\mu}_1^d)^{(e+t_1)} - (\tilde{\mu}_1^d)^{(e-t_1)} + (\tilde{\mu}_2^d)^{(e+t_2)} - (\tilde{\mu}_2^d)^{(e-t_2)} \\ &\quad + (\tilde{\mu}_1^c)^{(e+2t_1)} - (\tilde{\mu}_1^c)^{(e-2t_1)} + (\tilde{\mu}_2^c)^{(e+2t_2)} - (\tilde{\mu}_2^c)^{(e-2t_2)} \end{aligned}$$

Par induction, il est clair que la restriction à  $\Omega$  des fonctions de  $L_h^*$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu}_3^c)^e &+ \sum_{k=1}^M \left( (\tilde{\mu}_1^d)^{(e+kt_1)} - (\tilde{\mu}_1^d)^{(e-kt_1)} + (\tilde{\mu}_2^d)^{(e+kt_2)} - (\tilde{\mu}_2^d)^{(e-kt_2)} \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\mu}_1^c)^{(e+2kt_1)} - (\tilde{\mu}_1^c)^{(e-2kt_1)} + (\tilde{\mu}_2^c)^{(e+2kt_2)} - (\tilde{\mu}_2^c)^{(e-2kt_2)} \right) \end{aligned}$$

coïncide pour  $M$  assez grand avec la fonction  $2\tilde{\mu}_e$ . ■


 FIG. 2.2.6: Les fonctions  $(\tilde{\mu}_3^c)^e$  à gauche et  $\tilde{\eta}_e^1$  à droite.

## 2.3 Estimations d'erreur pour le problème d'évolution

Nous allons montrer dans cette section comment on peut en utilisant la théorie abstraite développée dans la section 2.2.4 obtenir des estimations d'erreur pour le problème d'évolution (2.1.17), (2.1.13), (2.1.14). Nous suivons la même démarche que celle utilisée dans la section 1.3 du chapitre précédent.

Considérons la formulation variationnelle associée au problème de l'élastodynamique dans  $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}} \times L$ ,

$$(2.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \gamma) : [0, T] \rightarrow \underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}} \times L \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau) + \tilde{b}(v(t), \gamma(t); \tau) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}, \\ \frac{d}{dt} c(v(t), w) - \tilde{b}(w, \eta; \sigma(t)) = (f, w), \quad \forall (w, \eta) \in \underline{\underline{M}} \times L, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (2.1.13). Soient  $\underline{\underline{X}}_h$ ,  $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$ ,  $\underline{\underline{M}}_h$  les espaces correspondant à la nouvelle famille d'éléments finis mixtes (2.1.30),  $L_h$  étant défini par (2.2.34) et considérons le problème discret suivant

$$(2.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \gamma_h) : [0, T] \rightarrow \underline{\underline{X}}_h \times \underline{\underline{M}}_h \times L_h \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma_h(t), \tau_h) + \tilde{b}(v_h(t), \gamma_h(t); \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{\underline{X}}_h, \\ \frac{d}{dt} c(v_h(t), w_h) - \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma_h(t)) = (f, w_h), \quad \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{\underline{M}}_h \times L_h, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\sigma_h(t=0) = \sigma_{h,0}, \quad v_h(t=0) = v_{h,0}.$$

Selon la théorie classique des EDO, nous obtenons le résultat suivant

**Théorème 2.3.1** *Soit  $f \in C^0(0, T; \underline{\underline{M}}_h)$ , alors le problème (2.3.2) admet une solution unique  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h)$  dans  $C^1(0, T; \underline{\underline{X}}_h) \times C^1(0, T; \underline{\underline{M}}_h) \times C^0(0, T; L_h)$ .*

Notre objectif est ici d'étudier l'erreur entre la solution du problème continu (2.3.1) et celle du problème discret (2.3.2).

**Remarque 2.3.1** *Comme nous l'avons déjà remarqué, en pratique, on résout numériquement le problème (2.1.24) avec la symétrie forte (équivalent au problème (2.3.2)). Malgré le fait que les nouveaux éléments finis mixtes ont été construits afin de permettre la condensation de masse, nous considérons ici le problème discret sans condensation de masse.*

### 2.3.1 L'erreur de projection elliptique

En suivant la technique décrite dans [42, 48] nous définissons la projection elliptique suivante

$$(2.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Pi_h(\sigma, v, \gamma) = (\hat{\sigma}_h, \hat{v}_h, \hat{\gamma}_h) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que} \\ a(\sigma - \hat{\sigma}_h, \tau_h) + \tilde{b}(v - \hat{v}_h, \gamma - \hat{\gamma}_h; \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h, \\ \tilde{b}(w_h, \eta_h; \sigma - \hat{\sigma}_h) = 0, \quad \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h, \end{array} \right.$$

avec  $(\sigma, v, \gamma) \in \underline{X} \times \underline{M} \times L$ . Nous introduisons ensuite les notations

$$\mathcal{C}^{m,r} = C^m(0, T; \underline{H}) \cap C^r(0, T; \underline{X}),$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} |||\sigma - \hat{\sigma}_h||| = \|\sigma - \hat{\sigma}_h^s\|_{\underline{X}} + |\hat{\sigma}_h^r|_{\underline{H}}, \\ \|[(\sigma, v, \gamma) - \Pi_h(\sigma, v, \gamma)]\| = |||\sigma - \hat{\sigma}_h||| + \|v - \hat{v}_h\|_{\underline{M}} + \|\gamma - \hat{\gamma}_h\|_L. \end{array} \right.$$

On peut alors prouver le théorème suivant

**Lemme 2.3.1** *Soit  $(\sigma, v, \gamma)(t)$  la solution du problème (2.3.1). De plus, on suppose  $(\sigma, v, \gamma)(t) \in C^{1,0} \times C^1(0, T; \underline{M}) \times C^0(0, T; L)$ , on obtient alors*

(i) *Pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ , le problème (2.3.3) admet une solution unique*

$$\Pi_h(\sigma, v, \gamma)(t) = (\hat{\sigma}_h^s + \hat{\sigma}_h^r, \hat{v}_h, \hat{\gamma}_h)(t) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h.$$

*De plus, nous avons les estimations d'erreur suivantes*

$$\|[(\sigma, v, \gamma) - \Pi_h(\sigma, v, \gamma)](t)\| \leq C \mathcal{E}_h(\sigma, \partial_t \sigma, v, \gamma)(t),$$

*avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(\sigma, \partial_t \sigma, v, \gamma)(t) &= \left\{ \inf_{\tau_h^s \in \underline{X}_h^s} \|\sigma(t) - \tau_h^s\|_{\underline{X}} + \inf_{w_h \in \underline{M}_h} \|v(t) - w_h\|_{\underline{M}} \right. \\ &\quad + \inf_{\eta_h \in L_h} \|\gamma(t) - \eta_h\|_L + \inf_{z_h^s \in \underline{X}_h^s} |\mathcal{A}(\partial_t \sigma)(t) - z_h^s|_{\underline{H}} \\ &\quad \left. + \inf_{\eta^{(h)} \in \Lambda_r^{(h)}} \|\gamma(t) - \eta^{(h)}\|_L \right\}, \end{aligned}$$

*ce qui montre en particulier que  $|||\sigma - \hat{\sigma}_h|||$ ,  $\|v - \hat{v}_h\|_{\underline{M}}$  et  $\|\gamma - \hat{\gamma}_h\|_L$  tendent vers zéro uniformément en temps ( $t \in [0, T]$ ).*

(ii) De même, si  $(\sigma, v, \gamma)(t) \in C^{k+1,k} \times C^{k+1}(0, T; \underline{M}) \times C^k(0, T; L)$ , on a

$$\left\| \left[ \left( \partial_t^k \sigma, \partial_t^k v, \partial_t^k \gamma \right) - \Pi_h \left( \partial_t^k \sigma, \partial_t^k v, \partial_t^k \gamma \right) \right] (t) \right\| \leq C \mathcal{E}_h \left( \partial_t^k \sigma, \partial_t^{k+1} \sigma, \partial_t^k v, \partial_t^k \gamma \right) (t),$$

$$\text{avec } \partial_t^k g = \frac{\partial^k g}{\partial t^k}.$$

**Démonstration.**

La démonstration est une application directe du Théorème 2.2.2. Il suffit de remarquer qu'on peut réécrire le problème (2.3.1) sous la forme suivante

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} a(\sigma(t), \tau) + \tilde{b}(v(t), \gamma(t); \tau) = a(\sigma(t), \tau) - \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau), & \forall \tau \in \underline{X}, \\ \tilde{b}(w, \eta; \sigma(t)) = -(f, w) + \frac{d}{dt} c(v(t), w), & \forall (w, \eta) \in \underline{M} \times L. \end{cases}$$

Le problème (2.3.3) est alors une approximation du problème (2.3.4), car on peut écrire (2.3.3) comme il suit

$$(2.3.5) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \Pi_h(\sigma, v, \gamma)(t) = (\hat{\sigma}_h, \hat{v}_h, \hat{\gamma}_h)(t) \in \underline{X}_h \times \underline{M}_h \times L_h \text{ tels que} \\ a(\hat{\sigma}_h, \tau_h) + \tilde{b}(\hat{v}_h, \hat{\gamma}_h; \tau_h) = a(\sigma(t), \tau_h) - \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau_h), & \forall \tau_h \in \underline{X}_h, \\ \tilde{b}(w_h, \eta_h; \hat{\sigma}_h) = -(f, w_h) + \frac{d}{dt} c(v(t), w_h), & \forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h. \end{cases}$$

Pour appliquer le Théorème 2.2.2, ou plus précisément sa généralisation (voir Remarque 2.2.6), il suffit de vérifier que le terme

$$a(\sigma(t), \tau_h) - \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau_h),$$

peut se réécrire comme un produit scalaire dans  $\underline{H}$ . En effet, nous avons

$$a(\sigma(t), \tau_h) - \frac{d}{dt} a(\sigma(t), \tau_h) = (\mathcal{A}(\sigma(t) - \partial_t \sigma(t)), \tau_h)_{\underline{H}}.$$

On obtient l'expression de  $\mathcal{E}_h$  en remplaçant  $g$  par  $\mathcal{A}(\sigma(t) - \partial_t \sigma(t))$  dans (2.2.32) (Remarque 2.2.6). De même, si la solution  $(\sigma, v, \gamma)$  est suffisamment régulière en temps, on peut dériver les problèmes (2.3.4) et (2.3.5) par rapport au temps  $t$  et ensuite appliquer le Théorème 2.2.2 pour obtenir (ii). ■

**2.3.2 Obtention des estimations d'erreur pour le problème d'évolution à partir des estimations d'erreur pour le problème elliptique**

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

**Théorème 2.3.2** Soit  $(\sigma, v, \gamma)$  la solution du problème (2.3.1) et  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h)$  celle du problème (2.3.2) avec les conditions initiales

$$(2.3.6) \quad (\sigma_{0,h}, v_{0,h}) = \Pi_h(\sigma_0, v_0).$$

Si  $(\sigma, v, \gamma) \in C^{3,2} \times C^3(0, T; \underline{M}) \times C^2(0, T; L)$  et  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in C^2(0, T; \underline{X}_h) \times C^2(0, T; \underline{M}_h \times C^1(0, T; L_h))$ , nous avons les résultats de convergence suivants  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\|(\sigma - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}} \rightarrow 0 ; |\sigma_h^r(t)|_{\underline{H}} \rightarrow 0 ; \|(v - v_h)(t)\|_{\underline{M}} \rightarrow 0 ; \|(\gamma - \gamma_h)(t)\|_L \rightarrow 0.$$

Plus précisément on obtient les estimations d'erreur

$$\begin{aligned} \|(\sigma - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r(t)|_{\underline{H}} &\leq C \{ \mathcal{E}_h(\sigma, \partial_t \sigma, v, \gamma)(t) + \mathcal{E}_h(\partial_t \sigma, \partial_t^2 \sigma, \partial_t v, \partial_t \gamma)(t) \\ &+ \int_0^t (\mathcal{E}_h(\sigma, \partial_t \sigma, v, \gamma)(s) + \mathcal{E}_h(\partial_t \sigma, \partial_t^2 \sigma, \partial_t v, \partial_t \gamma)(s) \\ &+ \mathcal{E}_h(\partial_t^2 \sigma, \partial_t^3 \sigma, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \gamma)(s)) ds \}, \\ \|((v - v_h)(t), (\gamma - \gamma_h)(t))\|_{\underline{M} \times L} &\leq C \{ \mathcal{E}_h(\sigma, \partial_t \sigma, v, \gamma)(t) + \mathcal{E}_h(\partial_t \sigma, \partial_t^2 \sigma, \partial_t v, \partial_t \gamma)(t) \\ &+ \int_0^t (\mathcal{E}_h(\partial_t \sigma, \partial_t^2 \sigma, \partial_t v, \partial_t \gamma)(s) \\ &+ \mathcal{E}_h(\partial_t^2 \sigma, \partial_t^3 \sigma, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \gamma)(s)) ds \}. \end{aligned}$$

De plus si on suppose que la solution  $(\sigma, v, \gamma)$  est suffisamment régulière, c.à.d  $(\sigma, v, \gamma) \in C^3(0, T; (H^{k+1}(\text{div}, \Omega))^2) \times C^3(0, T; (H^{k+1}(\Omega))^2) \times C^2(0, T; H^{k+1}(\Omega))$  on obtient (via les résultats d'interpolation habituels cf. [97])

$$(2.3.7) \quad \|(\sigma - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r(t)|_{\underline{H}} + \|((v - v_h)(t), (\gamma - \gamma_h)(t))\|_{\underline{M} \times L} \leq C(t) h^k,$$

avec

$$\begin{aligned} C(t) = O \left( \|\sigma\|_{C^3(0,t; (H^{k+1}(\text{div}, \Omega))^2)} + \|\mathcal{A} \partial_t \sigma\|_{C^2(0,t; (H^{k+1}(\Omega))^4)} + \|v\|_{C^3(0,t; (H^{k+1}(\Omega))^2)} \right. \\ \left. + \|\gamma\|_{C^3(0,t; H^{k+1}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème nous allons utiliser le lemme suivant.

**Lemme 2.3.2** Soit  $(\sigma, v, \gamma)$  la solution de (2.3.1) et  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h)$  celle du problème approché (2.3.2) avec les conditions initiales (2.3.6). Soit ensuite  $\Pi_h(\sigma, v, \gamma) = (\hat{\sigma}_h^s + \hat{\sigma}_h^r, \hat{v}_h, \hat{\gamma}_h)$  la projection elliptique définie par (2.3.3). On pose  $\varepsilon_h = \sigma - \hat{\sigma}_h$ ,  $\delta_h = v - \hat{v}_h$ .

• Si  $(\sigma, v, \gamma) \in C^{2,1} \times C^2(0, T; \underline{M}) \times C^1(0, T; L)$ , alors il existe une constante  $C_1$ , indépendante de  $h$  telle que  $\forall t \in [0, T]$

$$(2.3.8) \quad \begin{aligned} |(\hat{\sigma}_h^s - \sigma_h^s)(t)|_{\underline{H}} + |(\hat{\sigma}_h^r - p_h^r)(t)|_{\underline{H}} + \|(\hat{v}_h - v_h)(t)\|_{\underline{M}} &\leq \\ C_1 \int_0^t \left( |\partial_t \varepsilon_h|_{\underline{H}}(s) + |\varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t \delta_h(s)\|_{\underline{M}} \right) ds. \end{aligned}$$

• De plus si  $(\sigma, v, \gamma) \in C^{3,2} \times C^3(0, T; \underline{M}) \times C^2(0, T; L)$  et  $(\sigma_h, v_h, \gamma_h) \in C^2(0, T; \underline{X}_h) \times C^2(0, T; M_h \times C^1(0, T; L_h))$ , alors il existe des constantes  $C_2, C_3$ , indépendantes de  $h$  telles

que  $\forall t \in [0, T]$

(2.3.9)

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \|((\widehat{v}_h - v_h)(t), (\widehat{\gamma}_h - \gamma_h)(t))\|_{\underline{M} \times L} \equiv \|(\widehat{\gamma}_h - \gamma_h)(t)\|_L + \|(\widehat{v}_h - v_h)(t)\|_L \\
 & \leq C_2 \left\{ |\partial_t \varepsilon_h(t)|_{\underline{H}} + |\varepsilon_h(t)|_{\underline{H}} + \int_0^t \left( |\partial_t^2 \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + |\partial_t \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t^2 \delta_h(s)\|_{\underline{M}} \right) ds \right\}, \\
 (ii) \quad & \|(\widehat{\sigma}_h^s - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}} \leq C_3 \left\{ \|\partial_t \delta_h(t)\|_{\underline{M}} + \int_0^t \left( |\partial_t^2 \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + |\partial_t \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + |\varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t^2 \delta_h(s)\|_{\underline{M}} + \|\partial_t \delta_h(s)\|_{\underline{M}} \right) ds \right\}.
 \end{aligned}$$

**Démonstration.**

La démonstration de ce lemme est pratiquement identique à celle du Lemme 1.3.2. Plus précisément, l'estimation (2.3.8) est obtenue par le biais des estimations d'énergie, en définissant

$$E_h = \frac{1}{2} (a(\widehat{\sigma}_h - \sigma_h, \widehat{\sigma}_h - \sigma_h) + c(\widehat{v}_h - v_h, \widehat{v}_h - v_h)).$$

Pour l'estimation (2.3.9)-(ii) on utilise la condition inf-sup écrite sous la forme équivalente suivante

$$\forall \tau_h \in \underline{X}_h, \exists c \text{ indépendante de } h, \text{ telle que :}$$

$$|\tau_h|_{X/\text{Ker } \widetilde{B}_h} \leq \frac{1}{c} \sup_{(w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h} \frac{\widetilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h)}{\|(w_h, \eta_h)\|_{\underline{M} \times L}},$$

avec

$$|\tau_h|_{\underline{X}} = \|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}}.$$

La seule différence concerne la démonstration de (2.3.9)-(i) et elle vient du fait que  $\gamma_h$  et  $v_h$  ne jouent pas le même rôle dans le problème (2.3.2). En fait, le terme  $(\widehat{\gamma}_h - \gamma_h)$  n'apparaît pas dans l'énergie, car l'inconnue  $\gamma_h$  contribue seulement dans les termes statiques (sans dérivée en temps).

Nous montrons ici seulement l'estimation (2.3.9)-(i). Pour ce faire nous allons utiliser la condition inf-sup

$$\forall (w_h, \eta_h) \in \underline{M}_h \times L_h, \exists c \text{ indépendante de } h, \text{ telle que}$$

$$\|(w_h, \eta_h)\|_{\underline{M} \times L} \leq \frac{1}{c} \sup_{\tau_h \in \underline{X}_h} \frac{\widetilde{b}(w_h, \eta_h; \tau_h)}{\|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}}}.$$

pour  $w_h = \widehat{v}_h - v_h$  et  $\eta_h = \widehat{\gamma}_h - \gamma_h$

$$(2.3.10) \quad \|(\widehat{v}_h - v_h, \widehat{\gamma}_h - \gamma_h)\|_{\underline{M} \times L} \leq \frac{1}{c} \sup_{\tau_h \in \underline{X}_h} \frac{\widetilde{b}(\widehat{v}_h - v_h, \widehat{\gamma}_h - \gamma_h; \tau_h)}{\|\tau_h^s\|_{\underline{X}} + |\tau_h^r|_{\underline{H}}}.$$

Prenons la différence entre la première équation du problème (2.3.2) et (2.3.5), on obtient alors

$$\widetilde{b}(\widehat{v}_h - v_h, \widehat{\gamma}_h - \gamma_h; \tau_h) = -a(\partial_t(\sigma - \widehat{\sigma}_h), \tau_h) + a(\sigma - \widehat{\sigma}_h, \tau_h) - a(\partial_t(\widehat{\sigma}_h - \sigma_h), \tau_h), \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h.$$

En reportant ceci dans (2.3.10) et en utilisant ensuite la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , on a

$$(2.3.11) \quad \begin{aligned} \|((\widehat{v}_h - v_h)(t), (\widehat{\gamma}_h - \gamma_h)(t))\|_{\underline{M} \times L} &\leq \frac{\|a\|}{c} \left( |\partial_t \varepsilon_h(t)|_{\underline{H}} \right. \\ &\quad \left. + |\varepsilon_h(t)|_{\underline{H}} + |\partial_t(\widehat{\sigma}_h - \sigma_h)(t)|_{\underline{H}} \right). \end{aligned}$$

Jusqu'à maintenant, nous avons seulement utilisé la régularité  $C^2$  de la solution. Pour majorer le terme  $|\partial_t(\widehat{\sigma}_h - \sigma_h)|_{\underline{H}}$ , nous aurions besoin de  $C^3$ . En effet, l'idée est d'appliquer (2.3.8) (remplacer  $\sigma_h$  par  $\partial_t \sigma_h$ ,  $\widehat{\sigma}_h$  par  $\partial_t \widehat{\sigma}_h$  et ainsi suite...). Plus précisément, nous avons

$$(2.3.12) \quad |\partial_t(\widehat{\sigma}_h - \sigma_h)(t)|_{\underline{H}} \leq C \int_0^t \left( |\partial_t^2 \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + |\partial_t \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t^2 \delta_h(s)\|_{\underline{M}} \right) ds.$$

Finalement, en combinant (2.3.11), (2.3.12) on obtient

$$\begin{aligned} \|((\widehat{v}_h - v_h)(t), (\widehat{\gamma}_h - \gamma_h)(t))\|_{\underline{M} \times L} &\leq C_2 \left\{ |\partial_t \varepsilon_h(t)|_{\underline{H}} \right. \\ &\quad \left. + |\varepsilon_h(t)|_{\underline{H}} \int_0^t \left( |\partial_t^2 \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + |\partial_t \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t^2 \delta_h(s)\|_{\underline{M}} \right) ds \right\}. \end{aligned}$$

■

**Preuve du Théorème 2.3.2.** La démonstration repose sur les résultats des lemmes 2.3.1 et 2.3.2.

- Estimations d'erreur sur  $\|\sigma - \sigma_h^s\|_{\underline{X}}(t) + |\sigma_h^r|_{\underline{H}}(t)$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|(\sigma - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}} + |\sigma_h^r(t)|_{\underline{H}} &= \|(\sigma - \widehat{\sigma}_h^s + \widehat{\sigma}_h^s - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}} + |(\sigma_h^r - \widehat{\sigma}_h^r + \widehat{\sigma}_h^r)(t)|_{\underline{H}} \\ &\leq \underbrace{\|(\sigma - \widehat{\sigma}_h^s)(t)\|_{\underline{X}} + |\widehat{\sigma}_h^r(t)|_{\underline{H}}}_{\text{selon le Lemme 2.3.1-(i)}} + \underbrace{\|(\widehat{\sigma}_h^s - \sigma_h^s)(t)\|_{\underline{X}}}_{\text{par (2.3.9)-(ii)}} \\ &\quad + \underbrace{|\widehat{\sigma}_h^r - \sigma_h^r(t)|_{\underline{H}}}_{\text{par (2.3.8)}}. \end{aligned}$$

Pour estimer le premier terme on utilise la relation (i) du Lemme 2.3.1, ce qui entraîne

$$\|(\sigma - \widehat{\sigma}_h^s)(t)\|_{\underline{X}} + |\widehat{\sigma}_h^r(t)|_{\underline{H}} \leq \mathcal{E}_h(\sigma, \partial_t \sigma, v, \gamma)(t).$$

Nous allons utiliser (2.3.9)-(ii) pour estimer le deuxième terme, ceci nécessite une estimation sur

$$|\partial_t \varepsilon_h|_{\underline{H}}, \quad |\partial_t^2 \varepsilon_h|_{\underline{H}}, \quad \|\partial_t \delta_h\|_{\underline{M}} \quad \text{et} \quad \|\partial_t^2 \delta_h\|_{\underline{M}}.$$

Pour cela, on réécrit la relation (ii) du Lemme 2.3.1 pour  $k = 1$  et  $2$ , on obtient alors

$$(2.3.13) \quad \begin{aligned} |\partial_t \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t \delta_h(s)\|_{\underline{M}} &\leq \mathcal{E}_h(\partial_t \sigma, \partial_t^2 \sigma, \partial_t v, \partial_t \gamma)(s), \\ |\partial_t^2 \varepsilon_h(s)|_{\underline{H}} + \|\partial_t^2 \delta_h(s)\|_{\underline{M}} &\leq \mathcal{E}_h(\partial_t^2 \sigma, \partial_t^3 \sigma, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \gamma)(s). \end{aligned}$$



Finalement pour le troisième terme on utilise (2.3.8). Dans ce cas les termes  $|\partial_t \varepsilon_h|_{\underline{H}}$ ,  $\|\partial_t \delta_h\|_{\underline{M}}$  apparaissent et pour les estimer on applique le Lemme 2.3.1 pour  $k = 1$ , ou plus précisément la relation (2.3.13).

- Estimations d'erreur sur  $\|(v - v_h, \gamma - \gamma_h)\|_{\underline{M} \times L}(t)$

Comme précédemment nous avons

$$\begin{aligned} \|((v - v_h)(t), (\gamma - \gamma_h)(t))\|_{\underline{M} \times L} &= \|(v - \widehat{v}_h + \widehat{v}_h - v_h)(t)\|_{\underline{M}} + \|(\gamma - \widehat{\gamma}_h + \widehat{\gamma}_h - \gamma_h)(t)\|_L \\ &\leq \underbrace{\|(v - \widehat{v}_h)(t)\|_{\underline{M}} + \|(\gamma - \widehat{\gamma}_h)(t)\|_L}_{\text{selon le Lemme 2.3.1-(i)}} + \underbrace{\|(\widehat{v}_h - v_h)(t)\|_{\underline{M}} + \|(\widehat{\gamma}_h - \gamma_h)(t)\|_L}_{\text{par 2.3.9-(i)}}. \end{aligned}$$

Le premier terme est encore une fois estimé par la relation (i) du Lemme 2.3.1. Pour le deuxième on utilise (2.3.9)-(i), dans ce cas les termes  $|\partial_t \varepsilon_h|_{\underline{H}}$ ,  $|\partial_t^2 \varepsilon_h|_{\underline{H}}$ ,  $\|\partial_t \delta_h\|_{\underline{M}}$  et  $\|\partial_t^2 \delta_h\|_{\underline{M}}$  interviennent. Finalement les estimations (2.3.7) sont obtenues par les résultats d'interpolation des espaces  $\underline{X}_h^s, \underline{M}_h, L_h$  (cf. [97], Remarque 2.2.5.3 et Lemme 2.2.3). ■



## Chapitre 3

# Étude de dispersion cas élastique

Nous allons étudier dans ce chapitre les propriétés d'approximation des nouveaux éléments finis mixtes en termes d'une analyse de dispersion numérique sur des maillages réguliers. Cette analyse nous permettra de comparer notre méthode avec avec des méthodes numériques déjà existantes.

### Introduction

Les analyses de type éléments finis telles que celles que nous avons menées aux chapitres précédents ont l'avantage d'être générales. Elles sont en particulier valables dans le cas des coefficients variables et complètes dans le sens où elles permettent d'estimer, dans des normes précises, toute solution d'énergie finie, qui est satisfaisant pour le mathématicien. Ce type d'analyse a toutefois le désavantage de ne pas apporter d'information quantitative, les constantes intervenant dans les estimations d'erreur étant mal connues. Ceci est frustrant pour l'ingénieur qui aimerait avoir un guide pour choisir les paramètres de discrétisation.

Les études de dispersion ont pour but de remplir partiellement cette fonction. Elles ont été introduites notamment pour analyser les schémas aux différences finies utilisés pour l'approximation des phénomènes d'ondes linéaires. Ces méthodes sont directement liées à l'analyse de Fourier des schémas aux différences finies : elles exploitent explicitement la nature régulière et uniforme de la grille de discrétisation. Elles sont limitées aux équations dans tout l'espace en milieu homogène et ne s'intéressent qu'à un type particulier de solution : les ondes planes harmoniques. L'utilisation de la transformation de Fourier permet de justifier cette approche, toute solution d'énergie finie pouvant s'écrire comme la superposition d'ondes planes. Par ailleurs ces études nous permettent d'obtenir des estimations d'erreur dans le cas des équations en milieu homogène infini (cf. [109]) (par une approche très différente de celle des chapitres 1 et 2).

Pour les schémas semi-discretisés en espace ou encore quand on considère des schémas centrés et réversibles en temps, l'effet principal de la discrétisation sur la propagation des ondes planes est une modification de leur vitesse de phase qui se met à dépendre de la longueur d'onde : il s'agit du phénomène de la dispersion numérique. On s'intéresse alors au rapport entre la vitesse exacte et la vitesse numérique qui est une fonction qui dépend d'une part du rapport entre la longueur d'onde et le pas de discrétisation  $h$  (c'est la dispersion numé-

rique), d'autre part de la direction de propagation de l'onde (c'est l'anisotropie numérique). Les courbes de dispersion nous permettent alors de quantifier l'erreur commise sur la vitesse de phase et de calibrer le pas de discrétisation en fonction d'une erreur  $\varepsilon$  fixée et de la longueur d'onde (en pratique la longueur d'onde minimale pour le problème considéré). On peut ainsi également comparer des schémas de même précision ce qu'une analyse éléments finis ne permet pas.

Il faudrait aussi parler, mais cela est plus marginal, de l'erreur de polarisation, spécifique au cas de systèmes comme celui de l'élastodynamique. Nous nous bornerons à l'étudier pour le cas des schémas d'ordre 2 en 2D (voir section 3.1.4.1).

Comme par essence notre méthode d'éléments finis mixtes est associée à des maillages réguliers uniformes, il est possible de réinterpréter les schémas résultants en termes de différences finies. On peut alors éliminer les inconnues associées au tenseur de contraintes et obtenir un schéma du second ordre relatif au champ des déplacements.

Raisonnons tout d'abord dans le cas bidimensionnel. À l'ordre  $Q_1 - Q_0$ , on obtient un schéma à 9 points du même type que ceux obtenus avec une méthode des différences finies standard ou avec une méthode d'éléments finis  $Q_1$  en déplacement [10]. Les analyses de dispersion de ces deux schémas sont bien connues. Nous allons comparer ici notre schéma  $Q_1 - Q_0$  à chacun de ces deux schémas. Bien entendu, l'anisotropie (numérique) entraîne que la dispersion dépend de la direction de propagation. Donc, la comparaison la plus pertinente consiste à comparer les différents schémas dans la direction de dispersion maximale (qui dépend a priori du schéma). Pour les ordres plus élevés l'interprétation en termes des différences finies est un peu plus délicate : tous les noeuds du maillage ne jouent plus le même rôle. Plus précisément on distingue 4 types des noeuds pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et 9 types des noeuds pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ . Ainsi les schémas numériques se comportent comme un système du second ordre dont la dimension est supérieur à celle du problème continu (qui est de dimension 2 en l'occurrence). Cette dimension est 8 (4 types de noeuds  $\times$  2 composantes du déplacement) pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et 18 (9 types de noeuds  $\times$  2 composantes du déplacement) pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ . L'analyse de Fourier montre alors que des modes numériques purement parasites sont générés par la discrétisation : 6 pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et 16 pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ . L'analyse de dispersion, plus complexe que dans le cas du schéma  $Q_1 - Q_0$ , doit être concentrée sur les 2 modes non parasites qui constituent effectivement des approximations des modes continues.

Par cette approche, nous montrerons des phénomènes de “super-convergence en dispersion” en établissant que l'erreur de dispersion est en  $O(h^2)$  pour le schéma  $Q_1 - Q_0$ , en  $O(h^4)$  pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et en  $O(h^6)$  pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ , ce qui renforce a priori l'utilisation des méthodes d'ordre élevé. Les concurrents naturels de nos schémas  $Q_{k+1} - Q_k$  sont ceux que l'on obtient en utilisant la méthode d'éléments finis  $Q_{k+1}$  avec intégration numérique. Cette méthode a été proposée et étudiée par N. Tordjman [109] dans le cas de l'équation des ondes. L'analyse des schémas correspondant à l'application de cette méthode à l'élastodynamique est à notre connaissance nouvelle pour  $k = 1, 2$ . Nous présentons ici l'analyse de dispersion correspondant à ces schémas que nous utiliserons comme référence pour les schémas  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_3 - Q_2$ .

Signalons que, bien que l'extension en milieu anisotrope soit conceptuellement sans difficulté, nous nous restreindrons pour des raisons de simplicité (très relative d'ailleurs) au cas des milieux isotropes. Pour ces milieux, en 3D, on distingue alors 3 types de modes : une onde P et deux ondes S mais seulement deux vitesses  $V_p$  et  $V_s$ , les deux modes de type S étant en fait un mode double. Le phénomène nouveau par rapport au 2D - outre la complexification des calculs - est que la discrétisation casse cette structure. En effet, au niveau discret on se retrouve avec deux ondes S distinctes (et donc deux vitesses de propagation numériques) - sauf dans certaines directions de propagation, à savoir les directions parallèles à l'un des plans des coordonnées.

Pour des raisons évidentes liées à la complexité grandissante des calculs, et malgré l'aide de MAPLE, nous limiterons notre étude de dispersion 3D au cas du schéma  $Q_1 - Q_0$  que nous comparons avec les schémas de différences finies et des éléments finis  $Q_1$  en déplacement.

Avant d'entrer dans le détails, insistons ici sur le fait qu'il faut se garder de tirer de conclusions définitives des études qui vont suivre. Pour avoir des informations exploitables, il faudra également prendre en compte la discrétisation en temps, objet du chapitre suivant.

### 3.1 Le problème bidimensionnel

#### 3.1.1 Interprétation des schémas en maillage régulier

Nous allons ici écrire les schémas numériques obtenus lorsque l'on utilise un maillage uniforme un petit carré de côté  $h$  (voir fig. 3.1.1). Tout élément de la discrétisation est de la forme,

$$[x_1^l, x_1^{l+1}] \times [x_2^m, x_2^{m+1}] = h \times h$$

Nous avons représenté sur la figure 3.1.2 les d.d.l correspondant aux éléments finis  $Q_{k+1} - Q_k$ ,

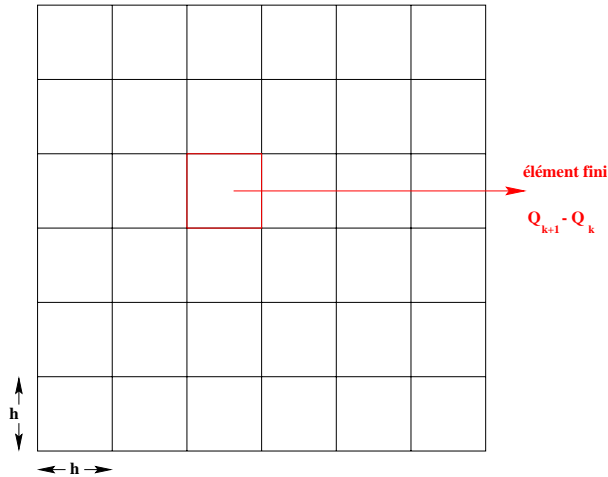


FIG. 3.1.1: Le maillage uniforme dans le cas bidimensionnel.

pour  $k = 0, 1$  et  $2$ . Sur ce type de maillages, on peut réinterpréter la méthode des éléments finis  $Q_{k+1} - Q_k$  comme un schéma aux différences finies. Ceci nous permettra de mener l'analyse de dispersion sur les sections suivantes.

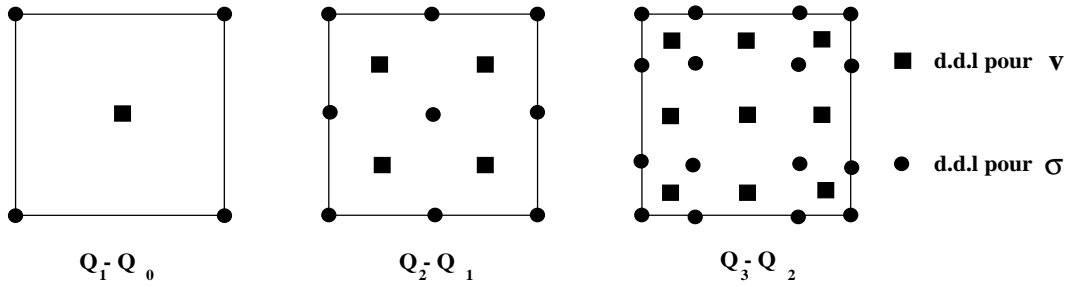


FIG. 3.1.2: Les degrés de liberté pour les éléments finis  $Q_1 - Q_0$ ,  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_3 - Q_2$ .

3.1.1.1 Le schéma  $Q_1 - Q_0$  et ces concurrents

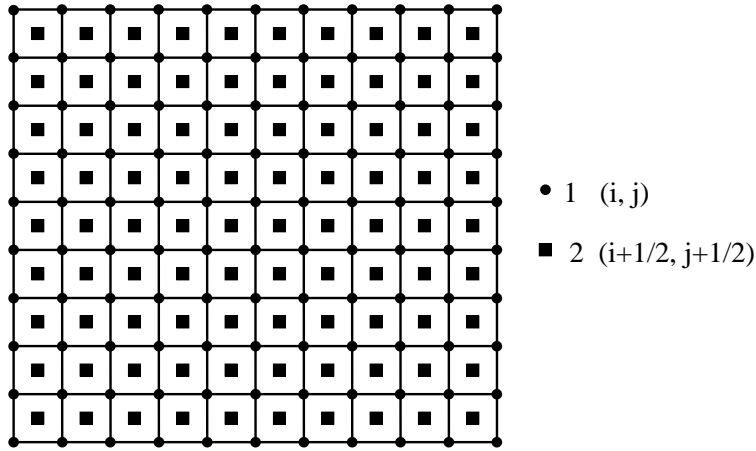


FIG. 3.1.3: Le maillage pour l'élément fini  $Q_1 - Q_0$ .

Dans ce cas, il y a périodicité de deux types de points (cf. figure(3.1.3)) : les points notés 1 et 2 qui seront respectivement indexés par  $(i, j)$  et  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ . À chaque point de type 1 correspondent 5 degrés de liberté associés au tenseur des contraintes  $\sigma$  :  $\sigma_{11}^h$  (haut),  $\sigma_{11}^b$  (bas),  $\sigma_{22}^d$  (droite),  $\sigma_{22}^g$  (gauche) et  $\sigma_{12}$ . Aux points de type 2 correspondent deux degrés de liberté, associés aux deux composantes de la vitesse :  $v_1$  et  $v_2$ .

Les équations semi-discrétisées en espace qu'on obtient à partir du système (2.1.24) sont les suivantes :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \frac{d(v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{dt} &= \frac{1}{2h} \left( (\sigma_{11})_{i+1,j}^h - (\sigma_{11})_{i,j}^h + (\sigma_{11})_{i+1,j+1}^b - (\sigma_{11})_{i,j+1}^b \right) \\ &+ \frac{1}{2h} \left( (\sigma_{12})_{i,j+1} - (\sigma_{12})_{i,j} + (\sigma_{12})_{i+1,j+1} - (\sigma_{12})_{i+1,j} \right), \end{cases}$$

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \frac{d(v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{dt} &= \frac{1}{2h} \left( (\sigma_{12})_{i+1,j} - (\sigma_{12})_{i,j} + (\sigma_{12})_{i+1,j+1} - (\sigma_{12})_{i,j+1} \right) \\ &+ \frac{1}{2h} \left( (\sigma_{22})_{i,j+1}^d - (\sigma_{22})_{i,j}^d + (\sigma_{22})_{i+1,j+1}^g - (\sigma_{22})_{i+1,j}^g \right), \end{cases}$$

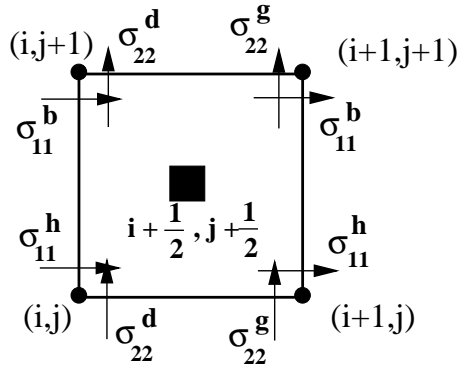


FIG. 3.1.4: Les d.d.l qui interviennent dans les équations (3.1.1), (3.1.2).

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} \frac{d(\sigma_{12})_{i,j}}{dt} = \frac{V_s^2}{2h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \\ \quad + \frac{V_s^2}{2h} \left( (v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (v_2)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

et

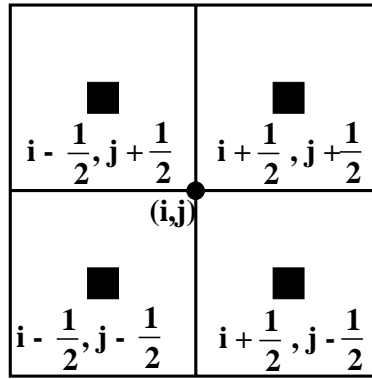


FIG. 3.1.5: Les d.d.l qui interviennent dans l'équation (3.1.3).

$$(3.1.4) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^h)_{i,j} \\ (\sigma_{11}^b)_{i,j} \\ (\sigma_{22}^d)_{i,j} \\ (\sigma_{22}^g)_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & b & b \\ c & a & b & b \\ b & b & a & c \\ b & b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix},$$

avec

$$B_1 = \frac{1}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right), \quad B_2 = \frac{1}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right)$$

$$B_3 = \frac{1}{h} \left( (v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right), \quad B_4 = \frac{1}{h} \left( (v_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right)$$

et où les constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  dépendent des vitesses des ondes de pression ( $V_p$ ) et de cisaillement ( $V_s$ )

$$(3.1.5) \quad a = \frac{2V_p^4 - (V_p^2 - 2V_s^2)^2}{2V_p^2}, \quad b = \frac{V_p^2 - 2V_s^2}{2}, \quad c = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{2V_p^2}$$

Nous rappelons que, dans le cas d'un milieu élastique homogène isotrope,  $V_p$  et  $V_s$  sont données par

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

On constate que grâce à la condensation de masse, on peut éliminer les inconnues associées au tenseur des contraintes. En effet, en reportant (3.1.3) et (3.1.4) dans (3.1.1) et (3.1.2), on obtient le système du deuxième ordre en temps suivant:

$$(3.1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{V_p^2}{h^2} \left[ (1 - 2\alpha) \left( (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} - 2(v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ \quad + \alpha \left( (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \right) \\ \quad \left. + \alpha \left( (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{1}{2}} - 2(v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ \quad + \frac{V_s^2}{h^2} \left[ (1 - 2\beta) \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ \quad + \beta \left( (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \\ \quad \left. + \beta \left( (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_1)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ \quad + \frac{V_p^2 - V_s^2}{4h^2} \left[ (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \right. \\ \quad \left. + (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right.$$



$$(3.1.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (v_2)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= \frac{V_s^2}{h^2} \left[ (1 - 2\beta) \left( (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} - 2(v_2)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &+ \beta \left( (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_2)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} + (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \right) \\ &+ \beta \left. \left( (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{1}{2}} - 2(v_2)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &+ \frac{V_p^2}{h^2} \left[ (1 - 2\alpha) \left( (v_2)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_2)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_2)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &+ \alpha \left( (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_2)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_2)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \alpha \left. \left( (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}} - 2(v_2)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}} + (v_2)_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &+ \frac{V_p^2 - V_s^2}{4h^2} \left[ (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{3}{2}, j-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \right.$$

avec  $\alpha = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{4V_p^4}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ .

### Une classe général de schémas d'ordre 2

En notant  $v_1$  et  $v_2$  les suites  $(v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$  et  $(v_2)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$ , le système des équations (3.1.6) et (3.1.7) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante;

$$(3.1.8) \quad \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_p^2 \mathcal{D}_{\alpha,1}^2 + V_s^2 \mathcal{D}_{\beta,2}^2 & (V_p^2 - V_s^2) D_{12} \\ (V_p^2 - V_s^2) D_{12} & V_p^2 \mathcal{D}_{\alpha,2}^2 + V_s^2 \mathcal{D}_{\beta,1}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}_h} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

L'opérateur  $\mathbb{K}_h$  apparaît ici comme un opérateur agissant dans l'espace des suites indexées par deux indices (ici  $i$  et  $j$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$   $((v_1, v_2))$ . Dans (3.1.8), nous avons introduit

$$\mathcal{D}_{\alpha,1}^2 f(i, j) = \alpha D_1^2 f(i, j - 1) + (1 - 2\alpha) D_1^2 f(i, j) + \alpha D_1^2 f(i, j + 1)$$

avec  $D_1^2$  l'opérateur classique centré des différences finies :

$$D_1^2 f(i, j) = \frac{f(i + 1, j) - 2f(i, j) + f(i - 1, j)}{h^2}$$

Nous avons illustré les deux opérateurs  $\mathcal{D}_{\alpha,1}^2$  et  $\mathcal{D}_{\beta,2}^2$  sur la figure 3.1.6. Ainsi, notre système entre dans une **classe plus générale de schémas numériques d'ordre 2**, dépendants des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ( $0 \leq \alpha \leq 1/2$ ,  $0 \leq \beta \leq 1/2$ ). En particulier pour :

- $\alpha = \beta = 0$  on retrouve le schéma des différences finies.
- $\alpha = \beta = \frac{1}{6}$  on retrouve le schéma des éléments finis  $Q_1$ .

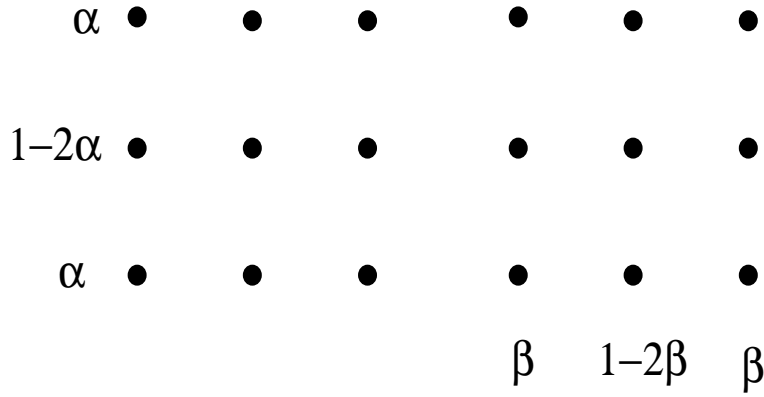


FIG. 3.1.6: Les opérateurs  $\mathcal{D}_{\alpha,1}^2$  (à gauche) et  $\mathcal{D}_{\beta,2}^2$  (à droite).

- $\alpha = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{4V_p^4}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  on retrouve notre schéma.

**Remarque 3.1.1** 1. Il est important de remarquer que pour le nouveau schéma le paramètre  $\alpha$  dépend du coefficient de Poisson  $\nu$  et donc du milieu élastique considéré. C'est à dire qu'il s'agit d'un schéma qui s'adapte au milieu de propagation.

2. Le système (3.1.8) est une approximation des équations de l'élastodynamique écrit en déplacement :

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_p^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + V_s^2 \frac{d^2}{dx_2^2} & (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_1 dx_2} \\ (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_1 dx_2} & V_p^2 \frac{d^2}{dx_2^2} + V_s^2 \frac{d^2}{dx_1^2} \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

### 3.1.2 L'élément fini $Q_2 - Q_1$ et son concurrent

Dans ce cas, pour la vitesse  $v$  il y a périodicité de quatre types de points, les points notés 1, 2, 3 et 4 (cf. figure 3.1.7), qui seront respectivement indexés par  $(p - \zeta, q - \zeta)$ ,  $(p + \zeta, q - \zeta)$ ,  $(p + \zeta, q + \zeta)$  et  $(p - \zeta, q + \zeta)$  avec  $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ . Pour le tenseur des contraintes  $\sigma$ , il y a périodicité de quatre types de points: les noeuds (1), les milieux des côtés horizontaux (2) et verticaux (3) des éléments et les centres des éléments (4) (cf. figure 3.1.7). Les points notés 1, 2, 3 et 4 seront respectivement indexés par  $(i, j)$ ,  $(p, j)$ ,  $(p, q)$  et  $(i, q)$  avec

$$i = p - \frac{1}{2}, \quad j = q - \frac{1}{2}.$$

Le nombre des d.d.l associés à chaque point varie entre 3 et 5. Plus précisément nous avons (voir figures 3.1.9 et 3.1.10) :

- 5 d.d.l pour les points de type 1 :  $\sigma_{11}^h$  (haut),  $\sigma_{11}^b$  (bas),  $\sigma_{22}^d$  (droite),  $\sigma_{22}^g$  (gauche) et  $\sigma_{12}$ ,
- 4 d.d.l pour les points de type 2 :  $\sigma_{11}^h$ ,  $\sigma_{11}^b$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ ,

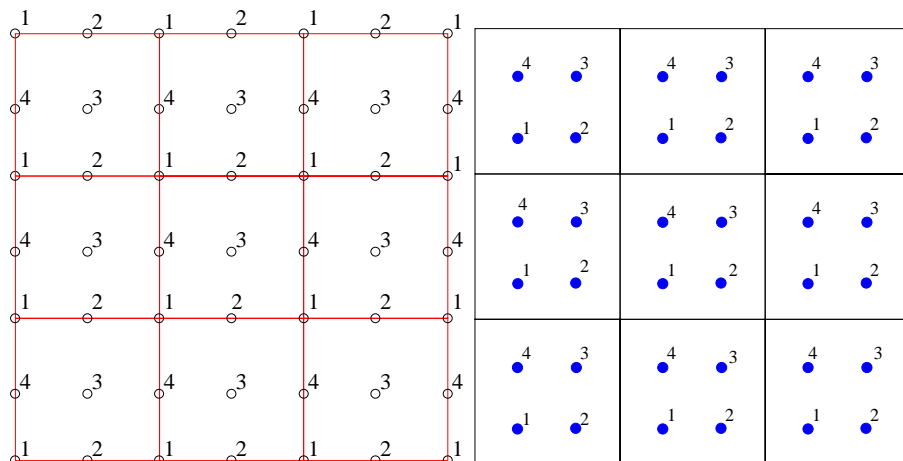


FIG. 3.1.7: Les maillages en  $\sigma$  et  $v$  pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ .

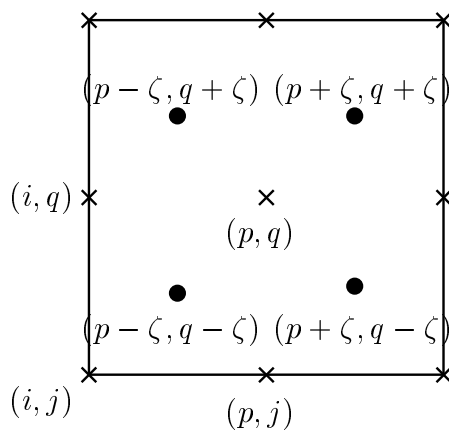


FIG. 3.1.8: Notations de points.

- 3 d.d.l pour les points de type 3 :  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ ,
- et 4 d.d.l pour les points de type 4 :  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}^d$ ,  $\sigma_{22}^g$  et  $\sigma_{12}$ .

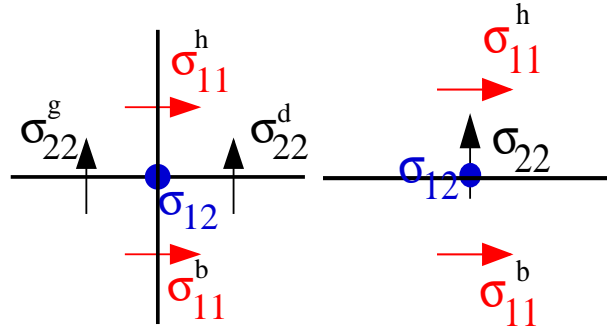


FIG. 3.1.9: Les degrés de liberté associés au noeud  $(i, j)$  à gauche et au noeud  $(p, j)$  à droite.

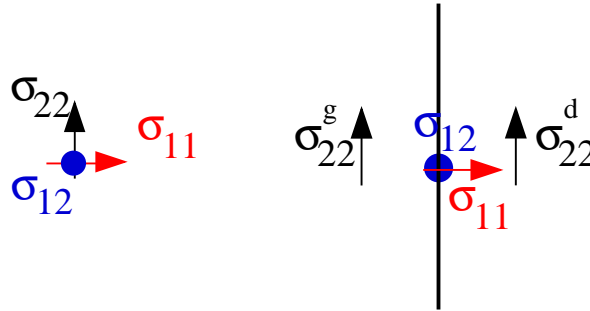


FIG. 3.1.10: Les degrés de liberté associés au noeud  $(p, q)$  à gauche et au noeud  $(i, q)$  à droite.

Les équations semi-discrétisées en espace associées à cet élément sont données en Annexe A.1.

Comme dans le cas de l'élément de plus bas degré, on peut éliminer  $\sigma$  et obtenir un système différentiel en  $v$  d'ordre deux en temps.

Notre maillage régulier peut se voir alors comme un réseau périodique infini de cellules  $(p, q)$  contenant quatre types de points (cf. figure 3.1.11). A chaque cellule  $(p, q)$  est associé un vecteur

$$V_{p,q} = \begin{bmatrix} (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} \\ (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} \\ (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} \\ (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} \\ (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} \\ (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} \\ (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} \\ (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} \end{bmatrix}$$

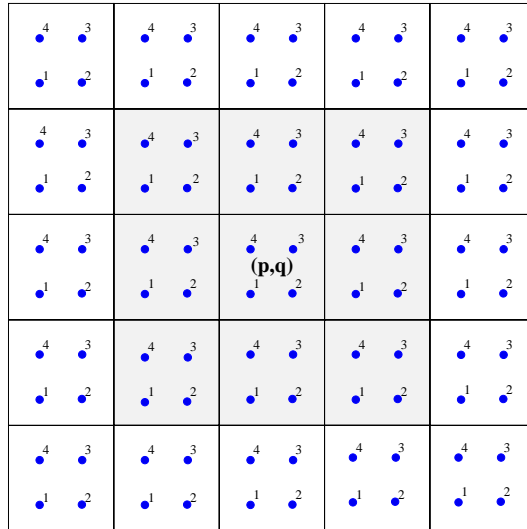


FIG. 3.1.11: Les réseau périodique de cellules  $(p, q)$  pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ .

et on peut alors réécrire le schéma semi-discret sous la forme générale suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h + \mathbb{K}_h U_h = 0,$$

où  $U_h = (V_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$  est une suite à double indice à valeurs dans  $\mathbb{R}^8$  (i.e.  $V_{p,q} \in \mathbb{R}^8$ ) et où  $\mathbb{K}_h$  est un opérateur agissant dans cet espace des suites. Les degrés de liberté intervenant dans le calcul de  $V_{p,q}$  sont les d.d.l associées aux 9 éléments qui sont assurés sur la figure 3.1.11.

### L'élément fini $Q_2$

Le concurrent naturel du schéma correspondant à l'élément fini  $Q_2 - Q_1$  est le schéma que l'on obtient en utilisant la méthode d'éléments finis  $Q_2$  avec intégration numérique.

Dans ce cas il est facile de voir qu'il y a aussi périodicité de quatre types de points, les points notés 1, 2, 3 et 4 (cf. figure 3.1.12), qui sont respectivement indexés  $(i, j)$ ,  $(i + 1/2, j)$ ,  $(i + 1/2, j + 1/2)$  et  $(i, j + 1/2)$ . A chaque cellule  $(i, j)$  est associé un vecteur

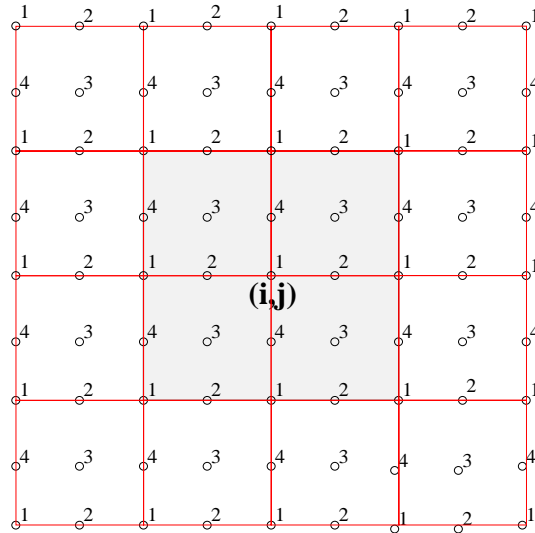


FIG. 3.1.12: Les réseau périodique de cellules  $(i, j)$  pour l'élément  $Q_2$ .

$$V_{i,j} = \begin{bmatrix} (v_1)_{i,j} \\ (v_1)_{i+1/2,j} \\ (v_1)_{i+1/2,j+1/2} \\ (v_1)_{i,j+1/2} \\ (v_2)_{i,j} \\ (v_2)_{i+1/2,j} \\ (v_2)_{i+1/2,j+1/2} \\ (v_2)_{i,j+1/2} \end{bmatrix}$$

et le schéma semi-discret s'écrit sous la forme générale suivante

$$\frac{d^2}{dt^2} U_h + \mathbb{K}_h U_h = 0,$$

où  $U_h = (V_{i,j})_{(i,j) \in Z^2}$  est une suite à double indice à valeurs dans  $\mathbb{R}^8$  (i.e.  $V_{i,j} \in \mathbb{R}^8$ ) et où  $\mathbb{K}_h$  est un opérateur agissant dans cet espace des suites. Dans ce cas le nombre des d.d.l intervenant dans le calcul de  $V_{i,j}$  dépend du type de point considéré. Plus précisément comme nous l'avons illustré sur la figure 3.1.13, nous avons

- pour un point de type 1, (sommet du maillage): les d.d.l associées aux 4 éléments admettant ce point comme sommet,
- pour un point de type 2 ou 4 (milieu d'arête horizontale ou verticale): les d.d.l associées aux 2 éléments adjacents à cette arête,

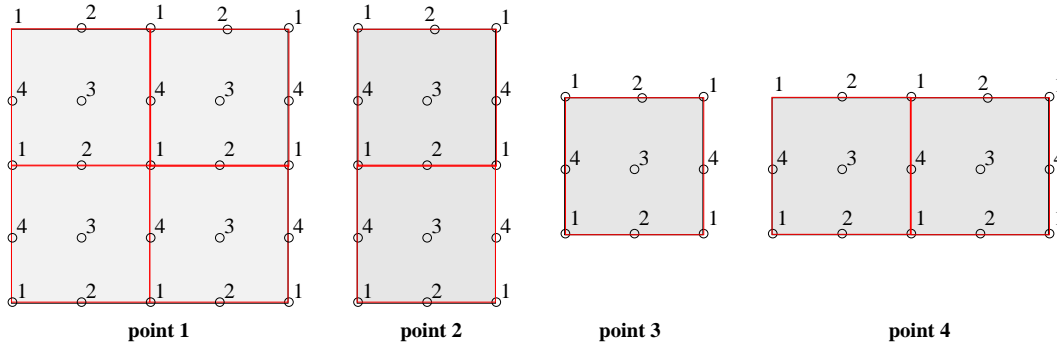


FIG. 3.1.13: Les points intervenant dans les équations pour le différents types de noeud (élément  $Q_2$ ).

– et pour un point de type 3 (centre d'un élément): les d.d.l associées à cet élément.

On peut remarquer que le schéma correspondant à l'élément  $Q_2$  est a priori moins cher que celui correspondant à l'élément  $Q_2 - Q_1$  car le nombre de d.d.l intervenant dans le calcul de la solution à chaque point est pour ce schéma moins important.

### 3.1.3 L'élément fini $Q_3 - Q_2$ et son concurrent

Dans ce cas, il y a pour la vitesse  $v$ , périodicité de neuf types de points (cf. figure 3.1.14), qui seront indexés par  $(p - \eta, q - \eta)$ ,  $(p, q - \eta)$ ,  $(p + \eta, q - \eta)$ ,  $(p + \eta, q)$ ,  $(p + \eta, q + \eta)$ ,  $(p, q + \eta)$ ,  $(p - \eta, q + \eta)$ ,  $(p - \eta, q)$  et  $(p, q)$  avec  $\eta = \frac{\sqrt{15}}{10}$ . Pour le tenseur des contraintes  $\sigma$  il y a aussi

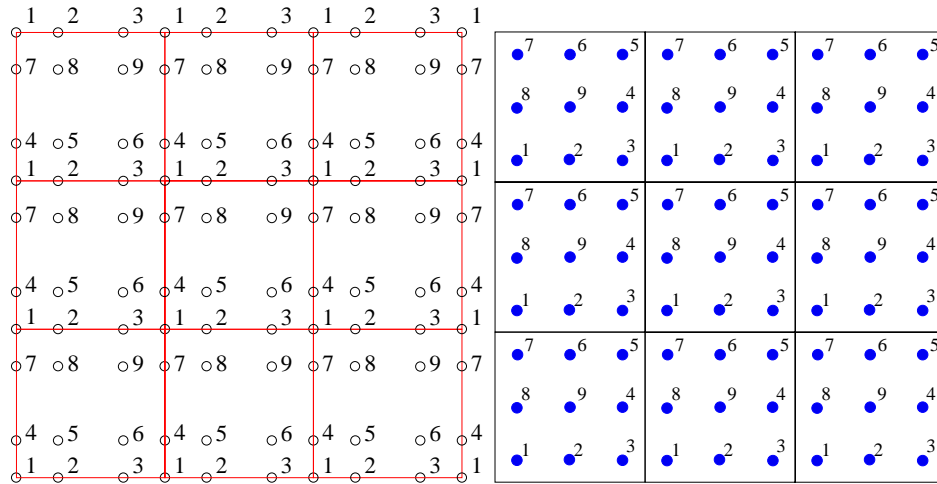


FIG. 3.1.14: Les maillages en  $\sigma$  et  $v$ .

périodicité de neuf types de points (cf. figure 3.1.14). Ils seront, dans ce cas, indexés par  $(i, j)$ ,  $(p_1, j)$ ,  $(p_2, j)$ ,  $(i, q_1)$ ,  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_1)$ ,  $(i, q_2)$ ,  $(p_1, q_2)$  et  $(p_2, q_2)$ , avec

$$p_1 = i + \frac{1}{2} - \tau, \quad p_2 = i + \frac{1}{2} + \tau, \quad q_1 = j + \frac{1}{2} - \tau, \quad q_2 = j + \frac{1}{2} + \tau, \quad \tau = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

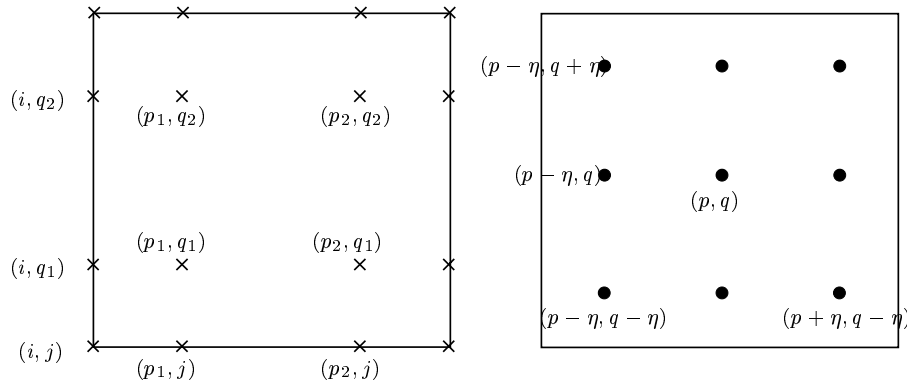


FIG. 3.1.15: Notations de points.

Comme dans le cas de l'élément fini  $Q_2 - Q_1$ , le nombre des d.d.l associés à chaque point varie entre 3 et 5. Plus précisément nous avons dans ce cas (voir figures 3.1.16 et 3.1.17) :

- 5 d.d.l pour les points de type 1 :  $\sigma_{11}^h$  (haut),  $\sigma_{11}^b$  (bas),  $\sigma_{22}^d$  (droite),  $\sigma_{22}^g$  (gauche) et  $\sigma_{12}$ ,
- 4 d.d.l pour les points de type 2 et 3 :  $\sigma_{11}^h$ ,  $\sigma_{11}^b$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ ,
- 3 d.d.l pour les points de type 5, 6, 8 et 9 :  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ ,
- et 4 d.d.l pour les points de type 4 et 7 :  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}^d$ ,  $\sigma_{22}^g$  et  $\sigma_{12}$ .

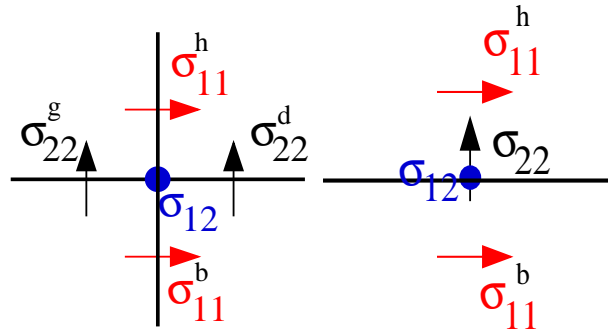


FIG. 3.1.16: Les degrés de liberté associés au noeud  $(i, j)$  à gauche et aux noeuds  $(p_1, j)$ ,  $(p_2, j)$  à droite.

Les équations semi-discrétisées en espace associés à cet élément sont donné en Annexe A.2. On peut toujours éliminer les inconnues associées à  $\sigma$  et obtenir un système différentiel en  $v$  d'ordre deux en temps. Le maillage régulier peut se voir dans ce cas comme un réseau périodique infini de cellules  $(p, q)$  contenant neuf types de points (illustré sur la figure 3.1.18). A chaque cellule  $(p, q)$  est donc associé un vecteur :



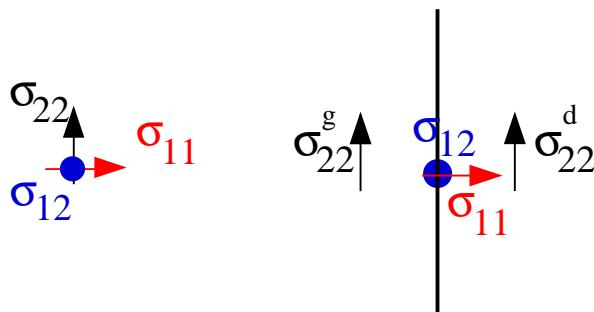


FIG. 3.1.17: Les degrés de liberté associés aux noeuds intérieurs (de type 5, 6, 8 et 9) à gauche et aux noeuds  $(i, q_1)$ ,  $(i, q_2)$  à droite.

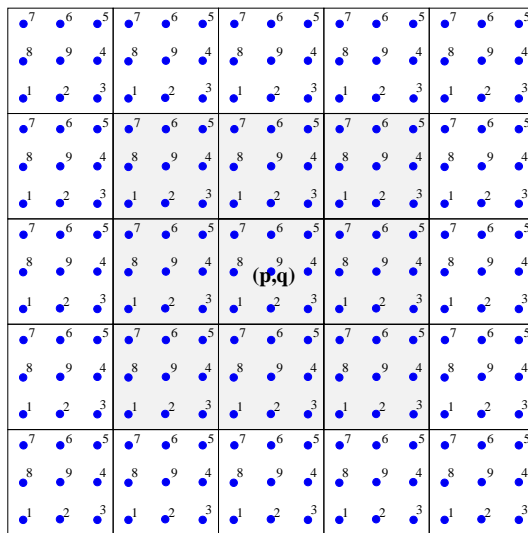


FIG. 3.1.18: Les réseau périodique de cellules  $(p, q)$  pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ .

$$V_{p,q} = \begin{bmatrix} (v_1)_{p-\eta,q-\eta} & , & (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \\ (v_1)_{p,q-\eta} & , & (v_2)_{p,q-\eta} \\ (v_1)_{p+\eta,q-\eta} & , & (v_2)_{p+\eta,q-\eta} \\ (v_1)_{p+\eta,q} & , & (v_2)_{p+\eta,q} \\ (v_1)_{p+\eta,q+\eta} & , & (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\ (v_1)_{p+,q+\eta} & , & (v_2)_{p+,q+\eta} \\ (v_1)_{p-\eta,q+\eta} & , & (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \\ (v_1)_{p-\eta,q} & , & (v_2)_{p-\eta,q} \\ (v_1)_{p-\eta,q} & , & (v_2)_{p-\eta,q} \end{bmatrix}$$

et on peut réécrire le schéma semi-discret sous la forme du système générale

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h + \mathbb{K}_h U_h = 0,$$

où  $U_h = (V_{p,q})_{(p,q) \in Z^2}$  est une suite à double indice à valeurs dans  $\mathbb{R}^{18}$  (i.e.  $V_{p,q} \in \mathbb{R}^{18}$ ) et où  $\mathbb{K}_h$  est un opérateur agissant dans cet espace des suites. Les degrés de liberté intervenant dans le calcul de  $V_{p,q}$  sont les d.d.l associées aux 9 éléments qui sont assurés sur la figure 3.1.18.

L'élément fini  $Q_3$

Nous allons comparer ce schéma en termes de dispersion numérique avec le schéma correspondant à la méthode des éléments finis  $Q_3$  avec intégration numérique. Il s'agit des éléments finis  $Q_3$  proposés dans [109] pour lesquels la position de degrés de liberté coïncide avec les points de quadrature de la formule de Gauss-Lobatto.

Dans ce cas il y a aussi périodicité de 9 types de points, les points notés 1, 2, ..., 9 (cf. figure 3.1.19), qui sont respectivement indexés par  $(i, j)$ ,  $(p_1, j)$ ,  $(p_2, j)$ ,  $(i, q_1)$ ,  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_1)$ ,  $(i, q_2)$ ,  $(p_1, q_2)$  et  $(p_2, q_2)$ , avec

$$p_1 = i + \frac{1}{2} - \tau, \quad p_2 = i + \frac{1}{2} + \tau, \quad q_1 = j + \frac{1}{2} - \tau, \quad q_2 = j + \frac{1}{2} + \tau, \quad \tau = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$(i, j)$ ,  $(i + 1/2, j)$ ,  $(i + 1/2, j + 1/2)$  et  $(i, j + 1/2)$ . A chaque cellule  $(i, j)$  est associé un vecteur

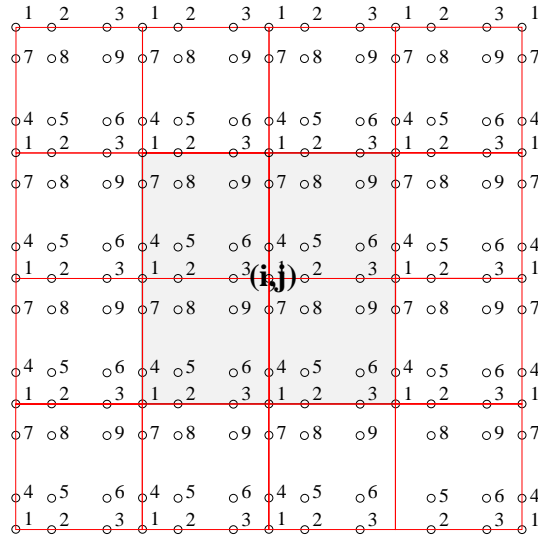


FIG. 3.1.19: Les réseau périodique de cellules  $(i, j)$  pour l'élément  $Q_3$ .

$$V_{i,j} = \begin{bmatrix} (v_1)_{i,j} & , & (v_2)_{i,j} \\ (v_1)_{p_1,j} & , & (v_2)_{p_1,j} \\ (v_1)_{p_2,j} & , & (v_2)_{p_2,j} \\ (v_1)_{i,q_1} & , & (v_2)_{i,q_1} \\ (v_1)_{p_1,q_1} & , & (v_2)_{p_1,q_1} \\ (v_1)_{p_2,q_1} & , & (v_2)_{p_2,q_1} \\ (v_1)_{i,q_2} & , & (v_2)_{i,q_2} \\ (v_1)_{p_1,q_2} & , & (v_2)_{p_1,q_2} \\ (v_1)_{p_2,q_2} & , & (v_2)_{p_2,q_2} \end{bmatrix}$$

et le schéma semi-discret s'écrit sous la forme générale suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h + \mathbb{K}_h U_h = 0,$$

où  $U_h = (V_{i,j})_{(i,j) \in Z^2}$  est une suite à double indice à valeurs dans  $\mathbb{R}^{18}$  (i.e.  $V_{i,j} \in \mathbb{R}^{18}$ ) et où  $\mathbb{K}_h$  est un opérateur agissant dans cet espace des suites. Comme pour l'élément  $Q_2$  le nombre des d.d.l intervenant dans le calcul de  $V_{i,j}$  dépend du type de point considéré. Plus précisément comme nous l'avons illustré sur la figure 3.1.20, nous avons

- pour un point de type 1, (sommet du maillage): les d.d.l associées aux 4 éléments admettant ce point comme sommet,
- pour un point de type 2 ou 3 (point intérieur à une arête horizontale): les d.d.l associées aux 2 éléments adjacents à cette arête,
- pour un point de type 4 ou 7 (point intérieur à une arête verticale): les d.d.l associées aux 2 éléments adjacents à cette arête,
- et pour un point de type 5, 6, 8 ou 9 (point intérieur à un élément): les d.d.l associées à cet élément.

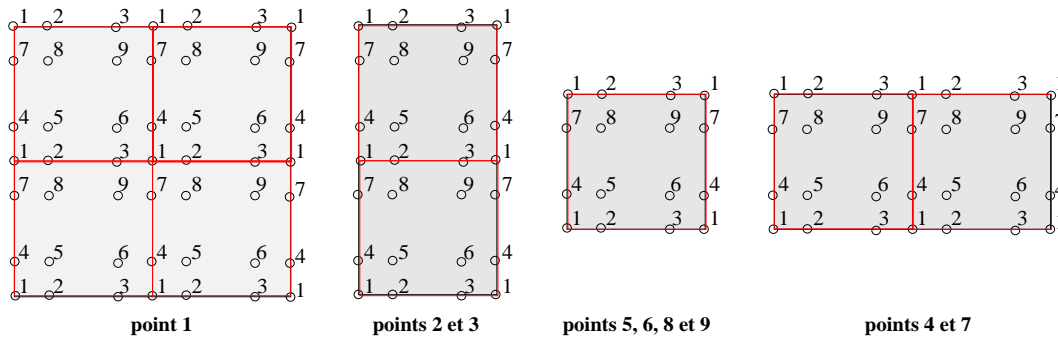


FIG. 3.1.20: Les points intervenant dans les équations pour le différents types de noeud (élément  $Q_3$ )

Comme précédemment on peut remarquer que le schéma correspondant à l'élément  $Q_3$  est a priori moins cher que celui correspondant à l'élément  $Q_3 - Q_2$  car le nombre de d.d.l intervenant dans le calcul de la solution à chaque point est pour ce schéma moins important.

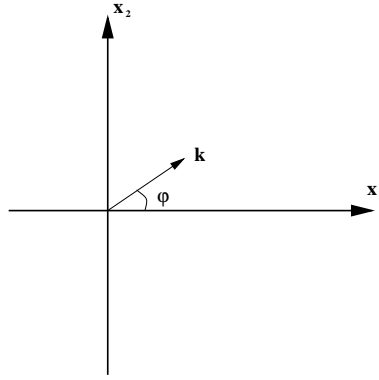
### 3.1.4 Analyse de dispersion - Généralités

Nous rappelons d'abord que pour le problème continu, l'analyse de dispersion est l'étude de solutions particulières de la forme

$$(3.1.9) \quad U = U_o \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \quad U_o \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^2, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

La relation (3.1.9) définit de façon générale une onde plane  $U$  de vecteur d'onde  $\vec{k}$  se propageant avec la vitesse de phase  $\omega/|\vec{k}|$ . Dans ce qui suit, on repèrera les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$  par rapport à son angle de propagation  $\varphi$  selon les expressions (cf. figure 3.1.21) :

$$k_1 = |\vec{k}| \cos(\varphi), \quad k_2 = |\vec{k}| \sin(\varphi)$$


 FIG. 3.1.21: Représentation de  $\varphi$  et de  $\vec{k}$ .

Pour que  $U$  soit solution de l'équation de l'élastodynamique la relation suivante appelée relation de dispersion doit être vérifiée :

$$(3.1.10) \quad \omega^2 U_o = \widehat{\mathbb{K}}(k) U_o, \quad k = (k_1, k_2)$$

où  $\widehat{\mathbb{K}}(k)$  est une matrice  $2 \times 2$  hermitienne, donnée par

$$\widehat{\mathbb{K}}(k) = \begin{bmatrix} V_p^2 k_1^2 + V_s^2 k_2^2 & (V_p^2 - V_s^2) k_1 k_2 \\ (V_p^2 - V_s^2) k_1 k_2 & V_p^2 k_2^2 + V_s^2 k_1^2 \end{bmatrix}.$$

L'équation (3.1.10) implique que  $\omega^2$  est une valeur propre de  $\widehat{\mathbb{K}}(k)$  et  $U_o$  le vecteur propre associé. Il est alors facile de calculer les deux valeurs propres  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$ ,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= V_p^2 (k_1^2 + k_2^2), & U_o^1 &= (k_1, k_2), \\ \omega_2^2 &= V_s^2 (k_1^2 + k_2^2), & U_o^2 &= (-k_2, k_1). \end{aligned}$$

Nous savons alors que  $\omega_1$  correspond à une onde de pression se propageant avec la vitesse de phase  $V_p = \omega_1 / |\vec{k}|$  et  $\omega_2$  correspond à une onde de cisaillement se propageant avec la vitesse de phase  $V_s = \omega_2 / |\vec{k}|$ .

On peut constater que les vitesses de phase  $V_p$  et  $V_s$  sont indépendantes de la fréquence  $\omega$ , on dit alors que l'équation de l'élastodynamique est non dispersive. Cette propriété ne sera plus vraie dans le cas des problèmes semi-discrets et discrets. En effet, comme nous allons le voir la discrétisation induit un phénomène de dispersion numérique. Nous allons, dans un premier temps, étudier ce phénomène dans le cas du problème semi-discret. L'analyse de dispersion pour le problème discret sera menée dans le chapitre suivant.

Nous avons vu dans les sections précédentes qu'un maillage régulier peut être considéré comme un réseau périodique infini. Chaque cellule de ce réseau contient un certain nombre de noeuds caractéristiques. Le nombre de ces noeuds dépend de l'ordre des éléments finis considérés. Plus précisément, nous avons montré que celui-ci correspond à 1 pour l'élément  $Q_1 - Q_0$ , à 4 pour  $Q_2 - Q_1$  et à 9 pour  $Q_3 - Q_2$ . Notons par

$$[ih, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h], \quad (i, j) \in Z^2$$

la cellule courante, on peut alors associer à chaque  $I = (i, j)$  un vecteur  $U_I \in C^{2(l+1)^2}$  avec  $l = 0, 1$  et  $2$  l'ordre des éléments finis considérés. Le problème semi-discret s'écrit alors sous la forme

$$(3.1.11) \quad \frac{d^2}{dt^2} U_h + \mathbb{K}_h U_h = 0,$$

où  $U_h = (U_I)_{I \in Z^d}$  est une suite à double indice  $I = (i, j)$  à valeurs dans  $C^{2(l+1)^2}$  et  $\mathbb{K}_h$  représente un opérateur agissant dans cet espace des suites. L'opérateur  $\mathbb{K}_h$  possède une propriété fondamentale: il commute avec les translations. De façon plus précise, si  $T_h$  est l'opérateur de translation qui associe à  $U_I$  le vecteur  $U_{I+1}$  (correspondant à  $U_{i+1, j+1}$ ), nous avons alors que  $T_h$  commute avec  $\mathbb{K}_h$

$$T_h \mathbb{K}_h = \mathbb{K}_h T_h.$$

Cette propriété est une conséquence du caractère régulier et uniforme du maillage considéré, et du fait que l'on s'intéresse à un milieu homogène. C'est elle qui va rendre l'analyse de dispersion discrète possible. Plus précisément, elle nous permet de réinterpréter (3.1.11) comme un système qui régit la propagation des ondes dans un milieu élastique périodique infini. Ce qui justifie de rechercher des solutions du problème (3.1.11) sous la forme

$$(3.1.12) \quad U_I = U_o \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x}_I - \omega t), \quad U_o \in C^{2(l+1)^2}, \quad (\vec{k}, \vec{x}_I) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

avec  $\vec{x}_I = (ih, jh)$ . La relation (3.1.12) définit de façon générale une onde plane numérique.

Pour que  $U_I$  soit solution du problème semi-discretisé en espace la relation de dispersion suivante doit être vérifiée

$$\omega_h^2 U_h = \widehat{\mathbb{K}}_h(k) U_h.$$

Nous montrerons alors que le problème semi-discret admet  $2(l+1)^2$ , ( $l$  désignant l'ordre d'approximation), solutions correspondant à des ondes planes numériques, tandis que dans le cas du problème (3.1.10) il y a seulement 2 solutions (ondes planes continues). En fait, lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers zéro, il y a seulement 2 ondes planes numériques, qui tendent vers les solutions du problème continu. On appellera ces solutions ondes planes physiques et les  $2(l+1)^2 - 2$  autres, ondes planes parasites. Nous nous intéressons, dans ce qui suit, seulement aux ondes planes physiques. Plus précisément, nous allons calculer pour les différents schémas correspondant aux éléments finis  $Q_{k+1} - Q_k$ , (pour  $k = 0, 1$  et  $2$  en 2D et pour  $k = 0$  en 3D) les vitesses de phase numériques, puis nous les comparons aux vitesses de phase du problème continu.

### 3.1.4.1 Dispersion du schéma $Q_1 - Q_0$

Dans ce cas la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  avec :

- $\widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1] = \frac{1}{h^2} (4V_p^2 X_1(1 - 4\alpha X_2) + 4V_s^2 X_2(1 - 4\beta X_1))$
- $\widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2] = \frac{1}{h^2} (4V_p^2 X_2(1 - 4\alpha X_1) + 4V_s^2 X_1(1 - 4\beta X_2))$
- $\widehat{\mathbb{K}}_h[1, 2] = \frac{4}{h^2} (V_p^2 - V_s^2) \sqrt{X_1(1 - X_2)} \sqrt{X_2(1 - X_1)}$

- $X_1 = \sin^2\left(\frac{k_1 h}{2}\right)$  et  $X_2 = \sin^2\left(\frac{k_2 h}{2}\right)$

Les deux valeurs propres de cette matrice sont données par la relation suivante

$$\begin{aligned} (\omega_h^2)_{1,2} &= \frac{2}{h^2} [(V_p^2 + V_s^2)(X_1 + X_2) - 8(\alpha V_p^2 + \beta V_s^2)X_1 X_2] \\ &\pm \frac{2}{h^2} (V_p^2 - V_s^2) \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4(X_1 - X_1^2)(X_2 - X_2^2)} \end{aligned}$$

et correspondent aux ondes planes physiques. Notons  $\lambda_h^1 (= (\omega_h^2)_1)$  et  $\lambda_h^2 (= (\omega_h^2)_2)$  ce deux valeurs propres, nous avons alors le lemme suivant.

**Lemme 3.1.1** *Les valeurs propres  $\lambda_h^1$  et  $\lambda_h^2$  admettent les développements limités suivants :*

$$\begin{aligned} \lambda_h^1 &= |\vec{k}|^2 \left( V_p^2 - \left( \pi^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \left( 4\alpha V_p^2 + 4\beta V_s^2 + \frac{V_p^2}{3} - V_s^2 \right) - \frac{\pi^2 V_p^2}{3} \right) K^2 + O(K^4) \right) \\ \lambda_h^2 &= |\vec{k}|^2 \left( V_s^2 - \left( \pi^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \left( 4\alpha V_p^2 + 4\beta V_s^2 + \frac{V_s^2}{3} - V_p^2 \right) - \frac{\pi^2 V_s^2}{3} \right) K^2 + O(K^4) \right) \end{aligned}$$

**Démonstration :** Nous avons obtenu ces développements limités à l'aide du logiciel MAPLE (on connaît ici explicitement les expressions de  $\lambda_h^1$  et  $\lambda_h^2$ ). ■

Ceci est un résultat de “super-convergence en dispersion” pour la classe générale de schémas définis par le système (3.1.8).

### Comparaison des vitesses de phase

Soit  $\frac{(\omega_h)_i}{|\vec{k}|}$ ,  $i = 1, 2$  les vitesses de phase numériques, on introduit alors, les paramètres adimensionnels suivants :

$$(3.1.13) \quad q_p = \frac{(\omega_h)_1}{|\vec{k}|V_p}, \quad q_s = \frac{(\omega_h)_2}{|\vec{k}|V_s}$$

où  $q_p$  (resp.  $q_s$ ) est le rapport entre la vitesse de phase numérique et la vitesse de phase continue pour les ondes de pression (resp. cisaillement) qui dépendent des paramètres  $K =$

$\frac{1}{N} = \frac{|\vec{k}|h}{2\pi}$  (où  $N$  est le nombre de points par longueur d'onde),  $\varphi$  et du coefficient de Poisson  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ . Sur les figures suivantes (fig. 3.1.22 à 3.1.25) nous comparons les courbes de dispersion obtenues pour les trois schémas différents: nouveau schéma (schéma  $Q_1 - Q_0$ ) (en vert), schéma des éléments finis  $Q_1$  (en bleu) et schéma des différences finis (en rouge).

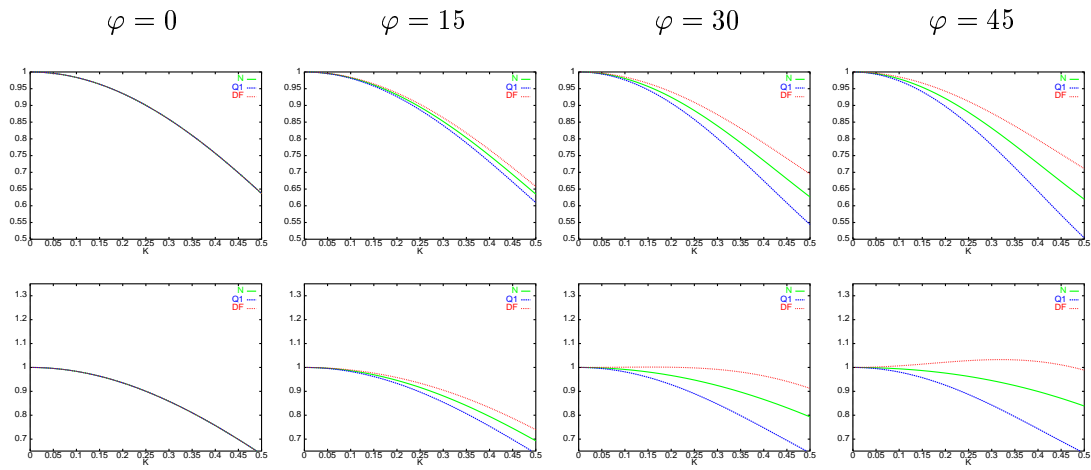


FIG. 3.1.22: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas),  $\nu = 0.1$ .

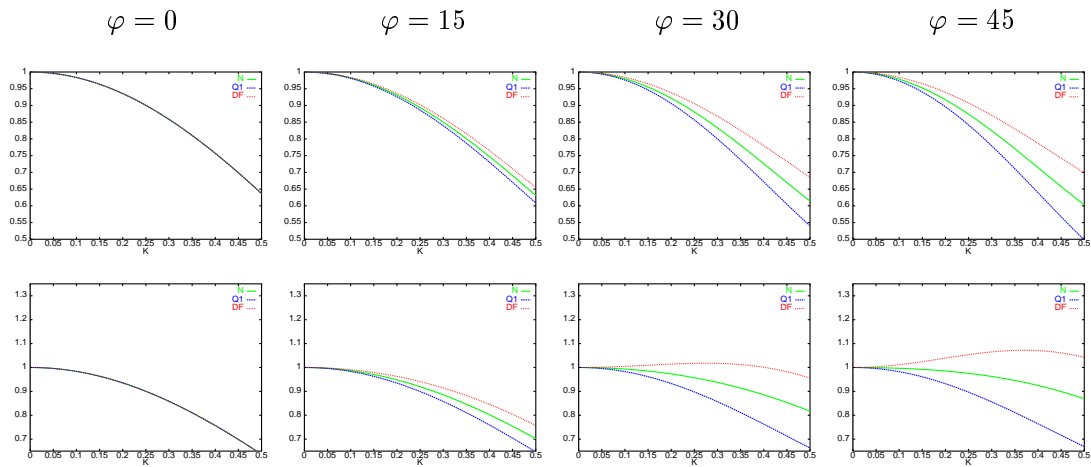


FIG. 3.1.23: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas),  $\nu = 0.2$ .



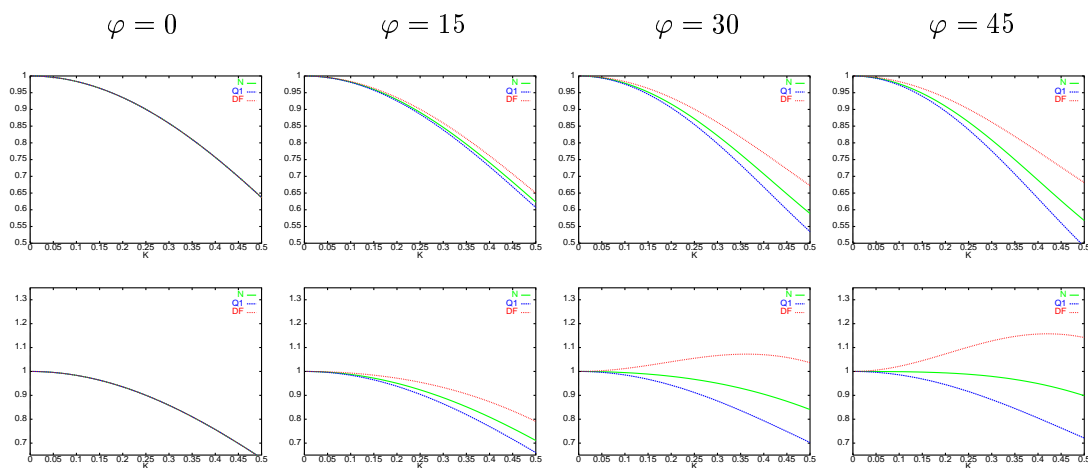


FIG. 3.1.24: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas),  $\nu = 0.3$ .

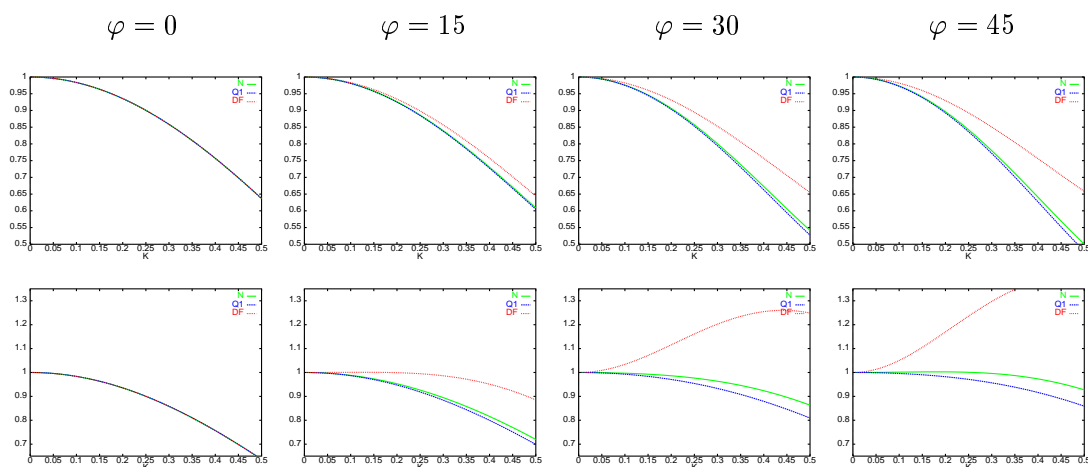


FIG. 3.1.25: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas),  $\nu = 0.4$ .

**Interprétation des courbes** En ce qui concerne les ondes de Pression, on peut remarquer que pour les ondes planes se propageant dans une direction parallèle au maillage ( $\varphi = 0$ ) les trois schémas présentent les mêmes courbes de dispersion. Pour les autres angles de propagation nous constatons que le schéma de différences finies présente une dispersion inférieure à celle obtenue avec le nouveau schéma qui est, à son tour, moins dispersif que le schéma des éléments finis  $Q_1$ . Pour les trois schémas la dispersion est monotone en fonction de l'angle de propagation  $\varphi$ . Pour les schémas des éléments finis  $Q_1$  et  $Q_1 - Q_0$  les meilleurs résultats correspondent à  $\varphi = 0$  et la dispersion augmente en fonction de l'angle, la direction la moins privilégiée est la diagonale ( $\varphi = 45$ ). Le schéma des différences finies présente le comportement inverse : la direction la moins privilégiée correspond aux directions du maillage ( $\varphi = 0$ ) et la dispersion diminue ensuite, les meilleurs résultats sont obtenus sur la diagonale.

En ce qui concerne les ondes de Cisaillement, pour les directions du maillage ( $\varphi = 0$ ), les trois schémas présentent les mêmes courbes de dispersion (comme pour les ondes P). Pour les éléments finis  $Q_1 - Q_0$  et  $Q_1$  la dispersion est toujours monotone en fonction de l'angle mais dans le sens inverse par rapport aux ondes de pression. En effet, dans ce cas la direction la moins privilégiée correspond à  $\varphi = 0$  et les meilleurs résultats sont obtenus sur la diagonale. Pour le schéma des différences finies il n'est pas facile de conclure car la direction la moins privilégiée change en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$ : elle correspond par exemple à  $\varphi = 0$  pour  $\nu = 0.1$  et à  $\varphi = 45$  pour  $\nu = 0.4$ .

Sur les figures 3.1.26 et 3.1.27 nous présentons (pour chaque valeur de  $\nu$ ) la courbe de dispersion correspondant à la direction la moins privilégiée pour chaque schéma.

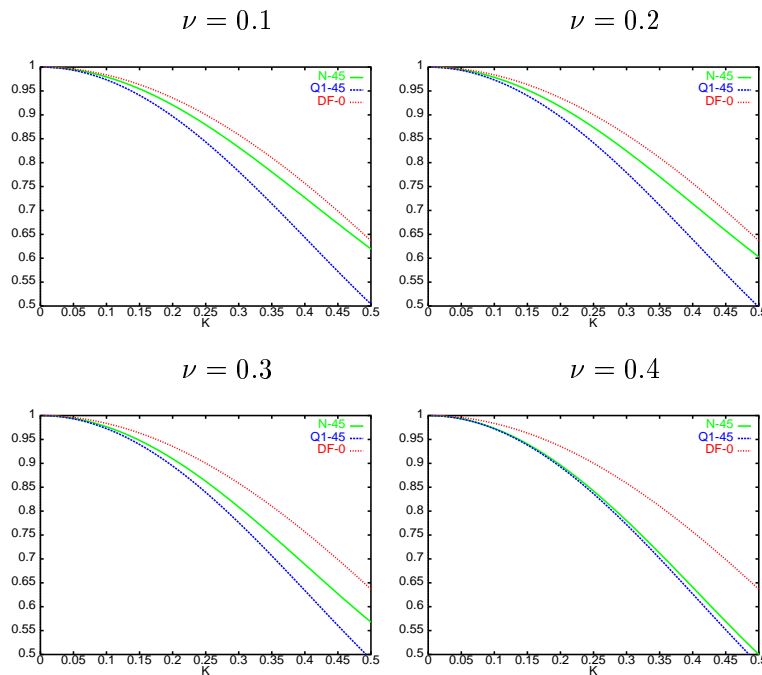


FIG. 3.1.26: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale pour les différents schémas: les ondes P.

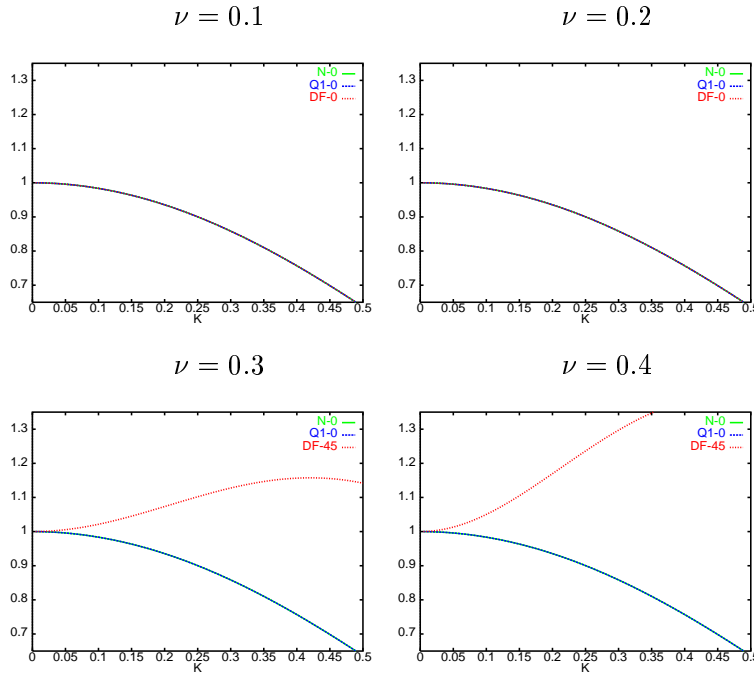


FIG. 3.1.27: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale pour les différents schémas: les ondes S.

Pour les ondes P, le classement entre les trois schémas est clair: les meilleurs résultats sont obtenus pour les différences finies ensuite les éléments  $Q_1 - Q_0$  et finalement les éléments  $Q_1$ . Pour les ondes S c'est moins clair: en fait, les résultats sont identiques pour les éléments finis  $Q_1 - Q_0$  et  $Q_1$ . Le schéma des différences finies donne les mêmes résultats que les autres schémas pour des petites valeurs de  $\nu$  ( $\nu = 0.1, 0.2$ ) mais des résultats moins bons pour  $\nu$  grand ( $\nu = 0.3, 0.4$ ).

### Étude de l'erreur de polarisation

À l'onde P numérique est associée une direction du mouvement  $U_h^1$  qui est la direction propre de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  correspondant à la plus grande valeur propre  $(\omega_h^2)_1$ . Cette direction est différente de la direction donnée par  $U_o^1 = (k_1, k_2)$  qui est celle du mouvement pour l'onde P continue. Nous noterons  $\delta\varphi$  l'angle entre ces deux directions:

$$\delta\varphi = \text{angle}(U_o^1, U_h^1)$$

De même à l'onde S numérique est associée une direction du mouvement  $U_h^2$  qui est la direction propre de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  correspondant à la plus petite valeur propre  $(\omega_h^2)_2$ . Cette direction est différente de la direction  $U_o^2$  perpendiculaire à  $(k_1, k_2)$  qui est la direction de l'onde S continue. Les directions  $U_h^1$  et  $U_h^2$  étant perpendiculaires (la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  est symétrique) on a :

$$\delta\varphi = \text{angle}(U_o^1, U_h^1) = \text{angle}(U_o^2, U_h^2)$$

La direction  $U_h^1$  est donnée par :

$$U_h^1 \parallel \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 2] \\ (\omega_h^2)_1 - \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2] \end{pmatrix}$$

après un simple calcul on montre :

$$U_h^1 \parallel \begin{pmatrix} 2\sqrt{X_1 - X_1^2}\sqrt{X_2 - X_2^2} \\ -(X_1 - X_2) + \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4(X_1 - X_1^2)(X_2 - X_2^2)} \end{pmatrix}$$

Ce résultat est très intéressant car ça montre que l'erreur de polarisation est le même pour tout les schémas définis par (3.1.8) et ne dépend pas des caractéristiques du milieu élastique considéré. On peut aussi remarquer que l'erreur est nulle pour les directions de propagation parallèles au maillages ( $\varphi = 0$  et  $\varphi = 45$ ). Nous présentons sur la figure (3.1.28)  $\delta\varphi$  pour  $\varphi \in [10, 40]$  en fonction de  $K$ .

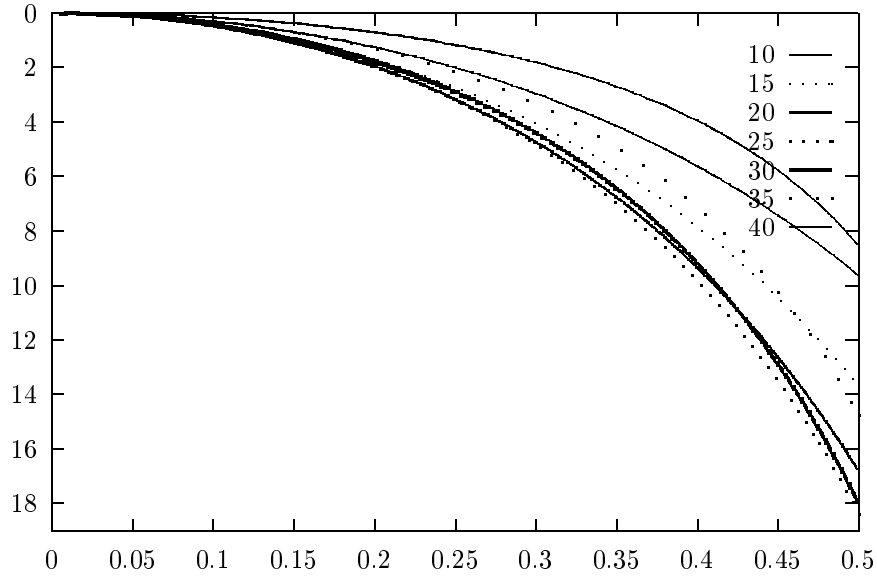


FIG. 3.1.28:  $\delta\varphi$  en fonction de  $K$ .

### 3.1.4.2 Dispersion du schéma $Q_2 - Q_1$

Dans ce cas, la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  a huit valeurs propres. Les deux premières, notées  $\lambda_h^1(= (\omega_h^2)_1)$  et  $\lambda_h^2(= (\omega_h^2)_2)$ , correspondent aux ondes planes physiques, plus précisément on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\omega_h)_1}{|k|} \rightarrow V_p$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\omega_h)_2}{|k|} \rightarrow V_s$$

Les six autres valeurs propres correspondent à des ondes parasites et elles tendent vers l'infini quand  $h$  tend vers 0. Concernant les valeurs propres physiques nous pouvons prouver le lemme suivant.

**Lemme 3.1.2** *Les valeurs propres  $\lambda_h^1$  et  $\lambda_h^2$  admettent les développements limités suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_h^1 = |\vec{k}|^2 \left( V_p^2 - \frac{\pi^4 V_p^2 K^4}{90} (1 + e_1) + O(K^6) \right) \\ \lambda_h^2 = |\vec{k}|^2 \left( V_s^2 - \frac{\pi^4 V_s^2 K^4}{90} (1 + e_2) + O(K^6) \right) \\ e_1 = 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \frac{V_s^2}{V_p^2} \left( 1 - \frac{V_s^2}{V_p^2} \right) 40 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi \\ e_2 = -12 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 40 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi \\ \quad + 20 \frac{V_s^4}{V_p^4} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \end{array} \right.$$

**Démonstration :** Celle ci est calculatoire. Nous l'avons menée à l'aide du logiciel MAPLE (voir annexe B). ■

### Comparaison des vitesses de phase

Nous allons visualiser ici la dispersion numérique des schémas semi-discrets correspondant aux éléments finis  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_2$ , en représentant les courbes de dispersion qui caractérisent les variations des vitesses adimensionnelles  $q_p$  et  $q_s$  (définies par 3.1.13) en fonction de  $K$  et de  $\varphi$  pour différentes valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$ . Les courbes de dispersion pour les

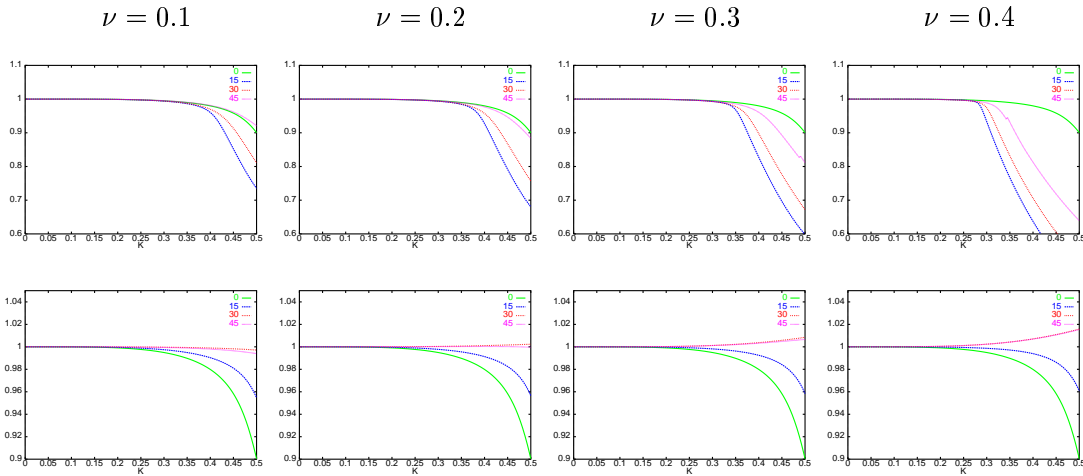


FIG. 3.1.29: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut) et les ondes S (en bas) pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ .

deux schémas sont très similaires et on constate une légère amélioration sur la dispersion des ondes S pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ .

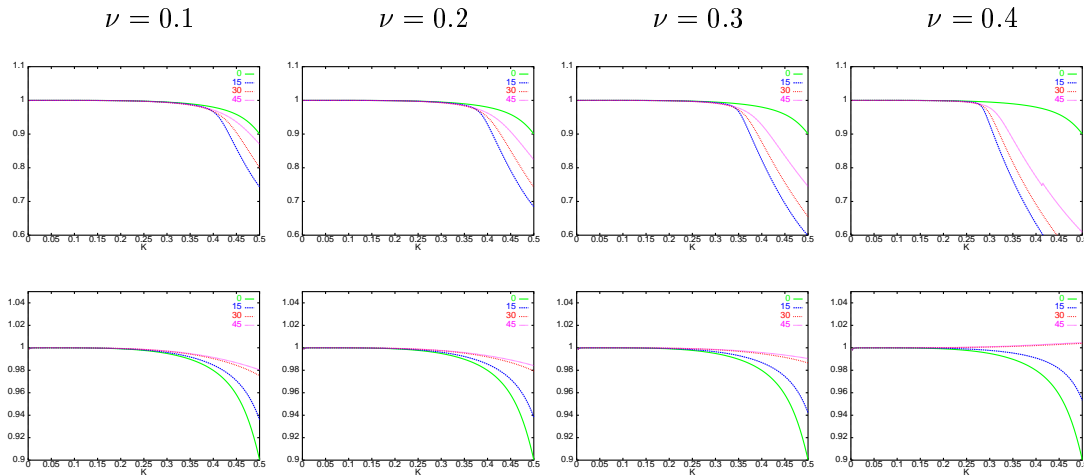


FIG. 3.1.30: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut) et les ondes S (en bas) pour l'élément  $Q_2$ .

Dans le deux cas nous pouvons remarquer que pour une onde plane se propageant dans une direction parallèle au maillage ( $\varphi = 0$ ) la dispersion est la même pour les ondes P et S et elle ne dépend pas du coefficient de Poisson  $\nu$ . Cette direction ( $\varphi = 0$ ) correspond par ailleurs à la direction la moins privilégiée pour les ondes S et au contraire à la direction pour laquelle le schéma est moins dispersif sur les ondes P. Ce qui implique, en particulier, que la dispersion des ondes P est plus significative que celle des ondes S.

On constate aussi que la dispersion sur les ondes S est monotone en fonction de l'angle de propagation  $\varphi$ . Ceci n'est plus vrai pour les ondes P. Cependant, pour toutes les valeurs de  $\nu$  on obtient les meilleurs résultats pour  $\varphi = 0$  et les moins bons pour  $\varphi = 15$ .

Notons finalement que pour une direction de propagation fixée, la dispersion pour les ondes P augmente avec  $\nu$ . Une autre particularité de la dispersion des ondes P est qu'il y a une valeur critique du paramètre  $K$  à partir de laquelle la précision diminue de façon plus importante.

Pour comparer les deux schémas nous présentons finalement sur les figures 3.1.31 et 3.1.32 les courbes correspondant à la direction de dispersion maximale pour les deux schémas. Pour les ondes P la direction de dispersion maximale correspond à l'angle  $\varphi = 15$  et comme nous pouvons le remarquer sur la figure 3.1.31 les courbes sont pratiquement identiques pour les deux schémas.

Pour les ondes S ceci se résume à une seule courbe qui est identique pour les deux schémas car l'angle correspondant à la direction de dispersion maximale est  $\varphi = 0$  et comme nous l'avons déjà remarquer pour cette direction de propagation la dispersion ne dépend pas du coefficient de Poisson  $\nu$ .

On s'intéresse ensuite à l'évolution de  $\log(V_{p,h} - V_p)$  ( $V_{p,h}$  étant la vitesse de phase numérique pour les ondes P) en fonction de  $\log K$  pour les petites valeurs de  $K$ . On trace ici la pente de la courbe, c'est dire  $\Delta(\log(V_{p,h} - V_p))$  en fonction de  $\Delta(\log K)$  (le symbol  $\Delta$  correspondant à la dérivé discrète). L'erreur d'approximation du schéma semi-discret est d'ordre 4, ce qui est conforme à ce que l'on espérait.

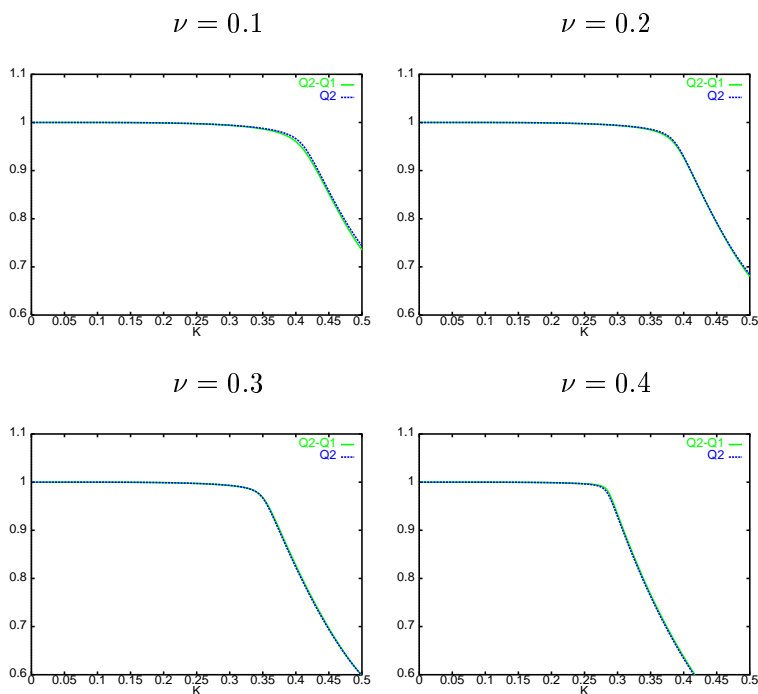


FIG. 3.1.31: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale  $\varphi = 15$  pour les schémas  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_2$ : les ondes P.

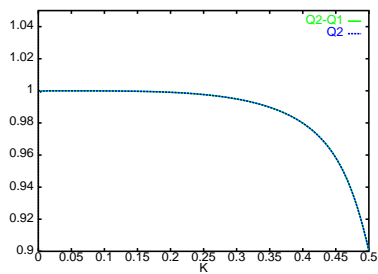


FIG. 3.1.32: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale  $\varphi = 0$  pour les schémas  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_2$ : les ondes S.

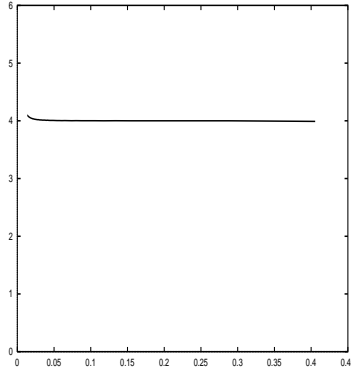


FIG. 3.1.33: L'ordre d'approximation pour  $K$  petit.

### 3.1.4.3 Dispersion du schéma $Q_3 - Q_2$

Pour ce schéma la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  a dixhuit valeurs propres. Les deux premières qu'on notera encore  $\lambda_h^1 = (\omega_h^2)_1$  et  $\lambda_h^2 = (\omega_h^2)_2$  correspondent aux ondes physiques. Les 16 autres, qui correspondent à des ondes parasites, tendent vers l'infini quand  $h$  tend vers 0. Pour les valeurs propres physiques nous pouvons prouver le lemme suivant.

**Lemme 3.1.3** *Les valeurs propres  $\lambda_h^1$  et  $\lambda_h^2$  admettent les développements limités suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_h^1 = |\vec{k}|^2 \left( V_p^2 - \frac{\pi^6 V_p^2 K^6}{42525} (1 + e_3) + O(K^8) \right) \\ \lambda_h^2 = |\vec{k}|^2 \left( V_s^2 - \frac{\pi^6 V_s^2 K^6}{42525} (1 - e_4) + O(K^8) \right) \\ e_3 = 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^2(2\varphi) - \frac{V_s^2}{V_p^2} \left( 1 - \frac{V_s^2}{V_p^2} \right) 28 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi \\ e_4 = -72 \cos^4 \varphi (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 1) - 25 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ \quad + \frac{V_s^4}{V_p^4} (84 \cos^6 \varphi \sin^2 \varphi + 28 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 84 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi) \end{array} \right.$$

**Démonstration :** Celle ci est calculatoire. Nous l'avons menée à l'aide du logiciel MAPLE (voir annexe B). ■

### Comparaison des vitesses de phase

Sur les figures suivantes nous présentons les courbes de dispersion pour le schéma semi-discrétisé en espace. Comme pour les éléments de plus bas degré nous pouvons remarquer que pour  $\varphi = 0$  la dispersion est la même pour les ondes P et S et elle est indépendante du coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour les autres angles de propagation la dispersion des ondes S est moins importante que celle des ondes P (ce qui était déjà le cas pour les éléments d'ordre moins élevé). On constate aussi que comme pour l'élément  $Q_2 - Q_1$  il y a une valeur critique



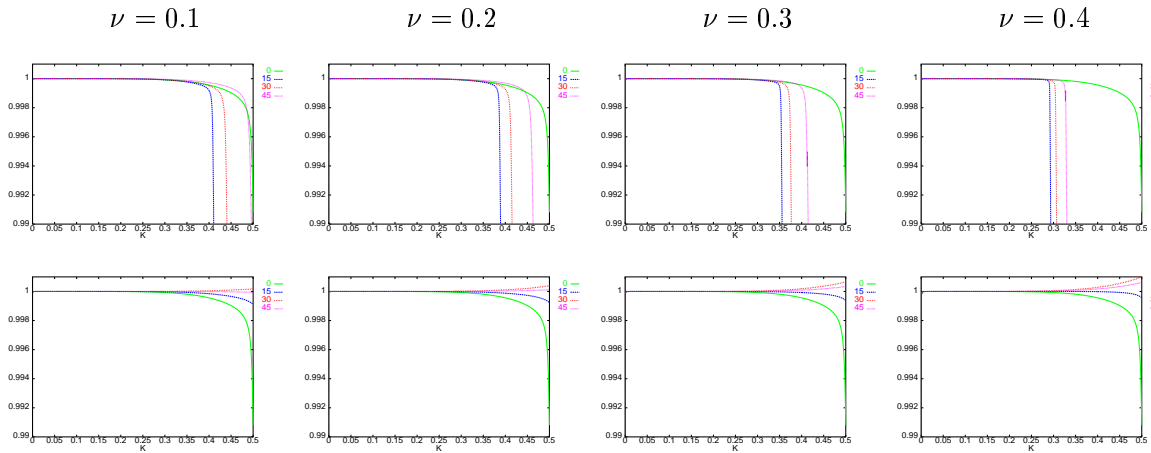


FIG. 3.1.34: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut) et les ondes S (en bas) pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ .

du paramètre  $K$  à partir de laquelle la précision sur la vitesse de phase de ondes P diminue de façon plus importante.

Sur la figure 3.1.35 suivantes nous présentons les courbes de dispersion obtenues pour le schéma  $Q_3$ .

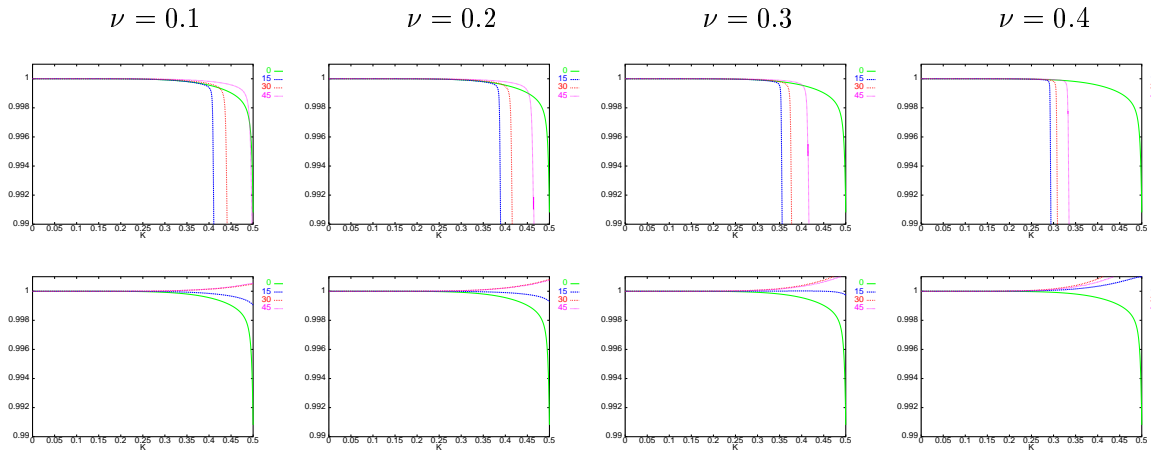


FIG. 3.1.35: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut) et les ondes S (en bas) pour l'élément  $Q_3$ .

Comme pour les éléments  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_2$ , les courbes de dispersion pour les deux schémas sont très similaires et nous avons une légère amélioration sur la dispersion des ondes S pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ .

Comme pour le schéma  $Q_3 - Q_2$  la dispersion des ondes P est plus significative que celle des ondes S et pour  $\varphi = 0$  la dispersion est la même pour les ondes P et S et elle ne dépend pas du coefficient de Poisson  $\nu$ .

La direction de dispersion maximale est la même pour les deux schémas et correspond à  $\varphi = 15$  pour les ondes P et à  $\varphi = 0$  pour les ondes S. L'erreur maximale induit par la

dispersion numérique est pratiquement le même pour les deux schémas comme nous pouvons le remarquer sur les figures 3.1.36 et 3.1.37.

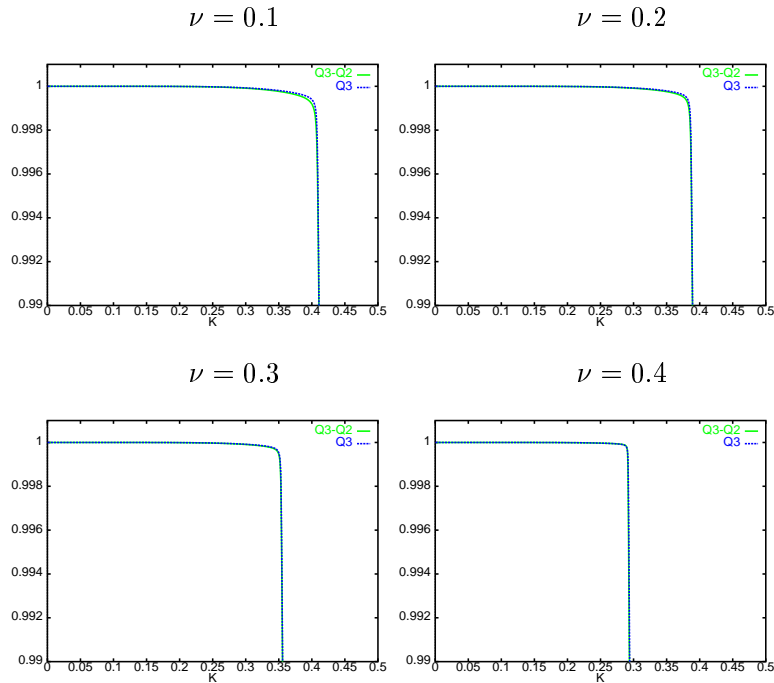


FIG. 3.1.36: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale  $\varphi = 15$  pour les schémas  $Q_3 - Q_2$  et  $Q_3$ : les ondes P.

Pour les ondes S ceci se résume à une seule courbe qui est identique pour les deux schémas car l'angle correspondant à la direction de dispersion maximale est  $\varphi = 0$  et comme nous l'avons déjà remarqué pour cette direction de propagation la dispersion ne dépend pas du coefficient de Poisson  $\nu$ .

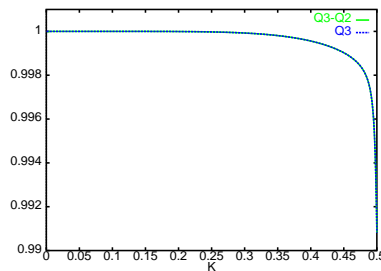


FIG. 3.1.37: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale  $\varphi = 0$  pour les schémas  $Q_3 - Q_2$  et  $Q_3$ : les ondes S.

Pour vérifier ensuite que le schéma est effectivement d'ordre 6 nous avons tracé (comme pour l'élément  $Q_2 - Q_1$ ) sur la figure suivante l'évolution de  $\Delta(\log(V_{p,h} - V_p))$  en fonction de  $\Delta(\log K)$  pour les petites valeurs de  $K$ .

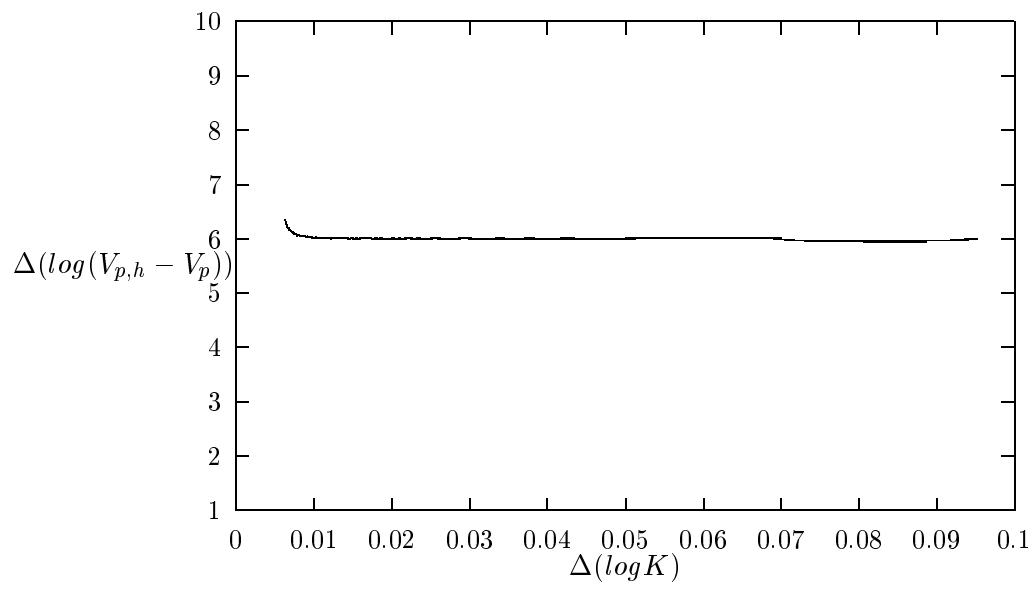


FIG. 3.1.38: L'ordre de l'approximation pour  $K$  petit, schéma  $Q_3 - Q_2$ .

### 3.1.5 Conclusions

L'étude de dispersion nous a permis de mettre en évidence un phénomène de "super-convergence" en établissant que l'erreur de dispersion est en  $O(h^2)$  pour le schéma  $Q_1 - Q_0$ , en  $O(h^4)$  pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et en  $O(h^6)$  pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ . Ce résultat a été obtenu de façon analytique (Lemmes 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3) mais il a été également confirmé par les résultats numériques. Il est très intéressant et ne laisse pas de doute sur l'intérêt de l'utilisation des méthodes d'ordre élevé. Pour s'en convaincre nous proposons ici un cas test : supposons que nous sommes intéressé par la modélisation de la propagation des ondes dans un milieu élastique avec  $\nu = 0.2$  et considérons qu'on veut limiter l'erreur de dispersion à moins de 1%. Pour fixé alors le pas de discrétisation nous allons consulter les courbes de dispersion. En pratique comme la vitesse des ondes S est inférieure à celle des ondes P, cela consiste à fixé le nombre des points par longueur d'onde S. Nous présentons sur la figure 3.1.39 les courbes

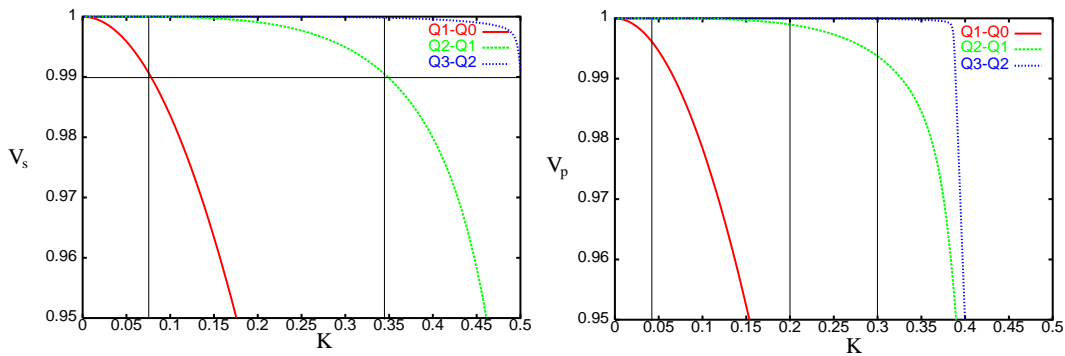


FIG. 3.1.39: Comparaison des courbes de dispersion sur les ondes S (à gauche) et P (à droite) entre les schémas  $Q_1 - Q_0$ ,  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_3 - Q_2$  pour  $\nu = 0.2$  et la direction de dispersion maximale.

des dispersion sur les ondes S et P, correspondant à  $\nu = 0.2$  et à la direction de dispersion maximale pour les schémas  $Q_1 - Q_0$  ( $\varphi = 0$  pour  $V_s$  et  $\varphi = 45$  pour  $V_p$ ),  $Q_2 - Q_1$  ( $\varphi = 0$  pour  $V_s$  et  $\varphi = 15$  pour  $V_p$ ) et  $Q_3 - Q_2$  ( $\varphi = 0$  pour  $V_s$  et  $\varphi = 15$  pour  $V_p$ ).

Comme nous pouvons le constater sur la figure 3.1.39 pour obtenir un erreur inférieur à 1% il faut prendre

- $1/0.075 \approx 13.33$  points par longueur d'onde S, si on utilise le schéma  $Q_1 - Q_0$ ,
- $1/0.34 \approx 3$  cellules et donc 6 (3 cellules  $\times$  2 points par cellule) points par longueur d'onde S, si on utilise le schéma  $Q_2 - Q_1$ ,
- $1/0.5 \approx 2$  cellules et donc 6 (2 cellules  $\times$  3 points par cellule) points par longueur d'onde S, si on utilise le schéma  $Q_3 - Q_2$ .

Pour chaque schéma ce nombre des points par longueur d'onde S correspond à un nombre des points par longueur d'onde P qui est supérieur. Plus précisément nous avons

- 22 points ( $K = 0.045$ ) par longueur d'onde P, pour le schéma  $Q_1 - Q_0$ ,
- 10 points ( $K = 0.2$ ) par longueur d'onde P, pour le schéma  $Q_2 - Q_1$ ,
- 10 points ( $K = 0.3$ ) par longueur d'onde P, pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ .

Sur la figure 3.1.39 (à droite) nous avons également tracer (lignes verticales) le nombre de cellules par longueur d'onde  $P$  pour les trois schémas. L'intersection de ces courbes avec les courbes de dispersion nous donne la précision qu'on obtient avec chaque schéma sur les ondes  $P$ . Sur cet exemple nous obtenons (voir figure 3.1.40) une erreur de 0.4% pour le schéma  $Q_1 - Q_0$ , de 0.1% pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et un erreur d'environ 0.01% pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ .

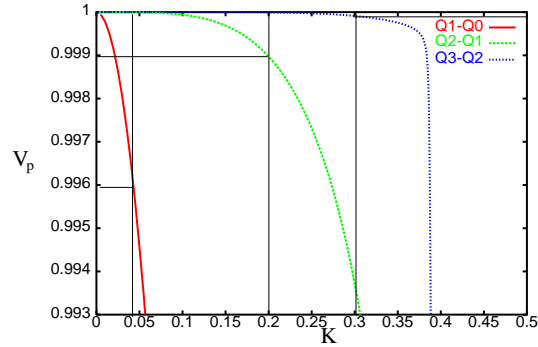


FIG. 3.1.40: Comparaison des courbes de dispersion sur les ondes  $P$  entre les schémas  $Q_1 - Q_0$ ,  $Q_2 - Q_1$  et  $Q_3 - Q_2$  pour  $\nu = 0.2$  et la direction de dispersion maximale.

## 3.2 Le problème tridimensionnel

### 3.2.1 Interprétation du schéma

Nous allons considérer ici un maillage uniforme constitué des cubes de côté  $h$  et nous allons écrire le schéma numérique obtenu avec l'élément fini de plus bas degré. Comme nous

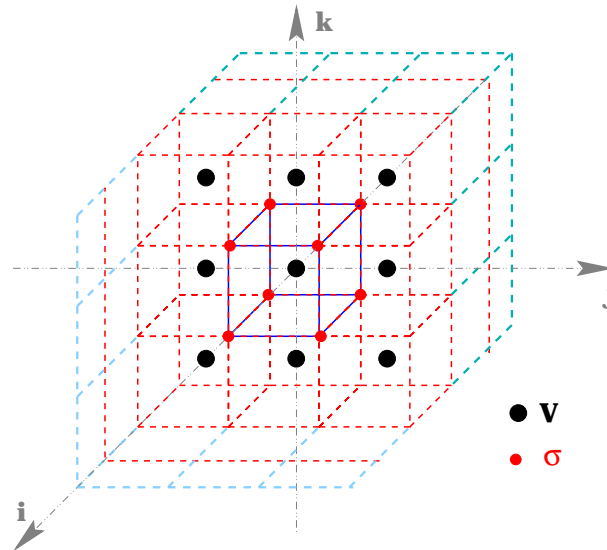


FIG. 3.2.1: Un maillage uniforme en 3D.

pouvons le constater sur la figure 3.2.1, il y a périodicité de deux types de points : les sommets

du maillage indexés par  $(i, j, k)$ , auxquels sont associés les 18 degrés de liberté du tenseur de contraintes et les centres des éléments indexés par  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ , auxquels sont associés les 3 degrés de liberté de la vitesse. Nous avons représenté sur la figure 3.2.2 la numérotation des degrés de liberté associés au tenseurs de contraintes. Les équations semi-discrétisées en

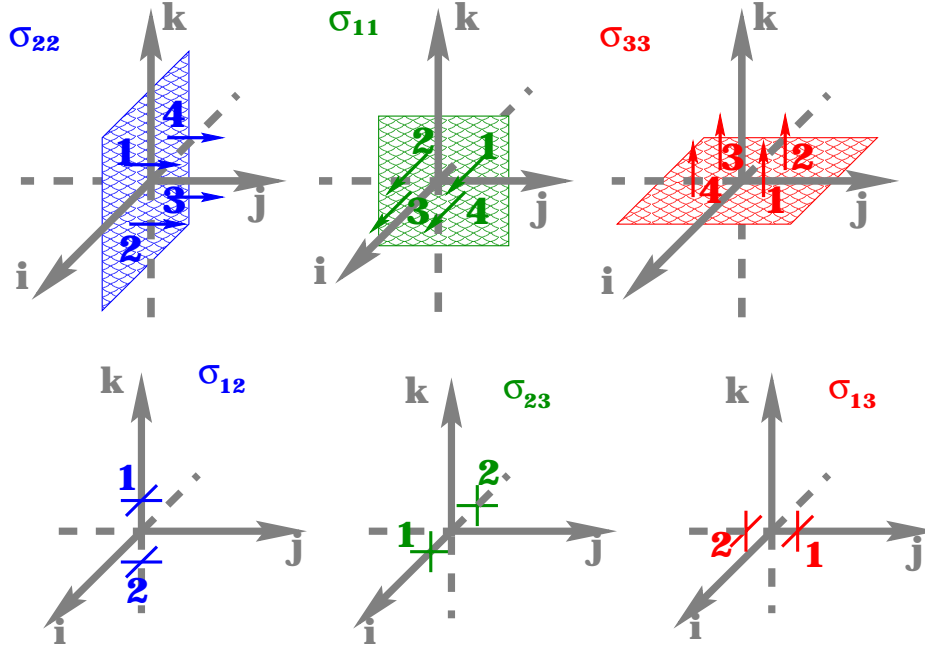


FIG. 3.2.2: La numérotation de d.d.l associé au tenseurs de contraintes.

espace qu'on obtient a partir du système (2.1.24) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 (3.2.1) \quad \rho \frac{d(v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}}{dt} &= \frac{1}{4h} ((\sigma_{11})_{i+1, j, k}^1 - (\sigma_{11})_{i, j, k}^1 + (\sigma_{11})_{i+1, j+1, k}^2 - (\sigma_{11})_{i, j+1, k}^2) \\
 &+ \frac{1}{4h} ((\sigma_{11})_{i+1, j, k+1}^4 - (\sigma_{11})_{i, j, k+1}^4 + (\sigma_{11})_{i+1, j+1, k+1}^3 - (\sigma_{11})_{i, j+1, k+1}^3) \\
 &+ \frac{1}{4h} ((\sigma_{12})_{i, j+1, k}^1 - (\sigma_{12})_{i, j, k}^1 + (\sigma_{12})_{i+1, j+1, k}^1 - (\sigma_{12})_{i+1, j, k}^1) \\
 &+ \frac{1}{4h} ((\sigma_{12})_{i, j+1, k+1}^2 - (\sigma_{12})_{i, j, k+1}^2 + (\sigma_{12})_{i+1, j+1, k+1}^2 - (\sigma_{12})_{i+1, j, k+1}^2) \\
 &+ \frac{1}{4h} ((\sigma_{13})_{i, j, k+1}^1 - (\sigma_{13})_{i, j, k}^1 + (\sigma_{13})_{i+1, j, k+1}^1 - (\sigma_{13})_{i+1, j, k}^1) \\
 &+ \frac{1}{4h} ((\sigma_{13})_{i, j+1, k+1}^2 - (\sigma_{13})_{i, j+1, k}^2 + (\sigma_{13})_{i+1, j+1, k+1}^2 - (\sigma_{13})_{i+1, j+1, k}^2)
 \end{aligned}$$

(3.2.2)

$$\begin{aligned}
 \varrho \frac{d(v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{dt} &= \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{12})_{i+1,j,k}^1 - (\sigma_{12})_{i,j,k}^1 + (\sigma_{12})_{i+1,j+1,k}^1 - (\sigma_{12})_{i,j+1,k}^1 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{12})_{i+1,j,k+1}^2 - (\sigma_{12})_{i,j,k+1}^2 + (\sigma_{12})_{i+1,j+1,k+1}^2 - (\sigma_{12})_{i,j+1,k+1}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{22})_{i,j+1,k}^1 - (\sigma_{22})_{i,j,k}^1 + (\sigma_{22})_{i+1,j+1,k}^4 - (\sigma_{22})_{i+1,j,k}^4 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{22})_{i,j+1,k+1}^2 - (\sigma_{22})_{i,j,k+1}^2 + (\sigma_{22})_{i+1,j+1,k+1}^3 - (\sigma_{22})_{i+1,j,k+1}^3 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{23})_{i,j,k+1}^1 - (\sigma_{23})_{i,j,k}^1 + (\sigma_{23})_{i+1,j+1,k+1}^1 - (\sigma_{23})_{i+1,j+1,k}^1 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{23})_{i+1,j,k+1}^2 - (\sigma_{23})_{i+1,j,k}^2 + (\sigma_{23})_{i+1,j+1,k+1}^2 - (\sigma_{23})_{i+1,j+1,k}^2 \right)
 \end{aligned}$$

(3.2.3)

$$\begin{aligned}
 \varrho \frac{d(v_3)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{dt} &= \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{13})_{i+1,j,k}^1 - (\sigma_{13})_{i,j,k}^1 + (\sigma_{13})_{i+1,j+1,k}^2 - (\sigma_{13})_{i,j+1,k}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{13})_{i+1,j,k+1}^1 - (\sigma_{13})_{i,j,k+1}^1 + (\sigma_{13})_{i+1,j+1,k+1}^2 - (\sigma_{13})_{i,j+1,k+1}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{23})_{i,j+1,k}^1 - (\sigma_{23})_{i,j,k}^1 + (\sigma_{23})_{i+1,j+1,k}^2 - (\sigma_{23})_{i+1,j,k}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{23})_{i,j+1,k+1}^1 - (\sigma_{23})_{i,j,k+1}^1 + (\sigma_{23})_{i+1,j+1,k+1}^2 - (\sigma_{23})_{i+1,j,k+1}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{33})_{i,j,k+1}^1 - (\sigma_{33})_{i,j,k}^1 + (\sigma_{33})_{i+1,j+1,k+1}^4 - (\sigma_{33})_{i+1,j+1,k}^4 \right) \\
 &+ \frac{1}{4h} \left( (\sigma_{33})_{i+1,j,k+1}^2 - (\sigma_{33})_{i+1,j,k}^2 + (\sigma_{33})_{i+1,j+1,k+1}^3 - (\sigma_{33})_{i+1,j+1,k}^3 \right)
 \end{aligned}$$

(3.2.4)

$$A_h \frac{d(\Sigma)_{i,j,k}}{dt} = BV$$

avec  $(\Sigma)_{i,j,k}$  le vecteur qui contient les 18 composants de  $\sigma$  dans l'ordre suivante : d'abord les 4 composants de  $\left\{ (\sigma_{11})_{i,j,k}^l \right\}_{l=1}^4$ , ensuite  $\left\{ (\sigma_{22})_{i,j,k}^l \right\}_{l=1}^4$ ,  $\left\{ (\sigma_{33})_{i,j,k}^l \right\}_{l=1}^4$ ,  $\left\{ (\sigma_{12})_{i,j,k}^l \right\}_{l=1}^2$ ,  $\left\{ (\sigma_{13})_{i,j,k}^l \right\}_{l=1}^2$  et  $\left\{ (\sigma_{23})_{i,j,k}^l \right\}_{l=1}^2$ . La matrice  $A_h$  dépend des coefficients de la matrice  $A$  qui intervient dans la loi Hooke. Plus précisément si on considère le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sous la forme vectoriel

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^t,$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^t,$$

alors  $A$  est la matrice qui les relie suivant la Loi de Hooke

$$A\sigma = \varepsilon$$

Si on note maintenant  $a_{ij}, i, j = 1, \dots, 6$  les coefficients de la matrice  $A$  (qui est symétrique),  $A_h$  est donnée par

$$A_h = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{13} & 0 & 0 & 2a_{16} & 0 & 2a_{15} & 0 & a_{14} & a_{14} \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & a_{13} & 2a_{16} & 0 & 0 & 2a_{15} & a_{14} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{13} & 0 & 2a_{16} & 0 & 2a_{15} & a_{14} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & a_{12} & 0 & a_{13} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 2a_{16} & 2a_{15} & 0 & a_{14} & a_{14} \\ a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 2a_{26} & 0 & a_{25} & a_{25} & 2a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{12} & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 2a_{26} & a_{25} & a_{25} & 2a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & a_{23} & 0 & 0 & 2a_{26} & a_{25} & a_{25} & 0 & 2a_{24} \\ a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & a_{23} & 0 & 2a_{26} & 0 & a_{25} & a_{25} & 0 & 2a_{24} \\ a_{13} & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{23} & 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{36} & a_{36} & 2a_{35} & 0 & 2a_{34} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{23} & a_{23} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} & a_{36} & 2a_{35} & 0 & 0 & 2a_{34} \\ 0 & a_{13} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & a_{23} & a_{23} & 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{36} & a_{36} & 0 & 2a_{35} & 0 & 2a_{34} \\ 0 & a_{13} & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} & a_{36} & a_{36} & 0 & 2a_{35} & 2a_{34} & 0 & 0 \\ 2a_{16} & 2a_{16} & 0 & 0 & 2a_{26} & 0 & 0 & 2a_{26} & a_{36} & a_{36} & a_{36} & a_{36} & 4a_{66} & 0 & 2a_{56} & 2a_{56} & 2a_{46} & 2a_{46} \\ 0 & 0 & 2a_{16} & 2a_{16} & 0 & 2a_{26} & 2a_{26} & 0 & a_{36} & a_{36} & a_{36} & a_{36} & 0 & 4a_{66} & 2a_{56} & 2a_{56} & 2a_{46} & 2a_{46} \\ 2a_{15} & 0 & 0 & 2a_{15} & a_{25} & a_{25} & a_{25} & a_{25} & 2a_{35} & 2a_{35} & 0 & 0 & 2a_{56} & 2a_{56} & 4a_{55} & 0 & 2a_{45} & 2a_{45} \\ 0 & 2a_{15} & 2a_{15} & 0 & a_{25} & a_{25} & a_{25} & a_{25} & 0 & 0 & 2a_{35} & 2a_{35} & 2a_{56} & 2a_{56} & 0 & 4a_{55} & 2a_{45} & 2a_{45} \\ a_{14} & a_{14} & a_{14} & a_{14} & 2a_{24} & 2a_{24} & 0 & 0 & 2a_{34} & 0 & 0 & 2a_{34} & 2a_{46} & 2a_{46} & 2a_{45} & 2a_{45} & 4a_{44} & 0 \\ a_{14} & a_{14} & a_{14} & a_{14} & 0 & 0 & 2a_{24} & 2a_{24} & 0 & 2a_{34} & 2a_{34} & 0 & 2a_{46} & 2a_{46} & 2a_{45} & 2a_{45} & 0 & 4a_{44} \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $BV$  est défini par

$$\begin{aligned} BV_1 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) \\ BV_2 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) \\ BV_3 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_4 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_5 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) \\ BV_6 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_7 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_8 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) \\ BV_9 &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_{10} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_{11} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \\ BV_{12} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 BV_{13} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{h} \left( (v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (v_2)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \\
 BV_{14} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{h} \left( (v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + (v_2)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 BV_{15} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{h} \left( (v_3)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_3)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (v_3)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_3)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 BV_{16} &= \frac{2}{h} \left( (v_1)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + (v_1)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_1)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{h} \left( (v_3)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (v_3)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 BV_{17} &= \frac{2}{h} \left( (v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + (v_2)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{h} \left( (v_3)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_3)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (v_3)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_3)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 BV_{18} &= \frac{2}{h} \left( (v_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + (v_2)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_2)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{2}{h} \left( (v_3)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (v_3)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - (v_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Comme dans le cas bidimensionnel on peut éliminer  $\sigma$  dans les équations (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.3) en utilisant les équations (3.2.4), on obtient alors un système du deuxième ordre en vitesse, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(3.2.5) \quad \frac{d^2 V}{dt^2} = \mathbb{K}_h V,$$

avec  $V = (v_1, v_2, v_3)$  et où nous avons noté par  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  les suites  $(v_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ ,  $(v_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  et  $(v_3)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ . L'opérateur  $\mathbb{K}_h$  apparaît ici comme un opérateur agissant dans l'espace des suites à trois indices (ici  $i$ ,  $j$  et  $k$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  et il est défini par

$$\mathbb{K}_h = \begin{bmatrix} V_p^2 D_1^2 + V_s^2 (D_2^2 + D_3^2) & (V_p^2 - V_s^2) D_{12}^2 & (V_p^2 - V_s^2) D_{13}^2 \\ (V_p^2 - V_s^2) D_{12}^2 & V_p^2 D_2^2 + V_s^2 (D_1^2 + D_3^2) & (V_p^2 - V_s^2) D_{23}^2 \\ (V_p^2 - V_s^2) D_{13}^2 & (V_p^2 - V_s^2) D_{23}^2 & V_p^2 D_3^2 + V_s^2 (D_1^2 + D_2^2) \end{bmatrix}$$

Les opérateurs

$$D_i^2 = D_{i,\alpha,\gamma_1}^2, \quad i = 1, \dots, 3,$$

$$D_i^2 = D_{i,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2, \quad i = 1, \dots, 3,$$

sont des opérateurs discrets qui approchent les dérivées continues

$$\frac{d^2}{dx_i^2}, \quad i = 1, \dots, 3 .$$

De même

$$D_{ij}^2 = D_{ij,\delta}^2, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad i \neq j ,$$

approche

$$\frac{d^2}{dx_i dx_j}, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad i \neq j .$$

Avant de décrire ces opérateurs on peut remarquer que le système (3.2.5) peut s'interpréter comme un système de différences finies à 27 points. En effet, les équations (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.3) font intervenir tous les d.d.l pour  $\sigma$  qui sont associés au cube  $K^*$  de centre  $\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$ . Ensuite en éliminant  $\sigma$  nous allons faire intervenir dans le système (3.2.5) tous les d.d.l pour  $v$  associés aux cubes qui ont un sommet commun avec le cube  $K^*$ . On définit maintenant les opérateurs classiques centrés des différences finies

$$D_1^2 f(i, j, k) = \frac{f(i+1, j, k) - 2f(i, j, k) + f(i-1, j, k)}{h^2},$$

$D_2^2$  et  $D_3^2$  sont définis de la même façon en dérivant dans la direction  $x_2$  et  $x_3$  respectivement. Ainsi que

$$D_{12}^2 f(i, j, k) = \frac{f(i+1, j+1, k) + f(i-1, j-1, k) - f(i+1, j-1, k) - f(i-1, j+1, k)}{h^2},$$

et de même  $D_{13}^2$  et  $D_{23}^2$ . On peut alors écrire les opérateurs discrets qui interviennent dans notre schéma sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,\alpha,\gamma_1}^2 f(i, j, k) &= \alpha (D_1^2 f(i, j+1, k) + D_1^2 f(i, j-1, k) + D_1^2 f(i, j, k+1) + D_1^2 f(i, j, k-1)) \\ &+ \gamma_1 (D_1^2 f(i, j+1, k+1) + D_1^2 f(i, j+1, k-1) + D_1^2 f(i, j-1, k+1) \\ &+ D_1^2 f(i, j-1, k-1)) + (1 - 4\alpha - 4\gamma_1) D_1^2 f(i, j, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2,\alpha,\gamma_1}^2 f(i, j, k) &= \alpha (D_2^2 f(i+1, j, k) + D_2^2 f(i-1, j, k) + D_2^2 f(i, j, k+1) + D_2^2 f(i, j, k-1)) \\ &+ \gamma_1 (D_2^2 f(i+1, j, k+1) + D_2^2 f(i+1, j, k-1) + D_2^2 f(i-1, j, k+1) \\ &+ D_2^2 f(i-1, j, k-1)) + (1 - 4\alpha - 4\gamma_1) D_2^2 f(i, j, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{3,\alpha,\gamma_1}^2 f(i, j, k) &= \alpha (D_3^2 f(i+1, j, k) + D_3^2 f(i-1, j, k) + D_3^2 f(i, j+1, k) + D_3^2 f(i, j-1, k)) \\ &+ \gamma_1 (D_3^2 f(i+1, j+1, k) + D_3^2 f(i+1, j-1, k) + D_3^2 f(i-1, j+1, k) \\ &+ D_3^2 f(i-1, j-1, k)) + (1 - 4\alpha - 4\gamma_1) D_3^2 f(i, j, k) \end{aligned}$$

$$D_{12,\delta}^2 f(i, j, k) = \delta (D_{12}^2 f(i, j, k+1) + D_{12}^2 f(i, j, k-1)) + (1 - 2\delta) D_{12}^2 f(i, j, k)$$

$$D_{13,\delta}^2 f(i, j, k) = \delta (D_{13}^2 f(i, j+1, k) + D_{13}^2 f(i, j-1, k)) + (1 - 2\delta) D_{13}^2 f(i, j, k)$$

$$D_{23,\delta}^2 f(i, j, k) = \delta (D_{23}^2 f(i+1, j, k) + D_{23}^2 f(i-1, j, k)) + (1 - 2\delta) D_{23}^2 f(i, j, k)$$

Les opérateurs  $\mathcal{D}_{i,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2$ ,  $i = 1, \dots, 3$  dépendent de la quantité qu'on dérive et on peut remarquer dans la définition de la matrice  $\mathbb{K}_h$  que nous avons des termes du type  $\mathcal{D}_{i,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2 V_j$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$ ,  $i \neq j$ . On définit  $\mathcal{D}_{2,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2 V_1(i, j, k)$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2 V_1(i, j, k) &= \beta_1 (D_2^2 V_1(i+1, j, k) + D_2^2 V_1(i-1, j, k)) \\ &+ \beta_2 (D_2^2 V_1(i, j, k+1) + D_2^2 V_1(i, j, k-1)) \\ &+ \gamma_2 (D_2^2 V_1(i+1, j, k+1) + D_2^2 V_1(i+1, j, k-1) + D_2^2 V_1(i-1, j, k+1) \\ &+ D_2^2 V_1(i-1, j, k-1)) + (1 - 2\beta_1 - 2\beta_2 - 4\gamma_2) D_2^2 V_1(i, j, k) \end{aligned}$$

on peut remarquer que la différence par rapport à l'opérateur  $\mathcal{D}_{2,\alpha,\gamma_1}^2$  est que au lieu de mettre le même poids aux points  $(i+1, j, k)$ ,  $(i-1, j, k)$ ,  $(i, j+1, k)$  et  $(i, j-1, k)$  nous avons utilisé le poids  $\beta_1$  pour  $(i+1, j, k)$ ,  $(i-1, j, k)$  et le poids  $\beta_2$  pour  $(i, j+1, k)$ ,  $(i, j-1, k)$ . En fait pour cet opérateur on met  $\beta_1$  dans la direction de la composante de la vitesse qu'on dérive. De la même façon on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2 V_3(i, j, k) &= \beta_2 (D_2^2 V_3(i+1, j, k) + D_2^2 V_3(i-1, j, k)) \\ &+ \beta_1 (D_2^2 V_3(i, j, k+1) + D_2^2 V_3(i, j, k-1)) \\ &+ \gamma_2 (D_2^2 V_3(i+1, j, k+1) + D_2^2 V_3(i+1, j, k-1) + D_2^2 V_3(i-1, j, k+1) \\ &+ D_2^2 V_3(i-1, j, k-1)) + (1 - 2\beta_1 - 2\beta_2 - 4\gamma_2) D_2^2 V_3(i, j, k) \end{aligned}$$

Les autres opérateurs  $\mathcal{D}_{j,\beta_1,\beta_2,\gamma_2}^2$  se dérivent à partir des opérateurs  $\mathcal{D}_{2,\alpha,\gamma_1}^2$  en suivant exactement le même principe et donc nous ne les détaillons pas ici.

### Une classe général de schémas d'ordre 2

Comme dans le cas bidimensionnel on peut remarquer que le système (3.2.5) décrit une classe générale de schémas numériques d'ordre 2, dépendant des paramètres positifs  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\delta$  avec  $0 \leq \alpha + \gamma_1 \leq 1/4$ ,  $0 \leq \beta_1 + \beta_2 + 2\gamma_2 \leq 1/2$  et  $0 \leq \delta \leq 1/4$ . Plus particulièrement pour :

- $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta = 0$  on retrouve le schéma des différences finies.
- $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{9}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{36}$  et  $\delta = \frac{1}{6}$  on retrouve le schéma des éléments finis  $Q_1$ .
- $\alpha = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{8V_p^2(V_p^2 - V_s^2)}$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = \alpha \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)}{2V_p^2}$ ,  $\gamma_2 = 0$  et  $\delta = 2\alpha$  on retrouve notre schéma.

#### Remarque 3.2.1

1. *Il est important de remarquer que pour le nouveau schéma les paramètres  $\alpha$ ,  $\gamma_1$  et  $\delta$  dépendent du coefficient de Poisson  $\nu$  et donc du milieu élastique considéré. Comme dans le cas 2D on peut dire qu'il s'agit d'un schéma qui s'adapte au milieu de propagation.*

2. Le système (3.2.5) est une approximation des équations de l'élastodynamique écrit en déplacement :

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \mathbb{K}U$$

avec

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} V_p^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + V_s^2 \left( \frac{d^2}{dx_2^2} + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) & (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_1 dx_2} & (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_1 dx_3} \\ (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_1 dx_2} & V_p^2 \frac{d^2}{dx_2^2} + V_s^2 \left( \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) & (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_2 dx_3} \\ (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_1 dx_3} & (V_p^2 - V_s^2) \frac{d^2}{dx_2 dx_3} & V_p^2 \frac{d^2}{dx_3^2} + V_s^2 \left( \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} \right) \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Analyse de dispersion, le cas tridimensionnel

Comme pour le problème bidimensionnel nous commençons par quelques rappels concernant le problème continu. Dans ce cas, l'analyse de dispersion est l'étude de solutions particulières de la forme

$$U = U_o \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \quad U_o \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

Cette relation définit de façon générale une onde plane  $U$  de vecteur d'onde  $\vec{k}$  se propageant avec la vitesse de phase  $\omega/|\vec{k}|$ . On repérera ici, les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$  par rapport aux deux angles  $\varphi$  et  $\theta$  selon les expressions :

$$k_1 = |\vec{k}| \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad k_2 = |\vec{k}| \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad k_3 = |\vec{k}| \cos(\theta)$$

Pour que  $U$  soit solution de l'équation de l'élastodynamique la relation suivante appelée

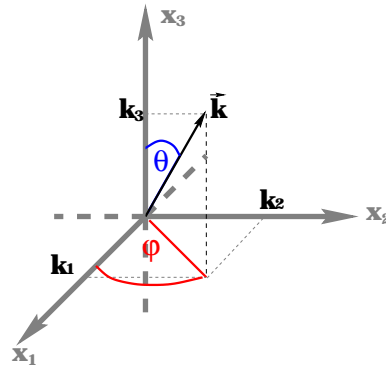


FIG. 3.2.3: Représentation de  $\vec{k}$ .

relation de dispersion doit être vérifiée :

$$\omega^2 U_o = \widehat{\mathbb{K}}(k) U_o, \quad k = (k_1, k_2, k_3)$$

où la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}(k)$  est donnée par

$$\widehat{\mathbb{K}}(k) = \begin{bmatrix} V_p^2 k_1^2 + V_s^2 (k_2^2 + k_3^2) & (V_p^2 - V_s^2) k_1 k_2 & (V_p^2 - V_s^2) k_1 k_3 \\ (V_p^2 - V_s^2) k_1 k_2 & V_p^2 k_2^2 + V_s^2 (k_1^2 + k_3^2) & (V_p^2 - V_s^2) k_2 k_3 \\ (V_p^2 - V_s^2) k_1 k_3 & (V_p^2 - V_s^2) k_2 k_3 & V_p^2 k_3^2 + V_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \end{bmatrix}.$$

L'équation (3.1.10) implique que  $\omega^2$  est une valeur propre de  $\widehat{\mathbb{K}}(k)$  et  $U_o$  le vecteur propre associé. Un simple calcul montre que les trois valeurs propres de  $\widehat{\mathbb{K}}(k)$  sont données par

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= V_p^2 |\vec{k}|, & U_o^1 &= (k_1, k_2, k_3), \\ \omega_2^2 &= V_s^2 |\vec{k}|, & U_o^2 &\perp U_o^1, \quad U_o^2 \perp U_o^3, \\ \omega_3^2 &= V_s^2 |\vec{k}|, & U_o^3 &\perp U_o^1, \quad U_o^3 \perp U_o^2. \end{aligned}$$

La première valeur propre ( $\omega_1^2$ ) correspond à une onde de pression qui se propage dans la direction donnée par le vecteur propre  $U_o^1$ ,

$$U_o^1 = (-\cos(\varphi) \cos(\theta), -\sin(\varphi) \cos(\theta), \cos(\theta)).$$

La deuxième valeur propre ( $\omega_2^2 = \omega_3^2$ ) est une valeur propre double. Ceci implique que les deux ondes planes S se propagent avec la même vitesse  $V_s$  mais dans deux directions différentes données par les vecteurs propres  $U_o^2$  et  $U_o^3$  (avec  $U_o^3 \perp U_o^2$ ). On distingue les deux ondes de cisaillement par leur direction de propagation. On appellera SH (polarisation horizontale) l'onde associée au vecteur propre  $U_o^2$ ,

$$U_o^2 = (-\sin(\varphi), -\cos(\varphi), 0),$$

et SV (polarisation verticale) l'onde associée au vecteur propre  $U_o^3$ ,

$$U_o^3 = (-\cos(\varphi) \cos(\theta), -\sin(\varphi) \cos(\theta), \cos(\theta)).$$

Nous avons illustré les trois directions de propagation (pour les ondes P, SH et SV) sur la figure (3.2.4).

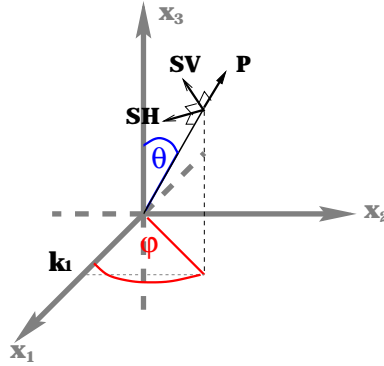


FIG. 3.2.4: Représentation de trois directions de propagation pour les ondes P, SH et SV.

Comme pour le problème bidimensionnel les vitesses de phase  $V_p$  et  $V_s$  sont indépendantes de la fréquence  $\omega$  : l'équation de l'élastodynamique est non dispersive. Cependant ceci n'est plus vraie dans le cas des problèmes semi-discrets et discrets. De plus, dans ce cas nous avons trois valeurs propres distinctes. Ceci implique, en particulier, que les vitesses de phase correspondant aux ondes de cisaillement sont dans ce cas différentes, même si elles tendent toutes les deux vers la vitesse  $V_s$  (continue) quand  $h$  tend vers zéro. Comme nous allons le voir les courbes de dispersion ne sont pas les mêmes pour les ondes SH et SV.

Pour analyser l'erreur de dispersion numérique nous allons utiliser, comme dans le cas bidimensionnel, l'écriture du schéma un maillage régulier. Dans ce cas, chaque cellule du maillage, noté

$$[ih, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h], \times [kh, (k+1)h], \quad (i, j, k) \in Z^3,$$

contient un noeud caractéristique  $I = (i, j, k)$  (voir section 3.2.1) auquel est associé un vecteur  $U_I \in C^3$ . Le problème semi-discret s'écrit alors sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} U_h + \mathbb{K}_h U_h = 0,$$

où  $U_h = (U_I)_{I \in Z^3}$  est une suite à triple indice  $I (= (i, j, k))$  à valeurs dans  $C^3$  et  $\mathbb{K}_h$  représente un opérateur agissant dans cet espace des suites. Nous pouvons ensuite introduire  $T_h$  l'opérateur de translation qui associe à  $U_I$  le vecteur  $U_{I+1}$  (correspondant ici à  $U_{i+1, j+1, k+1}$ ), et nous obtenons, comme pour le problème en 2D, que  $T_h$  commute avec  $\mathbb{K}_h$

$$T_h \mathbb{K}_h = \mathbb{K}_h T_h.$$

Ceci justifie de rechercher des solutions du problème semi-discret sous la forme

$$U_I = U_o \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x}_I - \omega t), \quad U_o \in C^3, \quad (\vec{k}, \vec{x}_I) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

avec  $\vec{x}_I = (ih, jh, kh)$ . Cette relation définit de façon générale une onde plane numérique, pour que cette onde soit solution du problème semi-discretisé en espace la relation de dispersion suivante doit être vérifiée

$$\omega_h^2 U_h = \widehat{\mathbb{K}}_h(k) U_h.$$

Pour l'élément fini  $Q_1 - Q_0$ , la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  est une matrice symétrique  $3 \times 3$  avec :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1] &= \frac{1}{h^2} (4V_p^2 X_1 (1 - 4(\alpha + 2\gamma_1)(X_2 + X_3) + 16\gamma_1 X_2 X_3) \\ &+ 4V_s^2 X_2 (1 - 4(\beta_1 + 2\gamma_2)X_1 - 4(\beta_2 + 2\gamma_2)X_3 + 16\gamma_2 X_1 X_3) \\ &+ 4V_s^2 X_3 (1 - 4(\beta_1 + 2\gamma_2)X_1 - 4(\beta_2 + 2\gamma_2)X_2 + 16\gamma_2 X_1 X_2)) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2] &= \frac{1}{h^2} (4V_p^2 X_2 (1 - 4(\alpha + 2\gamma_1)(X_1 + X_3) + 16\gamma_1 X_1 X_3) \\ &+ 4V_s^2 X_1 (1 - 4(\beta_1 + 2\gamma_2)X_2 - 4(\beta_2 + 2\gamma_2)X_3 + 16\gamma_2 X_2 X_3) \\ &+ 4V_s^2 X_3 (1 - 4(\beta_1 + 2\gamma_2)X_2 - 4(\beta_2 + 2\gamma_2)X_1 + 16\gamma_2 X_1 X_2)) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbb{K}}_h[3, 3] &= \frac{1}{h^2} (4V_p^2 X_3(1 - 4(\alpha + 2\gamma_1)(X_1 + X_2) + 16\gamma_1 X_1 X_2) \\
 (3.2.8) \quad &+ 4V_s^2 X_1(1 - 4(\beta_1 + 2\gamma_2)X_3 - 4(\beta_2 + 2\gamma_2)X_2 + 16\gamma_2 X_2 X_3) \\
 &+ 4V_s^2 X_2(1 - 4(\beta_1 + 2\gamma_2)X_3 - 4(\beta_2 + 2\gamma_2)X_1 + 16\gamma_2 X_1 X_3))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 2] &= \frac{V_p^2 - V_s^2}{h^2} 4\sqrt{X_1}\sqrt{1 - X_1}\sqrt{X_2}\sqrt{1 - X_2}(1 - 4\delta X_3) \\
 (3.2.9) \quad \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 3] &= \frac{V_p^2 - V_s^2}{h^2} 4\sqrt{X_1}\sqrt{1 - X_1}\sqrt{X_3}\sqrt{1 - X_3}(1 - 4\delta X_2) \\
 \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 3] &= \frac{V_p^2 - V_s^2}{h^2} 4\sqrt{X_2}\sqrt{1 - X_2}\sqrt{X_3}\sqrt{1 - X_3}(1 - 4\delta X_1)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \sin^2\left(\frac{k_1 h}{2}\right) \\
 X_2 &= \sin^2\left(\frac{k_2 h}{2}\right) \\
 X_3 &= \sin^2\left(\frac{k_3 h}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Comme dans le cas bidimensionnel soit  $\frac{\omega_h}{|\vec{k}|}$  la vitesse de phase numérique, on introduit les paramètres adimensionnels suivants :

$$\begin{aligned}
 q_p &= \frac{(\omega_h)_1}{|\vec{k}|V_p} \\
 q_s^1 &= \frac{(\omega_h)_2}{|\vec{k}|V_s} \\
 q_s^2 &= \frac{(\omega_h)_3}{|\vec{k}|V_s}
 \end{aligned}$$

où  $q_p$  (resp.  $q_s^j$ ,  $j = 1, 2$ ) est le rapport entre la vitesse de phase numérique et la vitesse de phase continue pour les ondes P (resp. S) qui dépendent des paramètres  $K$  (défini de la même façon qu'en 2D),  $\theta$ ,  $\varphi$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

**Lemme 3.2.1** *Les valeurs propres  $\lambda_h^i = (\omega_h^2)_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  admettent les développements limités suivants :*

$$\begin{cases} \lambda_h^1 = |\vec{k}|^2 (V_p^2 + O(K^2)) \\ \lambda_h^2 = |\vec{k}|^2 (V_s^2 + O(K^2)) \\ \lambda_h^3 = |\vec{k}|^2 (V_s^2 + O(K^2)) \end{cases}$$

**Démonstration :** Celle ci est calculatoire. Nous l'avons menée à l'aide du logiciel MAPLE (voir annexe C). ■

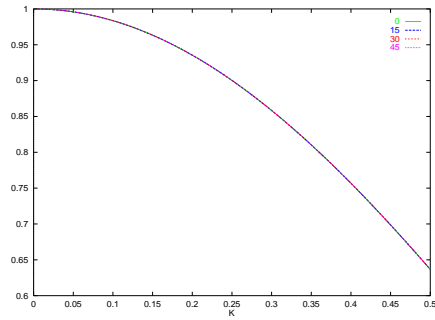


FIG. 3.2.5: Courbes de dispersion pour les vitesses des ondes  $P$  et  $S$  et pour tous les schémas numériques, pour  $\theta = 0$

Comme dans le cas bidimensionnel nous allons comparer ici les courbes de dispersion obtenues pour les trois schémas différents : nouveau schéma (en vert), schéma des éléments finis  $Q_1$  (en bleu) et schéma des différences finis (en rouge). Nous avons remarqué que pour  $\theta = 0$  les valeurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  se simplifient, dans ce cas on a :

$$q_p = q_s^1 = q_s^2 = \sin(\pi K)/(\pi K).$$

Et ceci pour tous les schémas (c.à.d  $DF$ ,  $Q_1$  et le nouveau). Donc, les courbes de dispersion sont les mêmes pour tous les angles  $\varphi$  et pour tout  $\nu$ . Nous représentons ces courbes sur la figure 3.2.5. Ensuite nous représentons sur les figures 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8 et 3.2.9 les courbes de dispersion pour chaque schéma en fonction de  $K$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  et de  $\nu$  et pour l'angle  $\theta$  qui correspond à la direction de dispersion maximale pour chaque schéma.

**Interprétation des courbes** En ce qui concerne les ondes de Pression, on peut remarquer que le schéma de différences finies présente une dispersion inférieure à celle obtenue avec le nouveau schéma qui à son tour est moins dispersif que le schéma des éléments finis  $Q_1$ . Dans le tableau suivant nous avons représenté la direction de propagation la moins privilégiée pour chaque schéma

$V_p$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$	$V_p$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$
$\varphi = 0$	0.1	45	45	0	$\varphi = 15$	0.1	45	45	0
	0.2	45	45	0		0.2	45	45	0
	0.3	45	45	0		0.3	45	45	0
	0.4	45	45	0		0.4	45	45	0
$\varphi = 30$	0.1	30	45	0	$\varphi = 45$	0.1	30	45	0
	0.2	30	45	0		0.2	30	45	0
	0.3	45	45	0		0.3	45	45	0
	0.4	45	45	0		0.4	45	45	0

En ce qui concerne les ondes de Cisaillement (SV et SH), le nouveau schéma présente en général la même dispersion que le schéma des différences finies et il est meilleur que le schéma



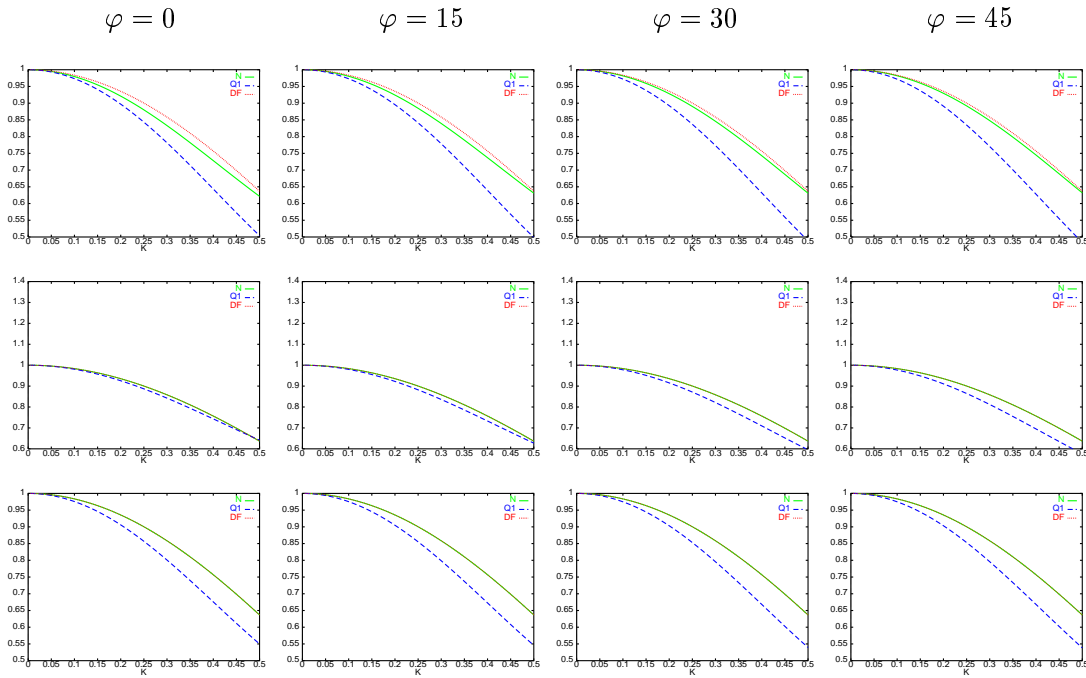


FIG. 3.2.6: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut), les ondes  $SV$  (au milieu) et les ondes  $SH$  (en bas) pour  $\nu = 0.1$

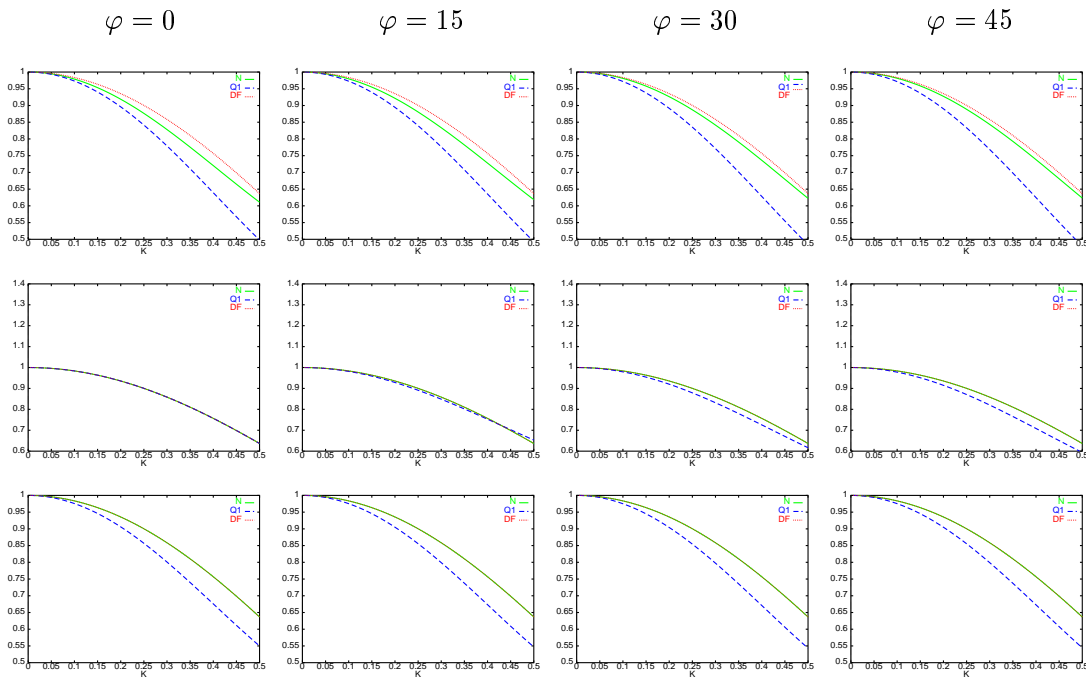


FIG. 3.2.7: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut), les ondes  $SV$  (au milieu) et les ondes  $SH$  (en bas) pour  $\nu = 0.2$

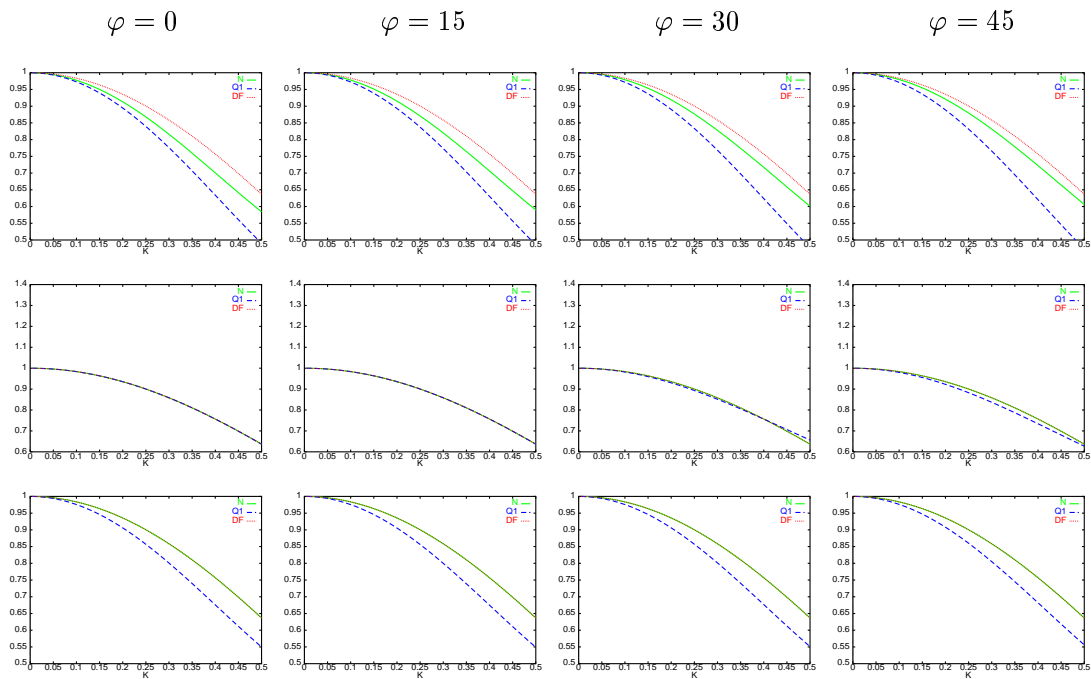


FIG. 3.2.8: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut), les ondes SV (au milieu) et les ondes SH (en bas) pour  $\nu = 0.3$

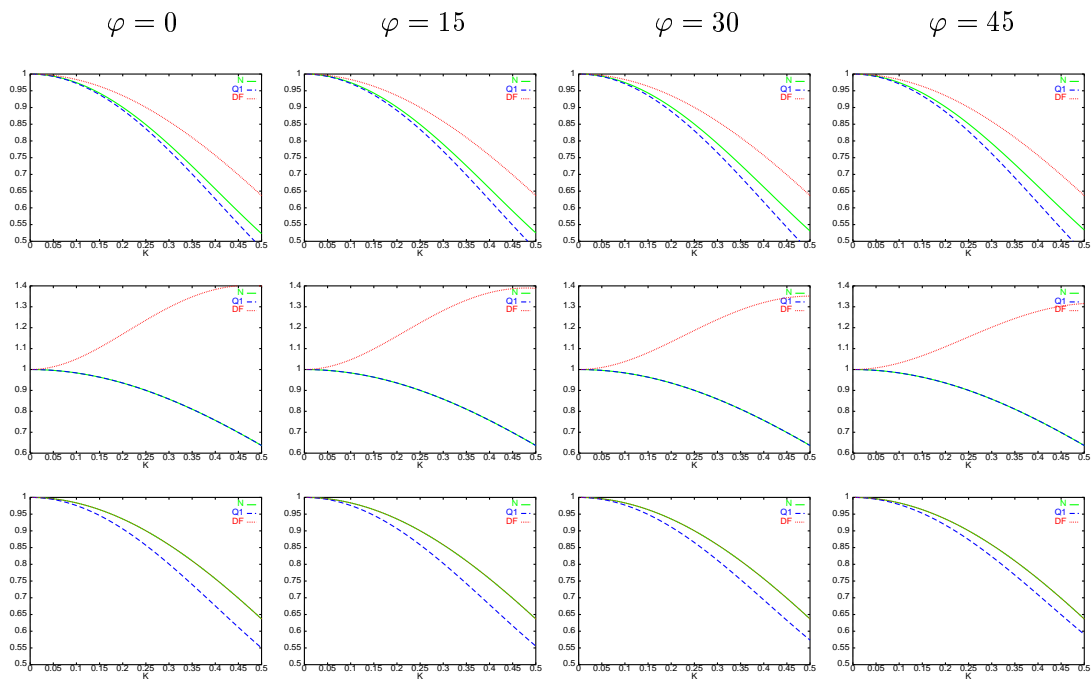


FIG. 3.2.9: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut), les ondes SV (au milieu) et les ondes SH (en bas) pour  $\nu = 0.4$

de éléments finis  $Q_1$  à la seule exception des courbes de dispersion pour les ondes  $SH$  correspondant à  $\nu = 0.4$ . Dans ce dernier cas le nouveau schéma présente la même dispersion que le schéma  $Q_1$  est il est meilleur que le schéma des  $DF$ . Dans le tableau suivant nous avons représenté la direction de propagation la moins privilégiée pour chaque schéma

$V_s^1$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$	$V_s^1$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$
$\varphi = 0$	0.1	0	45	0	$\varphi = 15$	0.1	0	45	0
	0.2	0	0	0		0.2	0	45	0
	0.3	0	0	0		0.3	0	0	0
	0.4	0	0	45		0.4	0	0	45

$V_s^1$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$	$V_s^2$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$
$\varphi = 30$	0.1	0	45	0	$\varphi = 45$	0.1	0	45	0
	0.2	0	45	0		0.2	0	45	0
	0.3	0	45	0		0.3	0	45	0
	0.4	0	0	45		0.4	0	0	0

$V_s^2$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$	$V_s^2$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$
$\varphi = 0$	0.1	0	45	0	$\varphi = 15$	0.1	0	45	0
	0.2	0	45	0		0.2	0	45	0
	0.3	0	45	0		0.3	0	45	0
	0.4	0	45	0		0.4	0	45	0

$V_s^2$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$	$V_s^2$	$\nu$	$N$	$Q_1$	$DF$
$\varphi = 30$	0.1	0	45	0	$\varphi = 45$	0.1	0	45	0
	0.2	0	45	0		0.2	0	45	0
	0.3	0	45	0		0.3	0	45	0
	0.4	0	45	0		0.4	0	45	0

Pour conclure nous avons représenté sur les figures 3.2.2, 3.2.2 et 3.2.2 les courbes de dispersion en fonction de  $K$  pour différentes valeurs  $\nu$  et aux angles  $\varphi - \theta$  qui correspond à la direction de dispersion maximale pour chaque schéma.

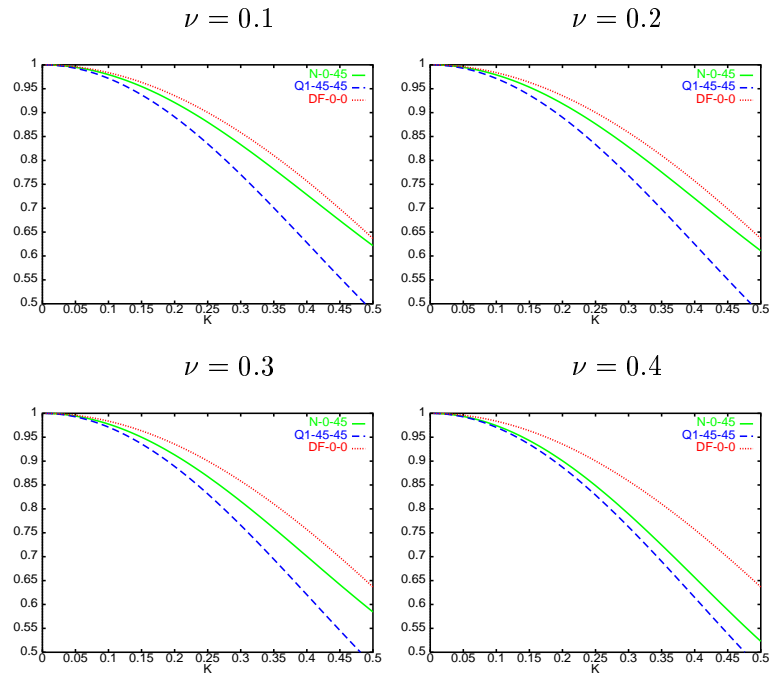


FIG. 3.2.10: Courbes de dispersion dans la direction de dispersion maximale pour les ondes P.

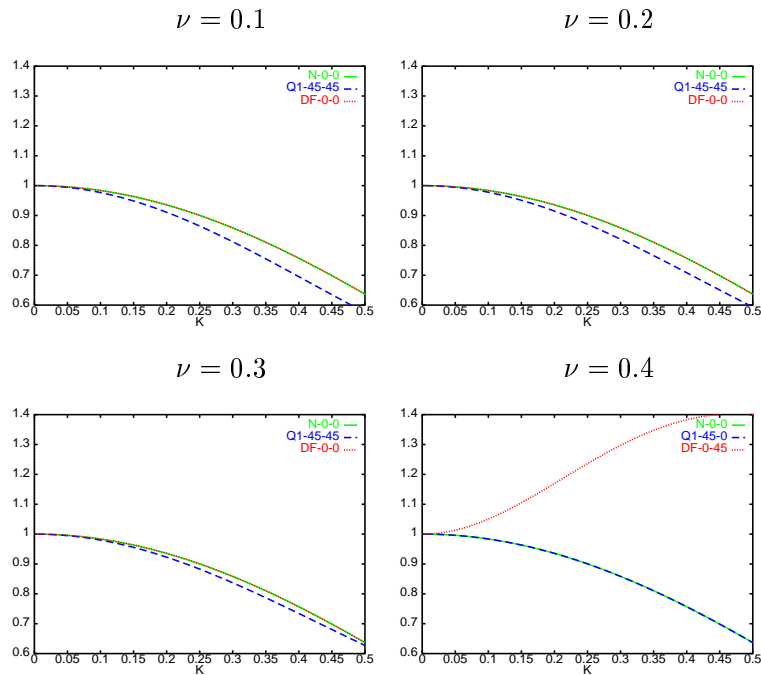


FIG. 3.2.11: Courbes de dispersion dans la direction de dispersion maximale pour les ondes SV.

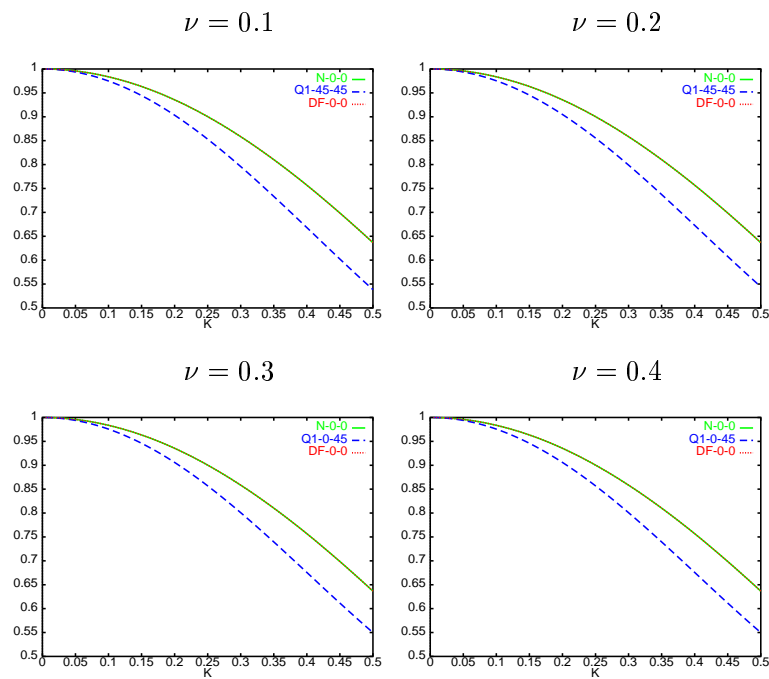


FIG. 3.2.12: Courbes de dispersion dans la direction de dispersion maximale pour les ondes SH.



Deuxième partie

**Discrétisation en temps**





# Chapitre 4

## Analyse de stabilité

### 4.1 Introduction - Généralités.

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés au problème semi-discrétisé en espace. Ce problème s'écrit de façon générale sous la forme suivante: trouver  $(\Sigma_h, V_h) \in L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_1})) \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_2}))$  tels que

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} M_\sigma \frac{d\Sigma_h}{dt} + \mathbb{B}_h^T V_h = 0 \\ M_v \frac{dV_h}{dt} + \mathbb{B}_h \Sigma_h = 0 \end{cases}$$

où nous avons noté  $\Sigma_h = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_{N_1})$  et  $V_h = (V_1, \dots, V_{N_2})$  les coordonnées des fonctions  $\sigma_h$  et  $v_h$  respectivement sur les bases  $B_{N_1} = \{\tau_I\}_{I=1}^{N_1}$  (avec  $N_1 = \dim \underline{X}_h^{sym}$ ) et  $B_{N_2} = \{w_I\}_{I=1}^{N_2}$  (avec  $N_2 = \dim \underline{M}_h$ ) des espaces  $\underline{X}_h^{sym}$  et  $\underline{M}_h$  correspondant aux éléments finis  $Q_{k+1} - Q_k$ . Les matrices  $M_\sigma$ ,  $M_v$  et  $\mathbb{B}_h$  sont définies par

$$\begin{aligned} (i) \quad (M_\sigma)_{I,J} &= (A\tau_I, \tau_J)_{(L^2(\Omega))^{d^2}}, \quad 1 \leq I, J \leq N_1, \\ (ii) \quad (M_v)_{I,J} &= (\varrho w_I, w_J)_{(L^2(\Omega))^d}, \quad 1 \leq I, J \leq N_2, \\ (iii) \quad (\mathbb{B}_h)_{I,J} &= (w_I, \operatorname{div} \tau_J)_{(L^2(\Omega))^d}, \quad 1 \leq I \leq N_2, 1 \leq J \leq N_1, \end{aligned}$$

$d$  étant la dimension du problème et  $\mathbb{B}_h^T$  désignant la transposée de la matrice  $\mathbb{B}_h$ . Comme nous l'avons déjà montré, la condensation de masse nous permet d'éliminer les inconnues associées au tenseur des contraintes, et réécrire le système (4.1.1) sous la forme équivalente suivante:

$$(4.1.2) \quad M_v \frac{d^2 V_h}{dt^2} + K_h V_h = 0$$

avec

$$K_h = \mathbb{B}_h M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^t.$$

Il nous reste maintenant à définir la discrétisation en temps. Le plus simple consiste à utiliser le schéma classique saute mouton avec 3 pas de temps

$$(4.1.3) \quad M_v \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h V_h^n = 0,$$

où  $\Delta t$  représente le pas de discrétisation en temps. Il s'agit d'un schéma d'ordre 2 en temps. Nous allons montrer que l'analyse de stabilité nous permet de choisir un pas en temps qui est proportionnel au pas de discrétisation en espace, ce qui implique, en particulier, que la précision du schéma est en  $O(h^2)$  globalement. De façon équivalente on peut discrétiser le système du première ordre en temps (4.1.1), comme il suit

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathbb{B}_h^T V_h^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} + \mathbb{B}_h \Sigma_h^{n+1/2} = 0 \end{cases}$$

Il est alors facile de montrer que les systèmes (4.1.3) et (4.1.4) sont équivalents.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la discrétisation en temps du système (4.1.2), car d'une part il ne fait intervenir que les inconnues associées à la vitesse (il est donc moins cher du point de vue stockage), d'autre part il est plus facile de définir des schémas d'ordre élevé en temps pour ce système. Ce dernier point est d'autant plus important dans le cas des éléments finis d'ordre élevé. En effet, nous avons montré que sur des maillages réguliers nous avons des erreurs de dispersion en espace en  $O(h^4)$  (resp.  $O(h^6)$ ) pour les éléments  $Q_2 - Q_1$  (resp.  $Q_3 - Q_2$ ). Il est donc naturel, d'utiliser dans ce cas des schémas d'ordre élevé en temps également. Pour ce faire, nous allons utiliser l'approche de l'équation modifiée (décrite dans [44, 53, 109]), qui nous permet de conserver un schéma stable à 3 pas de temps. Plus précisément cela consiste à utiliser un schéma d'ordre élevé en temps défini de façon générale par

$$(4.1.5) \quad M_v \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h V_h^n - 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{\Delta t^{2l}}{(2l+2)!} K_h^{l+1} V_h^n = 0.$$

Il s'agit d'un schéma d'ordre  $2k$  en temps (cf. [109]). En pratique nous n'allons utiliser que les schémas d'ordre 4 et 6 définis par (4.1.5) pour  $k = 2$  et  $k = 3$  respectivement. Nous avons alors,

$$(4.1.6) \quad M_v \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \left[ V_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} K_h V_h^n \right] = 0$$

pour  $k = 2$  et

$$(4.1.7) \quad M_v \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \left( V_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} K_h \left[ V_h^n - \frac{\Delta t^2}{30} K_h V_h^n \right] \right) = 0$$

pour  $k = 3$ .

Une analyse importante pour l'implémentation des schémas numériques est l'analyse de stabilité car il est bien connu que les schémas explicites dépendent d'une condition de stabilité. Pour mener cette analyse nous considérons comme dans le chapitre 3 le problème dans un milieu homogène infinie. Nous avons vu (cf. chapitre 3), que dans ce cas, le problème semi-discret s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 U_h}{dt^2} + \mathbb{K}_h U_h = 0$$

où  $U_h = (U_I)_{I \in Z^d}$  (avec  $d = 2, 3$ , la dimension du problème) est une suite à double indice (où triple en 3D), à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d(l+1)^d}$ , ( $l = 0, 1, 2$  étant l'ordre des éléments finis considérés),

et où  $\mathbb{K}_h$  représente un opérateur agissant dans cet espace des suites. De même le problème discrétisé en temps (pour le schéma d'ordre 2 par exemple), s'écrit,

$$(4.1.8) \quad \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K}_h U_h^n = 0$$

Nous nous intéressons ici à la stabilité  $L^2$  de ce schéma. Plus précisément, introduisons  $l_h^2(\mathbb{R}^{d(l+1)^d})$  l'espace des suites de carré sommable. Nous munissons  $l_h^2$  de la norme,

$$\|U_h^n\| \stackrel{\text{def}}{=} (U_h^n, U_h^n) = \sum_{I \in Z^d} h^d |U_I|^2,$$

avec  $|U_I|$  la norme usuel dans  $\mathbb{R}^{d(l+1)^d}$ . La stabilité du schéma (4.1.8) équivaut à montrer des estimations uniformes sur  $\|U_h^n\|$ . Pour ce faire, il est classique d'utiliser des techniques d'énergie. On montre que,

$$(4.1.9) \quad \mathcal{E}_h^{n+1/2} = \mathcal{E}_h^{n-1/2} = \dots = \mathcal{E}_h^{1/2}$$

où l'énergie discrète est définie par,

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left( \left\| \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + (\mathbb{K}_h U_h^{n+1}, U_h^n) \right)$$

qui est bien etendu un équivalent de l'énergie continue. Pour obtenir (4.1.9), rappelons qu'il suffit de multiplier scalairement (4.1.8) par  $\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t}$  et d'utiliser ensuite les équations du schéma.

Une fois qu'on a obtenu la conservation de l'énergie discrète, on peut alors en deduire la stabilité du schéma si on montre que cette énergie est une forme quadratique positive. Nous omettons ici les calculs qui sont classiques (cf. [10]). On obtient que le schéma (4.1.8) est stable si et seulement si

$$\frac{\Delta t^2 \|\mathbb{K}_h\|}{4} \leq 1,$$

où par définition la norme  $\|\mathbb{K}_h\|$  est donnée par

$$\|\mathbb{K}_h\| = \sup_{U_h \in l_h^2} \frac{(\mathbb{K}_h U_h, U_h)}{\|U_h\|^2}.$$

De même pour les autres schémas de discrétisation en temps (ordre 4 et 6), on peut montrer (cf. [109]) qu'ils sont stables si et seulement si,

– Schéma d'ordre 4 (4.1.6),

$$\frac{\Delta t^2 \|\mathbb{K}_h\|}{4} \leq 3$$

– Schéma d'ordre 6 (4.1.7),

$$\frac{\Delta t^2 \|\mathbb{K}_h\|}{4} \leq \frac{5 + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}}{2}$$

On obtient alors une expression explicite de la condition de stabilité si on est capable de calculer  $\|\mathbb{K}_h\|$ . Dans le cas de l'élément de plus bas degré et pour des maillages réguliers nous avons effectuer ce calcul analytiquement en utilisant une analyse de Fourier disctète. Pour les schémas d'ordre supérieur nous avons calculé  $\|\mathbb{K}_h\|$  numériquement.

## 4.2 Stabilité de la classe générale des schémas d'ordre 2 en dimension 2.

La condition de stabilité pour le schéma de saute mouton est :

$$\frac{\Delta t^2 \|\mathbb{K}_h\|}{4} \leq 1$$

Nous allons ici calculer  $\|\mathbb{K}_h\|$  pour la classe générale des schémas définie par (3.1.8). Pour ce faire, nous utiliserons une analyse de Fourier discrète. Nous allons donner ici seulement les étapes principales de la méthode, pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [10].

Introduisons  $\mathcal{F}_h : l_h^2(\mathbb{R}^2) \mapsto C_h = \left( L^2 \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)^2$  la transformée de Fourier discrète, qui à  $U_h = (U_I)_{I \in Z^2} = (U_{i,j})_{(i,j) \in Z^2}$  associé  $\widehat{U}_h(k)$  définie par,

$$\widehat{U}_h(k) = L^2 - \lim \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j} h^2 U_{i,j} \exp -i(k_1 i h + k_2 j h),$$

où  $L^2 - \lim$  signifie la convergence de la série au sens de  $L^2$ . Nous définissons ensuite l'opérateur  $\widehat{\mathbb{K}}_h$  comme la transformée de  $\mathbb{K}_h$  par  $\mathcal{F}_h$ ,

$$\widehat{\mathbb{K}}_h = \mathcal{F}_h \circ \mathbb{K}_h \circ \mathcal{F}_h^{-1}.$$

Il est alors facile de voir que nous avons,

$$\|\mathbb{K}_h\| = \|\widehat{\mathbb{K}}_h\|,$$

$\mathcal{F}_h$  étant un isomorphisme, isométrique. De plus, pour tout vecteur  $k = (k_1, k_2)$ , on peut montrer que nous avons la relation matricielle suivante,

$$\left[ \widehat{\mathbb{K}}_h \widehat{U}_h \right] (k) = \widehat{\mathbb{K}}_h(k) \widehat{U}_h(k),$$

où  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  est ici une matrice  $2 \times 2$  hermitienne. Plus précisément elle coïncide avec la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  définie au paragraphe 3.1.4. Pour calculer alors  $\|\widehat{\mathbb{K}}_h\|$ , on utilise le résultat classique suivant (cf. [10]),

$$\|\widehat{\mathbb{K}}_h\| = \sup_k \|\widehat{\mathbb{K}}_h(k)\|.$$

Calculer ce sup revient à calculer le maximum de la plus grande valeur propre de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$ . Soient  $\lambda_{1,2}(X_1, X_2)$  les deux valeurs propres de  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$ , il s'agit de calculer le

$$\max_{(X_1, X_2) \in [0,1]^2} \lambda_{1,2}(X_1, X_2).$$

### Calcul des valeurs propres de $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$

Les valeurs propres de  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$(4.2.1) \quad s^2 - P s + Q = 0$$

avec :

- $P = \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1] + \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2]$

- $Q = \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1]\widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2] - \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 2]^2$

On prouve alors, le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1** *Soit  $\lambda$  la plus grande valeur propre de  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$ , son maximum se trouve soit sur les bords du carré  $[0, 1]^2$  soit sur la diagonale  $X_1 = X_2$ .*

**Démonstration.**

On peut distinguer deux cas, soit le maximum se trouve sur les bords du carré  $[0, 1]^2$  soit à l'intérieur. Si on suppose que le maximum est atteint en un point intérieur du carré  $(X_1, X_2)$ , alors ce point annule le gradient, c'est à dire :

$$(4.2.2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial \lambda}{\partial X_2} = 0$$

Introduisons ensuite,

$$\mathbb{P}(X_1, X_2) = \lambda^2(X_1, X_2) - P\lambda(X_1, X_2) + Q,$$

par définition de la valeur propre on a,

$$\mathbb{P}(X_1, X_2) = 0 \quad \forall (X_1, X_2),$$

et donc,

$$(4.2.3) \quad \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_2} = 0.$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_1} = 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} - \frac{\partial P}{\partial X_1} \lambda - P \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} + \frac{\partial Q}{\partial X_1},$$

d'où

$$(4.2.4) \quad \frac{\partial P}{\partial X_1} \lambda = \frac{\partial Q}{\partial X_1},$$

et

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_2} = 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial X_2} - \frac{\partial P}{\partial X_2} \lambda - P \frac{\partial \lambda}{\partial X_2} + \frac{\partial Q}{\partial X_2},$$

d'où

$$(4.2.5) \quad \frac{\partial P}{\partial X_2} \lambda = \frac{\partial Q}{\partial X_2}.$$

En combinant les équations (4.2.4) et (4.2.5) on obtient,

$$(4.2.6) \quad \frac{\partial P}{\partial X_2} \frac{\partial Q}{\partial X_2} - \frac{\partial P}{\partial X_1} \frac{\partial Q}{\partial X_1} = 0.$$

En utilisant maintenant la définition de  $P$  et  $Q$ , on a

$$(4.2.7) \quad \left( \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2] - \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1] \right) \left( \frac{\partial \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1]}{\partial X_1} \frac{\partial \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2]}{\partial X_2} - \frac{\partial \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 1]}{\partial X_2} \frac{\partial \widehat{\mathbb{K}}_h[2, 2]}{\partial X_1} \right) = \\ \frac{\partial \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 2]^2}{\partial X_1} \frac{\partial P}{\partial X_2} - \frac{\partial \widehat{\mathbb{K}}_h[1, 2]^2}{\partial X_2} \frac{\partial P}{\partial X_1}.$$

Un simple calcul montre alors que (4.2.7) se réécrit :

$$(V_p^2 - V_s^2)^2(X_2 - X_1)(V_p^2 + V_s^2 - 4(\alpha V_p^2 + \beta V_s^2)(X_1 + X_2)) =$$

$$(V_p^2 - V_s^2)^2(X_2 - X_1)((V_p^2 + V_s^2)(1 - X_1 - X_2) + 2X_1X_2(V_p^2 + V_s^2 - 4(\alpha V_p^2 + \beta V_s^2)))$$

ou encore,

$$(4.2.8) \quad (V_p^2 - V_s^2)^2(X_1 - X_2)((1 - 4\alpha)V_p^2 + (1 - 4\beta)V_s^2)(X_1 + X_2 - 2X_1X_2) = 0$$

avec  $(X_1 + X_2 - 2X_1X_2) \neq 0$  à l'intérieur du carré  $[0, 1]^2$ , ce qui montre qu'on a nécessairement  $X_1 = X_2$ . ■

### Calcul du maximum des valeurs propres dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$

Après quelques calculs préliminaires on trouve les racines du polynôme caractéristique qui sont données par la relation suivante en fonction de  $(X_1, X_2)$ ,

$$(4.2.9) \quad \lambda_{1,2}(X_1, X_2) = \frac{2}{h^2} [(V_p^2 + V_s^2)(X_1 + X_2) - 8(\alpha V_p^2 + \beta V_s^2)X_1X_2]$$

$$\pm \frac{2}{h^2}(V_p^2 - V_s^2)\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + 4(X_1 - X_1^2)(X_2 - X_2^2)}.$$

Nous pouvons remarquer que  $\lambda_{1,2}$  sont réels, la plus grande correspond au signe + et on a

$$(4.2.10) \quad \lambda(X_1, X_2) = \lambda(X_2, X_1).$$

Nous allons d'abord regarder le  $\max_{(X_1, X_2) \in [0, 1]^2} \lambda_{1,2}$  aux bords du carré  $[0, 1]^2$ . Selon (4.2.10), il suffit de regarder le max sur les bords  $X_1 = 0$  et  $X_1 = 1$ .

- Pour  $X_1 = 0, X_2 \in [0, 1]$ , on a  $\lambda = \frac{4}{h^2}V_p^2X_2$  et donc

$$\max_{X_1=0, X_2 \in [0, 1]} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(0, 1) = \frac{4}{h^2}V_p^2.$$

- Pour  $X_1 = 1, X_2 \in [0, 1]$ , on a

$$\lambda = \frac{4}{h^2}(V_p^2 + (V_s^2 - 4(\alpha V_p^2 + \beta V_s^2)X_2)),$$

dans ce cas le  $\max_{X_1=1, X_2 \in [0, 1]} \lambda_{1,2}$  dépend des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ :

1. Pour  $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$  et  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  on a,

$$\max_{X_1=1, X_2 \in [0, 1]} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(1, 0) = \frac{4}{h^2}V_p^2.$$

2. Pour  $0 < \beta < \frac{1}{4}$  et  $0 < \alpha < (\frac{1}{4} - \beta)\frac{V_s^2}{V_p^2}$  on a,

$$\max_{X_1=1, X_2 \in [0, 1]} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(1, 1) = \frac{4}{h^2} [(1 - 4\alpha)V_p^2 + (1 - 4\beta)V_s^2] > \frac{4}{h^2}V_p^2.$$

3. Pour  $0 < \beta < \frac{1}{4}$  et  $(\frac{1}{4} - \beta) \frac{V_s^2}{V_p^2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$  on a,

$$\max_{X_1=1, X_2 \in [0,1]} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(1,0) = \frac{4}{h^2} V_p^2.$$

À l'intérieur du carré on a :

1. Pour  $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$  et  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\max_{(X_1, X_2) \in ]0,1[^2} \lambda_{1,2} = \frac{4}{h^2} \frac{V_p^4}{(1 + 4\alpha)V_p^2 + (4\beta - 1)V_s^2} \leq \frac{4}{h^2} V_p^2.$$

2. Pour  $0 \leq \beta < \frac{1}{4}$  et  $(\frac{1}{4} - \beta) \frac{V_s^2}{V_p^2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$  on a,

$$\max_{(X_1, X_2) \in ]0,1[^2} \lambda_{1,2} = \frac{4}{h^2} \frac{V_p^4}{(1 + 4\alpha)V_p^2 + (4\beta - 1)V_s^2} \leq \frac{4}{h^2} V_p^2.$$

3. Pour  $0 \leq \beta < \frac{1}{4}$  et  $0 < \alpha < (\frac{1}{4} - \beta) \frac{V_s^2}{V_p^2}$  on n'a pas de maximum à l'intérieur.

Nous pouvons résumer l'étude du  $\max_{(X_1, X_2) \in [0,1]^2} \lambda_{1,2}$  sur la figure 4.2.1.

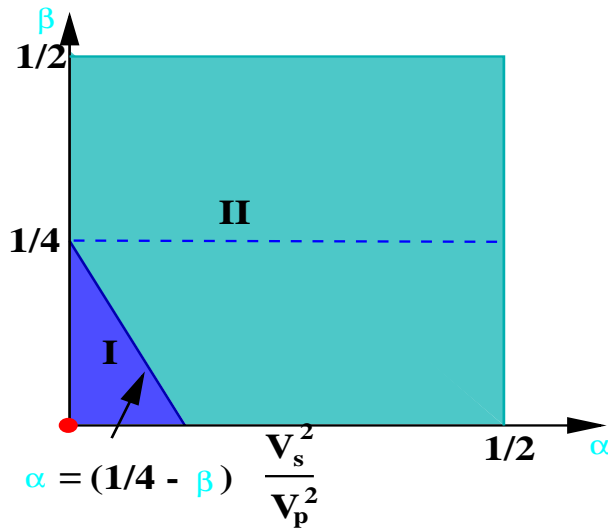


FIG. 4.2.1: Domaines de stabilité I et II définis en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$

- Dans le domaine I:

$$\max_{[0,1]^2} \lambda_{\alpha,\beta}(X_1, X_2) = \lambda_{\alpha,\beta}(1,1) = \frac{4}{h^2} (V_p^2 + V_s^2 - 4(\alpha V_p^2 + \beta V_s^2))$$

- Dans le domaine II:

$$\max_{[0,1]^2} \lambda_{\alpha,\beta}(X_1, X_2) = \lambda_{\alpha,\beta}(1, 0) = \frac{4}{h^2} V_p^2$$

**Remarque 4.2.1**

- Pour les différences finies ( $\alpha = \beta = 0$ ) on se trouve dans le domaine I:  $\frac{4}{h^2}(V_p^2 + V_s^2)$
- Pour les éléments finis  $Q_1$  ( $\alpha = \beta = \frac{1}{6}$ ) et le nouvel élément ( $\alpha = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{4V_p^4}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$ ) on se trouve dans le domaine II:  $\frac{4}{h^2}V_p^2$

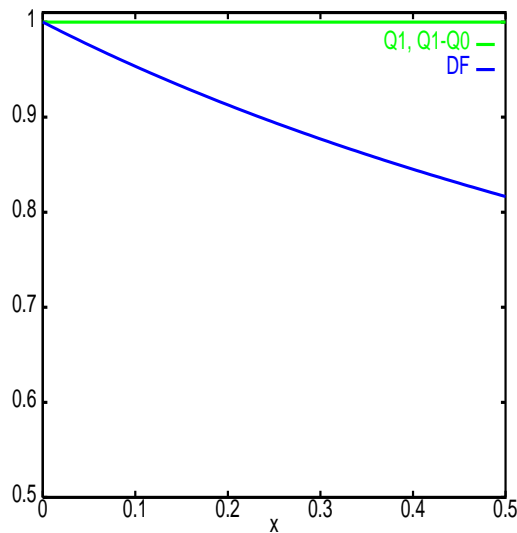


FIG. 4.2.2: Les fonctions  $f_i = \alpha_{CFL}^i V_p$  pour les trois schémas en fonction du rapport  $x = \frac{V_s^2}{V_p^2}$ .

On peut finalement définir le coefficient de stabilité pour les trois schémas. On réécrit la condition de stabilité sous la forme

$$\Delta t \leq \alpha_{CFL} h, \quad \alpha_{CFL} = \frac{2h}{\|\widehat{\mathbb{K}}_h(k)\|^{1/2}}.$$

Nous avons alors:

- $\alpha_{CFL}^{DF} = \frac{1}{\sqrt{V_p^2 + V_s^2}}$  pour le schéma des différences finies.
- $\alpha_{CFL}^{Q_1} = \alpha_{CFL}^{Q_1-Q_0} = \frac{1}{V_p}$  pour le schéma des éléments finis  $Q_1$  et  $Q_1 - Q_0$ .



Pour les trois schémas on peut réécrire le coefficient de stabilité sous la forme

$$\alpha_{CFL}^i = \frac{1}{V_p} f_i(x), \quad i = DF, Q_1, Q_1 - Q_0, \quad x = \frac{V_s^2}{V_p^2}.$$

Nous avons illustré les fonctions  $f_i$  pour les trois schémas en fonction du rapport  $V_s^2/V_p^2$  sur la figure 4.2.2.

**Remarque 4.2.2** *Du point de vue du temps de calcul, le schéma des différences finies est donc plus cher que les deux autres schémas. En effet, la condition de stabilité implique que pour un pas de discrétisation en espace  $h$  fixé, le plus grand pas de discrétisation en temps pour le schéma des DF est plus petit ou égal à celui des schémas  $Q_1$  et  $Q_1 - Q_0$ . Ceci entraîne, en particulier, que pour une simulation en temps ( $t \in [0, T]$ ), le calcul numérique avec le schéma des différences finies nécessitera un nombre d'itérations en temps plus important (soit  $N_{it}$  le nombre d'itérations, alors on a  $N_{it} = T/\Delta t$ ). Le surcoût est zéro pour  $V_p = V_s$  et atteint la valeur maximale ( $\simeq 20\%$ ) pour  $V_s = \sqrt{2}V_p$ .*

### 4.3 Stabilité des schémas $Q_2 - Q_1$ et $Q_3 - Q_2$ .

En utilisant la même technique que précédemment, nous pouvons montrer que, pour avoir une expression explicite de la condition de stabilité, il suffit de calculer

$$\max_{i,k} \|\lambda_i\|,$$

$\lambda_i$  étant les valeurs propres de la matrice  $\left\| \widehat{\mathbb{K}}_h(k) \right\|$  (avec  $i = 1, \dots, 8$  pour l'élément  $Q_2 - Q_1$  et  $i = 1, \dots, 18$  pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ ). Pour ces schémas nous avons mené ce calcul numériquement. Plus précisément nous avons observé que, comme pour l'élément fini de plus bas degré, la condition de stabilité du schéma est indépendante de  $V_s$ . Pour ce qui est de sa dépendance en  $V_p$ , on constate que le produit du coefficient de stabilité avec  $V_p$  reste constant. Nous avons alors les résultats suivants

- Pour le schéma  $Q_2 - Q_1$ 
  - et le schéma d'ordre 2 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.391 h}{V_p}$$

- et le schéma d'ordre 4 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.391\sqrt{3} h}{V_p} \text{ ou } \Delta t \leq \frac{0.677 h}{V_p}$$

- Pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ 
  - et le schéma d'ordre 2 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.195 h}{V_p}$$

– et le schéma d'ordre 4 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.195\sqrt{3} h}{V_p} \text{ ou } \Delta t \leq \frac{0.337 h}{V_p}$$

– et le schéma d'ordre 6 en temps :

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{5 + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}}{2}} \frac{0.195 h}{V_p} \text{ ou } \Delta t \leq \frac{0.268 h}{V_p}$$

Les résultats pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  ont été obtenus par Imedni Farid dans le cadre de son stage de DEA ([71]).

#### 4.4 Stabilité des schémas $Q_2$ et $Q_3$ .

Dans le chapitre 3 nous avons comparé en termes de dispersion les schémas  $Q_{k+1} - Q_k$  avec leur concurrents naturels : les schémas correspondant à la méthode d'éléments finis  $Q_{k+1}$  avec intégration numérique. Pour avoir une comparaison plus complète entre les deux méthodes nous avons calculé également (numériquement) le coefficient de stabilité de schémas  $Q_{k+1}$ , pour  $k = 1, 2$ . Comme pour les schémas  $Q_{k+1} - Q_k$ , on constate que le coefficient de stabilité des schémas  $Q_{k+1}$  est indépendant de  $V_s$  et son produit avec  $V_p$  reste constant. Nous avons obtenu dans ce cas les résultats suivants

– Pour le schéma  $Q_2$

– et le schéma d'ordre 2 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.390 h}{V_p}$$

– et le schéma d'ordre 4 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.390\sqrt{3} h}{V_p} \text{ ou } \Delta t \leq \frac{0.675 h}{V_p}$$

– Pour le schéma  $Q_3$

– et le schéma d'ordre 2 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.193 h}{V_p}$$

– et le schéma d'ordre 4 en temps :

$$\Delta t \leq \frac{0.193\sqrt{3} h}{V_p} \text{ ou } \Delta t \leq \frac{0.334 h}{V_p}$$

– et le schéma d'ordre 6 en temps :

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{5 + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}}{2}} \frac{0.193 h}{V_p} \text{ ou } \Delta t \leq \frac{0.265 h}{V_p}$$

Nous pouvons remarquer que les coefficients de stabilité sont presque identiques pour les deux méthodes. De plus, nous avons vu dans le chapitre 3 que les courbes de dispersion pour les schémas semi discrets sont très similaires également. De ce fait, nous concluons que du point de vue de la dispersion numérique les deux méthodes présentent un comportement similaire. Dans le chapitre suivant, consacré à l'analyse de dispersion des schémas discrets nous présentons seulement les résultats pour la méthode des éléments finis mixtes  $Q_{k+1} - Q_k$  pour  $k = 1, 2$ .

## 4.5 Analyse de stabilité, le problème tridimensionnel.

Nous allons mener ici une analyse de stabilité pour le problème tridimensionnel dans le cas des schémas des différences finies, des éléments finis  $Q_1$  et  $Q_1 - Q_0$ . La condition de stabilité pour ces schémas s'écrit sous la forme

$$(4.5.1) \quad \frac{\Delta t^2 \|\mathbb{K}_h\|}{4} \leq 1.$$

Comme pour le problème bidimensionnel, pour calculer  $\|\mathbb{K}_h\|$  on utilise la transformée de Fourier discrète. L'étude de stabilité revient alors à chercher le maximum des valeurs propres (notées  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ) de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = h^2 \widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  sur le cube  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . La matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  est définie dans ce cas par (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8 et (3.2.9)) et elle dépend des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\delta$ . On peut remarquer que, la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_0(k)$  étant symétrique par rapport aux variables  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , il suffit de trouver le maximum de valeurs propres pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 \leq X_1$  et  $X_3 \leq X_2$ .

### 4.5.1 Résultat Général.

Les valeurs propres de  $\widehat{\mathbb{K}}_0(k)$  sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$s^3 + Ps^2 + Qs + R = 0$$

avec :

- $P = -(\widehat{k}_{1,1} + \widehat{k}_{2,2} + \widehat{k}_{3,3})$
- $Q = \widehat{k}_{1,1}\widehat{k}_{2,2} + \widehat{k}_{1,1}\widehat{k}_{3,3} + \widehat{k}_{2,2}\widehat{k}_{3,3} - \widehat{k}_{1,2}^2 - \widehat{k}_{1,3}^2 - \widehat{k}_{2,3}^2$
- $R = \widehat{k}_{1,1}\widehat{k}_{2,3}^2 + \widehat{k}_{2,2}\widehat{k}_{1,3}^2 + \widehat{k}_{3,3}\widehat{k}_{1,2}^2 - \widehat{k}_{1,1}\widehat{k}_{2,2}\widehat{k}_{3,3} - 2\widehat{k}_{1,2}\widehat{k}_{1,3}\widehat{k}_{2,3}$

où on a noté par  $\widehat{k}_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$  les coefficients de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_0(k)$ . Si on suppose que le maximum est atteint en un point intérieur du cube  $(X_1, X_2, X_3)$ , alors ce point annule le gradient, c'est à dire :

$$(4.5.2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial X_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial X_3} = 0$$

Si on pose

$$\mathbb{P}(X_1, X_2, X_3) = \lambda^3(X_1, X_2, X_3) + P\lambda^2(X_1, X_2, X_3) + Q\lambda(X_1, X_2, X_3) + R$$

par définition de la valeur propre on a

$$\mathbb{P}(X_1, X_2, X_3) = 0 \quad \forall (X_1, X_2, X_3)$$

et

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_3} = 0$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial X_1} = 3\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} + \frac{\partial P}{\partial X_1} \lambda^2 + 2P \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} \lambda + Q \frac{\partial \lambda}{\partial X_1} + \frac{\partial Q}{\partial X_1} \lambda + \frac{\partial R}{\partial X_1}$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial X_1} \lambda^2 + \frac{\partial Q}{\partial X_1} \lambda + \frac{\partial R}{\partial X_1} = 0$$

De la même façon on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial X_2} \lambda^2 + \frac{\partial Q}{\partial X_2} \lambda + \frac{\partial R}{\partial X_2} = 0$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial X_3} \lambda^2 + \frac{\partial Q}{\partial X_3} \lambda + \frac{\partial R}{\partial X_3} = 0$$

En combinant les trois dernières équations on obtient

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial P}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial P}{\partial X_2} \right) \lambda^2 &= \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial R}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial R}{\partial X_2} \right) \\ \left( \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial P}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial P}{\partial X_3} \right) \lambda^2 &= \left( \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial R}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial R}{\partial X_3} \right) \\ \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial P}{\partial X_3} - \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial P}{\partial X_2} \right) \lambda^2 &= \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial R}{\partial X_3} - \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial R}{\partial X_2} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial P}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial P}{\partial X_2} \right) \left( \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial R}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial R}{\partial X_3} \right) &= \\ \left( \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial P}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial P}{\partial X_3} \right) \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial R}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial R}{\partial X_2} \right) & \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial P}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial P}{\partial X_2} \right) \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial R}{\partial X_3} - \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial R}{\partial X_2} \right) &= \\ \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial P}{\partial X_3} - \frac{\partial Q}{\partial X_3} \frac{\partial P}{\partial X_2} \right) \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} \frac{\partial R}{\partial X_1} - \frac{\partial Q}{\partial X_1} \frac{\partial R}{\partial X_2} \right) & \end{aligned}$$

Pour les schémas des différences finies, des éléments finis  $Q_1$  et  $Q_1 - Q_0$ , nous avons réécrit à l'aide du logiciel MAPLE, les deux dernières équations sous la forme suivante :

$$(4.5.3) \quad (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)\mathcal{P}_1(X_1, X_2, X_3) = 0$$

et

$$(4.5.4) \quad (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)\mathcal{P}_2(X_1, X_2, X_3) = 0$$

où  $\mathcal{P}_1(X_1, X_2, X_3)$  et  $\mathcal{P}_2(X_1, X_2, X_3)$  sont deux polynômes de degré huit avec des coefficients qui dépendent de paramètres  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta$  et  $\nu$ . Donc si le maximum se trouve à l'intérieur du cube, on peut distinguer le cas suivants :

- soit il est sur la diagonale  $X_1 = X_2 = X_3$ ,
- soit sur le carré  $X_1 = X_2 \in [0, 1], X_3 \in [0, 1]$
- soit sur une des surfaces suivantes :

$$X_1 = X_2, \mathcal{P}_2(X_1, X_2, X_3) = 0$$

$$X_1 = X_2, \mathcal{P}_1(X_1, X_2, X_3) = 0$$

$$X_1 = X_3, \mathcal{P}_2(X_1, X_2, X_3) = 0$$

$$X_1 = X_3, \mathcal{P}_1(X_1, X_2, X_3) = 0$$

$$X_3 = X_2, \mathcal{P}_2(X_1, X_2, X_3) = 0$$

$$X_3 = X_2, \mathcal{P}_1(X_1, X_2, X_3) = 0$$

Nous allons maintenant fixer les paramètres  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  et  $\delta$  pour obtenir les trois schémas qui nous intéressent et nous menons l'analyse de stabilité pour chacun de ces schémas.

### 4.5.2 Le schéma des différences finies.

Dans ce cas nous avons

$$\alpha = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta = 0.$$

On sait que le maximum des valeurs propres se trouve soit sur les bords du cube  $[0, 1]^3$  soit à l'intérieur. On commence notre étude en cherchant le maximum sur les bords.

#### 4.5.2.1 Les sommets du cube.

- Pour le sommet  $X_1 = X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc  $\max_{(0,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 0$

- Pour le sommet  $X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4V_p^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4V_s^2$$

et donc  $\max_{(1,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 8V_s^2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4(V_p^2 + V_s^2)$$

et donc  $\max_{(1,1,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + V_s^2) \geq 4V_p^2$

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = X_3 = 1$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4(V_p^2 + 2V_s^2)$$

et donc  $\max_{(1,1,1)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + 2V_s^2) \geq 4(V_p^2 + V_s^2)$

#### 4.5.2.2 Les arêtes du cube.

– Pour  $X_1 \in [0, 1], X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4V_p^2 X_1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4V_s^2 X_1$$

et donc  $\max_{(X_1,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$

– Pour  $X_1 \in [0, 1], X_2 = 1$  et  $X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4(V_p^2 X_1 + V_s^2), \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4(V_p^2 + V_s^2 X_1)$$

et donc  $\max_{(X_1,1,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + V_s^2)$

– Pour  $X_1 \in [0, 1], X_2 = 1$  et  $X_3 = 1$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4(V_p^2 X_1 + 2V_s^2), \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4(V_p^2 + V_s^2(1 + X_1))$$

et donc  $\max_{(X_1,1,1)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + 2V_s^2)$

#### 4.5.2.3 Les faces du cube.

– Pour  $(X_1, X_2) \in [0, 1]^2, X_3 = 0$  on trouve

$$\lambda_1 = 4V_s^2(X_1 + X_2),$$

$$\lambda_2 = 4(V_p^2 X_1 X_2 + V_s^2(X_1 + X_2 - X_1 X_2)),$$

$$\lambda_3 = 4(V_s^2 X_1 X_2 + V_p^2(X_1 + X_2 - X_1 X_2)),$$

et donc

$$\max_{(X_1, X_2) \in [0, 1]^2, X_3=0} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + V_s^2)$$

– Pour  $(X_1, X_2) \in [0, 1]^2$ ,  $X_3 = 1$  on trouve

$$\lambda_1 = 4(V_p^2 + V_s^2(X_1 + X_2)),$$

$$\lambda_2 = 4(V_p^2 X_1 X_2 + V_s^2(1 + X_1 + X_2 - X_1 X_2)),$$

$$\lambda_3 = 4(V_s^2(1 + X_1 X_2) + V_p^2(X_1 + X_2 - X_1 X_2)),$$

et donc

$$\max_{(X_1, X_2) \in [0, 1]^2, X_3=1} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + 2V_s^2)$$

D'après les calculs précédents le maximum au bord du cube est atteint au sommet  $(1, 1, 1)$  est il est égal à

$$\max_{\text{bord}} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4(V_p^2 + 2V_s^2).$$

#### 4.5.2.4 L'intérieur du cube.

Nous avons montré que si le maximum se trouve à l'intérieur du cube alors les équations (4.5.3) et (4.5.4) doivent être vérifiées. Comme les calculs deviennent assez fastidieux, avant d'essayer de trouver le maximum à l'intérieur analytiquement, nous l'avons calculé numériquement. Ce calcul nous a indiqué que le maximum se trouve sur la diagonale  $X_1 = X_2 = X_3 = X$ , nous allons donc examiner seulement ce cas. Les valeurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_0(k)$  sont données par :

$$\lambda_1 = 4V_p^2 X(3 - 2X(1 - x))$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 4V_p^2 X(3x + X(1 - x))$$

$$\text{avec } x = \frac{V_s^2}{V_p^2} \in [0, 1/2]$$

on a

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 12V_p^2 X(1 - X)(1 - x) > 0$$

et donc il faut chercher le maximum de  $\lambda_1$  qui est réalisé à l'intérieur si :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial X} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial X^2} \leq 0$$

La première équation nous donne

$$X^* = \frac{3}{4(1 - x)} \in [0, 1], \quad \forall x \in [0, 1/2]$$

et on a

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial X^2}(X = X^*) = -16V_p^2(1 - x) < 0, \quad \forall x \in [0, 1/2]$$

Le maximum est alors donné par

$$\max_{(X_1=X_2=X_3 \in [0,1])} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{9V_p^4}{2(V_p^2 - V_s^2)} > 4(V_p^2 + 2V_s^2).$$

Pour le schéma des différences finies le maximum est atteint à l'intérieur du cube, au point  $X_1 = X_2 = X_3 = \frac{3V_p^2}{4(V_p^2 - V_s^2)}$  et il est égal à

$$\max_{[0,1]^3} (\lambda_i^{DF})_{i=1}^3 = \frac{9V_p^4}{2(V_p^2 - V_s^2)}$$

### 4.5.3 Le schéma des éléments finis $Q_1$ .

Dans ce cas nous avons

$$\alpha = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{9}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{36} \text{ et } \delta = \frac{1}{6}.$$

On commence notre étude en cherchant le maximum sur les bords.

#### 4.5.3.1 Les sommets du cube.

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc  $\max_{(0,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 0$

– Pour le sommet  $X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4V_p^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4V_s^2$$

et donc  $\max_{(1,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{8}{3}V_s^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4}{3}(V_p^2 + V_s^2)$$

et donc  $\max_{(1,1,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{4}{3}(V_p^2 + V_s^2) < 4V_p^2$



– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = X_3 = 1$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4}{9}(V_p^2 + 2V_s^2)$$

et donc  $\max_{(1,1,1)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{4}{9}(V_p^2 + 2V_s^2) < 4V_p^2$

#### 4.5.3.2 Les arêtes du cube.

– Pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4V_p^2 X_1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4V_s^2 X_1$$

et donc  $\max_{(X_1,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$

– Pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 = 1$  et  $X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{4}{3}V_p^2 X_1 + 4V_s^2 \left(1 - \frac{2}{3}X_1\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}V_s^2 X_1 + 4V_p^2 \left(1 - \frac{2}{3}X_1\right),$$

$$\lambda_3 = 4V_s^2 \left(1 - \frac{X_1}{3}\right),$$

et

$$\lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

Il est alors facile de voir que  $\max_{(X_1,1,0)} (\lambda_2) = 4V_p^2$ , d'où

$$\max_{(X_1,1,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$$

– Pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 = 1$  et  $X_3 = 1$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{4}{9}V_p^2 X_1 + \frac{8}{3}V_s^2 \left(1 - \frac{2}{3}X_1\right), \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4}{3}V_p^2 \left(1 - \frac{2}{3}X_1\right) + \frac{4}{3}V_s^2 \left(1 - \frac{X_1}{3}\right)$$

et  $\lambda_1 < \lambda_2$ . On alors  $\max_{(X_1,1,1)} (\lambda_2) = \frac{4}{3}(V_p^2 + V_s^2)$  et donc

$$\max_{(X_1,1,1)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{4}{3}(V_p^2 + V_s^2)$$

### 4.5.3.3 Les faces du cube.

– Pour  $(X_1, X_2) \in [0, 1]^2$ ,  $X_3 = 0$  on trouve

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 4V_s^2 \left( X_1 + X_2 - \frac{4}{3}X_1X_2 \right), \\ \lambda_2 &= 4V_p^2 \left( X_1 + X_2 - \frac{5}{3}X_1X_2 \right) + \frac{4}{3}V_s^2X_1X_2, \\ \lambda_3 &= \frac{4}{3}V_p^2X_1X_2 + 4V_s^2 \left( X_1 + X_2 - \frac{5}{3}X_1X_2 \right),\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2.$$

On regarde alors le maximum de  $\lambda_2$ . Un simple calcul montre qu'il est égal à

$$\max_{X_1, X_2, 0} (\lambda_2) = \frac{12V_p^4}{5V_p^2 - V_s^2},$$

et il est atteint au point

$$X_1 = X_2 = \frac{3V_p^2}{5V_p^2 - V_s^2} \in [0, 1].$$

Donc,

$$\max_{X_1, X_2, 0} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{12V_p^4}{5V_p^2 - V_s^2} < 4V_p^2$$

– Pour  $(X_1, X_2) \in [0, 1]^2$ ,  $X_3 = 1$  on trouve

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{4}{9}V_p^2X_1X_2 + \frac{4}{9}V_s^2(9 - 3X_1 - 3X_2 - X_1X_2), \\ \lambda_2 &= \frac{4}{9}V_p^2(3X_1 + 3X_2 - 5X_1X_2) + \frac{4}{9}V_s^2(9 - 6X_1 - 6X_2 + 5X_1X_2), \\ \lambda_3 &= \frac{4}{9}V_p^2(9 - 6X_1 - 6X_2 + 4X_1X_2) + \frac{4}{9}V_s^2(3X_1 + 3X_2 - 4X_1X_2),\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

La valeur propre  $\lambda_3$  n'admet pas de maximum à l'intérieur de cette face et on a

$$\max_{X_1, X_2, 1} (\lambda_3) = \lambda_3(0, 0, 1) = 4V_p^2,$$

d'où on obtient

$$\max_{X_1, X_2, 1} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$$

D'après les calculs précédents le maximum au bord du cube est atteint au sommet  $(1, 0, 0)$  et il est égal à

$$\max_{\text{bord}} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2.$$

#### 4.5.3.4 L'intérieur du cube.

Comme pour le schéma des différences finies avant d'essayer de trouver le maximum à l'intérieur analytiquement, nous l'avons calculé numériquement. Ce calcul nous a indiqué que le maximum se trouve au sommet  $(1, 0, 0)$  du cube et il est égal à  $4V_p^2$ . Donc dans ce cas nous ne continuons pas notre étude analytique à l'intérieur du cube.

Pour le schéma des éléments finis  $Q_1$  le maximum est atteint au sommet  $(1, 0, 0)$  du cube et il est égal à

$$\max_{[0,1]^3} (\lambda_i^{Q_1})_{i=1}^3 = 4V_p^2$$

#### 4.5.4 Le schéma de l'élément fini $Q_1 - Q_0$ .

Dans ce cas nous avons

$$\alpha = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)^2}{8V_p^2(V_p^2 - V_s^2)}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_1 = \alpha \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)}{2V_p^2}, \quad \gamma_2 = 0 \text{ et } \delta = 2\alpha$$

On commence notre étude en cherchant le maximum sur les bords.

##### 4.5.4.1 Les sommets du cube.

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc  $\max_{(0,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 0$

– Pour le sommet  $X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4V_p^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4V_s^2$$

et donc  $\max_{(1,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 16V_s^2 \frac{V_p^2 - V_s^2}{V_p^2}, \quad \lambda_3 = 8V_s^2$$

et donc  $\max_{(1,1,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 16V_s^2 \frac{V_p^2 - V_s^2}{V_p^2} \leq 4V_p^2$

– Pour le sommet  $X_1 = X_2 = X_3 = 1$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4V_s^2(3V_p^2 - 4V_s^2)}{V_p^2 - V_s^2}$$

$$\text{et donc } \max_{(1,1,1)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{4V_s^2(3V_p^2 - 4V_s^2)}{V_p^2 - V_s^2} < 4V_p^2$$

#### 4.5.4.2 Les arêtes du cube.

– Pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 = X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4V_p^2 X_1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4V_s^2 X_1$$

$$\text{et donc } \max_{(X_1,0,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$$

– Pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 = 1$  et  $X_3 = 0$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{4V_s^2(V_p^2(1 + 3X_1) - 4X_1V_s^2)}{V_p^2},$$

$$\lambda_2 = 4 \frac{V_p^4 + 4X_1V_p^2V_s^2 - 4X_1V_s^4 - X_1V_p^4}{V_p^2},$$

$$\lambda_3 = 4V_s^2(1 + X_1),$$

et

$$\lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

Il est alors facile de voir que  $\max_{(X_1,1,0)} (\lambda_2) = 4V_p^2$ , d'où

$$\max_{(X_1,1,0)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = 4V_p^2$$

– Pour  $X_1 \in [0, 1]$ ,  $X_2 = 1$  et  $X_3 = 1$  on a

$$\widehat{\mathbb{K}}_0(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{4V_s^2(X_1V_p^2 - 2X_1V_s^2 + 2V_p^2 - 2V_s^2)}{V_p^2 - V_s^2},$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4V_s^2(4V_p^2 - X_1V_p^4 + 4X_1V_p^2V_s^2 - 8V_p^2V_s^2 - 4X_1V_s^4 + 4V_s^4)}{V_p^2(V_p^2 - V_s^2)}$$

et  $\lambda_1 < \lambda_2$ . On a alors

$$\max_{(X_1, 1, 1)} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \lambda_2 \leq 4V_p^2$$

#### 4.5.4.3 Les faces du cube.

– Pour  $(X_1, X_2) \in [0, 1]^2$ ,  $X_3 = 0$  on trouve

$$\lambda_1 = 4V_s^2(X_1 + X_2),$$

$$\lambda_2 = 4 \frac{V_p^4(X_1 + X_2 - 2X_1X_2) + 4V_s^2X_1X_2(V_p^2 - V_s^2)}{V_p^2},$$

$$\lambda_3 = 4V_s^2 \frac{V_p^2(X_1 + X_2 + 2X_1X_2) - 4X_1X_2V_s^2}{V_p^2},$$

avec

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2.$$

On regarde alors le maximum de  $\lambda_2$ . Un simple calcul montre qu' il est égal à

$$\max_{X_1, X_2, 0} (\lambda_2) = \frac{2V_p^6}{V_p^4 - 2V_p^2V_s^2 + 2V_s^4},$$

et il est atteint au point

$$X_1 = X_2 = \frac{V_p^4}{2(V_p^4 - 2V_p^2V_s^2 + 2V_s^4)} \in [0, 1].$$

Donc,

$$\max_{X_1, X_2, 0} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \frac{2V_p^6}{V_p^4 - 2V_p^2V_s^2 + 2V_s^4} < 4V_p^2$$

– Pour  $(X_1, X_2) \in [0, 1]^2$ ,  $X_3 = 1$  les calculs deviennent assez complexes, et donc nous allons donner ici seulement les résultats. À l'aide du logiciel MAPLE nous avons obtenu

$$\max_{X_1, X_2, 1} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \lambda_{max,b} = V_p^2 x \frac{69 - 209x + 208x^2 - 64x^3}{5 - 12x + 8x^2}$$

avec  $x = V_s^2/V_p^2 \in [0, 1/2]$  et il est atteint au point

$$X_1 = X_2 = \frac{(7 - 8x)(1 - x)}{2(5 - 12x + 8x^2)}.$$

On distingue maintenant les cas suivants :

(i) Pour  $x < x_b$  on a  $\lambda_{max,b} < 4V_p^2$

(ii) Pour  $x = x_b$  on a  $\lambda_{max,b} = 4V_p^2$

(iii) Pour  $x > x_b$  on a  $\lambda_{max,b} > 4V_p^2$

avec

$$x_b = \frac{13 - \sqrt{41}}{16}$$

D'après les calculs précédents le maximum au bord du cube est donné par l'expression suivante

$$\max_{\text{bord}} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \begin{cases} 4V_p^2 & \text{si } \frac{V_s^2}{V_p^2} \leq \frac{13 - \sqrt{41}}{16} \\ \frac{V_s^2(69V_p^6 - 209V_p^4V_s^2 + 208V_p^2V_s^4 - 64V_s^6)}{V_p^2(5V_p^4 - 12V_p^2V_s^2 + 8V_s^4)} & \text{sinon} \end{cases}$$

#### 4.5.4.4 L'intérieur du cube.

Comme pour les schémas précédents avant d'essayer de trouver le maximum à l'intérieur analytiquement, nous l'avons calculé numériquement. Ce calcul nous a indiqué que le maximum se trouve sur la diagonale  $X_1 = X_2 = X_3 = X$ . Les calculs étant assez complexes nous présentons ici seulement les résultats. À l'aide du logiciel MAPLE nous avons obtenu

(4.5.5)

$$\max_{X_1=X_2=X_3} (\lambda_i)_{i=1}^3 = \lambda_{max,i} = \frac{8V_p^2(6 - 22x + 32x^2 - 16x^3 - y)}{27(-28x^2 + 16x^3 - 3 + 16x)^2} \times (128x^5 - 384x^4 + 336x^3 - 68x^2 + 8yx^2 - 8yx - 30x + 3y + 9)$$

où  $y$  et  $x$  sont données par

$$y = \sqrt{472x^2 - 93x - 1204x^3 + 1584x^4 + 9 - 1024x^5 + 256x^6}, \quad x = V_s^2/V_p^2 \in [0, 1/2]$$

et il est atteint au point

$$X_1 = X_2 = X_3 = \frac{44x - 12 - 64x^2 + 32x^3 + 2y}{2(-9 + 48x - 84x^2 + 48x^3)} \frac{(7 - 8x)(1 - x)}{2(5 - 12x + 8x^2)}$$

En plus, on a

$$\lambda_{max,i} > \lambda_{max,b}, \quad \forall x \in [0, 1/2]$$

et

$$(i) \quad \text{Pour } x < x_i \quad \text{on a } \lambda_{max,i} < 4V_p^2$$

$$(ii) \quad \text{Pour } x = x_i \quad \text{on a } \lambda_{max,i} = 4V_p^2$$

$$(iii) \quad \text{Pour } x > x_i \quad \text{on a } \lambda_{max,i} > 4V_p^2$$

avec

$$x_i = 0.3351380813$$

Pour le nouveau schéma le maximum est donné par l'expression suivante

$$\max_{[0,1]^3} (\lambda_i^N)_{i=1}^3 = \begin{cases} 4V_p^2 & \text{si } \frac{V_s^2}{V_p^2} \leq x_i \\ \lambda_{max,i} & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\lambda_{max,i}$  est donné par (4.5.5).

On peut maintenant définir le coefficient de stabilité pour les trois schémas. On réécrit la condition de stabilité (4.5.1) sous la forme

$$\Delta t \leq \alpha_{CFL} h, \quad \alpha_{CFL} = \frac{2}{\|\widehat{\mathbb{K}}_0(k)\|^{1/2}}.$$

Nous avons alors :

- $\alpha_{CFL}^{DF} = \frac{2\sqrt{2}}{3V_p} \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{V_p^2}}$  pour le schéma des différences finies.
- $\alpha_{CFL}^{Q_1} = \frac{1}{V_p}$  pour le schéma des éléments finis  $Q_1$ .
- $\alpha_{CFL}^{Q_1-Q_0} = \begin{cases} \frac{1}{V_p} & \text{si } \frac{V_s^2}{V_p^2} \leq x_i \\ \frac{2}{\sqrt{\lambda_{max,i}}} & \text{sinon} \end{cases}$  pour le schéma des éléments finis  $Q_1 - Q_0$ .

Comme dans le cas du problème bidimensionnel on peut réécrire le coefficient de stabilité sous la forme

$$\alpha_{CFL}^i = \frac{1}{V_p} f_i(x), \quad i = DF, Q_1, Q_1 - Q_0, \quad x = \frac{V_s^2}{V_p^2}.$$

Pour conclure nous présentons sur la figure 4.5.1 les fonctions  $f_i$  pour les trois schémas en fonction du rapport  $V_s^2/V_p^2$ .

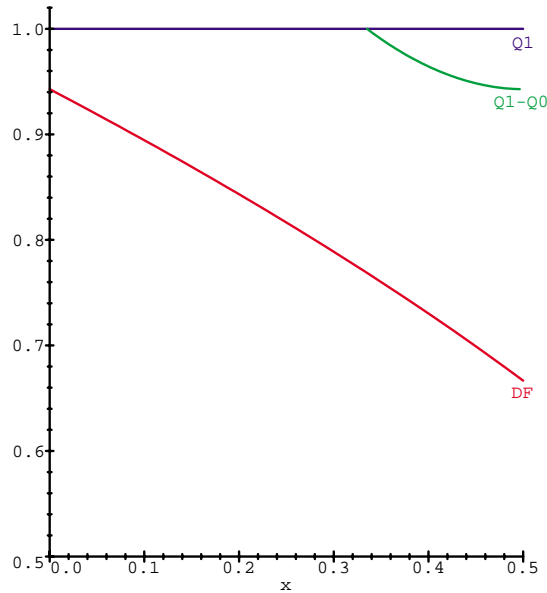


FIG. 4.5.1: Les fonctions  $f_i = \alpha_{CFL}^i V_p$  pour les trois schémas en fonction du rapport  $x = \frac{V_s^2}{V_p^2}$ .

**Remarque 4.5.1** On peut remarquer, que comme pour les schémas en dimension 2, du point de vue du temps de calcul, le schéma des différences finies est plus cher que les deux autres

*schémas. Dans ce cas, le surcoût est plus important qu'en dimension 2 et il varie en fonction du rapport  $V_s^2/V_p^2$  entre 5% et 35%. De même, comme le coefficient de stabilité pour le schéma  $Q_1 - Q_0$  est, pour certaines valeurs de  $V_s^2/V_p^2$ , plus petit que celui du schéma  $Q_1$ , le schéma  $Q_1 - Q_0$  devient légèrement plus cher que le schéma  $Q_1$ . Cependant, la différence du coût entre les deux schémas est toujours plus petite ou égale à 5%.*



## Chapitre 5

# Analyse de dispersion pour les schémas discrets

Nous allons mener ici l'analyse de dispersion numérique pour les différents schémas définis aux chapitres précédents. Cette analyse nous permettra de comparer notre méthode avec des méthodes numériques déjà existantes.

### 5.1 Généralités

Rappelons tout d'abord les différents schémas de discrétisation en temps.

$$(5.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + S_h(\Delta t)V_h^n = 0 \\ \text{où} \quad \begin{array}{l} - S_h(\Delta t) = K_h \quad \text{pour le schéma d'ordre 2} \\ - S_h(\Delta t) = K_h \left[ Id - \frac{\Delta t^2}{12} K_h \right] \quad \text{pour le schéma d'ordre 4} \\ - S_h(\Delta t) = K_h \left\{ Id - \frac{\Delta t^2}{12} K_h \left[ Id - \frac{\Delta t^2}{30} K_h \right] \right\} \quad \text{pour le schéma d'ordre 6} \end{array} \end{array} \right.$$

Comme dans le cas semi-discret, nous n'allons considérer, dans ce qui suit, que la dispersion des ondes non parasites. La relation de dispersion, pour que l'équation (5.1.1) soit satisfaite pour une onde plane est

$$(5.1.2) \quad \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}(\omega_h)_i\right) = \beta_h^i(k, \Delta t), \quad i = 1, d$$

avec  $d$  ( $= 2$  ou  $3$ ) la dimension du problème considéré et où  $\beta_h^i$ ,  $i = 1, d$  sont définies pour chaque schéma par les relations suivantes

- pour l'ordre 2

$$\beta_h^i(k, \Delta t) = \lambda_h^i, \quad i = 1, d$$

- pour l'ordre 4

$$\beta_h^i(k, \Delta t) = \lambda_h^i - \frac{\Delta t^2}{12} (\lambda_h^i)^2, \quad i = 1, d$$

- pour l'ordre 6

$$\beta_h^i(k, \Delta t) = \lambda_h^i - \frac{\Delta t^2}{12} (\lambda_h^i)^2 + \frac{\Delta t^4}{360} (\lambda_h^i)^3, \quad i = 1, d$$

où  $\lambda_h^i$ ,  $i = 1, d$  sont les valeurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbb{K}}_h(k)$  correspondant aux ondes planes physiques. Comme dans le cas du problème semi discret nous introduisons en dimension 2 les vitesses de phase adimensionnelles  $q_p$  et  $q_s$ , qui dépendent des paramètres  $K$ ,  $\varphi$ ,  $\nu$  (définis dans le paragraphe 3.1.4) et  $\alpha = \frac{\Delta t}{h}$ . Pour l'ordre 2 en temps, on a

$$(5.1.3) \quad \begin{aligned} q_p &= \frac{1}{\pi\alpha KV_p} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda_h^1} \right) \\ q_s &= \frac{1}{\pi\alpha KV_s} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda_h^2} \right) \end{aligned}$$

Pour l'ordre 4 en temps, on a

$$(5.1.4) \quad \begin{aligned} q_p &= \frac{1}{\pi\alpha KV_p} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\lambda_h^1 - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^1)^2)} \right) \\ q_s &= \frac{1}{\pi\alpha KV_s} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\lambda_h^2 - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^2)^2)} \right) \end{aligned}$$

Pour l'ordre 6 en temps, on a

$$(5.1.5) \quad \begin{aligned} q_p &= \frac{1}{\pi\alpha KV_p} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\lambda_h^1 - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^1)^2 + \frac{\alpha^4}{360}(\lambda_h^1)^3)} \right) \\ q_s &= \frac{1}{\pi\alpha KV_s} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\lambda_h^2 - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^2)^2 + \frac{\alpha^4}{360}(\lambda_h^2)^3)} \right) \end{aligned}$$

En dimension 3, nous allons n'étudier que le schéma d'ordre 2 en temps, on introduit donc,

$$\begin{aligned} q_p &= \frac{1}{\pi\alpha KV_p} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda_h^1} \right) \\ q_s^1 &= \frac{1}{\pi\alpha KV_s} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda_h^2} \right) \\ q_s^2 &= \frac{1}{\pi\alpha KV_s} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda_h^3} \right) \end{aligned}$$

qui dépendent des paramètres  $K$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\nu$  et  $\alpha$ . Nous allons maintenant visualiser la dispersion numérique.

## 5.2 Dispersion numérique pour les schémas $Q_1$ , $Q_1 - Q_0$ et DF.

Sur les figures suivantes nous comparons les courbes de dispersion obtenues pour trois schémas différents : nouveau schéma (EF  $Q_1 - Q_0$ ) (en vert), schéma des éléments finis  $Q_1$  (en bleu) et schéma des différences finis (en rouge). Pour obtenir les courbes suivantes nous avons utilisé comme  $\alpha$  le coefficient de stabilité des différents schémas. Ce qui correspond au choix

qu'on fait en pratique quand on implémente les schémas pour avoir le pas de discrétisation en temps le plus grand possible. Plus précisément nous avons  $\alpha = \frac{1}{V_p}$  pour le nouveau schéma et le schéma des éléments finis  $Q_1$  et  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{V_p^2 + V_s^2}}$  pour le schémas des différences finis.

Nous avons remarqué par ailleurs que pour tous les schémas les courbes de dispersion sont monotones par rapport au paramètre  $\alpha$ . Ce qui implique que dans le cas où les courbes de dispersion sont inférieures à 1 on obtient les meilleurs résultats pour la plus grande valeur de  $\alpha$  (dans le cas contraire, quand  $\alpha$  augmente, la courbe de dispersion se déplace vers le haut et donc s'éloigne de l'unité).

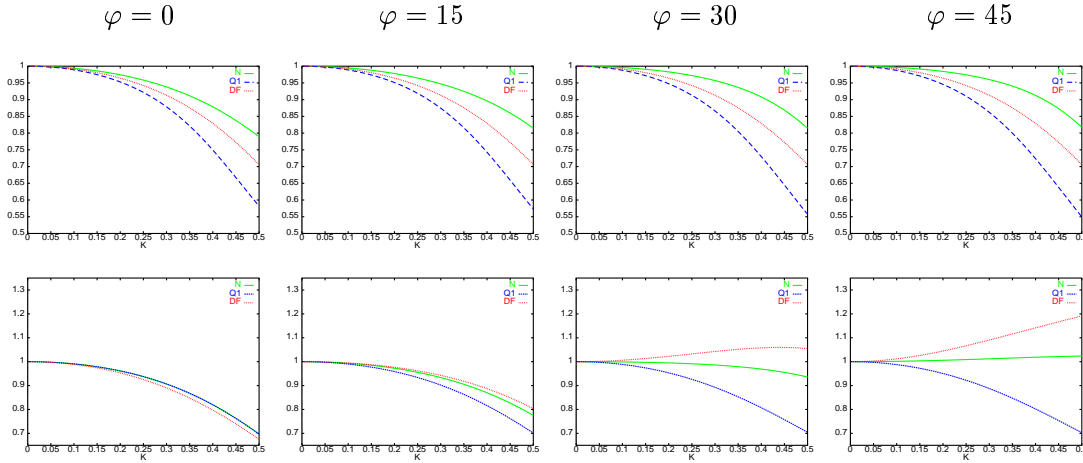


FIG. 5.2.1: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.1$

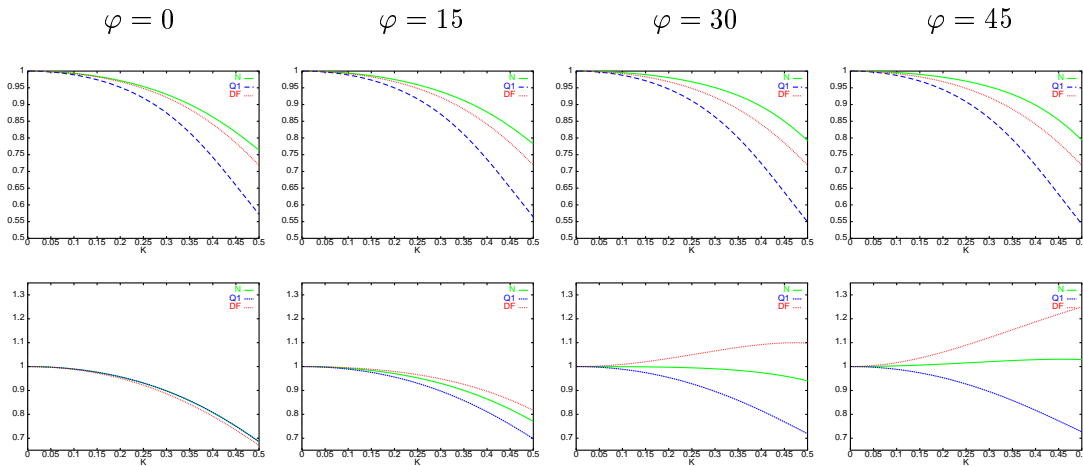


FIG. 5.2.2: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.2$

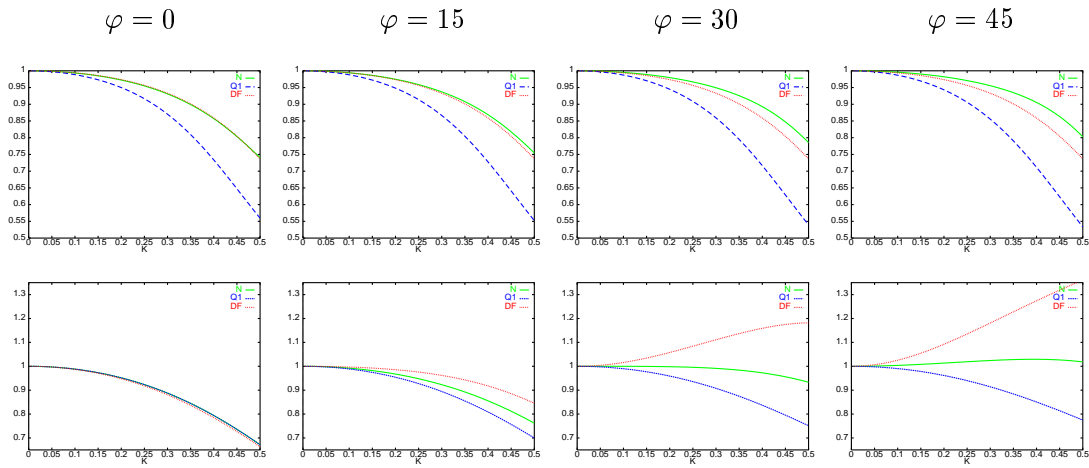


FIG. 5.2.3: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut) et les ondes S (en bas), discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.3$

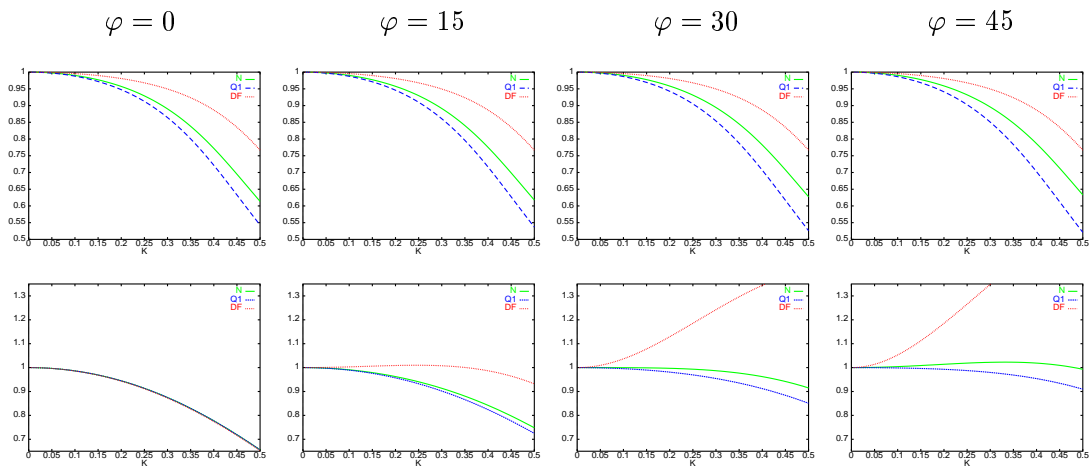


FIG. 5.2.4: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut) et les ondes S (en bas), discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.4$

Sur la figure 5.2.5 nous présentons (pour chaque valeur de  $\nu$ ) la courbe de dispersion correspondant à la direction la moins privilégiée pour chaque schéma.

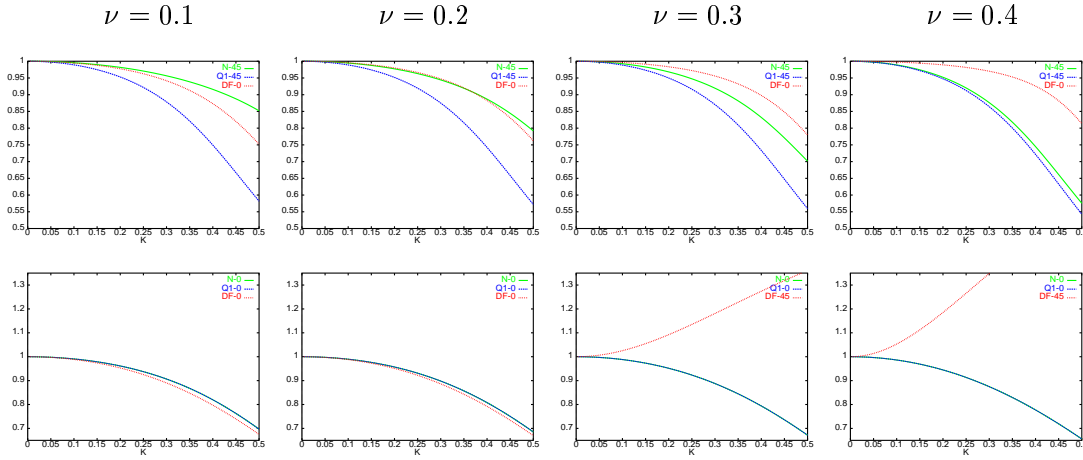


FIG. 5.2.5: Courbes correspondant dans la direction de dispersion maximale pour les différents schémas: les ondes P (en haut), les ondes S (en bas).

### Interprétation des courbes

1. La direction de propagation la moins privilégiée pour chaque schéma est la même que dans le cas du problème semi-discret.
2. Pour toutes les valeurs de  $\nu$  et de  $\varphi$  le schéma des éléments finis  $Q_1 - Q_0$  présente une dispersion inférieure ou égale à celle du schéma des éléments finis  $Q_1$ .
3. Par rapport au schéma des différences finies les résultats sont mitigés: Pour les ondes P, pour  $\nu \geq 0.3$  le schéma de DF est meilleure que le schéma  $Q_1 - Q_0$ , tandis que pour  $\nu < 0.3$  le schéma  $Q_1 - Q_0$  a une dispersion inférieure ou égale à celle du schéma des DF. En ce qui concerne les ondes S la dispersion du schéma  $Q_1 - Q_0$  est toujours inférieure (ou égale) à celle du schéma DF. Il faut noter ici, que le calcul ne se fait pas au même coût, car le pas de discrétisation en temps n'est pas le même pour les deux schémas. En fait, le schéma des différences finies est plus cher.
4. Comme  $V_s \leq V_p$ , c'est la courbe de dispersion pour les ondes S qui définit le nombre de points par longueur d'onde que nous devrions prendre pour avoir une précision donnée. Ce qui rend le schéma  $Q_1 - Q_0$  plus intéressant.

### 5.3 Élément fini $Q_2 - Q_1$ .

Sur les figures suivantes nous présentons les courbes de dispersion obtenues pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  dans les cas d'une discrétisation d'ordre 2 (Figures 5.3.1 à 5.3.4) et 4 en temps (Figures 5.3.5 à 5.3.8) pour différentes valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour chaque valeur de  $\varphi$  et de  $\nu$  on présente trois courbes de dispersion correspondant à des valeurs de  $\alpha = \Delta t/h$  différentes. Plus précisément pour  $\alpha = \alpha_{CFL}$  (en vert),  $\alpha = \alpha_{CFL}/2$  (en bleu) et  $\alpha = \alpha_{CFL}/3$  (en rouge).

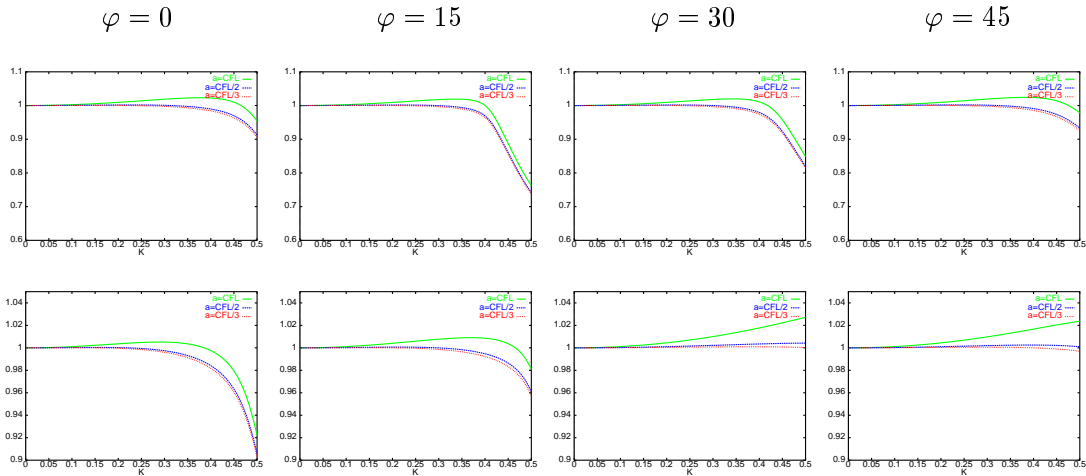


FIG. 5.3.1: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.1$

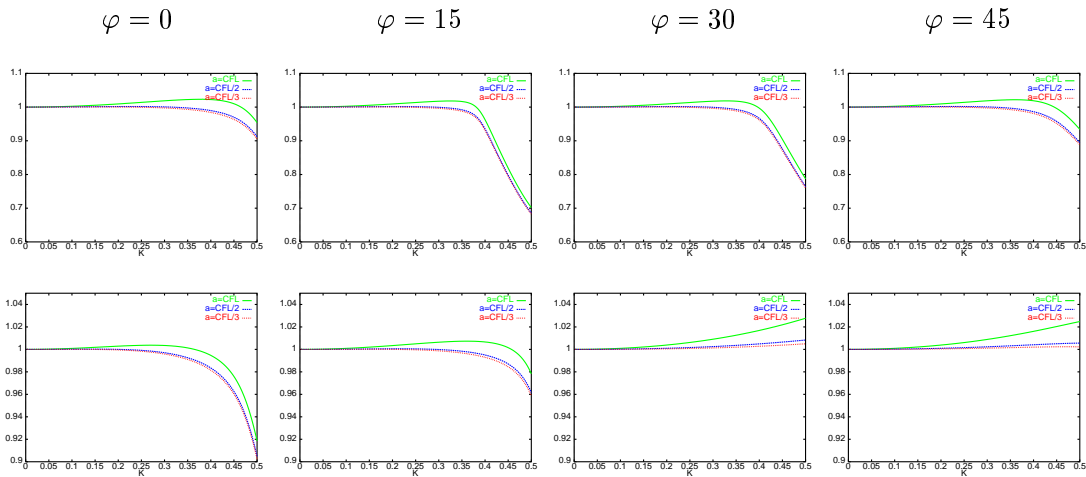


FIG. 5.3.2: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.2$

On peut remarquer que pour les deux schémas de discrétisation en temps, la précision optimale n'est pas obtenue pour  $\alpha_{CFL}$  (le coefficient qui correspond au rapport  $\Delta t/h$  maximal).

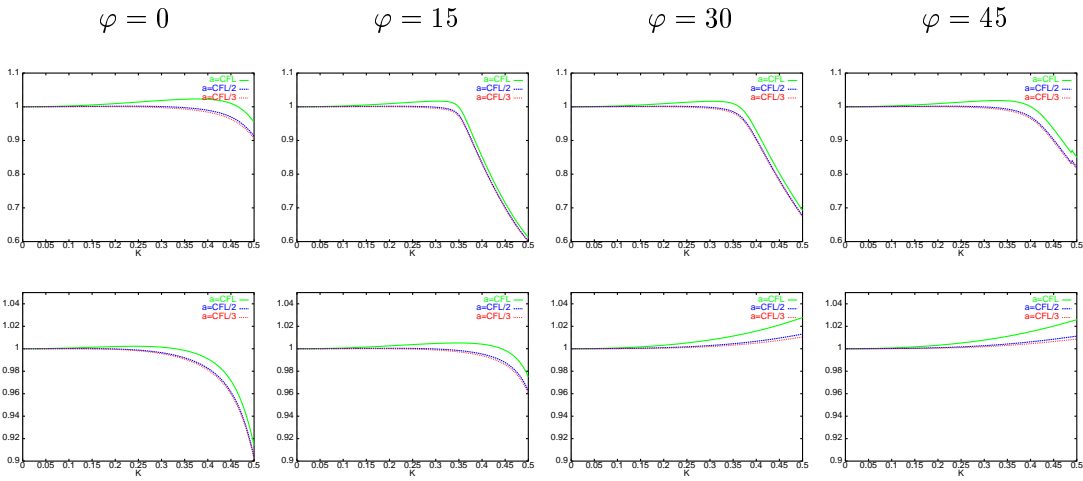


FIG. 5.3.3: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.3$

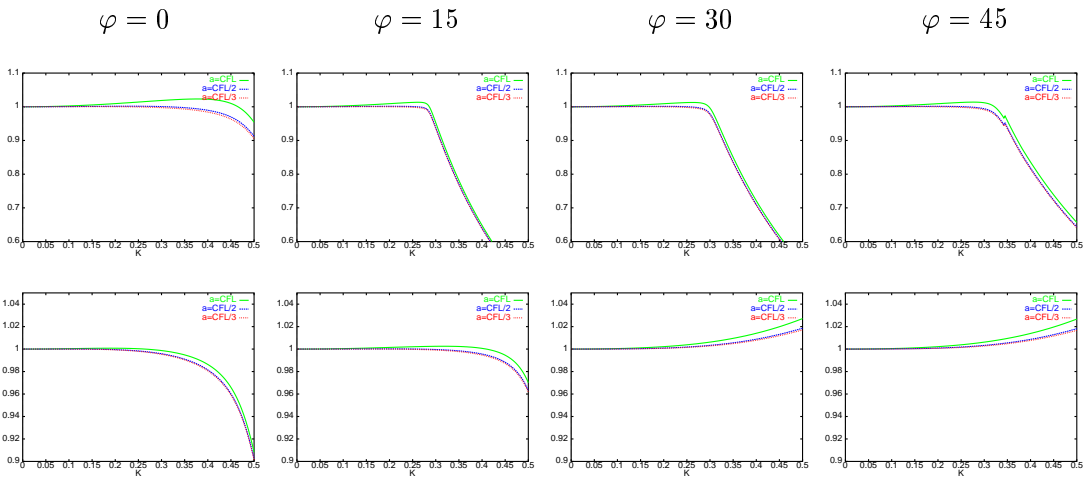


FIG. 5.3.4: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.4$

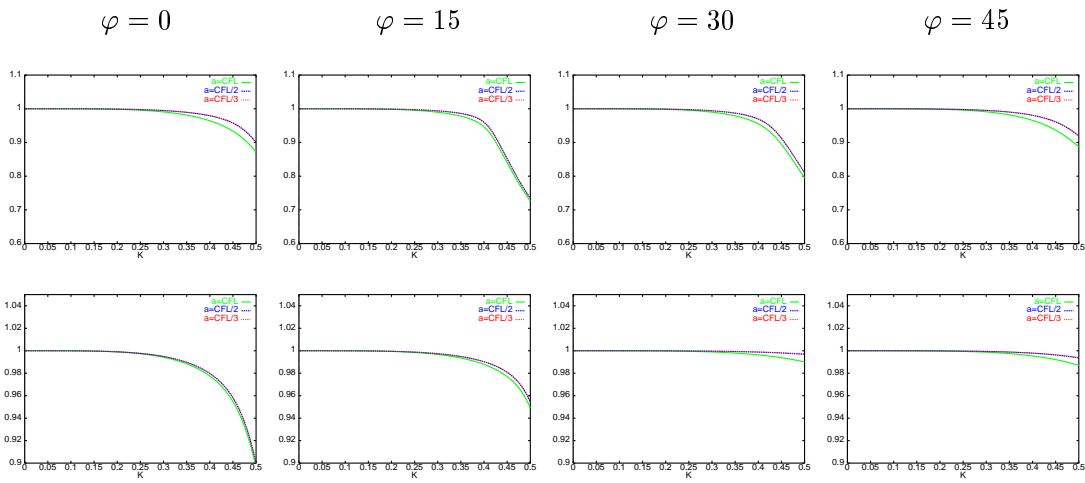


FIG. 5.3.5: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.1$

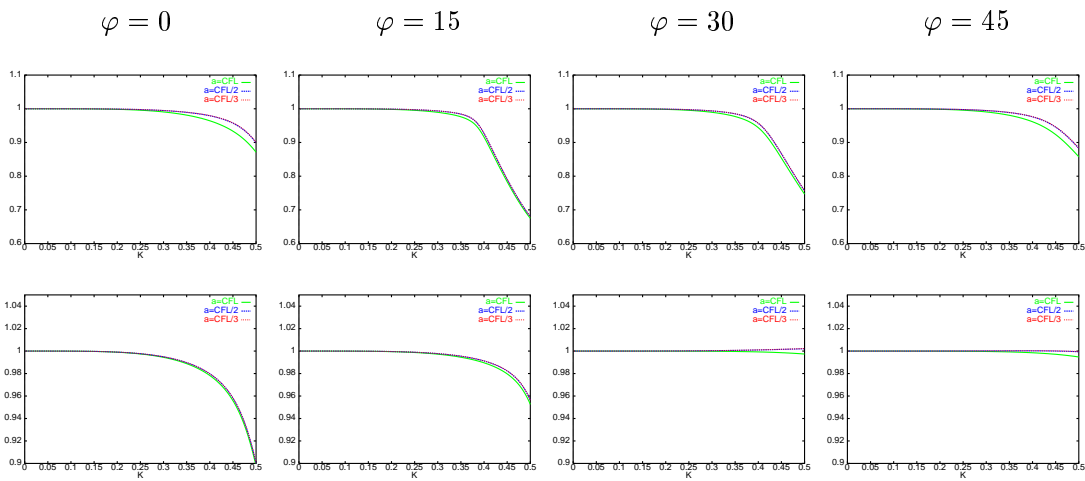


FIG. 5.3.6: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.2$



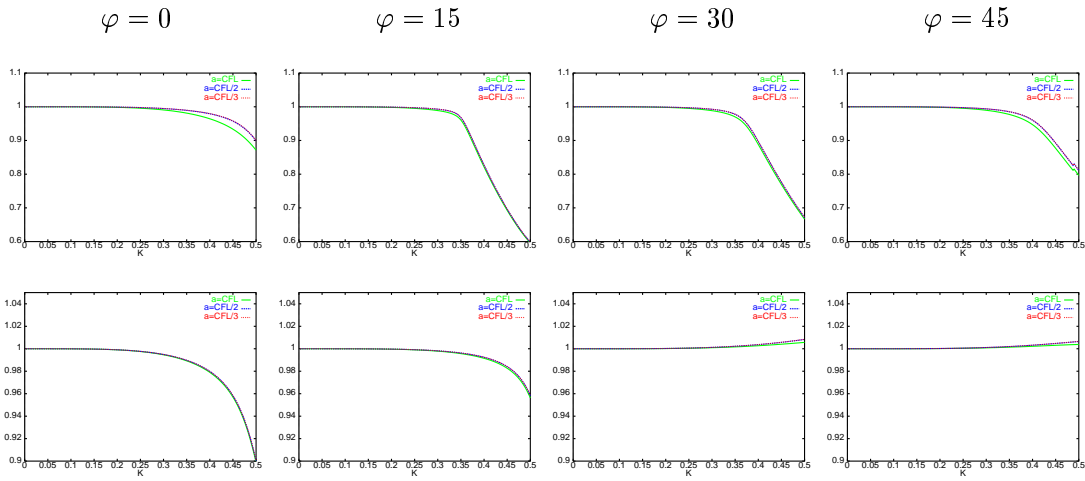


FIG. 5.3.7: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.3$

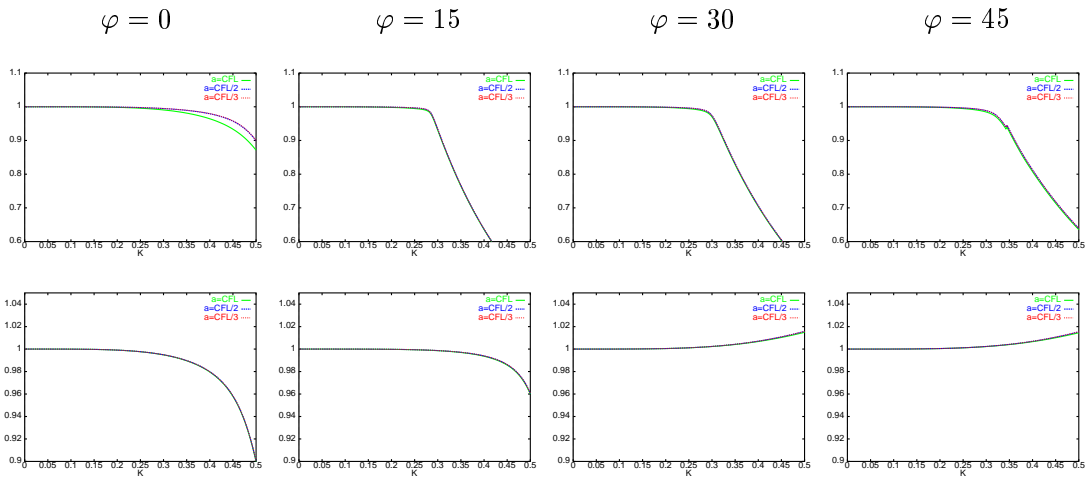


FIG. 5.3.8: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_2 - Q_1$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.4$

Ceci implique que pour des maillages grossiers on ne peut pas utiliser le pas de temps maximal. Pour vérifier l'ordre des deux schémas nous avons tracé sur la figure 5.3.9 les variations de  $\Delta(\log(V_{p,h} - V_p))$  en fonction de  $\Delta(\log K)$ . Le fait que le coefficient de stabilité pour le schéma d'ordre 4 en temps est  $\sqrt{3}$  fois plus grand que celui du schéma d'ordre 2, compense en partie le coût supplémentaire de la programmation de ce schéma. En fait, le schéma d'ordre 4 est a priori deux fois plus cher que le schéma d'ordre 2 et ceci parce que il nécessite de calculer deux fois le produit de la matrice  $K_h$  par un vecteur de la taille des inconnues. En effet, rappelons ici le schéma d'ordre 4

$$\frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \left[ V_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} K_h V_h^n \right] = 0.$$

Pour obtenir alors  $V_h^{n+1}$ , on calcul dans un premier temps la quantité

$$\widetilde{V}_h^{n+1} = V_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} K_h V_h^n$$

et ensuite

$$V_h^{n+1} = 2V_h^n - V_h^{n-1} - \Delta t^2 K_h \widetilde{V}_h^{n+1}.$$

Cependant, globalement le schéma d'ordre 4 est environ seulement 15% plus cher que le schéma d'ordre 2, car on peut utiliser dans ce cas un pas en temps  $\sqrt{3}$  fois plus grand. Ceci montre que le meilleur choix consiste à utiliser le schéma d'ordre 4 pour la discrétisation en temps.

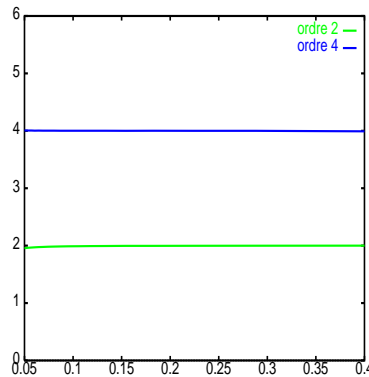


FIG. 5.3.9: L'ordre d'approximation pour  $K$  petit.

5.4 Élément fini  $Q_3 - Q_2$ .

Sur les figures suivantes nous présentons les courbes de dispersion obtenues pour le schéma  $Q_3 - Q_2$  dans les cas d'une discrétisation d'ordre 2 (Figures 5.4.1 à 5.4.4), 4 (Figures 5.4.5 à 5.4.8) et 6 en temps (Figures 5.4.9 à 5.4.12) pour différentes valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour chaque valeur de  $\varphi$  et de  $\nu$  on présente trois courbes de dispersion correspondant à des valeurs de  $\alpha = \Delta t/h$  différentes. Plus précisément pour  $\alpha = \alpha_{CFL}$  (en vert),  $\alpha = \alpha_{CFL}/2$  (en bleu) et  $\alpha = \alpha_{CFL}/3$  (en rouge).

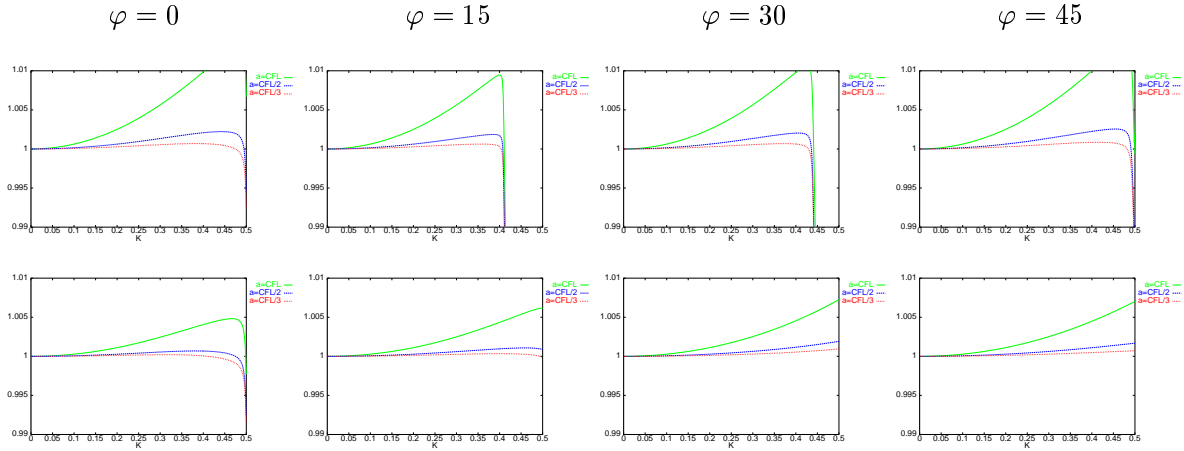


FIG. 5.4.1: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.1$

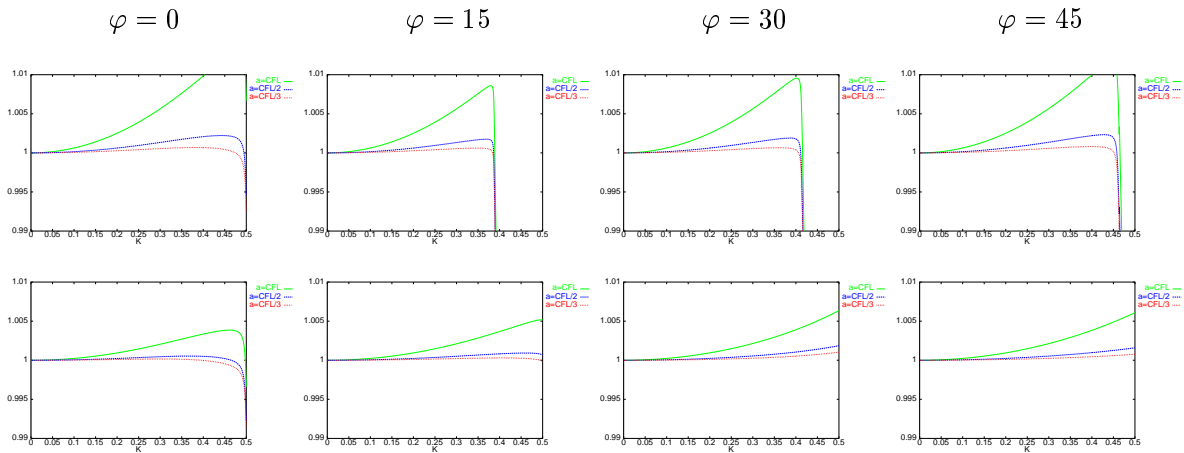


FIG. 5.4.2: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.2$

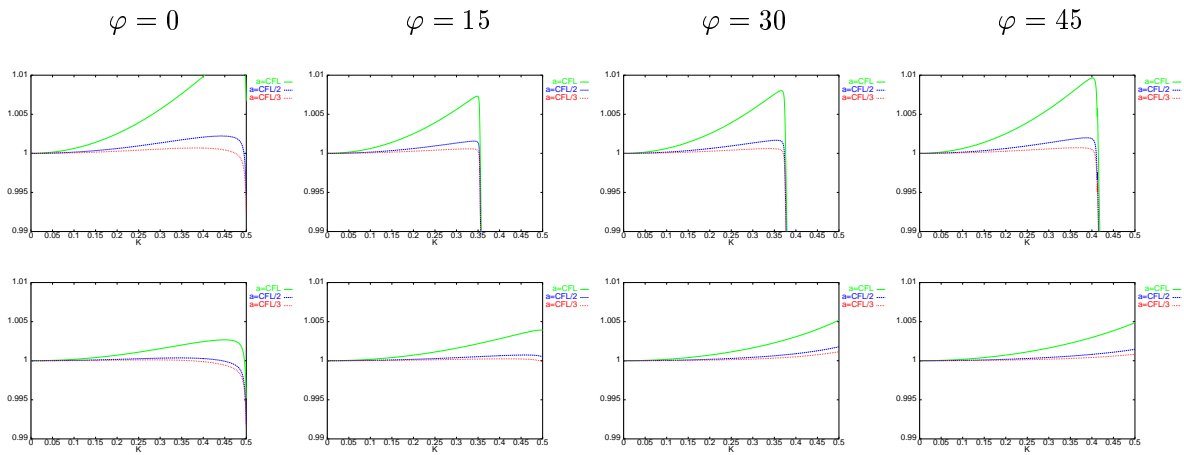


FIG. 5.4.3: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.3$

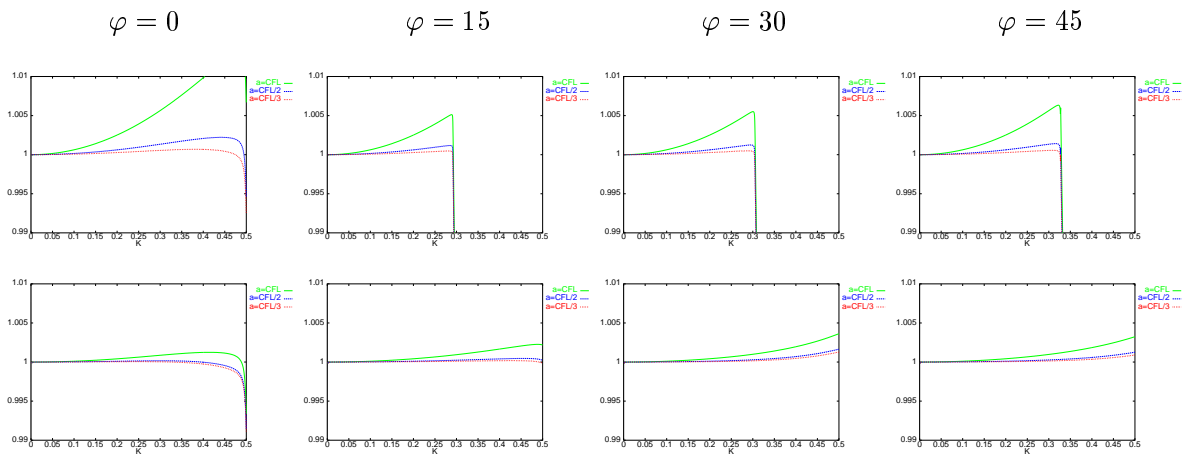


FIG. 5.4.4: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 2 en temps, avec  $\nu = 0.4$

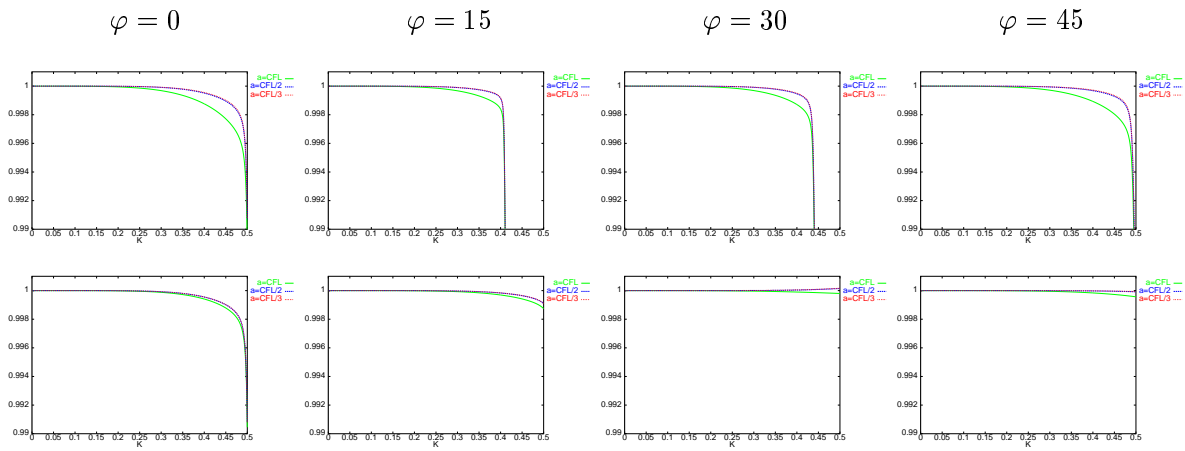


FIG. 5.4.5: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.1$

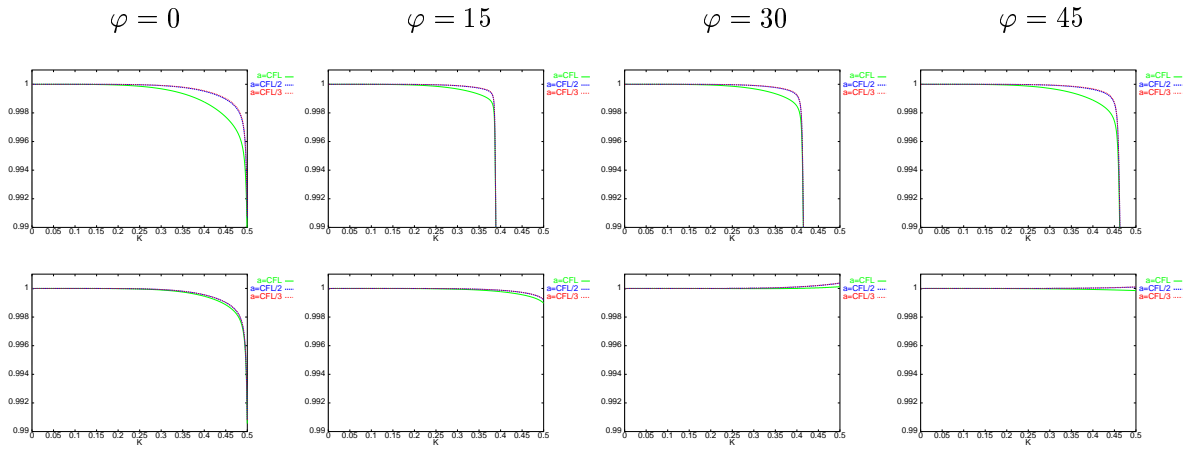


FIG. 5.4.6: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.2$

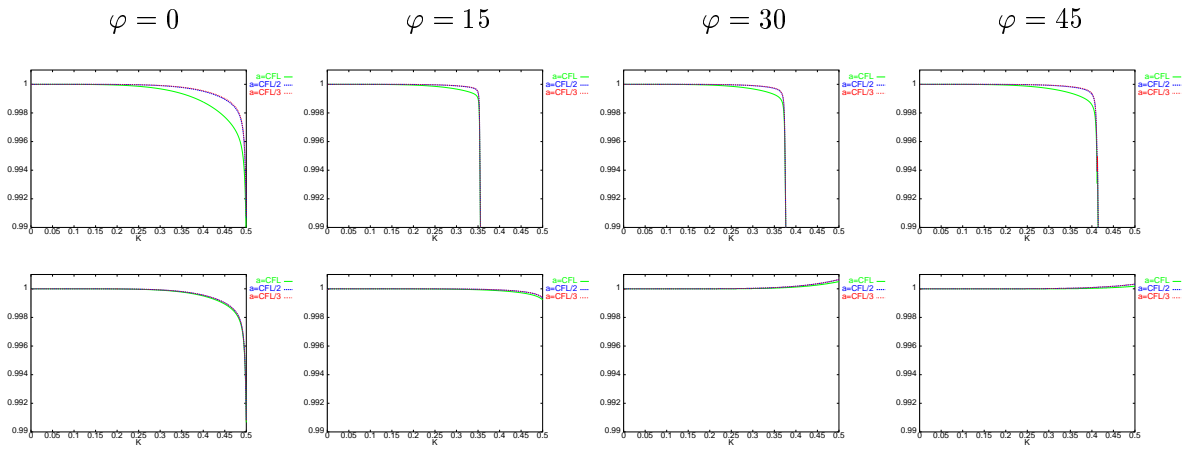


FIG. 5.4.7: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.3$

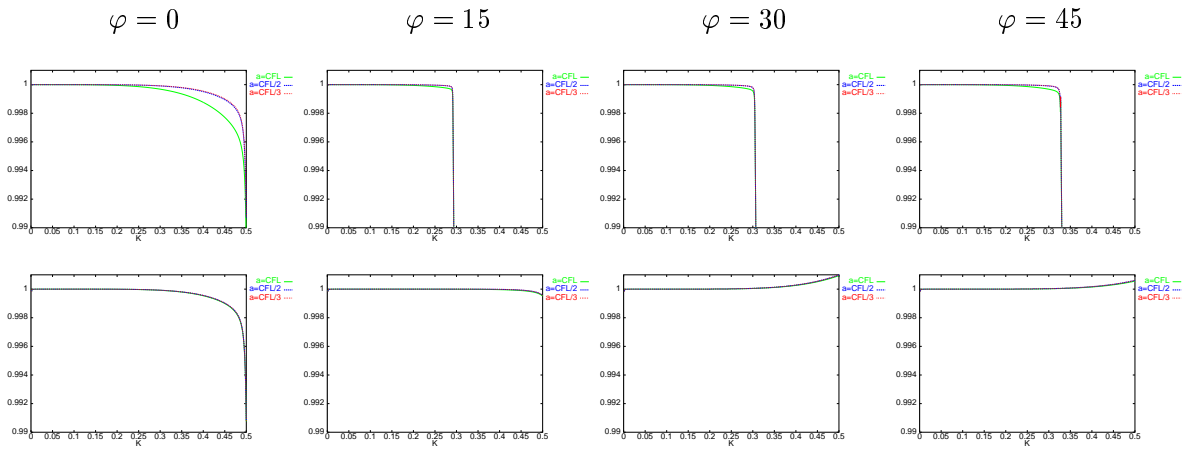


FIG. 5.4.8: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 4 en temps, avec  $\nu = 0.4$

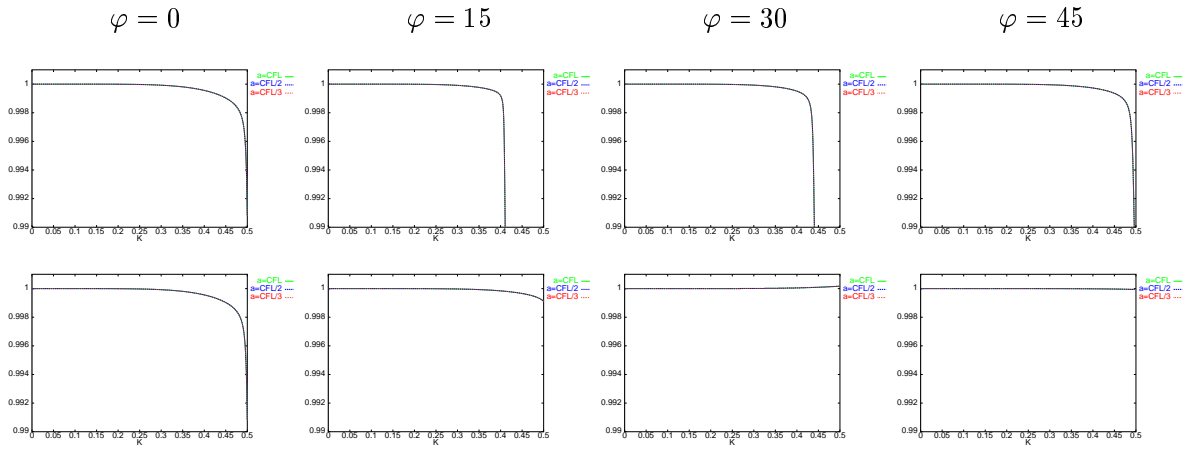


FIG. 5.4.9: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 6 en temps, avec  $\nu = 0.1$

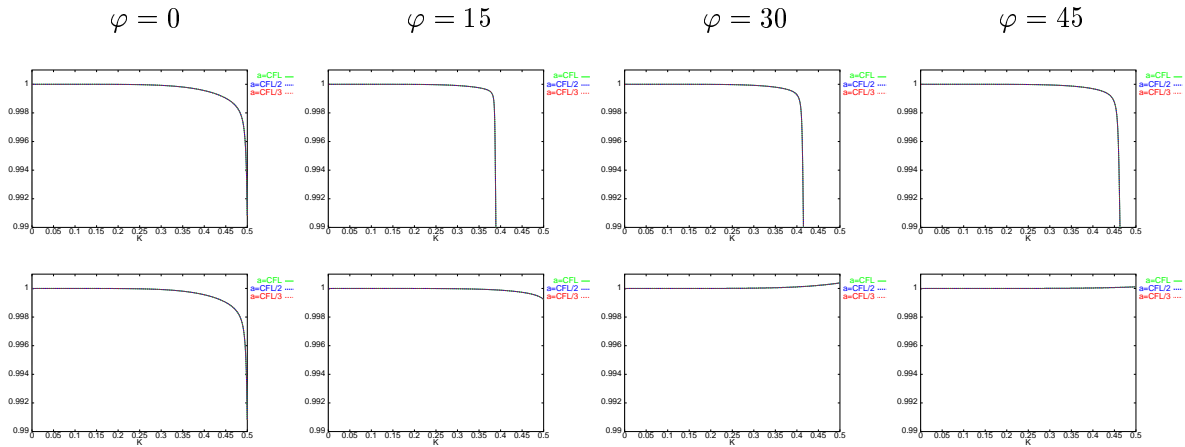


FIG. 5.4.10: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 6 en temps, avec  $\nu = 0.2$

On peut remarquer sur les figures précédentes que (comme pour le schéma  $Q_2 - Q_1$ ), la précision optimale n'est pas obtenue pour  $\alpha_{CFL}$  quand les schémas de discrétisation d'ordre 2 et 4 en temps sont utilisés. Pour le schéma d'ordre 6 en temps le rapport  $\Delta t/h$  n'a pas une influence visible sur la dispersion (les trois courbes sont confondues). Pour vérifier l'ordre des différents schémas nous avons tracé sur la figure 5.4.13 les variations de  $\Delta(\log(V_{p,h} - V_p))$  en fonction de  $\Delta(\log K)$ . Afin de préserver la précision du schéma espace ( $O(h^6)$ ) il faudrait utiliser le schéma d'ordre 6 en temps. Cependant, d'une part ce schéma est environs deux fois plus cher que le schéma d'ordre 4 en temps, d'autre part comme nous pouvons le remarquer sur les figures précédentes la dispersion est pratiquement équivalente pour les deux schémas. Nous considérons donc, que le meilleur choix consiste à utiliser le schéma d'ordre 4 en temps car il est un bon compromis entre précision et temps de calcul.

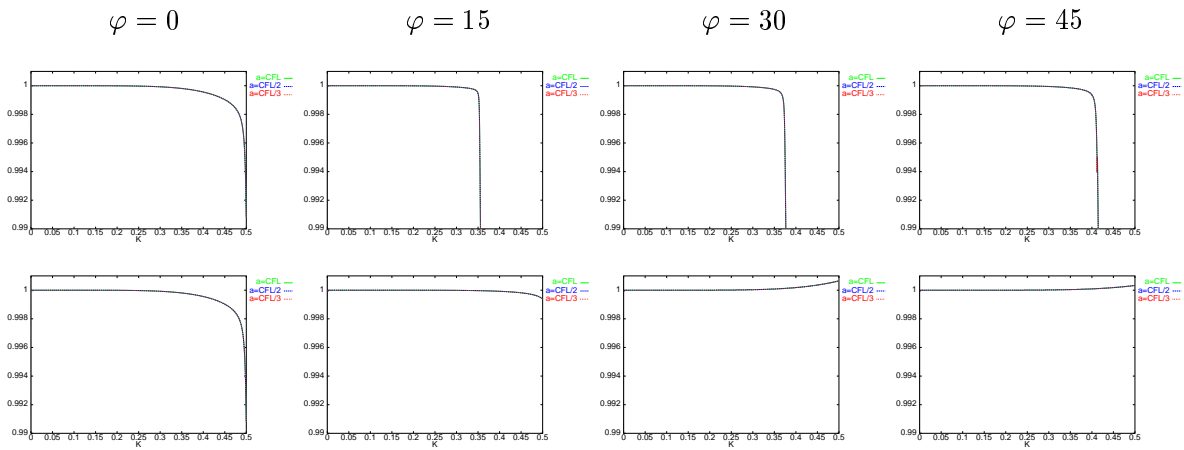


FIG. 5.4.11: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 6 en temps, avec  $\nu = 0.3$

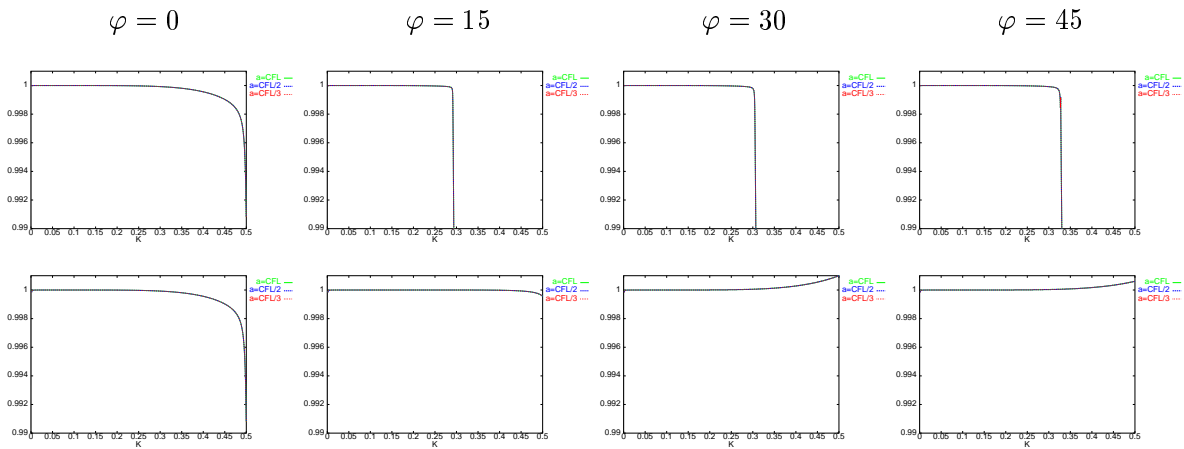


FIG. 5.4.12: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut) et les ondes  $S$  (en bas), schéma  $Q_3 - Q_2$  discrétisation d'ordre 6 en temps, avec  $\nu = 0.4$

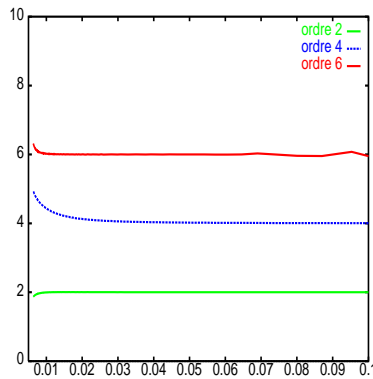


FIG. 5.4.13:  $L$ 'ordre d'approximation pour  $K$  petit.



## 5.5 Analyse de dispersion, le cas tridimensionnel.

Sur les figures suivantes nous comparons les courbes de dispersion obtenues pour trois schémas différents: nouveau schéma (en vert), schéma des éléments finis  $Q_1$  (en bleu) et schéma des différences finis (en rouge). Comme dans le cas 2D pour obtenir ces courbes nous avons utilisé comme  $\alpha$  le coefficient de stabilité des différents schémas. Dans un premier temps on représente sur les figures 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3 et 5.5.4 les courbes de dispersion pour chaque schéma en fonction de  $K$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  et de  $\nu$  et pour l'angle  $\theta$  qui correspond à la direction de dispersion maximale pour chaque schéma.

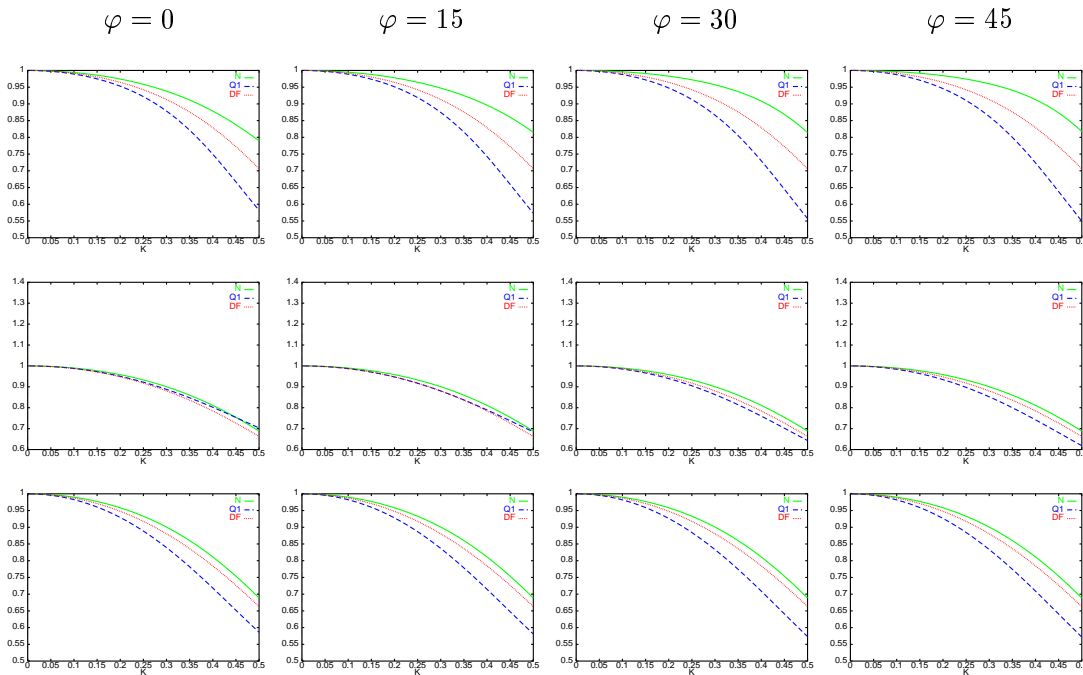


FIG. 5.5.1: Vitesses de phase pour les ondes  $P$  (en haut), les ondes  $SV$  (au milieu) et les ondes  $SH$  (en bas) pour  $\nu = 0.1$

Pour conclure nous représentons sur la figure 5.5 les courbes de dispersion en fonction de  $K$  pour différentes valeurs  $\nu$  et aux angles  $\varphi - \theta$  qui correspondent à la direction de dispersion maximale pour chaque schéma.

### Interprétation des courbes

- La direction de propagation la moins privilégiée pour chaque schéma est la même que dans le cas du problème semi-discret.
- On peut conclure que le nouveau schéma est plus avantageux que le schéma des éléments finis  $Q_1$  car d'une part le coût de calcul est équivalent pour les deux schémas (pour  $\nu \leq 1/3$  les coefficients de stabilité sont égaux et nous avons un écart maximal de 6% pour  $\nu = 0.5$ ) et d'autre part le nouveau schéma présente une dispersion moins importante que le schéma  $Q_1$ .

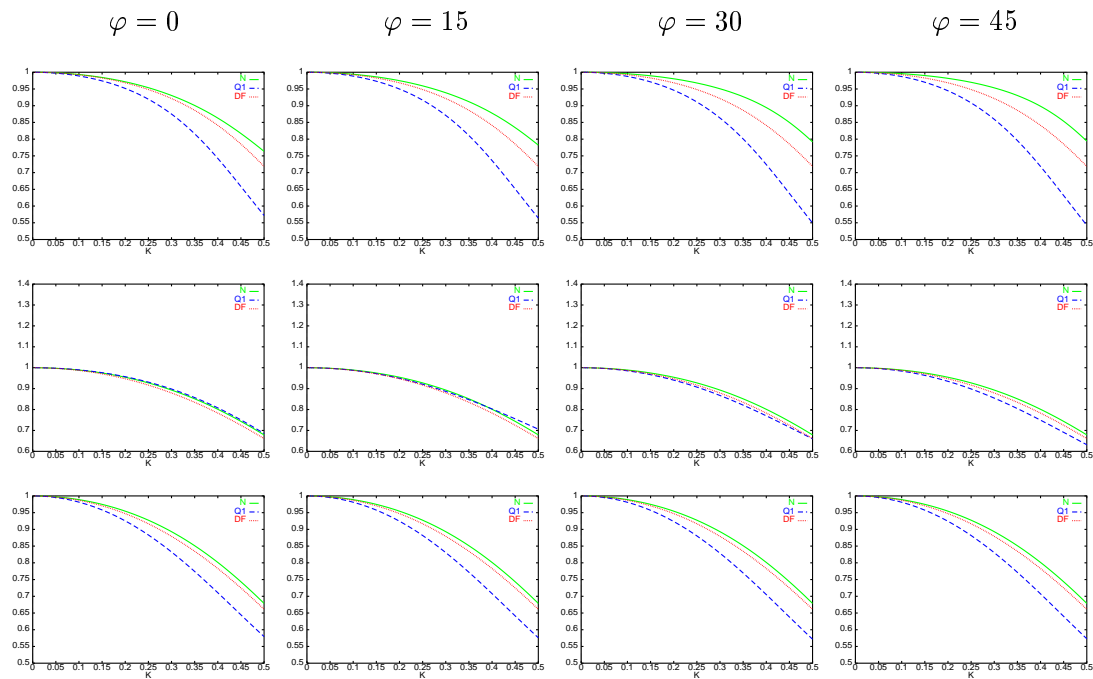


FIG. 5.5.2: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut), les ondes SV (au milieu) et les ondes SH (en bas) pour  $\nu = 0.2$

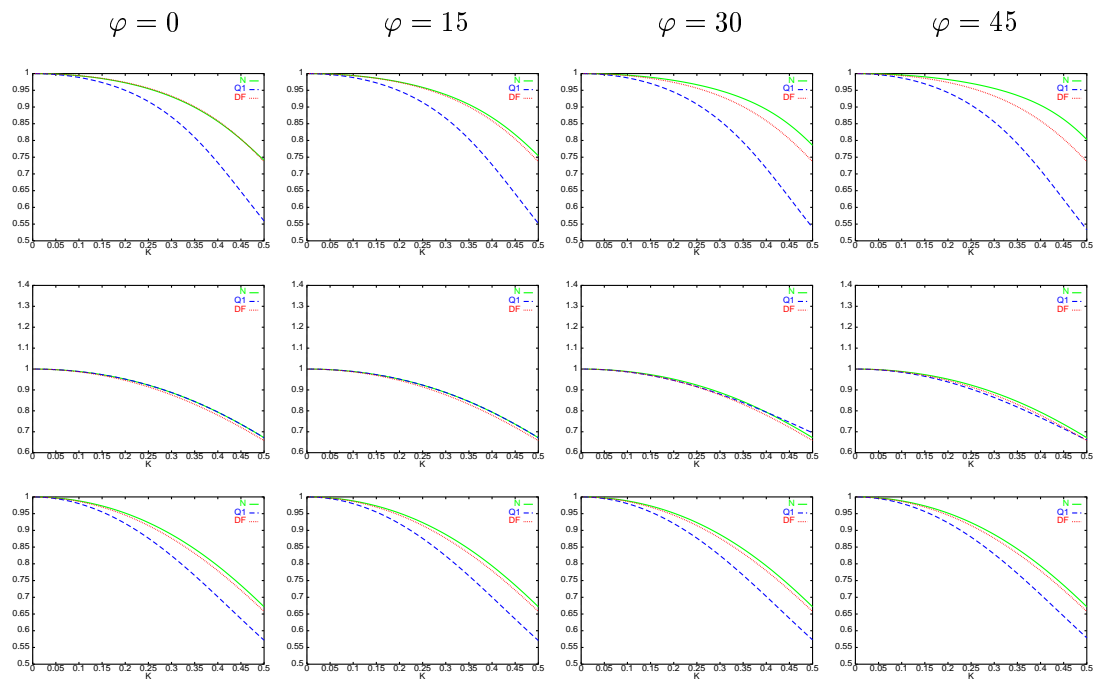


FIG. 5.5.3: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut), les ondes SV (au milieu) et les ondes SH (en bas) pour  $\nu = 0.3$

## 5.5 Analyse de dispersion, le cas tridimensionnel.

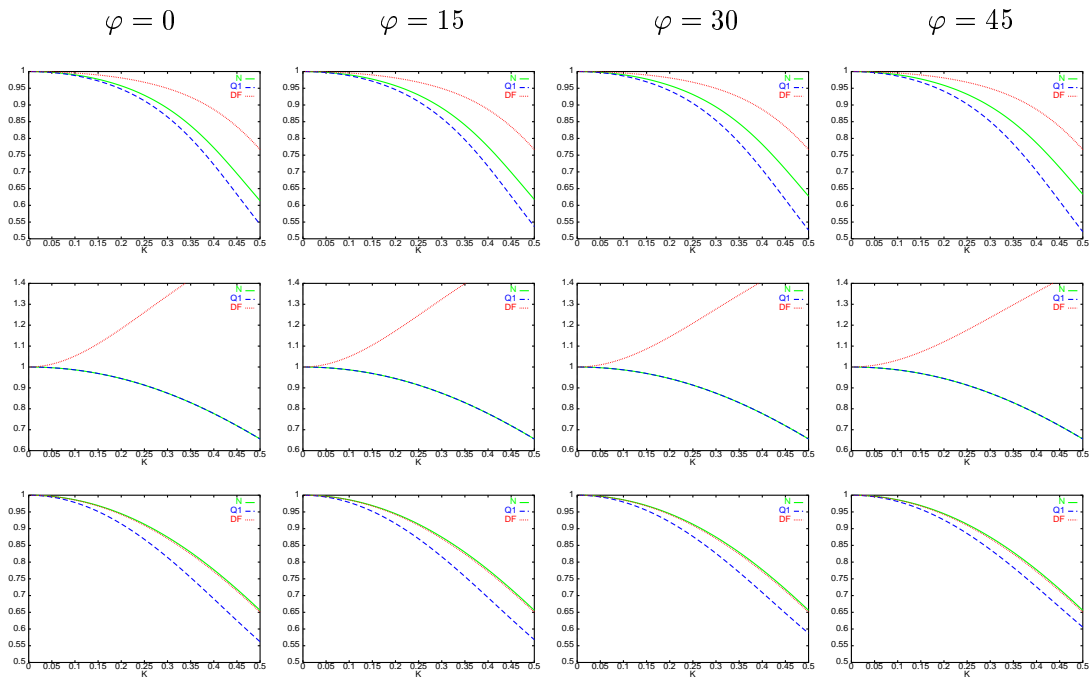


FIG. 5.5.4: Vitesses de phase pour les ondes P (en haut), les ondes SV (au milieu) et les ondes SH (en bas) pour  $\nu = 0.4$

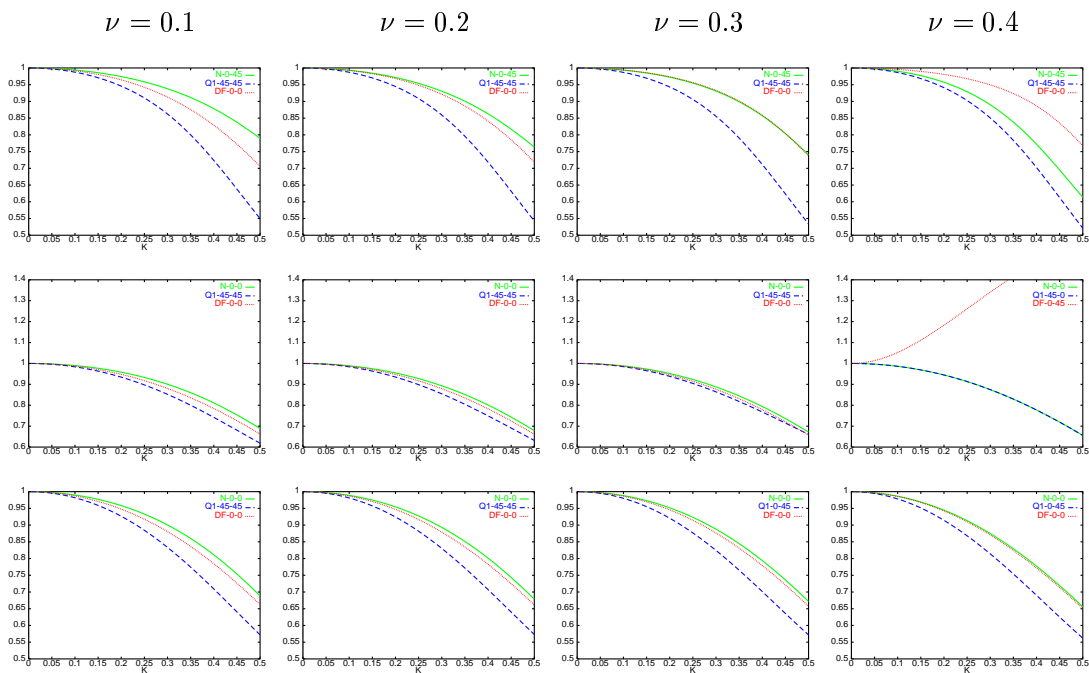


FIG. 5.5.5: Courbes de dispersion dans la direction de dispersion maximale pour les ondes P (en haut), les ondes SV (au milieu) et les ondes SH (en bas).

- En ce qui concerne la comparaison entre le nouveau schéma et le schéma des différences finies, nous avons : pour les ondes de Pression, le nouveau schéma présente une dispersion moins importante que le schéma des  $DF$  pour  $\nu \leq 0.3$ . Pour les ondes de Cisaillement (SV et SH), le nouveau schéma présente une dispersion plus petite ou égale à celle du schéma des  $DF$ .
- Le coefficient de stabilité pour le nouveau schéma est plus petit que celui du schéma des différences finies et donc en termes de coût de calcul le schéma de différences finies est plus cher que le nouveau schéma (le surcoût peut aller jusqu'à 30%).
- La vitesse des ondes S étant plus petite que la vitesse des ondes P, c'est la courbe de dispersion pour les ondes S qui définit le nombre de points par longueur d'onde que nous devons prendre pour avoir une précision donnée. De ce fait, il est très intéressant d'avoir un schéma pour lequel la dispersion sur les ondes S est moins importante que la dispersion sur les ondes P, ce qui est le cas pour le nouveau schéma en 2D et 3D.

Troisième partie

Traitement des fissures et des  
surfaces libres



## Chapitre 6

# La méthode des domaines fictifs

Nous considérons ici le problème de l'élastodynamique avec des conditions de surface libre sur une fissure de géométrie complexe. Nous allons présenter dans ce chapitre une méthode numérique basée sur une formulation en domaines fictifs de ce problème. Cette méthode comporte les avantages suivants: bonne prise en compte des géométries complexes, stabilité du schéma numérique et facilité de mise en oeuvre.

### Introduction

Les méthodes des domaines fictifs ont été initialement introduites pour la résolution des problèmes stationnaires dans des géométries complexes [5, 55, 58, 57] et ensuite généralisées aux problèmes d'évolution [42, 54, 96, 19, 22]. L'idée de ces méthodes est de remplacer un système d'équations posé initialement dans un domaine de géométrie complexe par un système "similaire" mais posé dans un domaine d'une forme très simple (typiquement un rectangle en 2D et un parallélépipède en 3D). La prise en compte des conditions aux limites sur les bords physiques du problème initial s'effectue alors de manière faible par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange qui "vit" uniquement sur ces bords. Par nature, ces méthodes sont bien adaptées pour des conditions aux limites essentielles: de telles conditions qui peuvent s'interpréter comme une contrainte égalité dans l'espace utilisé pour la formulation variationnelle. Les méthodes des domaines fictifs reposent alors sur la dualisation de cette contrainte via la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour notre problème modèle, la condition sur les bords physiques du domaine de calcul est la condition de surface libre (la composante normale du tenseur des contraintes est nulle). Cette condition, qui est une condition de type Neumann pour la formulation en déplacement, devient une condition essentielle de type Dirichlet pour la formulation en vitesse-contraintes de l'élastodynamique que nous avons considérée au chapitre 2.

L'avantage principal des méthodes des domaines fictifs est que la géométrie particulière du problème initial n'apparaît alors que dans le calcul du multiplicateur de Lagrange. Ceci implique en particulier, que pour la discrétisation on peut considérer deux maillages, un maillage volumique régulier, ce qui donne à la méthode l'efficacité des différences finies, et un maillage surfacique irrégulier permettant une bonne approximation de la géométrie.

Le plan de ce chapitre est le suivant.

Nous introduisons d'abord la méthode des domaines fictifs pour le problème de l'élastodynamique. Dans le cas du problème continu, nous allons montrer l'équivalence entre le problème initial et la formulation en domaines fictifs. Notons que l'analyse mathématique du problème en domaines fictifs repose essentiellement sur la théorie de problèmes de point selle (cf. [29], [32]). Le point délicat est alors l'obtention de la condition inf-sup.

Nous considérons ensuite la discrétisation en espace et en temps de notre problème et en utilisant des techniques d'énergie nous obtenons l'unicité (et donc l'existence) des solutions semi-discrètes et discrètes. En utilisant également de techniques d'énergie pour le problème discret nous allons montrer que la stabilité du schéma est garantie sous une condition de stabilité explicite qui est indépendante de la méthode des domaines fictifs. Plus précisément, le schéma est stable sous la CFL,

$$\Delta t \leq \alpha_{CFL} h$$

où  $\alpha_{CFL}$  est le coefficient que nous avons calculé pour le schéma discret dans le chapitre précédent et  $h$  est le pas de discrétisation dans le maillage volumique (qui est régulier). Ce résultat est très important car il montre la robustesse de la méthode numérique.

Finalement nous évoquons les différentes difficultés de l'analyse de précision de la méthode numérique (convergence et estimations d'erreur).

## 6.1 Description de la méthode

### 6.1.1 Présentation du problème modèle 2D

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$ . Nous considérons notre problème modèle, l'élastodynamique avec condition de surface libre sur les bords physiques du domaine de calcul: la composante normale du tenseur des contraintes est nulle sur les lèvres de la fissure ou sur la topographie,

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = 0 & \text{dans } \Omega & (i) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega & (ii) \\ \sigma \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma & (iii) \end{cases} ,$$

avec les conditions initiales (systématiquement omises dans la suite)

$$v(0) = 0 ; \quad \sigma(0) = 0.$$

Dans ce qui suit nous considérons le cas où  $\Gamma$  correspond à une fissure (la topographie se traite exactement de la même façon). La géométrie du problème est représentée dans la figure 6.1.1,  $\Omega$  désignant dans ce cas le domaine non borné  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Pour simplifier la présentation nous introduisons ici un bord extérieur  $\Gamma_D$  avec des conditions de Dirichlet homogènes sur  $v$ ,

$$(6.1.2) \quad v = 0, \quad \text{sur } \Gamma_D.$$



Pour simuler la propagation des ondes dans le domaine non borné, nous utilisons le modèle des couches parfaitement adaptées (PML) qui sera introduit dans le chapitre suivant. Introduisons

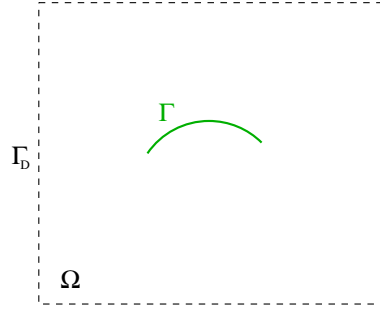


FIG. 6.1.1: La géométrie du problème.

les espaces fonctionnels

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{H}} = (L^2(\Omega))^4, \quad \underline{\underline{X}} = (H(\operatorname{div}; \Omega))^2 \\ \underline{\underline{X}}_0 = \{ \tau \in \underline{\underline{X}}, \quad \tau \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}, \\ \underline{\underline{X}}_0^{sym} = \{ \tau \in \underline{\underline{X}}_0, \quad \tau \text{ symétrique} \}, \\ \underline{\underline{M}} = (L^2(\Omega))^2, \quad V = (H^1(\Omega))^2 \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle du problème (6.1.1), (6.1.2), s'écrit alors

$$(6.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v) : [0, T] \mapsto \underline{\underline{X}}_0^{sym} \times \underline{\underline{M}} \text{ tels que:} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma, \tau) + b(\tau, v) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}_0^{sym}, \\ \frac{d}{dt} c(v, w) - b(\sigma, w) = (f, w), \quad \forall w \in \underline{\underline{M}}, \end{array} \right.$$

où nous avons posé (cf. chapitre 2 relation (2.1.18)),

$$(6.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A \sigma : \tau dx, \quad \forall (\sigma, \tau) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\ c(v, w) = \int_{\Omega} \varrho v \cdot w dx, \quad \forall (v, w) \in \underline{\underline{M}} \times \underline{\underline{M}}, \\ b(w, \tau) = \int_{\Omega} \mathbf{div} \tau \cdot w dx, \quad \forall (w, \tau) \in \underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{M}}. \end{array} \right.$$

Selon la théorie classique des EDP hyperboliques, nous obtenons le résultat suivant

**Théorème 6.1.1** *Soit  $f \in C^0(0, T; \underline{\underline{M}})$ , alors le problème (6.1.3) admet une solution unique  $(\sigma, v)$  dans  $C^1(0, T; \underline{\underline{X}}_0^{sym}) \times C^1(0, T; \underline{\underline{M}})$ .*

De plus nous avons l'estimation d'énergie classique,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t (f(s), v(s)) ds, \quad \text{avec } \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (a(\sigma, \sigma) + c(v, v)).$$

### 6.1.2 Méthodes d'approximation classiques

Les méthodes numériques les plus couramment utilisées pour résoudre le problème (6.1.1)-(6.1.2)-ou sa formulation variationnelle (6.1.3)- sont les suivantes :

1. Les méthodes des différences finies (en domaine temporel).
2. Les méthodes des éléments finis (en domaine temporel).
3. Les méthodes des équations intégrales en temps (potentiels retardés).

**Méthodes d'éléments finis et de différences finies** Nous examinons d'abord les deux premières méthodes qui présentent la caractéristique commune de nécessiter un maillage volumique du domaine  $\Omega$ . Avec la méthode des éléments finis on peut utiliser un maillage irrégulier qui respecte bien la géométrie de la fissure (figure 6.1.2-a), tandis que, avec les différences finies on forme une grille des points régulière qui conduit à une approximation en escalier de la géométrie (cf. figure 6.1.2-b). Dans les deux cas plusieurs inconvénients apparaissent:

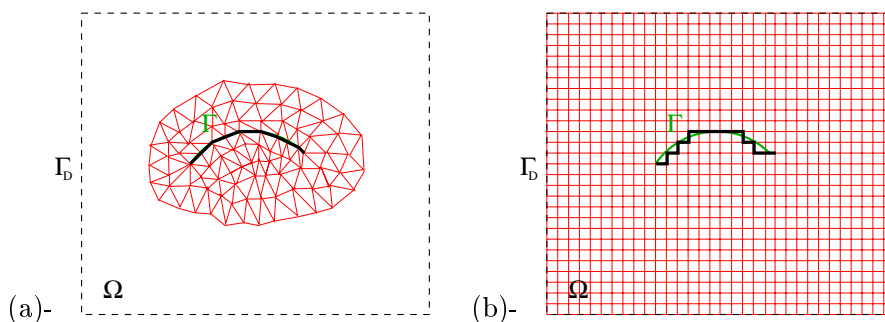


FIG. 6.1.2: Les maillages : (a) en éléments finis irréguliers, (b) différences finies.

- Les méthodes des éléments finis irréguliers présentent un coût de calcul élevé à cause de la nature non structurée des données (ceci reste vrai même pour des méthodes permettant la condensation de masse). De plus, la présence éventuelle de “petits” éléments en combinaison avec la condition de stabilité (CFL) peut conduire à un pas de temps  $\Delta t$  “petit”, ce qui entraîne un surcoût de calcul.
- Avec la méthode des différences finies ces inconvénients sont évités. Néanmoins, à cause de l'approximation en escalier de la géométrie, des diffractions parasites sont introduites dans la solution. Pour remédier à ce problème il faut alors utiliser un maillage assez fin, ce qui entraîne des calculs supplémentaires. Un exemple numérique qui met en évidence ces inconvénients dans le cas du problème de Maxwell à été présenté par F. Collino, F. Millot et P. Joly (cf.[41]).

**Les méthodes des équation intégrales en temps** Les méthodes des équations intégrales en temps, dites potentiels retardés, ont été introduites il y a quelques années pour le problème acoustique ([24]). Depuis, plusieurs travaux ont développé ces méthodes, en acoustique [46, 52, 80], en électromagnétisme [108, 92, 77, 98] et en élastodynamique [15, 12]. Ces méthodes permettent de se ramener à un problème posé sur la frontière de l'obstacle (la fissure en l'occurrence), tout en prenant en compte le comportement de la solution à l'infini par le

biais de la solution fondamentale. L'avantage principal de ces méthodes par rapport aux méthodes des différences finies et des éléments finis est qu'elles permettent de travailler avec un maillage surfacique (et donc de gagner une dimension en espace) car l'inconnue vit maintenant uniquement sur la surface de l'obstacle. De plus, on n'a pas besoin dans ce cas d'un traitement spécial pour prendre en compte le comportement à l'infini de la solution car les conditions à l'infini sont satisfaites de manière exacte. Ces méthodes sont donc très attractives lorsqu'on peut les utiliser, c'est à dire lorsqu'on dispose de la fonction de Green du milieu considéré. En ce qui concerne l'élasticité, ceci est bien sûr toujours possible en milieu isotrope homogène. On pourrait encore traiter certains milieux hétérogènes particuliers : par exemple des milieux stratifiés en s'inspirant des travaux développés en statique [6] ou des milieux homogènes à l'extérieur d'un domaine borné en utilisant un couplage avec une méthode d'éléments finis comme ça a été fait en acoustique [52, 80] et en électromagnétisme [98]. Par contre, il est impossible de traiter un milieu anisotrope hétérogène quelconque.

Du point de vue numérique ces méthodes sont assez difficiles à mettre en oeuvre. En particulier, elles nécessitent une évaluation précise d'intégrales doubles en espace et simples en temps, comportant des noyaux singuliers. De plus, comme elles comportent un terme de convolution en temps il faut stocker le passé de la solution, ce qui peut s'avérer assez coûteux du point de vue stockage. Notons que les travaux menés ces dernières années sur les potentiels retardés ont permis d'acquérir un savoir faire pour contrôler la stabilité de ces méthodes. Néanmoins il semble qu'on ne dispose pas d'une analyse rigoureuse de cette stabilité. Les études numériques ont montré que, selon les espaces d'approximation utilisés, on pouvait aboutir soit à un schéma instable, soit à un schéma stable sous une condition de type CFL (c'est à dire du type  $c\Delta t/\Delta x < \alpha$ ) soit même à un schéma stable sous une condition "inverse CFL" c'est à dire du type  $c\Delta t/\Delta x > \alpha$  (cf [108]). En pratique les approximations utilisées sont bien sûr celles qui conduisent à un schéma stable sous une condition CFL, condition qui est assez contraignante ( $\alpha \approx 0.3$  ou  $0.4$ ).

C'est pour éviter ces inconvénients que nous avons choisi d'utiliser la méthode des domaines fictifs. D'une certaine façon, cette méthode apparaît comme une solution de compromis, car elle présente une efficacité analogue à celle des différences finies tout en permettant une bonne approximation de la géométrie. Comme nous allons le voir la méthode des domaines fictifs a certains points communs avec la méthode des équations intégrales. Notamment, le prolongement de la solution respecte la continuité de  $\sigma \cdot n$  ( $n$  étant la normale) et  $\lambda$  correspond à l'inconnue des équations intégrales lorsqu'on représente la solution  $v$  sous forme d'un potentiel de double couche (cf. [16]).

### 6.1.3 Formulation du problème en domaines fictifs

Notre objectif est maintenant de remplacer le système (6.1.1) - (6.1.2) posé initialement dans le domaine  $\Omega$  par un système "similaire" mais posé dans un domaine d'une forme très simple, qui sera ici le domaine  $C = \Omega \cup \Gamma$ . Pour ce faire, on va prolonger le problème initial dans

$C$  et écrire les équations au sens des distributions, (on note toujours  $v$  et  $\sigma$  ce prolongement)

$$(6.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = \underline{v} \delta_\Gamma \quad \text{dans } C \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma = f + ([\sigma \cdot n]_\Gamma \equiv 0) \quad \text{dans } C \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. ,$$

où  $\underline{v}$  est le tenseur défini par

$$\underline{v}_{ij} = [v_i] n_j,$$

$[v_i]$  étant le saut de la  $i$ -ème composante de la vitesse et  $n_j$  étant la  $j$ -ème composante de la normale (cf. figure 6.1.3). Le saut de la composante normale de  $\sigma$  sur la fissure ( $[\sigma \cdot n]_\Gamma$ ) est nul à cause de la condition de surface libre. Pour des fonctions tests  $\tau$  et  $w$  assez régulières

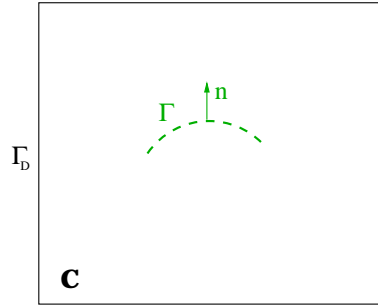


FIG. 6.1.3: La géométrie du problème avec la méthode des domaines fictifs.

on peut écrire le système (6.1.5) sous la forme suivante,

$$(6.1.6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_C A \sigma : \tau \, dx + \int_C \mathbf{div} \tau \cdot v \, dx &= \int_\Gamma [v] \cdot (\tau \cdot n) \, ds \\ \frac{d}{dt} \int_C v \cdot w \, dx - \int_C \mathbf{div} \sigma \cdot w \, dx &= \int_C f \cdot w \, dx \end{aligned}$$

Pour une méthode numérique basée sur cette formulation, un maillage de  $\Omega$  est toujours nécessaire car il faut connaître la valeur de la vitesse de part et d'autre de la fissure pour calculer le terme  $[v]$ . La méthode des domaines fictifs consiste à introduire une nouvelle inconnue  $\lambda$  surfacique correspondant à  $[v]$ . On considère dans ce cas les fonctions tests  $\tau \in \underline{X}^{sym}$  et  $w \in \underline{M}$  avec

$$(6.1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{X} = (H(\operatorname{div}; C))^2, \\ \underline{X}^{sym} = \{ \tau \in \underline{X}, \tau \text{ symétrique} \}, \\ \underline{M} = (L^2(C))^2. \end{array} \right.$$

Nous avons alors que  $\tau \cdot n|_\Gamma \in (H^{-1/2}(\Gamma))^2$ . Il est donc naturel de choisir  $\lambda$  dans l'espace dual de  $(H^{-1/2}(\Gamma))^2$ , c'est à dire l'espace  $(H^{1/2}(\Gamma))^2$ . Plus précisément comme le saut de la vitesse

est nul sur les bouts de la fissure, on cherche  $\lambda \in \underline{G} = (H_{00}^{1/2}(\Gamma))^2$ . Finalement, pour prendre en compte la condition aux limites sur la fissure on rajoute à (6.1.6) l'équation suivante,

$$\langle \sigma \cdot n, \mu \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \mu \in \underline{G}$$

La formulation variationnelle s'écrit alors,

$$(6.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \lambda) : [0, T] \mapsto \underline{X}^{sym} \times \underline{M} \times \underline{G} \text{ tels que:} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma, \tau) + b(\tau, v) - b_{\Gamma}(\tau, \lambda) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{X}^{sym}, \\ \frac{d}{dt} c(v, w) - b(\sigma, w) = (f, w), \quad \forall w \in \underline{M}, \\ b_{\Gamma}(\sigma, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in \underline{G}, \end{array} \right.$$

avec les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  et  $c(\cdot, \cdot)$  définies par (6.1.4) en remplaçant  $\Omega$  par  $C$  et où  $b_{\Gamma}(\cdot, \cdot)$  est définie par

$$(6.1.9) \quad b_{\Gamma}(\tau, \mu) = \langle \tau \cdot n, \mu \rangle_{\Gamma}, \quad \forall (\tau, \mu) \in \underline{X} \times \underline{G}$$

**Remarque 6.1.1** *L'énergie du problème (6.1.8) coïncide avec l'énergie du problème initial (6.1.3),  $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(a(\sigma, \sigma) + c(v, v))$  et nous avons l'identité d'énergie*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t (f(s), v(s)) ds.$$

Par la continuité de la forme bilinéaire  $b_{\Gamma}(\cdot, \cdot)$  sur  $\underline{X} \times \underline{G}$ , on peut définir les opérateurs  $\mathcal{B}_{\Gamma} : \underline{X} \rightarrow \underline{G}'$  et  $\mathcal{B}_{\Gamma}^t : \underline{G} \rightarrow \underline{X}'$  par

$$(6.1.10) \quad \langle \mathcal{B}_{\Gamma} \tau, \mu \rangle_{\Gamma} = \langle \tau, \mathcal{B}_{\Gamma}^t \mu \rangle_{\Gamma} = \langle \tau \cdot n, \mu \rangle_{\Gamma}, \quad \forall (\tau, \mu) \in \underline{X} \times \underline{G}$$

### 6.1.4 Équivalence entre les deux formulations

**Rappels - Condition inf-sup** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert et  $l(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue sur  $X \times Y$ . On peut définir alors les opérateurs  $L : X \rightarrow Y'$  et  $L^t : Y \rightarrow X'$  par

$$\langle Lx, y \rangle_{Y' \times Y} = \langle x, L^t y \rangle_{X \times X'} = l(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

et nous avons le résultat suivant (cf. [32]),

**Lemme 6.1.1** *Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

- $\exists k > 0, \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \frac{l(x, y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} \geq k$
- $L$  est surjectif.
- $\text{Ker } L^t = 0$  et  $\text{Im } L$  est fermé.

L'opérateur trace  $\mathcal{B}_\Gamma$  est linéaire continu et surjectif de  $\underline{X}$  dans  $\underline{G}' = (H^{-1/2}(\Gamma))^2$ , donc d'après le Lemme 6.1.1 on déduit la condition inf-sup suivante :

$$(6.1.11) \quad \exists k > 0, \inf_{\mu \in \underline{G}} \sup_{\tau \in \underline{X}} \frac{b_\Gamma(\tau, \mu)}{\|\tau\|_{\underline{X}} \|\mu\|_{\underline{G}}} \geq k$$

**Définition 6.1.1 (Solution forte du problème initial (6.1.3))**

On appelle solution forte du problème initial (6.1.3) tout couple  $(\sigma, v) \in (C^0(0, T; \underline{X}_0^{sym}) \cap C^1(0, T; \underline{H})) \times (C^0(0, T; V) \cap C^1(0, T, \underline{M}))$ , tel que (6.1.3) ait lieu.

**Définition 6.1.2 (Solution forte du problème des domaines fictifs (6.1.8))**

On appelle solution forte du problème (6.1.8) tout triplet  $(\sigma, v, \lambda) \in (C^0(0, T; (H(\text{div}; C))^2) \cap C^1(0, T; (L^2(C))^4)) \times (C^0(0, T; (H^1(\Omega))^2) \cap C^1(0, T, (L^2(C))^2)) \times (C^0(0, T; (H_0^{1/2}(\Gamma))^2))$ , tel que (6.1.8) ait lieu.

Nous avons alors le résultat d'équivalence suivant:

**Théorème 6.1.2** • Soit  $(\sigma, v)$  solution forte du problème initial (6.1.3) alors si  $\lambda = [v]_\Gamma$ , on a  $\lambda \in C^0(0, T; (H^{1/2}(\Gamma))^2)$  et  $(\sigma, v, \lambda)$  est solution forte du problème (6.1.8).

- Soit  $(\sigma, v, \lambda)$  solution forte de (6.1.8) alors  $(\sigma, v)$  satisfait le problème (6.1.3).

La preuve de ce théorème est immédiate, le point clé est que la relation  $\mathcal{B}_\Gamma^t[v] = \mathcal{B}_\Gamma^t \lambda$  implique  $\lambda = [v]_\Gamma$ , car nous avons par la condition inf-sup  $\text{Ker } \mathcal{B}_\Gamma^t = 0$ .

**6.1.5 Approximation en espace de la formulation en domaines fictifs**

Comme nous l'avons déjà remarqué l'avantage principale de la méthode des domaines fictifs est qu'elle nous permet de considérer deux maillages. En effet, pour la discrétisation on considère d'une part un maillage volumique  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $C$  et d'autre part un maillage surfacique  $\Gamma_H$  de la fissure  $\Gamma$  (cf. figure 6.1.4). De plus, comme le domaine  $C$  a une géométrie très simple, on peut considérer un maillage  $\mathcal{T}_h$  régulier constitué de carrés de côté  $h$ . Au contraire, afin d'obtenir une bonne approximation de la géométrie de la fissure, on choisit un maillage  $\Gamma_H$  ( $H = \inf_j H_j$ ) irrégulier. Pour l'approximation en espace du problème, on

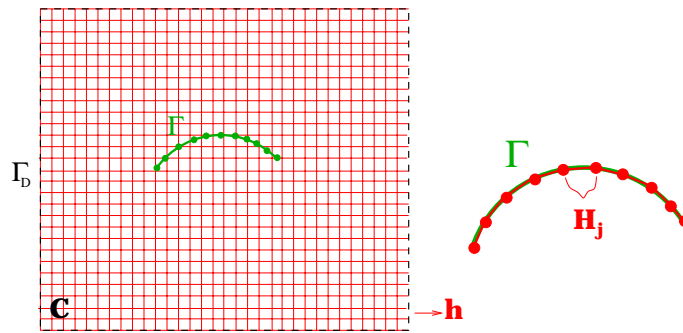


FIG. 6.1.4: Les deux maillages.

considère les espaces discrets  $\underline{X}_h^{sym} \subset \underline{X}^{sym}$ ,  $\underline{M}_h \subset \underline{M}$  et  $\underline{G}_H \subset \underline{G}$ . Le problème semi-discretisé en espace s'écrit alors,

$$(6.1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, v_h, \lambda_H) : [0, T] \mapsto \underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h \times \underline{G}_H \text{ tels que:} \\ \frac{d}{dt} a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, v_h) - b_\Gamma(\tau_h, \lambda_H) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h^{sym}, \\ \frac{d}{dt} c(v_h, w_h) - b(\sigma_h, w_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h, \\ b_\Gamma(\sigma_h, \mu_H) = 0, \quad \forall \mu_H \in \underline{G}_H \end{array} \right.$$

### Existence et unicité de la solution du problème semi-discret

Dans ce qui suit on suppose que la condition inf-sup discrète suivante est vérifiée. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

#### Définition 6.1.3 - Condition inf-sup discrète non-uniforme.

$$(6.1.13) \quad \exists k_h > 0, \quad \inf_{\mu_H \in \underline{G}_H} \sup_{\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}} \frac{b_\Gamma(\tau_h, \mu_H)}{\|\tau_h\|_{\underline{X}} \|\mu_H\|_{\underline{G}}} \geq k_h$$

Comme dans le cas du problème continu, on peut définir les opérateurs  $B_h^\Gamma : \underline{X}_h \rightarrow \underline{G}_H$  et  $(B_h^\Gamma)^t : \underline{G}_H \rightarrow \underline{X}_h$  par

$$\langle B_h^\Gamma \tau_h, \mu_H \rangle_\Gamma = \langle \tau_h, (B_h^\Gamma)^t \mu_H \rangle_\Gamma = \langle \tau_h \cdot n, \mu_H \rangle_\Gamma, \quad \forall (\tau_h, \mu_H) \in \underline{X}_h \times \underline{G}_H.$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret découlent d'une part de l'identité d'énergie (pour  $\sigma_h, v_h$ ), d'autre part de la condition inf-sup discrète non-uniforme (pour  $\lambda_H$ ). En effet, soit  $\widetilde{\sigma}_h = \sigma_h^1 - \sigma_h^2$ ,  $\widetilde{v}_h = v_h^1 - v_h^2$  et  $\widetilde{\lambda}_H = \lambda_H^1 - \lambda_H^2$  avec  $\sigma_h^1, v_h^1, \lambda_H^1$  et  $\sigma_h^2, v_h^2, \lambda_H^2$  deux solutions du problème (6.1.12) (avec les mêmes données initiales). Alors  $\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{v}_h, \widetilde{\lambda}_H$  sont solutions du problème

$$(6.1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{v}_h, \widetilde{\lambda}_H) : [0, T] \mapsto \underline{X}_h^{sym} \times \underline{M}_h \times \underline{G}_H \text{ tels que:} \\ \frac{d}{dt} a(\widetilde{\sigma}_h, \tau_h) + b(\tau_h, \widetilde{v}_h) - b_\Gamma(\tau_h, \widetilde{\lambda}_H) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h^{sym}, \\ \frac{d}{dt} c(\widetilde{v}_h, w_h) - b(\widetilde{\sigma}_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \underline{M}_h, \\ b_\Gamma(\widetilde{\sigma}_h, \mu_H) = 0, \quad \forall \mu_H \in \underline{G}_H. \end{array} \right.$$

Par l'identité de l'énergie on obtient alors,

$$\frac{d\mathcal{E}_h}{dt} = 0, \quad \text{avec } \mathcal{E}_h = \frac{1}{2}(a(\widetilde{\sigma}_h, \widetilde{\sigma}_h) + c(\widetilde{v}_h, \widetilde{v}_h))$$

d'où,

$$\mathcal{E}_h(t) = \mathcal{E}_h(0) = 0$$

et par la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  (resp. de  $c(\cdot, \cdot)$ ) dans  $(L^2(C))^4$  (resp.  $(L^2(C))^2$ ) on obtient  $\sigma_h^1 = \sigma_h^2$  et  $v_h^1 = v_h^2$ . La première équation du système (6.1.14) s'écrit alors

$$b_\Gamma(\tau_h, \widetilde{\lambda}_H) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{X}_h^{sym},$$

ce qui implique  $\lambda_H = 0$ , car nous avons par la condition inf-sup discrète (6.1.13) et le Lemme 6.1.1 que  $\text{Ker}(B_h^\Gamma)^t = 0$ .

### Formulation matricielle du problème semi-discret

Introduisons maintenant  $B_{N_1} = \{\tau_I\}_{I=1}^{N_1}$ ,  $B_{N_2} = \{\phi_I\}_{I=1}^{N_2}$  et  $B_{N_3} = \{\mu_I\}_{I=1}^{N_3}$  les fonctions de base de  $\underline{X}_h^{sym}$ ,  $\underline{M}_h$  et  $\underline{G}_H$  respectivement, avec  $N_1 = \dim \underline{X}_h^{sym}$ ,  $N_2 = \dim \underline{M}_h$  et  $N_3 = \dim \underline{G}_H$  et notons ensuite  $[\Sigma] = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_{N_1})$ ,  $[V] = (V_1, \dots, V_{N_2})$  et  $[\Lambda] = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{N_3})$ , les coordonnées des fonctions  $\sigma_h$ ,  $v_h$  et  $\lambda_H$  sur ces bases. Nous pouvons alors réécrire le problème (6.1.12) sous la forme matricielle suivante : trouver  $(\Sigma, V, \Lambda) \in L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_1})) \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_2})) \times L^2(0, T; (\mathbb{R}^{N_3}))$  tels que

$$(6.1.15) \quad \begin{cases} M_\sigma \frac{d\Sigma}{dt} + \mathbb{B}_h^T V - (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda = 0, \\ M_v \frac{dV}{dt} - \mathbb{B}_h \Sigma = F, \\ \mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma = 0, \end{cases}$$

avec

- (i)  $(M_\sigma)_{I,J} = (A\tau_I, \tau_J)_{(L^2(\Omega))^4}$ ,  $1 \leq I, J \leq N_1$ ,
- (ii)  $(M_v)_{I,J} = (\varrho\phi_I, \phi_J)_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $1 \leq I, J \leq N_2$ ,
- (iii)  $(\mathbb{B}_h)_{I,J} = (\phi_I, \text{div}\tau_J)_{(L^2(\Omega))^2}$ ,  $1 \leq I \leq N_2$ ,  $1 \leq J \leq N_1$ ,
- (iv)  $(\mathbb{B}_h^\Gamma)_{I,J} = (\mu_I, \tau_J \cdot n)_{(L^2(\Gamma))^2}$ ,  $1 \leq I \leq N_3$ ,  $1 \leq J \leq N_1$ ,
- (v)  $(F)_J = (f, \phi_J)_{(L^2(\Omega))^2}$   $1 \leq J \leq N_2$  ;

et où  $\mathbb{B}_h^T$  (resp.  $(\mathbb{B}_h^\Gamma)^T$ ) désigne la transposé de la matrice  $\mathbb{B}_h$  (resp.  $\mathbb{B}_h^\Gamma$ ).

### 6.1.6 Discrétisation en temps

Pour approcher le problème (6.1.15) en temps, on utilise une méthode des différences finies centrées, d'ordre 2. Soit  $\Delta t$  le pas de discrétisation en temps, pour obtenir un schéma centré, on calcule la vitesse et le multiplicateur de Lagrange aux instants entiers ( $t^n = n\Delta t$ ) et les contraintes aux instants semi-entiers  $t^{n+1/2} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ . Soit  $v_h^n = v_h(n\Delta t)$ ,  $\lambda_H^n = \lambda_H(n\Delta t)$  et  $\sigma_h^{n+1/2} = \sigma_h((n + \frac{1}{2})\Delta t)$ , on note  $V^n$ ,  $\Lambda^n$  et  $\Sigma^{n+1/2}$  les coordonnées de ces fonctions sur



les bases  $B_{N_1}$ ,  $B_{N_2}$  et  $B_{N_3}$  respectivement. Le problème discret s'écrit alors,

$$(6.1.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Sigma^{n+1/2}, V^{n+1}, \Lambda^n) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} \text{ tels que:} \\ M_\sigma \frac{\Sigma^{n+1/2} - \Sigma^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathbb{B}_h^T V^n - (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda^n = 0, \\ M_v \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} - \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2} = F^{n+1/2}, \\ \mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n+1/2} = 0, \end{array} \right.$$

On peut aussi réécrire ce problème sous la forme suivante:

$$(6.1.17) \quad \begin{pmatrix} M_\sigma & -(\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Delta t \\ -\mathbb{B}_h^\Gamma \Delta t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^{n+1/2} \\ \Lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\sigma \Sigma^{n-1/2} - \Delta t \mathbb{B}_h^T V^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(6.1.18) \quad M_v V^{n+1} = M_v V^n + \Delta t \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2} + \Delta t F^{n+1/2},$$

Le résultat d'unicité (et donc d'existence) de ce problème est alors immédiat. Pour le vecteur  $(\Sigma^{n+1/2}, \Lambda^n)$  il découle de la condition inf-sup discrète (6.1.13) et de la positivité de la matrice  $M_\sigma$ . Ensuite  $V^{n+1}$  est définie de façon unique par le système (6.1.18).

### Stabilité du schéma discret

Nous considérons ici le schéma discret, avec un second membre et des données initiales nulles.

$$(6.1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Sigma^{n+1/2}, V^{n+1}, \Lambda^n) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} \text{ tels que:} \\ M_\sigma \frac{\Sigma^{n+1/2} - \Sigma^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathbb{B}_h^T V^n - (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda^n = 0, \\ \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} - \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2} = 0, \\ \mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n+1/2} = 0, \end{array} \right.$$

Nous avons omis la matrice  $M_v$  car elle est égale à la matrice identité. On définit l'énergie discrète par,

$$(6.1.20) \quad \mathcal{E}_h^n = \frac{1}{2} \left( (V^{n+1}, V^n) + (M_\sigma \Sigma^{n+1/2}, \Sigma^{n+1/2}) \right),$$

et nous supposons que la condition de stabilité suivante est satisfaite,

$$(6.1.21) \quad \frac{\Delta t^2}{4} \|\mathbb{B}_h^T \mathbb{B}_h\| \leq \alpha < 1$$

avec

$$\|\mathbb{B}_h^T \mathbb{B}_h\| = \sup_{\Sigma \in \mathbb{R}^{N_1}} \frac{(\mathbb{B}_h \Sigma, \mathbb{B}_h \Sigma)}{(M_\sigma \Sigma, \Sigma)}.$$

Nous pouvons alors montrer le lemme suivant,

**Lemme 6.1.2** *Sous la condition (6.1.21), la quantité  $\mathcal{E}_h^n$  est positive et nous avons*

$$\mathcal{E}_h^{n+1} = \mathcal{E}_h^n, \quad \forall n$$

**Démonstration.**

Nous montrons d'abord que la quantité  $\mathcal{E}_h^n$  est positive. En effet, nous avons,

$$(6.1.22) \quad (V^{n+1}, V^n) = \left( \frac{V^{n+1} + V^n}{2}, \frac{V^{n+1} + V^n}{2} \right) - \left( \frac{V^{n+1} - V^n}{2}, \frac{V^{n+1} - V^n}{2} \right).$$

Par la deuxième équation du système discret (6.1.19) on obtient,

$$(V^{n+1} - V^n, V^{n+1} - V^n) = \Delta t^2 (\mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2}, \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2}),$$

d'où

$$(V^{n+1}, V^n) = \frac{\|V^{n+1} + V^n\|^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2}, \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2}).$$

Ce qui donne finalement,

$$2\mathcal{E}_h^n = \frac{\|V^{n+1} + V^n\|^2}{4} + (M_\sigma \Sigma^{n+1/2}, \Sigma^{n+1/2}) \left( 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{(\mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2}, \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2})}{(M_\sigma \Sigma^{n+1/2}, \Sigma^{n+1/2})} \right) \geq 0$$

Nous allons montrer maintenant que l'énergie discrète se conserve. Nous prenons le produit scalaire de la première équation du système (6.1.19) par  $(\Sigma^{n+1/2} + \Sigma^{n-1/2})/2$ , on obtient alors,

$$(6.1.23) \quad \frac{(M_\sigma \Sigma^{n+1/2}, \Sigma^{n+1/2}) - (M_\sigma \Sigma^{n-1/2}, \Sigma^{n-1/2})}{2\Delta t} + \left( \mathbb{B}_h^T V^n, \frac{\Sigma^{n+1/2} + \Sigma^{n-1/2}}{2} \right) = 0$$

En écrivant ensuite la deuxième équation du système (6.1.19) aux instants  $n+1$  et  $n$  et en faisant la demi somme, on a

$$\frac{V^{n+1} - V^{n-1}}{2\Delta t} - \mathbb{B}_h \frac{\Sigma^{n+1/2} + \Sigma^{n-1/2}}{2} = 0.$$

En prenant le produit scalaire de cette équation par  $V^n$ , on obtient

$$(6.1.24) \quad \frac{(V^{n+1}, V^n) - (V^n, V^{n-1})}{2\Delta t} - \left( \mathbb{B}_h \frac{\Sigma^{n+1/2} + \Sigma^{n-1/2}}{2}, V^n \right) = 0.$$

En sommant finalement (6.1.23) et (6.1.24), on a

$$\frac{\mathcal{E}_h^n - \mathcal{E}_h^{n-1}}{\Delta t} = 0$$

■

**Remarque 6.1.2** *La condition de stabilité (6.1.21) est indépendante de la méthode des domaines fictifs. Il s'agit en effet de la condition de stabilité du système discret,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Sigma^{n+1/2}, V^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \text{ tels que:} \\ M_\sigma \frac{\Sigma^{n+1/2} - \Sigma^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathbb{B}_h^T V^n = 0, \\ M_v \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} - \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2} = F^{n+1/2} \end{array} \right.$$

correspondant au problème sans fissure. Nous avons vu par ailleurs, dans le chapitre 5 que ce système est équivalent au système du second ordre

$$\frac{V^{n+1} - 2V^n + V^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{B}_h M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n = 0$$

pour lequel la condition de stabilité est

$$\frac{\Delta t^2 \|\mathbb{B}_h M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T\|}{4} \leq 1.$$

**Remarque 6.1.3** *L'énergie discrète ne faisant pas intervenir le multiplicateur de Lagrange, on ne peut pas déduire des estimations sur  $\Lambda^n$  de la conservation d'énergie. Cependant, les techniques d'énergie nous permettent d'obtenir des estimations sur  $\Sigma$ ,  $V$  et leurs dérivées discrètes qui sont indépendants de  $\Delta t$  et  $h$  (cf. [96]). Si de plus la condition inf-sup discrète uniforme est satisfaite (i.e la condition (6.1.13) en remplaçant  $k_h$  par une constante positive indépendante de  $h$ ) on peut alors obtenir des estimations sur  $\Lambda^n$ .*

**Remarque 6.1.4** *Du point de vue théorique la méthode est stable sous la condition inf-sup discrète (6.1.13), car c'est cette condition qui assure que la matrice  $\mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T$  est inversible. Si de plus, la condition inf-sup discrète uniforme est satisfaite, alors nous pouvons montrer la convergence de la méthode (cf. section 6.2.6). La démonstration de ces conditions (en particulier de la condition uniforme) n'est pas toujours évidente. Nous avons essayé de la montrer en supposant qu'une condition de compatibilité de la forme suivante*

$$H \geq ch,$$

*est satisfaite. Ceci parce que dans un certain nombre d'autres applications [74, 55], il a été montré de manière théorique qu'une condition de compatibilité entre les pas des deux maillages est nécessaire pour obtenir la condition inf-sup uniforme. Notons que dans ces études deux approches différentes ont été suivies. En ce qui concerne la valeur de la constante  $c$ , dans [55] une valeur explicite et probablement pessimiste a été déterminée, au contraire dans [74] la constante  $c$  est supposée assez grande mais elle n'est pas connue explicitement. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à généraliser ces approches dans notre cas. Cependant, du point de vue numérique nous avons observé que la matrice  $\mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T$  est inversible, si la condition de compatibilité suivante est satisfaite,*

$$H \geq \frac{3}{2}h.$$

### 6.1.7 Résolution pratique

En pratique nous avons considéré les espaces discrets  $\underline{X}_h^{sym}$  et  $\underline{M}_h$  correspondant à l'élément de plus bas degré de la famille d'éléments finis mixtes définie dans le chapitre 2. Dans le cas bidimensionnelle, pour définir l'espace  $\underline{G}_H \subset \underline{G}$ , on introduit un maillage  $\Gamma_H$  de  $\Gamma \in \mathbb{R}$  en segments  $S$  (illustré sur la figure 6.1.5). L'espace choisit pour approcher le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est l'espace d'éléments finis  $P_1$  continu,

$$(6.1.25) \quad \underline{G}_H = \{ \mu_H \in (C^0(\Gamma))^2 / \forall S \in \Gamma_h, \mu_H|_S \in (P^1(S))^2 \}.$$

De même dans le cas tridimensionnelle, on introduit un maillage  $\Gamma_H$  de  $\Gamma \in \mathbb{R}^2$  en triangles  $T$  (illustré sur la figure 6.1.5) et on approche l'inconnue  $\lambda$  à l'aide des d'éléments finis  $P_1$  continus,

$$\underline{G}_H = \{ \mu_H \in (C^0(\Gamma))^3 / \forall T \in \Gamma_h, \mu_H|_T \in (P^1(T))^3 \}.$$

Pour calculer la matrice de masse  $M_\sigma$  on utilise la formule de quadrature habituelle,

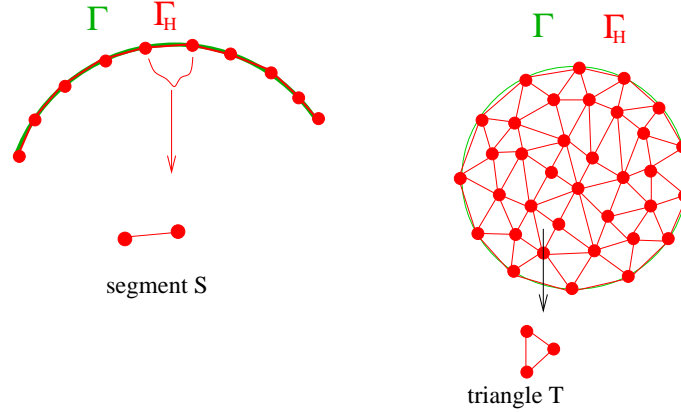


FIG. 6.1.5: Exemple de maillage pour  $\lambda$  en deux et trois dimensions.

$$\int_K f dx \approx \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^4 f(M_i).$$

Dans ce cas on obtient une matrice de masse  $M_\sigma$  diagonale par bloc (pour plus des détails voir section 2.1.2). Le système (6.1.17) devient alors explicite pour les inconnues  $\Sigma^{n+1/2}$  et  $V^{n+1}$  (la matrice  $M_v$  étant diagonale pour le produit scalaire habituel). Pour calculer l'inconnue  $\Lambda^n$  on réécrit la première équation du système (6.1.17) sous la forme suivante,

$$M_\sigma^{-1}(\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda^n = \frac{\Sigma^{n+1/2} - \Sigma^{n-1/2}}{\Delta t} + M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n$$

d'où en multipliant par  $\mathbb{B}_h^\Gamma$  on obtient

$$\mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda^n = \frac{\mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n+1/2} - \mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n$$

En utilisant ensuite la dernière équation du système (6.1.17) qui est vérifiée pour tout  $n$  on a,

$$\mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n+1/2} = \mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n-1/2} = 0.$$

Donc la résolution de (6.1.17) revient à calculer successivement,

- $\Lambda^n$  par une résolution du système linéaire:

$$\mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda^n = \frac{\mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n+1/2} - \mathbb{B}_h^\Gamma \Sigma^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n,$$

- $\Sigma^{n+1/2}$  par

$$\Sigma^{n+1/2} = \Sigma^{n-1/2} - \Delta t M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n + \Delta t M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T \Lambda^n$$

– et  $V^{n+1}$  par

$$V^{n+1} = V^n + \Delta t M_v^{-1} \mathbb{B}_h \Sigma^{n+1/2} + \Delta t M_v^{-1} F^{n+1/2}.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué dans les chapitres précédents, grâce à la condensation de masse on peut éliminer les inconnues associées au tenseur de contraintes. Le problème discret (6.1.16) s'écrit alors sous la forme équivalente suivante,

$$(6.1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (V^{n+1}, \Lambda^n) \in \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} \text{ tels que:} \\ M_v \frac{V^{n+1} - 2V^n + V^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{B}_h M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n - \mathbb{B}_h M_\sigma^{-1} B_\Gamma^T \Lambda^n = \frac{F^{n+1/2} - F^{n-1/2}}{\Delta t}, \\ B_\Gamma M_\sigma^{-1} B_\Gamma^T \Lambda^n = B_\Gamma M_\sigma^{-1} \mathbb{B}_h^T V^n, \end{array} \right.$$

Le système (6.1.26) est sans doute moins cher du point de vue stockage et c'est celui que nous avons implémenté dans le cas des milieux homogènes. Cependant, dans le cas des milieux hétérogènes nous avons préféré implémenter le système (6.1.17) car le calcul du terme  $\mathbb{B}_h M_\sigma^{-1} B_\Gamma^T \Lambda^n$  devient vite assez lourd.

Le surcoût de la méthode des domaines fictifs par rapport à une méthode des différences finies classique vient du calcul de l'inconnue  $\Lambda^n$  à chaque pas de temps, qui nécessite l'inversion de la matrice

$$\mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T$$

C'est une matrice symétrique et définie positive sous l'hypothèse de la condition inf-sup discrète (6.1.13).

Cependant on peut considérer que ce surcoût est marginal car,

- La dimension de cette matrice est égale à  $N_3$  (la dimension de l'inconnue  $\Lambda^n$ ) et donc sa taille est petite par rapport aux dimensions du problème volumique. De plus cette matrice a une structure bande, la taille de cette bande dépend du maillage mais elle est en général petite (en pratique inférieure à 10 en 2D).
- Cette matrice ne dépend pas du temps et donc en pratique on effectue au début du programme une factorisation et ensuite à chaque pas de temps on effectue la descente-remontée.

### Sur le calcul de la matrice $\mathbb{B}_h^\Gamma$

L'élément le plus délicat du point de vue de l'implémentation est sans doute le calcul de la matrice  $\mathbb{B}_h^\Gamma$ , toutes les autres matrices intervenant dans les calculs sont en effet les mêmes que pour le problème sans obstacle. On peut remarquer que cette matrice prend en compte le couplage entre les deux maillages, car ces éléments sont définis par

$$(\mathbb{B}_h^\Gamma)_{I,J} = (\mu_I, \tau_J \cdot n)_{(L^2(\Gamma))^2}, 1 \leq I \leq N_3, 1 \leq J \leq N_1$$

L'évaluation de ces termes nécessite de calculer dans le cas bidimensionnel l'intersection d'un segment avec un carré et dans le cas tridimensionnel l'intersection d'un triangle et d'un cube. C'est bien sûr le cas 3D qui est le plus délicat. Je tiens à remercier ici particulièrement S. Garcès qui a mis au point un algorithme performant permettant ce calcul. Les aspects

théoriques et numériques de cet algorithme sont décrits dans [54]. Nous allons simplement expliquer ici la structure creuse de cette matrice.

Considérons par exemple  $\Lambda_i$  le degré de liberté associé au point  $M_i$  sur le maillage  $\Gamma_H$  (cf. figure 6.1.6). La fonction de base  $\mu_I$  est la fonction chapeau qui vaut 1 sur le point  $M_i$  et 0 sur les points  $M_{i+1}$ ,  $M_{i-1}$ , le support de cette fonction est donc limité aux deux segments  $S_{i-1/2}$ ,  $S_{i+1/2}$ . Il est alors évident que les seuls termes  $(\mathbb{B}_h^\Gamma)_{I,J}$  qui sont non nuls correspondent aux indices  $J$  du maillage volumique qui sont associés aux éléments qui ont une intersection avec les segments  $S_{i-1/2}$ ,  $S_{i+1/2}$  (voir figure 6.1.6). Concernant maintenant

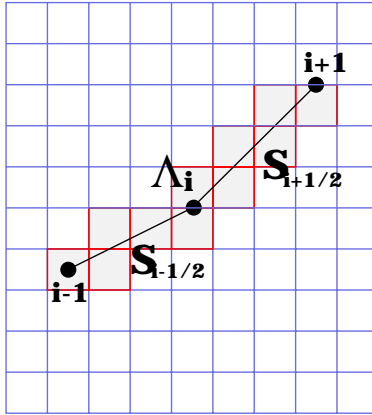


FIG. 6.1.6: *Le couplage entre les deux maillages*

la matrice  $\mathbb{B}_h^\Gamma M_\sigma^{-1} (\mathbb{B}_h^\Gamma)^T$  il est facile de voir qu'elle a une structure bande, la largeur de la bande dépend en général des deux maillages mais elle reste toujours petite. Pour l'exemple considéré dans la figure (6.1.7) le sommet  $M_i$  est couplé avec ses 4 voisins et comme  $\Lambda$  est un vecteur de dimension 2 la largeur de la bande est dans ce cas 10.

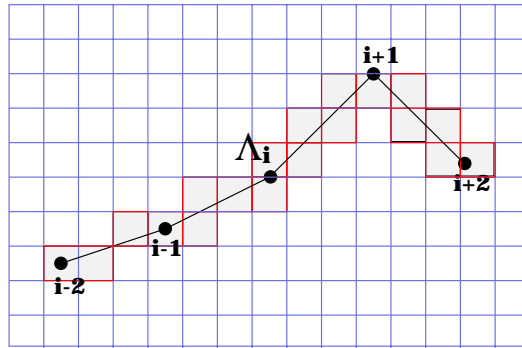


FIG. 6.1.7: *Le couplage entre les deux maillages*

## 6.2 Quelques aspects théoriques

La formulation en domaines fictifs du problème de l'élastodynamique entre dans le cadre des problèmes d'évolution que nous avons étudiés aux deux premiers chapitres. Pour obtenir donc des estimations d'erreur pour ce problème nous allons essayer d'appliquer la même démarche. Ceci consiste plus précisément à obtenir dans un premier temps des estimations d'erreur pour un problème elliptique (le problème stationnaire associé au problème d'évolution) et ensuite utiliser des techniques d'énergie pour montrer des résultats de convergence pour le problème d'évolution en utilisant les résultats obtenus pour le problème elliptique.

Comme précédemment avant de considérer le problème plus compliqué de l'élastodynamique nous allons étudier le problème simplifié de l'équation des ondes anisotropes. Ce problème est toujours un problème modèle pour lequel les difficultés liées à la symétrie du tenseur des contraintes ne sont plus présentes.

### 6.2.1 La formulation en domaines fictifs pour l'équation des ondes anisotropes

Nous adoptons dans ce qui suit les mêmes notations que dans le chapitre 1. Le problème initial est dans ce cas,

$$\left\{ \begin{array}{ll} A \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla v = 0, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} p = f, & \text{dans } \Omega \\ p \cdot n = 0, & \text{sur } \Gamma \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right.$$

La condition aux limites sur  $\Gamma$  correspond à la condition de surface libre pour l'élastodynamique et elle est équivalente à une condition de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  pour le problème de l'équation des ondes en déplacement. La géométrie du problème est représentée dans la figure 6.1.1. On peut suivre exactement la même démarche que dans le cas élastique pour obtenir la formulation en domaines fictifs de ce problème, on obtient alors

$$(6.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, v, \lambda) : [0, T] \mapsto X \times M \times G \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(p, q) + b(q, v) - b_{\Gamma}(q, \lambda) = 0, \quad \forall q \in X, \\ \frac{d}{dt} (v, w) - b(p, w) = (f, w), \quad \forall w \in M, \\ b_{\Gamma}(p, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in G, \end{array} \right.$$

avec

$$X = H(\operatorname{div}; C), \quad M = L^2(C), \quad G = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

et où

$$\begin{cases} a(p, q) = \int_{\Omega} A(x) p \cdot q \, dx, & \forall (p, q) \in X \times X, \\ b(q, w) = \int_{\Omega} w \operatorname{div} q \, dx, & \forall (q, w) \in X \times M, \\ b_{\Gamma}(q, \mu) = \langle q \cdot n, \mu \rangle_{\Gamma}, & \forall (q, \mu) \in X \times G, \\ (f, w) = \int_{\Omega} f w \, dx, & \forall w \in M. \end{cases}$$

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  (resp.  $b(\cdot, \cdot)$  et  $b_{\Gamma}(\cdot, \cdot)$ ) est continue sur  $H \times H$  ( $H = (L^2(\Omega))^2$ ) (resp. sur  $X \times M$  et  $X \times G$ ).

Comme pour le problème de l'élastodynamique on peut montrer que la formulation en domaines fictifs est équivalente au problème initial dans le sens du Théorème 6.1.2 (en remplaçant les différents espaces par leurs équivalents dans le cas scalaire). Ceci est dû en particulier à la condition inf-sup continue (6.1.11) qui est satisfaite pour les espaces correspondant au problème scalaire ( $X$  à la place de  $\underline{X}$  et  $G = H_{00}^{1/2}$  à la place de  $\underline{G} = (H_{00}^{1/2}(\Gamma))^2$ ).

## 6.2.2 Approximation en espace - Étude du problème elliptique.

Nous sommes maintenant intéressés par l'approximation en espace du problème (6.2.1) qui s'écrit sous la forme suivante

$$(6.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h, u_h, \lambda_H) \in X_h \times M_h \times G_H \text{ tels que} \\ \frac{d}{dt} a(p_h, q_h) + b(q_h, v_h) - b_{\Gamma}(q_h, \lambda_H) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(w_h, p_h) = -(f, w_h), \quad \forall w_h \in M_h, \\ b_{\Gamma}(\mu_H, p_h) = 0, \quad \forall \mu_H \in G_H. \end{array} \right.$$

où  $X_h$  et  $M_h$  sont les espaces correspondant à l'élément  $Q_1^{div} - Q_0$  défini dans le chapitre 1 et  $G_H$  est l'équivalent scalaire de l'espace  $\underline{G}_H$  défini par (6.1.25) pour le problème de l'élastodynamique, i.e

$$G_H = \{ \mu_H \in C^0(\Gamma) / \forall S \in \Gamma_h, \mu_H|_S \in P^1(S) \}$$

En suivant la même démarche que dans le chapitre 1, on définit le problème de projection elliptique suivant. Trouver  $(\hat{p}_h, \hat{v}_h, \hat{\lambda}_H) \equiv \Pi_h(p, v, \lambda) \in X_h \times M_h \times G_H$  tels que:

$$(6.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p - \hat{p}_h, q_h) + b(q_h, v - \hat{v}_h) - b_{\Gamma}(q_h, \lambda - \hat{\lambda}_H) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(p - \hat{p}_h, w_h) - b_{\Gamma}(p - \hat{p}_h, \mu_H) = 0, \quad \forall (w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H. \end{array} \right.$$

On voudrait alors appliquer la théorie abstraite développée dans le chapitre 1 pour obtenir des estimations d'erreur pour ce problème. Nous supposons que les conditions inf-sup suivantes



sont satisfaites.

**Définition 6.2.1 La condition inf-sup continue**

$$(6.2.4) \quad \exists k > 0, \quad \inf_{(w, \mu) \in M \times G} \sup_{q \in X} \frac{b(q, w) - b_\Gamma(q, \mu)}{\|q\|_X (\|w\|_M + \|\mu\|_G)} \geq k$$

**Définition 6.2.2 La condition inf-sup discrète uniforme**

$$(6.2.5) \quad \exists k > 0, \quad \inf_{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H} \sup_{q_h^s \in X_h^s} \frac{b(q_h^s, w_h) - b_\Gamma(q_h^s, \mu_H)}{\|q_h^s\|_X (\|w_h\|_M + \|\mu_H\|_G)} \geq k$$

Dans la condition (6.2.5) l'espace  $X_h^s$  correspond à la famille d'éléments finis de Raviart-Thomas. Nous allons montrer dans la section 6.2.5 que ces conditions sont effectivement vérifiées.

**Remarque 6.2.1** *Si on considère le problème discret (6.2.2) dans l'espace  $X_h^s$  (à la place de  $X_h$ ) on peut appliquer la théorie classique d'approximation de Babuska-Brezzi pour obtenir des estimations d'erreur. Pour ce faire, on définit d'abord l'opérateur de projection elliptique par le problème (6.2.3) (avec  $X_h^s$  à la place de  $X_h$ ), et on obtient les estimations d'erreur suivantes*

$$\|p - \hat{p}_h\|_X + \|v - \hat{v}_h\|_M + \|\lambda - \hat{\lambda}_H\|_G \leq C_1 \left( \inf_{q_h \in X_h^s} \|p - q_h\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M + \inf_{\mu_H \in G_H} \|\lambda - \mu_H\|_G \right)$$

*En suivant ensuite la même démarche que dans la section 1.3 on obtient des estimations d'erreur pour le problème d'évolution.*

Cependant, comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 1 on ne peut pas appliquer la théorie classique d'approximation de Babuska-Brezzi (défaut de coercivité) pour obtenir des estimations d'erreur pour le problème elliptique (6.2.3). De plus, la nouvelle théorie abstraite développée dans le chapitre 1 est également mise en défaut: l'hypothèse (H1) n'est pas satisfaite. Plus précisément on n'a pas  $X_h^r \subset V_h$  avec  $V_h$  défini par

$$(6.2.6) \quad V_h = \{q_h \in X_h / b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H) = 0, \forall (w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H\}.$$

En effet, on sait que tout  $q_h^r \in X_h^r$  satisfait

$$b(q_h^r, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h.$$

Par contre il ne satisfait pas

$$b(q_h^r, \mu_H) = 0, \quad \forall \mu_H \in G_H.$$

Néanmoins nous allons obtenir des estimations d'erreur pour le problème en temps en utilisant une nouvelle théorie abstraite présentée dans la section suivante.

### 6.2.3 Un résultat abstrait

La nouvelle théorie abstraite est basée sur trois espaces de Hilbert. Plus précisément, soit  $M$ ,  $X$ ,  $H$  trois espaces de Hilbert avec

$$(6.2.7) \quad X \subset H, \quad X \text{ dense dans } H \quad \text{et} \quad |\cdot|_H \leq \|\cdot\|_X.$$

Considérons maintenant  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  deux formes bilinéaires continues dans  $H \times H$  et  $X \times M$  respectivement. Nous pouvons alors définir les opérateurs  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{L}(H)$ ,  $B : X \rightarrow M'$  et  $B^t : M \rightarrow X'$  par

$$\begin{cases} a(p, q) = (\mathcal{A}p, q)_H, & \forall (p, q) \in H \times H \\ \langle Bp, w \rangle_{M' \times M} = \langle p, B^t w \rangle_{X \times X'} = b(p, w), & \forall (p, w) \in X \times M. \end{cases}$$

Les noyaux des  $B$  et  $B^t$  sont

$$\begin{cases} V \equiv \text{Ker } B = \{p \in X / b(p, w) = 0, \forall w \in M\}, \\ \text{Ker } B^t = \{w \in M / b(p, w) = 0, \forall p \in X\}. \end{cases}$$

Nous faisons ensuite les hypothèses suivantes:

$$(6.2.8) \quad \begin{cases} (i) \quad \exists c > 0 / \forall w \in M, \exists q \in X / b(q, w) \geq c \|w\|_{M/\text{Ker } B^t} \|q\|_X, \\ (ii) \quad \exists \alpha > 0 / \forall p \in X, \quad a(p, p) \geq \alpha |p|_H^2. \end{cases}$$

et on suppose que la norme  $|\cdot|_H$  est une norme sur  $\text{Ker } B$ . La norme dans l'espace quotient est définie par  $\|w\|_{M/\text{Ker } B^t} = \inf_{w_0 \in \text{Ker } B^t} \|w + w_0\|_M$ . Dans ce qui suit nous allons identifier l'espace  $M/\text{Ker } B^t$  avec le complément orthogonal de  $\text{Ker } B^t$

$$M/\text{Ker } B^t \equiv (\text{Ker } B^t)^\perp \equiv \{w \in M / (v, w)_M = 0, \forall v \in \text{Ker } B^t\}.$$

**Remarque 6.2.2** *La propriété (6.2.8)-(ii) implique la coercivité sur  $\text{Ker } B$  et donc pour le problème continu nos hypothèses coïncident avec les hypothèses de la théorie classique ([32]). Cependant pour le problème discret ceci n'est pas le cas si on n'a pas  $\text{Ker } B_h \subset \text{Ker } B$ .*

Nous sommes intéressés par l'approximation du problème modèle

$$(6.2.9) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (p, u) \in X \times M \text{ tels que} \\ a(p, q) + b(q, u) = 0, & \forall q \in X, \\ b(p, w) = \langle f, w \rangle, & \forall w \in M, \end{cases}$$

avec  $f \in M'$ , l'espace dual de  $M$ . Sous les hypothèses précédentes, nous avons le résultat classique suivant (cf. [32])

**Théorème 6.2.1** *Pour tout  $f \in \text{Im } B$ , le problème (1.2.11) admet une solution unique  $(p, u)$  dans  $X \times (M/\text{Ker } B^t)$ , qui satisfait*

$$\|u\|_{M/\text{Ker } B^t} + \|p\|_X \leq C \|f\|_{M'}.$$

Soient  $X_h \subset X$  et  $M_h \subset M$  deux espaces d'approximation de dimension finie. Nous considérons alors le problème d'approximation

$$(6.2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_h, u_h) \in X_h \times M_h \text{ tels que} \\ a(p_h, q_h) + b(q_h, u_h) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(p_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in M_h, \end{array} \right.$$

Nous posons

$$(6.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_h(f) = \{q_h \in X_h / b(q_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle, \forall w_h \in M_h\} = B_h^{-1}(f), \\ V_h = V_h(0) = \text{Ker } B_h, \quad (B_h \text{ défini par (6.2.12)}) \\ Z_h(g) = \{v_h \in M_h / b(q_h, v_h) = \langle g, q_h \rangle, \forall q_h \in X_h\} = (B_h^t)^{-1}(g), \end{array} \right.$$

et nous faisons les hypothèses suivantes

$$(H0) \quad \forall f \in \text{Im } B, \quad V_h(f) \neq \emptyset \text{ et } \forall g \in \text{Im } B^t, \quad Z_h(g) \neq \emptyset$$

(H1) Condition inf-sup discrète:

il existe une constante  $k > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall w_h \in M_h, \quad \exists q_h \in X_h \quad / \quad b(q_h, w_h) \geq k \|w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \|q_h\|_X.$$

(H2) Condition de coercivité discrète:

il existe une constante  $\alpha > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall p_h \in X_h, \quad a(p_h, p_h) \geq \alpha |p_h|_H^2.$$

(H3) Propriétés d'approximation sur  $X_h$  et  $M_h$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h \in X_h} \|p - q_h\|_X = 0, \quad \forall p \in X, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M = 0, \quad \forall u \in M. \end{array} \right.$$

**Remarque 6.2.3** Par l'hypothèse (H3) et la densité de  $X$  dans  $H$ , nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h \in X_h} |p - q_h|_H = 0, \quad \forall p \in H.$$

**Remarque 6.2.4** La condition inf-sup (H1) implique que nous avons

$$\forall w_h \in M_h, \quad \exists q_h \in X_h \quad / \quad b(q_h, w_h) \geq k \|w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \|q_h\|_X.$$

Comme dans le cas du problème continu, nous introduisons les opérateurs  $B_h$  et  $B_h^t$  définis par

$$(6.2.12) \quad (B_h p_h, w_h)_{M' \times M} = (p_h, B_h^t w_h)_{X \times X'} = b(p_h, w_h), \quad \forall p_h \in X_h, \quad \forall w_h \in M_h,$$

et leurs noyaux respectifs  $\text{Ker} B_h = V_h$  (défini par (6.2.11)) et  $\text{Ker} B_h^t$

$$\text{Ker} B_h^t = \{w_h \in M_h / b(p_h, w_h) = 0, \quad \forall p_h \in X_h\}.$$

**Théorème 6.2.2** *Sous les hypothèses (H0) - (H3), le problème (6.2.10) admet une solution unique telle que*

$$(p_h, u_h) \in X_h \times (M_h / \text{Ker} B_h^t),$$

et nous avons les résultats de convergence suivants

$$\bullet \quad (p_h, u_h) \rightarrow (p, u) \quad \text{dans } H \times M,$$

Plus précisément, nous avons les estimations d'erreur:

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_H + \|u - u_h\|_{M/\text{Ker} B_h^t} &\leq C \left( \inf_{q_h \in X_h} \|p - q_h\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M \right) \\ \|p - p_h\|_{X/\text{Ker} B_h} &\leq C' \inf_{q_h \in X_h} \|p - q_h\|_X \end{aligned}$$

**Démonstration.**

**(i) Existence et unicité :**

L'existence et l'unicité de la solution  $(p_h, u_h) \in X_h \times (M_h / \text{Ker} B_h^t)$  du problème discret découlent de l'hypothèse (H0) et de la coercivité non-uniforme de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur le noyau  $\text{Ker} B_h$ , i.e.,

$$(6.2.13) \quad \exists \alpha_h > 0, \quad \forall p_h \in V_h \quad a(p_h, p_h) \geq \alpha_h \|p_h\|_X^2.$$

Cette dernière propriété (6.2.13) est une conséquence de l'hypothèse (H2) étant donné qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Il reste maintenant à prouver les estimations d'erreur. Pour obtenir ensuite le résultat de convergence nous utilisons l'hypothèse (H3) et la remarque 6.2.3.

**(ii) Un résultat intermédiaire:**

Pour montrer les estimations d'erreur nous suivons ici une démarche différente de celle suivie dans le chapitres 1 et 2. On définit d'abord  $(\hat{p}_h, \hat{u}_h) \in X_h \times M_h$  tels que,

$$(6.2.14) \quad \begin{aligned} b(\hat{p}_h - p, w_h) &= 0, \quad \forall w_h \in M_h \\ b(q_h, \hat{u}_h - u) &= 0, \quad \forall q_h \in X_h \end{aligned}$$

L'existence de  $(\hat{p}_h, \hat{u}_h) \in X_h \times M_h$  découle de l'hypothèse (H0), pour les déterminer ensuite de façon unique on choisit ceux qui réalisent,

$$(6.2.15) \quad \begin{aligned} \|p - \hat{p}_h\|_X &= \inf_{q_h \in V_h(B_h p)} \|p - q_h\|_X \\ \|u - \hat{u}_h\|_M &= \inf_{w_h \in Z_h(B_h^t u)} \|u - w_h\|_M \end{aligned}$$

Il est facile de voir que (6.2.15) implique,

$$(6.2.16) \quad \begin{aligned} \|p - \widehat{p}_h\|_{X/\text{Ker } B_h} &= \|p - \widehat{p}_h\|_X \\ \|u - \widehat{u}_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} &= \|u - \widehat{u}_h\|_M \end{aligned}$$

De plus nous avons,

$$(6.2.17) \quad \begin{aligned} (i) \quad \|p - \widehat{p}_h\|_X &\leq \left(1 + \frac{\|b\|}{k}\right) \inf_{q_h \in X_h} \|p - q_h\|_X \\ (ii) \quad \|u - \widehat{u}_h\|_M &\leq \left(1 + \frac{\|b\|}{k}\right) \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M \end{aligned}$$

Pour prouver (6.2.16)-(i), on écrit,

$$(6.2.18) \quad \begin{aligned} \|p - \widehat{p}_h\|_X &= \|p - \widehat{p}_h\|_{X/\text{Ker } B_h} \\ &= \inf_{p_h^0 \in \text{Ker } B_h} \|p - \widehat{p}_h + p_h^0\|_X \\ &= \inf_{p_h^0 \in \text{Ker } B_h} \|p - \widehat{p}_h - q_h + q_h + p_h^0\|_X, \quad \forall q_h \in X_h \\ &\leq \inf_{p_h^0 \in \text{Ker } B_h} \|\widehat{p}_h - q_h + p_h^0\|_X + \|p - q_h\|_X, \quad \forall q_h \in X_h \\ &\leq \|\widehat{p}_h - q_h\|_{X/\text{Ker } B_h} + \|p - q_h\|_X, \quad \forall q_h \in X_h \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la condition inf-sup 6.2.3) on a,

$$(6.2.19) \quad \|\widehat{p}_h - q_h\|_{X/\text{Ker } B_h} \leq \frac{1}{k} \sup_{w_h \in M_h} \frac{b(\widehat{p}_h - q_h, w_h)}{\|w_h\|_M},$$

or, par la première équation du système (6.2.14) on a,

$$b(\widehat{p}_h - q_h, w_h) = b(p - q_h, w_h), \quad \forall (q_h, w_h) \in X_h \times M_h$$

en remplaçant ceci dans (6.2.19) on obtient,

$$\|\widehat{p}_h - q_h\|_{X/\text{Ker } B_h} \leq \frac{\|b\|}{k} \|p - q_h\|_X, \quad \forall q_h \in X_h$$

En combinant finalement ce dernier résultat et (6.2.18) on déduit (6.2.16)-(i).

Pour prouver (6.2.16)-(ii), on suit exactement la même technique,

$$(6.2.20) \quad \begin{aligned} \|u - \widehat{u}_h\|_M &= \|u - \widehat{u}_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \\ &= \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h^t} \|u - \widehat{u}_h + u_h^0\|_M \\ &= \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h^t} \|u - \widehat{u}_h - w_h + w_h + u_h^0\|_M, \quad \forall w_h \in M_h \\ &\leq \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h^t} \|\widehat{u}_h - w_h + u_h^0\|_M + \|u - w_h\|_M, \quad \forall w_h \in M_h \\ &\leq \|\widehat{u}_h - w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} + \|u - w_h\|_M, \quad \forall w_h \in M_h \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la condition inf-sup, on obtient,

$$(6.2.21) \quad \|\widehat{u}_h - w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq \frac{1}{k} \sup_{q_h \in X_h} \frac{b(q_h, \widehat{u}_h - w_h)}{\|q_h\|_X},$$

or, la deuxième équation du système (6.2.14) conduit a,

$$b(q_h, \widehat{u}_h - w_h) = b(q_h, u - w_h), \quad \forall (q_h, w_h) \in X_h \times M_h$$

et en remplaçant ceci dans (6.2.21) on obtient,

$$\|\widehat{u}_h - w_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq \frac{\|b\|}{k} \|u - w_h\|_M, \quad \forall w_h \in M_h$$

En combinant finalement cette dernière relation et (6.2.20) on déduit (6.2.16)-(ii).

**(iii) Estimations sur  $\|p - p_h\|_H$**

En prenant la différence entre le problème continu (6.2.9) et le problème discret (6.2.10), on obtient

$$\begin{aligned} a(p - p_h, q_h) + b(q_h, u - u_h) &= 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(p - p_h, w_h) &= 0, \quad \forall w_h \in M_h, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} a(p - p_h + \widehat{p}_h - \widehat{p}_h, q_h) + b(q_h, u - u_h + \widehat{u}_h - \widehat{u}_h) &= 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(p - p_h + \widehat{p}_h - \widehat{p}_h, w_h) &= 0, \quad \forall w_h \in M_h. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (6.2.14) on a,

$$(6.2.22) \quad \begin{aligned} a(\widehat{p}_h - p_h, q_h) + b(q_h, \widehat{u}_h - u_h) &= a(\widehat{p}_h - p, q_h), \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(\widehat{p}_h - p_h, w_h) &= 0, \quad \forall w_h \in M_h. \end{aligned}$$

on choisit maintenant  $q_h = \widehat{p}_h - p_h$ ,  $w_h = \widehat{u}_h - u_h$  et on prend la différence entre les deux équations de ce système, pour obtenir,

$$a(\widehat{p}_h - p_h, \widehat{p}_h - p_h) = a(\widehat{p}_h - p, \widehat{p}_h - p_h)$$

d'où par l'hypothèse (H2) et la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur  $H$ , nous avons

$$|\widehat{p}_h - p_h|_H \leq \frac{\|a\|}{\alpha} |\widehat{p}_h - p|_H.$$

Le résultat s'obtient ensuite en utilisant l'inégalité triangulaire. Plus précisément, on a

$$|p - p_h|_H \leq |p - \widehat{p}_h|_H + |\widehat{p}_h - p_h|_H \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) |p - \widehat{p}_h|_H$$

ce qui implique (par hypothèse  $|\cdot|_H \leq \|\cdot\|_X$ ),

$$|p - p_h|_H \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) |p - \widehat{p}_h|_X$$

d'où en utilisant (6.2.17)-(i),

$$(6.2.23) \quad |p - p_h|_H \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{k}\right) \inf_{q_h \in X_h} |p - q_h|_X$$

**(iv) Estimations sur  $\|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t}$**   
Par la première équation de (6.2.22) on a,

$$(6.2.24) \quad b(q_h, \hat{u}_h - u_h) = a(p_h - p, q_h), \quad \forall q_h \in X_h.$$

En utilisant maintenant la condition inf-sup, on obtient,

$$(6.2.25) \quad \|\hat{u}_h - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq \frac{1}{k} \sup_{q_h \in X_h} \frac{b(q_h, \hat{u}_h - u_h)}{\|q_h\|_X},$$

En combinant (6.2.24) et (6.2.25) nous avons,

$$(6.2.26) \quad \|\hat{u}_h - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq \frac{1}{k} \sup_{q_h \in X_h} \frac{a(p_h - p, q_h)}{\|q_h\|_X} \leq \frac{\|a\|}{k} |p_h - p|_H$$

car  $|\cdot|_H \leq \|\cdot\|_X$ . On écrit ensuite,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} &= \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h^t} \|u - u_h + u_h^0\|_M \\ &= \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h^t} \|u - u_h - \hat{u}_h + \hat{u}_h + u_h^0\|_M \\ &\leq \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h^t} \|\hat{u}_h - u_h + u_h^0\|_M + \|u - \hat{u}_h\|_M \\ &\leq \|\hat{u}_h - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} + \|u - \hat{u}_h\|_M \end{aligned}$$

D'où en utilisant (6.2.26) on obtient,

$$\|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} \leq \frac{\|a\|}{k} |p_h - p|_H + \|u - \hat{u}_h\|_M$$

Ce qui conduit à (par (6.2.17)-(ii) et (6.2.23))

$$(6.2.27) \quad \begin{aligned} \|u - u_h\|_{M/\text{Ker } B_h^t} &\leq \frac{\|a\|}{k} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{k}\right) \inf_{q_h \in X_h} |p - q_h|_X \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|b\|}{k}\right) \inf_{w_h \in M_h} \|u - w_h\|_M \end{aligned}$$

**(v) Estimations sur  $\|p - p_h\|_{X/\text{Ker } B_h}$**   
Par la deuxième équation de (6.2.22) on a,

$$b(\hat{p}_h - p_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in M_h,$$

En utilisant maintenant la condition inf-sup, on obtient,

$$(6.2.28) \quad \|\hat{p}_h - p_h\|_{X/\text{Ker } B_h} \leq \frac{1}{k} \sup_{w_h \in M_h} \frac{b(\hat{p}_h - p_h, w_h)}{\|w_h\|_M} \leq 0$$

On écrit ensuite,

$$\begin{aligned}
 \|p - p_h\|_{X/\text{Ker } B_h} &= \inf_{p_h^0 \in \text{Ker } B_h} \|p - p_h + p_h^0\|_X \\
 &= \inf_{u_h^0 \in \text{Ker } B_h} \|p - p_h - \widehat{p}_h + \widehat{p}_h + p_h^0\|_X \\
 &\leq \inf_{p_h^0 \in \text{Ker } B_h} \|\widehat{p}_h - p_h + p_h^0\|_X + \|p - \widehat{p}_h\|_X \\
 &\leq \|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/\text{Ker } B_h} + \|p - \widehat{p}_h\|_X
 \end{aligned}$$

D'où en utilisant (6.2.28) on obtient,

$$\|p - p_h\|_{X/\text{Ker } B_h} \leq \|p - \widehat{p}_h\|_X$$

Ce qui conduit à (par (6.2.17)-(i) )

$$\|p - p_h\|_{X/\text{Ker } B_h} \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{k}\right) \inf_{q_h \in X_h} |p - q_h|_X$$

■

**Remarque 6.2.5** *Les hypothèses (H0)-(H3) de cette nouvelle théorie abstraite sont plus faibles que les hypothèses de la théorie développée dans le chapitre 1, car ici d'une part on n'a pas besoin de la coercivité uniforme sur  $\text{Ker } B_h$ , d'autre part on n'a pas d'hypothèse sur la décomposition orthogonale de l'espace  $X_h$ . Du point de vue des estimations d'erreur on peut remarquer que cette théorie nous donne les mêmes résultats en ce qui concerne la convergence  $u_h$  vers  $u$  mais une estimation plus faible sur  $p - p_h$  car on obtient les normes  $H$  et  $X/\text{Ker } B_h$ , qui sont toutes les deux plus petites que la norme dans l'espace  $X$ .*

*Par rapport à la théorie abstraite développée dans le chapitre 2 les hypothèses de la nouvelle théorie sont également plus faibles à l'exception de la condition inf-sup. Nous avons donc essayé d'affaiblir également l'hypothèse (H1) dans la nouvelle théorie. Cependant nous n'avons pas réussi à obtenir des résultats de convergence dans ce cas. Ceci explique en particulier pourquoi dans le chapitre 2 nous n'avons pas utilisé cette théorie pour étudier le problème élastique.*

#### 6.2.4 Application à la formulation en domaines fictifs pour l'équation des ondes anisotropes

Nous revenons maintenant au problème (6.2.1) et son approximation (6.2.2). Dans ce cas nous avons,

$$H = (L^2(C))^2 ; X = H(\text{div} ; C) ; M (= M \times G) = L^2(C) \times H_0^{1/2}(\Gamma).$$

La forme  $b(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(X, M \times G)$  correspond a,

$$b(q, w) - b_\Gamma(q, \mu), \quad \forall (q, w, \mu) \in X \times M \times G,$$

le noyau  $\text{Ker } B_h$  est dans ce cas l'espace  $V_h$  défini par (6.2.6) et  $\text{Ker } B_h^t$  correspond à

$$\{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H / b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H) = 0, \forall q_h \in X_h\}.$$



Nous rappelons que nous avons les résultats suivants. Étant donné que l'espace  $X_h^s$  est un sous espace de  $X_h$ , la condition inf-sup discrète (6.2.5) implique la condition suivante,

$$(6.2.29) \quad \exists k > 0, \quad \inf_{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H} \sup_{q_h \in X_h} \frac{b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H)}{\|\tau_h\|_X (\|w_h\|_M + \|\mu_H\|_G)} \geq k$$

qui est aussi équivalente à (cf. [32])

$$(6.2.30) \quad \forall q_h \in X_h, \quad \exists k > 0, \text{ telle que } \|q_h\|_{X/V_h} \leq \frac{1}{k} \sup_{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H} \frac{\tilde{b}(q_h; w_h, \mu_H)}{\|w_h\|_M + \|\mu_H\|_G}$$

Finalement d'après le Lemme 6.1.1, la condition 6.2.5 implique que pour notre application le noyau  $\text{Ker } B_h^t$  est réduit à zéro:

$$(6.2.31) \quad \begin{aligned} & \{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H / b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H) = 0, \forall q_h \in X_h^s\} \\ & \Rightarrow w_h \equiv 0 \text{ et } \mu_H \equiv 0 \end{aligned}$$

Nous posons,

$$\begin{aligned} V_h(f, f_\Gamma) &= \{q_h \in X_h / b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H) = \langle f, w_h \rangle + \langle f_\Gamma, \mu_H \rangle_\Gamma, \forall (w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H\} \\ Z_h(g) &= \{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H / b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H) = \langle g, q_h \rangle, \forall q_h \in X_h\} \end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant  $(\hat{p}_h, \hat{v}_h, \hat{\lambda}_H) \in X_h \times M_h \times G_H$  tels que:

$$(6.2.32) \quad \begin{cases} b(q_h, v - \hat{v}_h) - b_\Gamma(q_h, \lambda - \hat{\lambda}_H) = 0, & \forall q_h \in X_h, \\ b(p - \hat{p}_h, w_h) - b_\Gamma(p - \hat{p}_h, \mu_H) = 0, & \forall (w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H. \end{cases}$$

et

$$(6.2.33) \quad \begin{aligned} \|p - \hat{p}_h\|_X &= \inf_{q_h \in V_h(B_h p, -B_h^\Gamma p)} \|p - q_h\|_X \\ \|(v - \hat{v}_h, \lambda - \hat{\lambda}_H)\|_{M \times G} &= \inf_{(w_h, \mu_H) \in Z_h(B_h^t v - (B_h^\Gamma)^t \lambda)} \|(v - w_h, \lambda - \mu_H)\|_{M \times G} \end{aligned}$$

avec,

$$\|(w, \mu)\|_{M \times G} = \|w\|_M + \|\mu\|_G, \quad \forall (w, \mu) \in M \times G.$$

Nous pouvons alors prouver le lemme suivant.

**Lemme 6.2.1** *Le triplet  $(\hat{p}_h, \hat{v}_h, \hat{\lambda}_H)$  ainsi définie est unique dans  $X_h \times M_h \times G_H$ . De plus, nous avons les estimations suivantes,*

$$(6.2.34) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \|p - \hat{p}_h\|_X \leq C \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X \\ (ii) \quad & \|v - \hat{v}_h\|_M + \|\lambda - \hat{\lambda}_H\|_G \leq C' \left( \inf_{w_h \in M_h} \|v - w_h\|_M + \inf_{\mu_H \in G_H} \|\lambda - \mu_H\|_G \right) \end{aligned}$$

De même, si on a  $(p, v, \lambda) \in C^k(0, T; X) \times C^k(0, T; M) \times C^k(0, T; G)$ ,  $k \geq 1$ , alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$(6.2.35) \quad \begin{aligned} \|\partial_t^k(p - \widehat{p}_h)\|_X + \|\partial_t^k(v - \widehat{v}_h)\|_M + \|\partial_t^k(\lambda - \widehat{\lambda}_H)\|_G \leq C & \left( \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|\partial_t^k p - q_h^s\|_X \right. \\ & \left. + \inf_{w_h \in M_h} \|\partial_t^k v - w_h\|_M + \inf_{\mu_H \in G_H} \|\partial_t^k \lambda - \mu_H\|_G \right) \end{aligned}$$

Ce lemme est une application directe de la théorie abstraite développé dans la section précédente. Plus précisément on utilise ici seulement les résultat intermédiaire (ii).

### 6.2.4.1 Estimations d'erreur pour le problème d'évolution

Nous allons étudier ici la convergence de la solution du problème discret (6.2.2) vers la solution du problème continu (6.2.1). Pour ce faire nous suivons la même démarche que dans la section 1.3.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

**Théorème 6.2.3** *Soit  $(p, v, \lambda)$  la solution du problème continu (6.2.1) et  $(p_h, v_h, \lambda_H)$  celle du problème approché (6.2.2) avec les conditions initiales*

$$(6.2.36) \quad (p_{0,h}, v_{0,h}) = (\widehat{p}_0, \widehat{v}_0).$$

On pose

$$\mathcal{E}_h(p, v, \lambda)(t) = \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p(t) - q_h^s\|_X + \inf_{w_h \in M_h} \|u(t) - w_h\|_M + \inf_{\mu_H \in G_H} \|\lambda(t) - \mu_H\|_G$$

- Si  $(p, v, \lambda) \in C^1(0, T; X) \times C^1(0, T; M) \times C^1(0, T, G)$ , alors,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\|p - p_h\|_H(t) \rightarrow 0 ; \quad \|v - v_h\|_M(t) \rightarrow 0.$$

Plus précisément,

$$\begin{cases} \|p - p_h\|_H(t) & \leq \mathcal{E}_h(p, v, \lambda)(t) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda)(s) ds \\ \|v - v_h\|_M(t) & \leq \mathcal{E}_h(p, v, \lambda)(t) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda)(s) ds \end{cases}$$

- Si, en plus, on a  $(p, v, \lambda) \in C^2(0, T; X) \times C^2(0, T; M) \times C^2(0, T, G)$ , alors,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\|\lambda - \lambda_H\|_G(t) \rightarrow 0. ; \quad \|p - p_h\|_{X/V_h}(t) \rightarrow 0.$$

Plus précisément,

$$\begin{cases} \|\lambda - \lambda_H\|_G(t) & \leq \mathcal{E}_h(p, v, \lambda)(t) + \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda)(t) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \lambda)(s) ds \\ \|p - p_h\|_{X/V_h}(t) & \leq \mathcal{E}_h(p, v, \lambda)(t) + \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda)(t) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \lambda)(s) ds \end{cases}$$

Afin de prouver ce théorème nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 6.2.2** Soient  $(p, v, \lambda)$  et  $(p_h, v_h, \lambda_H)$  les solutions des problèmes (6.2.1) et (6.2.2) respectivement avec les conditions initiales (6.2.36). Soit en plus  $(\widehat{p}_h, \widehat{v}_h, \widehat{\lambda}_H)$  définis par (6.2.32)-(6.2.33).

(i) Si  $(p, v, \lambda) \in C^1(0, T; X) \times C^1(0, T; M) \times C^1(0, T; G)$ , il existe une constante  $C_1$ , indépendante de  $h$  telle que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$(6.2.37) \quad \|\widehat{p}_h - p_h\|_H(t) + \|\widehat{v}_h - v_h\|_M(t) \leq C_1 \int_0^t (|\partial_t(p - \widehat{p}_h)|_H(s) + \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M(s)) ds$$

(ii) De plus, si  $(p, v, \lambda) \in C^2(0, T; X) \times C^2(0, T; M) \times C^2(0, T; G)$  et  $(p_h, v_h, \lambda_H) \in C^1(0, T; X_h) \times C^1(0, T; M_h) \times C^1(0, T; G_H)$ , il existe deux constantes  $C_2, C_3$  indépendantes de  $h$  telles que,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$(6.2.38) \quad \|\widehat{\lambda}_H - \lambda_H\|_G(t) \leq C_2 \left\{ |\partial_t(p - \widehat{p}_h)|_H(t) + \int_0^t (|\partial_t^2(p - \widehat{p}_h)|_H(s) + \|\partial_t^2(v - \widehat{v}_h)\|_M(s)) ds \right\},$$

$$(6.2.39) \quad \|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/V_h}(t) \leq C_3 \left\{ \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M(t) + \int_0^t (|\partial_t^2(p - \widehat{p}_h)|_H(s) + \|\partial_t^2(v - \widehat{v}_h)\|_M(s)) ds \right\},$$

**Démonstration.**

(i) On réécrit les équations (6.2.1) pour des fonctions test  $q = q_h \in X_h \subset X$ ,  $w = w_h \in M_h \subset M$  et  $\mu = \mu_H \in G_H \subset G$

$$(6.2.40) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}a(p, q_h) + b(q_h, v) - b_\Gamma(q_h, \lambda) = 0, & \forall q_h \in X_h, \\ \frac{d}{dt}(v, w_h) - b(p, w_h) = (f, w_h), & \forall w_h \in M_h, \\ b_\Gamma(p, \mu_H) = 0, & \forall \mu_H \in G_H, \end{cases}$$

On prend ensuite la différence entre (6.2.40) et (6.2.2) et on obtient :

$$(6.2.41) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}a(p - p_h, q_h) + b(q_h, v - v_h) - b_\Gamma(q_h, \lambda - \lambda_H) = 0, & \forall q_h \in X_h, \\ \frac{d}{dt}(v - v_h, w_h) - b(p - p_h, w_h) = 0, & \forall w_h \in M_h, \\ b_\Gamma(p - p_h, \mu_H) = 0, & \forall \mu_H \in G_H, \end{cases}$$

On introduit maintenant  $(\widehat{p}_h, \widehat{v}_h, \widehat{\lambda}_H)$  et on décompose l'erreur entre la solution des problèmes continu et approché en deux parties

$$(6.2.42) \quad \begin{cases} (p - p_h)(t) = (p - \widehat{p}_h)(t) + (\widehat{p}_h - p_h)(t) \equiv \varepsilon_h(t) + \eta_h(t), \\ (v - v_h)(t) = (v - \widehat{v}_h)(t) + (\widehat{v}_h - v_h)(t) \equiv \delta_h(t) + \xi_h(t) \\ (\lambda - \lambda_H)(t) = (\lambda - \widehat{\lambda}_H)(t) + (\widehat{\lambda}_H - \lambda_H)(t) \equiv \theta_H(t) + \zeta_H(t) \end{cases}$$

Par (6.2.36) on a

$$(\widehat{p}_h - p_h)(0) = 0 \ ; \ \widehat{v}_h - v_h(0) = 0.$$

D'après (6.2.41) et (6.2.42), pour tout  $(q_h, w_h, \mu_H) \in X_h \times M_h \times G_H$ ,

$$(6.2.43) \quad \begin{cases} a(\partial_t \eta_h, q_h) + b(q_h, \xi_h) - b_\Gamma(q_h, \zeta_H) = -a(\partial_t \varepsilon_h, q_h) - b(q_h, \delta_h) + b_\Gamma(q_h, \theta_H), \\ (\partial_t \xi_h, w_h) - b(\eta_h, w_h) = -(\partial_t \delta_h, w_h) + b(\varepsilon_h, w_h), \\ b_\Gamma(\eta_h, \mu_H) = -b_\Gamma(\varepsilon_h, \mu_H) \end{cases}$$

Par définition de  $(\widehat{p}_h, \widehat{v}_h, \widehat{\lambda}_H)$  nous avons

$$\begin{cases} b(q_h, \delta_h) - b_\Gamma(q_h, \theta_H) = 0, \quad \forall q_h \in X_h, \\ b(\varepsilon_h, w_h) - b_\Gamma(\varepsilon_h, \mu_H) = 0, \quad \forall (w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H. \end{cases}$$

Donc, (6.2.43) devient,

$$(6.2.44) \quad \begin{cases} a(\partial_t \eta_h, q_h) + b(q_h, \xi_h) - b_\Gamma(q_h, \zeta_H) = -a(\partial_t \varepsilon_h, q_h), \quad \forall q_h \in X_h, \\ (\partial_t \xi_h, w_h) - b(\eta_h, w_h) = -(\partial_t \delta_h, w_h), \quad \forall w_h \in M_h, \\ b_\Gamma(\eta_h, \mu_H) = 0, \quad \forall \mu_H \in G_H. \end{cases}$$

Si on choisit maintenant  $q_h = \eta_h$ ,  $w_h = \xi_h$  et  $\mu_H = \zeta_H$  dans (6.2.44) et si on ajoute les trois équations, on a

$$(6.2.45) \quad a(\partial_t \eta_h, \eta_h) + (\partial_t \xi_h, \xi_h) = -a(\partial_t \varepsilon_h, \eta_h) - (\partial_t \delta_h, \xi_h).$$

Ensuite, on pose

$$E_h(t) = \frac{1}{2} (a(\widehat{p}_h - p_h, \widehat{p}_h - p_h) + (\widehat{v}_h - v_h, \widehat{v}_h - v_h)) (t) = \frac{1}{2} (a(\eta_h, \eta_h) + (\xi_h, \xi_h)) (t).$$

On sait alors qu'il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$E_h^{1/2}(t) \geq C (|\widehat{p}_h - p_h|_H^2(t) + \|\widehat{v}_h - v_h\|_M^2(t))^{1/2},$$

ce qui implique que

$$(6.2.46) \quad \begin{aligned} \frac{dE_h^{1/2}}{dt}(t) &\leq C' (|\partial_t \varepsilon_h|_H(t) + \|\partial_t \delta_h\|_M(t)) \\ &\leq C' (|\partial_t(p - \widehat{p}_h)|_H(t) + \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M(t)) \end{aligned}$$

D'après (6.2.36) on a,

$$E_h(0) = 0.$$

Il est alors facile de voir que (6.2.46) conduit à (6.2.37).

(ii) Pour obtenir la deuxième estimation (6.2.38) nous allons utiliser la condition inf-sup uniforme (6.2.5) qui s'écrit (grâce à (6.2.31))

$$\forall (w_h, \mu_H) \in (M_h \times G_H), \exists k > 0, \text{ telle que } \|w_h\|_M + \|\mu_H\|_G \leq \frac{1}{k} \sup_{q_h^s \in X_h^s} \frac{b(q_h^s, w_h) - b_\Gamma(q_h^s, \mu_H)}{\|q_h^s\|_X}$$

ce qui donne pour  $w_h = \xi_h$  et  $\mu_H = \zeta_H$ ,

$$(6.2.47) \quad \|\xi_h\|_M + \|\zeta_H\|_G \leq \frac{1}{k} \sup_{q_h^s \in X_h^s} \frac{b(q_h^s, \xi_h) - b_\Gamma(q_h^s, \zeta_H)}{\|q_h^s\|_X}$$

Nous allons remplacer maintenant le terme  $b(q_h^s, \xi_h) - b_\Gamma(q_h^s, \zeta_H)$  en utilisant la première équation du système (6.2.44), qui s'écrit (pour  $q_h = q_h^s \in X_h^s \subset X_h$ )

$$b(q_h^s, \xi_h) - b_\Gamma(q_h^s, \zeta_H) = -a(\partial_t(\varepsilon_h + \eta_h), q_h^s), \forall q_h^s \in X_h^s.$$

En remplaçant ceci dans (6.2.47) on obtient

$$(6.2.48) \quad \|\xi_h\|_M(t) + \|\zeta_H\|_G(t) \leq \frac{\|a\|}{k} (|\partial_t \varepsilon_h|_H(t) + |\partial_t \eta_h|_H(t))$$

Jusqu'à maintenant, on a seulement utilisé la régularité  $C^1$  de la solution. Cependant, pour majorer le terme  $|\partial_t \eta_h|_H(t) = |\partial_t(\widehat{p}_h - p_h)|_H$ , on a besoin de la régularité  $C^2$ . En effet, on peut appliquer (6.2.37) en remplaçant  $p_h$  par  $\partial_t p_h$ ,  $\widehat{p}_h$  par  $\partial_t \widehat{p}_h$ , ainsi de suite ... Plus précisément, on a

$$(6.2.49) \quad |\partial_t(\widehat{p}_h - p_h)|_H(t) \leq C \int_0^t (|\partial_t^2 \varepsilon_h|_H(s) + \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s)) ds.$$

Finalement, en combinant (6.2.48) et (6.2.49), on obtient

$$\|\xi_h\|_M(t) + \|\zeta_H\|_G(t) \leq C' \left\{ |\partial_t \varepsilon_h|_H(t) + \int_0^t (|\partial_t^2 \varepsilon_h|_H(s) + \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s)) ds \right\},$$

Pour obtenir l'estimation (6.2.39), on utilise la condition inf-sup discrète (6.2.30),

$$(6.2.50) \quad \forall q_h \in X_h, \exists k > 0, \text{ telle que } \|q_h\|_{X/V_h} \leq \frac{1}{k} \sup_{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H} \frac{b(q_h, w_h) - b_\Gamma(q_h, \mu_H)}{\|w_h\|_M + \|\mu_H\|_G}$$

D'où, en choisissant  $q_h = \eta_h$  dans (6.2.50),

$$(6.2.51) \quad \|\eta_h\|_{X/V_h} \leq \frac{1}{k} \sup_{(w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H} \frac{b(\eta_h, w_h) - b_\Gamma(\eta_h, \mu_H)}{\|w_h\|_M + \|\mu_H\|_G}$$

On somme maintenant la deuxième et la troisième équation de (6.2.44) pour obtenir

$$b(\eta_h, w_h) - b_\Gamma(\eta_h, \mu_H) = (\partial_t(\delta_h + \xi_h), w_h) \quad \forall (w_h, \mu_H) \in M_h \times G_H$$

et en utilisant ceci dans (6.2.51) on a

$$\|\eta_h\|_{X/V_h} \leq C (\|\partial_t \delta_h\|_M + \|\partial_t \xi_h\|_M)$$

De plus nous pouvons obtenir l'estimation suivant pour  $\|\partial_t \xi_h\|_M$  (de la même façon qu'on a obtenu (6.2.49))

$$(6.2.52) \quad \|\partial_t \xi_h\|_M(t) = \|\partial_t(\widehat{v}_h - v_h)\|_M(t) \leq C \int_0^t (\|\partial_t^2 \varepsilon_h\|_H(s) + \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s)) ds.$$

En combinant (6.2.51) et (6.2.52), on obtient finalement

$$\|\eta_h\|_{X/V_h} \leq C' \left\{ \|\partial_t \delta_h\|_M + \int_0^t (\|\partial_t^2 \varepsilon_h\|_H(s) + \|\partial_t^2 \delta_h\|_M(s)) ds \right\},$$

ce qui termine la démonstration. ■

**Démonstration du Théorème 6.2.3.**

• Estimations sur  $|p - p_h|_H$  et  $\|v - v_h\|_M$ . Nous avons

$$\begin{aligned} |p - p_h|_H &\leq |p - \widehat{p}_h|_H + |\widehat{p}_h - p_h|_H \\ &\leq \|p - \widehat{p}_h\|_X + |\widehat{p}_h - p_h|_H \end{aligned}$$

Par le Lemme 6.2.1 nous avons pour le premier terme,

$$\|p - \widehat{p}_h\|_X \leq C \inf_{q_h^s \in X_h^s} \|p - q_h^s\|_X.$$

Pour le second terme on utilise la relation (6.2.37) du Lemme 6.2.2. Ceci nécessite que les termes  $|\partial_t(p - \widehat{p}_h)|_H$  et  $\|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M$  soient majorés. Pour ce faire on utilise la relation (6.2.35) pour  $k = 1$ , on obtient alors

$$|\partial_t(p - \widehat{p}_h)|_H + \|\partial_t(v - \widehat{v}_h)\|_M \leq C \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda)$$

De même, on a

$$\|v - v_h\|_M \leq \|v - \widehat{v}_h\|_M + \|\widehat{v}_h - v_h\|_M$$

Pour le premier terme on a par le Lemme 6.2.1,

$$\|v - \widehat{v}_h\|_M \leq C \mathcal{E}_h(p, v, \lambda)$$

et pour le deuxième on utilise la relation (6.2.37) du Lemme 6.2.2 comme précédemment.

• Estimations sur  $|\lambda - \lambda_H|_G$  et  $\|p - p_h\|_{X/V_h}$ .

On écrit

$$\|\lambda - \lambda_H\|_G \leq \|\lambda - \widehat{\lambda}_H\|_G + \|\widehat{\lambda}_H - \lambda_H\|_G$$

$$(\text{par le Lemme 6.2.1}) \leq C \mathcal{E}_h(p, v, \lambda) + \|\widehat{\lambda}_H - \lambda_H\|_G$$

Pour le terme  $\|\widehat{\lambda}_H - \lambda_H\|_G$  on utilise la relation (6.2.38) du Lemme 6.2.2, ce qui nécessite la régularité  $C^2$  de la solution, on obtient alors

$$\|\widehat{\lambda}_H - \lambda_H\|_G \leq C' \left\{ \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \lambda)(s) ds \right\}$$

De la même façon on écrit

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{X/V_h} &\leq \|p - \widehat{p}_h\|_{X/V_h} + \|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/V_h} \\ &\leq \|p - \widehat{p}_h\|_X + \|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/V_h} \end{aligned}$$

$$\text{(par le Lemme 6.2.1)} \leq C\mathcal{E}_h(p, v, \lambda) + \|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/V_h}$$

Pour le terme  $\|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/V_h}$  on utilise la relation (6.2.39) du Lemme 6.2.2, ce qui nécessite la régularité  $C^2$  de la solution, on obtient alors

$$\|\widehat{p}_h - p_h\|_{X/V_h} \leq C' \left\{ \mathcal{E}_h(\partial_t p, \partial_t v, \partial_t \lambda) + \int_0^t \mathcal{E}_h(\partial_t^2 p, \partial_t^2 v, \partial_t^2 \lambda)(s) ds \right\}$$

■

### 6.2.5 Condition inf-sup discrète uniforme

Nous allons montrer ici que la condition inf-sup discrète uniforme (6.2.5) est satisfaite. La démarche que nous avons suivie est la même que dans [74] et elle est inspirée des travaux de I. Babuska [8]. Dans ce qui suit on considère que  $\Gamma$  est une courbe fermée de classe  $C^{1,1}$ . La géométrie du problème dans ce cas est représentée sur la figure 6.2.1. Les espaces fonctionnels

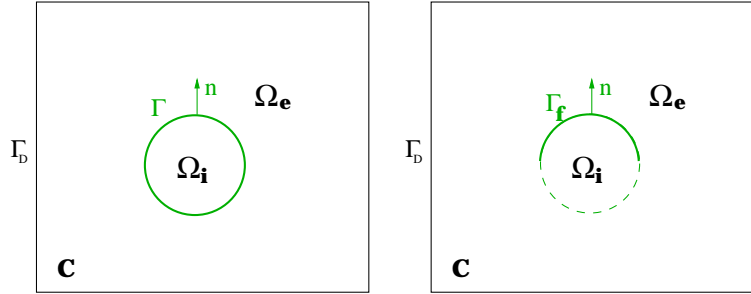


FIG. 6.2.1: La géométrie du problème.

de base sont alors,

$$X = (H(\text{div}; C); M = L^2(C); G = H^{1/2}(\Gamma)).$$

Notons que dans le cas d'une fissure  $\Gamma_f$  on peut toujours considérer une courbe fermée  $\Gamma$  (avec  $\Gamma_f \subset \Gamma$ ) et prolonger par zéro la fonction  $\lambda$  qui est a priori dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_f)$  de façon à obtenir une fonction  $\tilde{\lambda} \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Les espaces  $X_h$ ,  $M_h$  et  $G_H$  sont les mêmes que dans la section précédente. On suppose que le maillage  $\Gamma_H$  est uniformément régulier,

$$\text{Il existe } 0 < C \leq 1 \text{ tel que } H_j \geq CH, \forall j$$

Nous pouvons alors prouver le théorème suivant.

**Théorème 6.2.4** *Si le maillage  $\Gamma_H$  est uniformément régulier, alors il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que, si  $h$  est assez petit et  $H \geq \alpha h$ , alors la condition inf-sup uniforme (6.2.5) est vraie.*

La démonstration de ce théorème est un peu longue, elle fait l'objet du paragraphe suivant.

### 6.2.5.1 Démonstration du Théorème 6.2.4

La démonstration du Théorème 6.2.4 s'appuie sur la condition inf-sup continue (6.2.4),

$$\exists k > 0 \text{ telle que } \forall (v, \lambda) \in M \times G, \exists p \in X / b(p, v) - b_\Gamma(p, \lambda) \geq k \|p\|_X (\|v\|_M + \|\lambda\|_G)$$

Plus précisément nous allons construire un  $p \in X$  particulier qui vérifie cette condition. Soit  $(v, \lambda) \in M \times G$ , on définit  $p$  comme un relèvement de  $(v, \lambda)$ ,

$$(6.2.53) \quad p = R(v, \lambda)$$

avec  $R \in \mathcal{L}(M \times G, X)$  l'opérateur de relèvement défini par:

$$R(v, \lambda) = R^1(v) + R^2(\lambda) = p^1 + p^2 = p$$

avec  $R^1 \in \mathcal{L}(M, X)$ ,  $R^2 \in \mathcal{L}(G, X)$  et ou

$$(6.2.54) \quad \begin{aligned} & p = p^1 + p^2, \\ & p^1 = p_i^1 = \nabla \phi_i^1, \text{ dans } \Omega_i, \quad p^1 = p_e^1 = \nabla \phi_e^1, \text{ dans } \Omega_e = C - \overline{\Omega}_i, \\ & \begin{cases} -\Delta \phi_i^1 = -v, \text{ dans } \Omega_i, \\ \frac{\partial \phi_i^1}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \phi_e^1 = -v, \text{ dans } \Omega_e, \\ \frac{\partial \phi_e^1}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma, \\ \phi_e = 0, \text{ sur } \Gamma_D, \end{cases} \\ & p^2 = p_i^2 = \nabla \phi_i^2 \text{ dans } \Omega_i \quad p^2 = p_e^2 = \nabla \phi_e^2 \text{ dans } \Omega_e, \\ & \begin{cases} -\Delta \phi_i^2 = 0, \text{ dans } \Omega_i, \\ \phi_i^2 = -\lambda, \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \phi_e^2 = 0, \text{ dans } \Omega_e, \\ \frac{\partial \phi_e^2}{\partial n} = \frac{\partial \phi_i^2}{\partial n}, \text{ sur } \Gamma \\ \phi_e^2 = 0, \text{ sur } \Gamma_D, \end{cases} \end{aligned}$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de  $p^1$  dans  $\Omega_i$  on suppose pour l'instant que  $v$  est à moyenne nulle dans  $\Omega_i$ . Le  $p$  défini ainsi appartient bien à  $H(\text{div}; C)$ . En effet nous avons d'une part  $p|_{\Omega_i} \in H(\text{div}; \Omega_i)$  et  $p|_{\Omega_e} \in H(\text{div}; \Omega_e)$  et  $p \cdot n$  est continue sur  $\Gamma$  à cause du raccord des dérivées normales sur  $\phi_i^k$  et  $\phi_e^k$  pour  $k = 1, 2$ . Il est alors facile de vérifier que le relèvement  $R$  est continu,

$$\|p\|_X \leq \|R\|(\|v\|_M + \|\lambda\|_G).$$



De plus  $p$  vérifie la condition inf-sup continue. En effet,

$$\begin{aligned}
 b(p, v) - b_\Gamma(p, \lambda) &= \|v\|_M^2 - \left\langle \frac{\partial \phi_i^2}{\partial n}, \lambda \right\rangle_\Gamma \\
 &= \|v\|_M^2 + \left\langle \frac{\partial \phi_i^2}{\partial n}, \phi_i^2 \right\rangle_\Gamma \\
 &= \|v\|_M^2 + \|\nabla \phi_i^2\|_{0, \Omega_i}^2 \\
 &\geq \|v\|_M^2 + \frac{1}{c_1^2} \|\lambda\|_G^2 \\
 &\geq C' (\|v\|_M + \|\lambda\|_G)^2 \\
 &\geq \frac{C'}{\|R\|} \|p\|_X (\|v\|_M + \|\lambda\|_G)
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de trace dans  $H^1(\Omega_i)$ ,

$$\|\lambda\|_G \leq c_1 \|\phi_i^2\|_{1, \Omega_i}$$

et la continuité de  $R$ .

Nous introduisons ensuite l'espace  $H^s(\operatorname{div}; C) = \{p \in H^s(C)^2, \operatorname{div} v \in H^s(C)\}$ , muni de la norme:

$$\|p\|_{s, \operatorname{div}, C}^2 = \|p\|_{s, C}^2 + \|\operatorname{div} p\|_{s, C}^2.$$

On peut alors prouver le lemme suivant.

**Lemme 6.2.3** *Pour tout  $0 \leq s < \frac{1}{2}$ ,  $R^1$  envoie continûment  $H^s(C)$  dans  $H^s(\operatorname{div}; C)$ :*

$$\forall s \in [0, \frac{1}{2}[, \forall v \in H^s(C), \quad \|R^1 v\|_{s, \operatorname{div}, C} \leq C_s \|v\|_{s, C}.$$

De plus  $R^1$  envoie continûment  $H^s(C)$  dans  $H^{s+\epsilon}(C)$  avec  $0 \leq \epsilon < 1/2$ :

$$\forall s \in [0, \frac{1}{2}[, \forall \epsilon \in [0, \frac{1}{2}[, \forall v \in H^s(C), \quad \|R^1 v\|_{s+\epsilon, C} \leq C'_{s+\epsilon} \|v\|_{s, C}.$$

Ce lemme est un conséquence de la régularité elliptique pour les problèmes sur  $\phi_i^1$  et  $\phi_e^1$ .

**Lemme 6.2.4** *Pour tout  $0 \leq s < \frac{1}{2}$ ,  $R^2$  envoie continûment  $H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^s(\operatorname{div}; C)$ :*

$$\forall s \in [0, \frac{1}{2}[, \forall \lambda \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \|R\lambda\|_{s, \operatorname{div}, C} \leq c_s |\lambda|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

Ce lemme a été démontré dans [74], on rappelle ici les principales étapes de la preuve. Pour  $s \geq 0$ , on introduit  $H^s(\Delta; \Omega) = \{\varphi \in H^s(\Omega), \Delta \varphi \in H^s(\Omega)\}$ , muni de la norme:

$$\|v\|_{s, \Delta, \Omega}^2 = \|v\|_{s, \Omega}^2 + \|\Delta v\|_{s, \Omega}^2,$$

Nous avons alors le résultat suivant (voir [79, 59]).

**Théorème de Trace** *L'opérateur de trace  $\gamma_1$  défini sur  $C^\infty(\overline{C})$  par  $\gamma_1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_\Gamma$  se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de  $H^s(\Delta; C)$  dans  $H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ .*

Par la régularité elliptique pour le problème de Dirichlet sur  $\phi_i^2$  dans  $\Omega_i$  on a,

$$\phi_i^2 \in H^{s+1}(\Delta; \Omega_i), \quad \|\phi_i^2\|_{s+1, \Delta, \Omega_i} \leq \hat{C} |\lambda|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

Par le théorème de Trace on déduit que,

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial n}|_\Gamma \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \left| \frac{\partial\phi_i}{\partial n} \right|_{s-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \hat{C}_1 |\lambda|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

Ensuite par la régularité elliptique pour le problème de Neumann sur  $\phi_e^2$  dans  $\Omega_e$ , on a,

$$\phi_e^2 \in H^{s+1}(\Delta; \Omega_e), \quad \|\phi_e^2\|_{s+1, \Delta, \Omega_e} \leq \hat{C}_2 |\lambda|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

En combinant ces résultats on obtient,

$$(p_i^2, p_e^2) \in H^s(\text{div}; \Omega_i) \times H^s(\text{div}; \Omega_e), \quad \|p_i^2\|_{s, \text{div}, \Omega_i} + \|p_e^2\|_{s, \text{div}, \Omega_e} \leq \hat{c} |\lambda|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

Pour terminer la démonstration on rappelle que  $p^2$  est obtenu par concaténation de  $p_i^2$  et  $p_e^2$ , que  $\text{div}p^2$  est obtenu par concaténation de  $\text{div}p_i^2$  et  $\text{div}p_e^2$  et que, pour  $s < \frac{1}{2}$ , l'opération de concaténation est continue de  $H^s(\Omega_i) \times H^s(\Omega_e)$  dans  $H^s(\Omega)$ .

Nous considérons maintenant  $(v_h, \lambda_H) \in M_h \times G_H$  et nous remarquons que nous avons  $G_H \subset H^{1/2+s}(\Gamma)$  et  $M_h \subset H^s(C)$  pour  $s \in [0, \frac{1}{2}[$ . On définit ensuite  $p^H = R(v_h, \lambda_H) = R^1(v_h) + R^2(\lambda_H)$ , par les lemmes 6.2.3 et 6.2.4 nous savons que  $p^H \in H^s(\text{div}; C)$  et on peut donc définir  $p_h = \Pi_h^s p^H$  avec  $\Pi_h^s$  l'opérateur d'interpolation habituel dans l'espace  $X_h^s$ . Nous rappelons les résultats suivants:

$$(6.2.55) \quad b(p - \Pi_h^s p, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in M_h \text{ et } \forall p \in X$$

et nous avons

$$(6.2.56) \quad \|p - \Pi_h^s p\|_X \leq C_s h^s \|p\|_{s, \text{div}, C}, \quad \forall p \in X, \quad \forall 0 \leq s \leq 1$$

Nous allons montrer que  $p_h$  ainsi définie vérifie la condition inf-sup discrète uniforme. En effet,

$$(6.2.57) \quad \begin{aligned} b(p_h, v_h) - b_\Gamma(p_h, \lambda_H) &= b(p^H, v_h) - b_\Gamma(p, \lambda_H) - b_\Gamma(p_h - p, \lambda_H) \\ &\geq \|v_h\|_M^2 + C_1 \|\lambda_H\|_G^2 - b_\Gamma(p_h - p, \lambda_H) \end{aligned}$$

Il nous reste à traiter le terme  $-b_\Gamma(p_h - p, \lambda_H)$ . Par la continuité de la forme  $b_\Gamma(\cdot, \cdot)$  dans  $X \times G$  On a,

$$(6.2.58) \quad b_\Gamma(p_h - p, \lambda_H) \leq \|b_\Gamma\| \|p - p_h\|_X \|\lambda_H\|_G,$$

et

$$\begin{aligned}
 \|p - p_h\|_X &\leq \|p^1 - p_h^1\|_X + \|p^2 - p_h^2\|_X \\
 (\text{ par 6.2.55}) &\leq \|p^1 - p_h^1\|_{(L^2(C))^2} + \|p^2 - p_h^2\|_X \\
 (\text{ par 6.2.56}) &\leq C_{s+\epsilon} h^{s+\epsilon} \|p^1\|_{s+\epsilon, div, C} + C_s h^s \|p^2\|_{s, div, C}, \quad \forall (s, \epsilon) \in [0, 1/2]^2 \\
 (\text{Lemme 6.2.3 + Lemme 6.2.4}) &\leq C'_{s+\epsilon} C_{s+\epsilon} h^{s+\epsilon} \|v_h\|_{s, C} + C_s c_s h^s \|\lambda_H\|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma} \\
 &\leq C'_{s+\epsilon} C_{s+\epsilon} \hat{c}_s h^\epsilon \|v_h\|_M + C_s c_s \hat{c}_{2s} \left(\frac{h}{H}\right)^s \|\lambda_H\|_G
 \end{aligned}$$

Dans la dernière étape nous avons utilisé les inégalités inverses,

$$\|v_h\|_{s, C} \leq \hat{c}_s \|v_h\|_M; \quad \|\lambda_H\|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \hat{c}_{2s} H^{-s} \|\lambda_H\|_G$$

vérifiées grâce à l'hypothèse de régularité uniforme du maillage  $\Gamma_H$  ( $\mathcal{T}_h$  étant régulier). En reportant ce résultat dans (6.2.58) on obtient (en introduisant  $k_1 = C'_{s+\epsilon} C_{s+\epsilon} \hat{c}_s$ ,  $k_2 = C_s c_s \hat{c}_{2s}$ ),

$$\begin{aligned}
 b_\Gamma(p_h - p, \lambda_H) &\leq \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon \|v_h\|_M \|\lambda_H\|_G + \|b_\Gamma\| k_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s \|\lambda_H\|_G^2 \\
 &\leq \frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon (\|v_h\|_M^2 + \|\lambda_H\|_G^2) + \|b_\Gamma\| k_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s \|\lambda_H\|_G^2 \\
 &\leq \frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon \|v_h\|_M^2 + \left(\frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon + \|b_\Gamma\| k_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s\right) \|\lambda_H\|_G^2
 \end{aligned}$$

En reportant finalement ceci dans (6.2.57) on a

$$b(p_h, v_h) - b_\Gamma(p_h, \lambda_H) \geq \left(1 - \frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon\right) \|v_h\|_M^2 + \left(C_1 - \frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon - \|b_\Gamma\| k_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s\right) \|\lambda_H\|_G^2$$

Pour  $h$  tel que,

$$h^\epsilon < \hat{C} \quad (\equiv \min \{2\|b_\Gamma\| k_1, 2\|b_\Gamma\| k_1 C_1\}),$$

et  $\alpha$  tel que

$$\alpha^s > \frac{\|b_\Gamma\| k_2}{\hat{C}},$$

les deux constantes devant le termes  $\|v_h\|_M^2$  et  $\|\lambda_H\|_G^2$  sont positives. On pose

$$\tilde{C} = \min \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon\right), \left(C_1 - \frac{1}{2} \|b_\Gamma\| k_1 h^\epsilon - \|b_\Gamma\| k_2 \left(\frac{h}{H}\right)^s\right) \right\} > 0,$$

on a alors,

$$\begin{aligned}
 b(p_h, v_h) - b_\Gamma(p_h, \lambda_H) &\geq \frac{\tilde{C}}{2} (\|v_h\|_M + \|\lambda_H\|_G)^2 \\
 &\geq \frac{\tilde{C}}{2\|R\|} \|p^H\|_X (\|v_h\|_M + \|\lambda_H\|_G) \\
 &\geq \frac{\tilde{C}}{2\|R\|_c} \|p_h\|_X (\|v_h\|_M + \|\lambda_H\|_G)
 \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière inégalité nous avons utilisé la continuité de l'opérateur  $\Pi_h^s$ .

**Remarque 6.2.6** *Nous avons fait au début de ce paragraphe l'hypothèse que  $v$  est à moyenne nulle dans  $\Omega_i$ . Pour conclure il faudrait traiter le cas suivant*

$$\tilde{v} = \begin{cases} v + \delta & \text{dans } \Omega_i \\ v & \text{dans } \Omega_e \end{cases}$$

avec  $v$  à moyenne nulle dans  $\Omega_i$  et  $\delta$  une constante dans  $\Omega_i$ . Dans ce cas on définit  $p^1 = \tilde{R}(\tilde{v})$  de la façon suivante,

$$p^1 = p_i^1 = \nabla \phi_i^1, \text{ dans } \Omega_i, \quad p^1 = p_e^1 = \nabla \phi_e^1, \text{ dans } \Omega_e,$$

$$\begin{cases} -\Delta \phi_i^1 = -v, \text{ dans } \Omega_i, \\ \frac{\partial \phi_i^1}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta \phi_e^1 = -v - \frac{\delta^2}{s}, \text{ dans } \Omega_e, \\ \frac{\partial \phi_e^1}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma, \\ \phi_e = 0, \text{ sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

avec

$$s = \int_{\Omega_e} v dx.$$

Il est alors facile de voir que  $p^1$  ainsi défini satisfait,

$$\|p^1\|_X \leq C_1 \|\tilde{v}\|_M$$

et

$$\begin{aligned} b(p^1, \tilde{v}) - b_\Gamma(p^1, \lambda) &= b(p^1, \tilde{v}) \\ &= \|v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_e)}^2 + \delta^2 \\ &\geq C \|\tilde{v}\|_M^2 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que  $p = p^1 + p^2$  ( $p^2$  défini par 6.2.54) vérifie la condition inf-sup continue.

## 6.2.6 Le cas élastique - Difficultés

Pour généraliser les estimations d'erreur obtenues pour l'équation des ondes anisotropes au cas élastique, il "suffit" de montrer que la condition inf-sup suivante est satisfaite,

$$\begin{aligned} \exists k > 0, \text{ tel que } \forall (w_h, \mu_H) \in \underline{M}_h \times \underline{G}_H, \exists \tau_h \in \underline{X}_h^{sym} / \\ b(\tau_h, w_h) - b_\Gamma(\tau_h, \mu_H) &\geq k \|\tau_h\|_{\underline{X}} (\|w_h\|_{\underline{M}} + \|\mu_H\|_{\underline{G}}). \end{aligned}$$

Comme précédemment, pour montrer cette condition on peut s'appuyer sur la condition inf-sup continue,

$$\exists k > 0 \text{ telle que } \forall (v, \lambda) \in \underline{M} \times \underline{G}, \exists \sigma \in \underline{X}^{sym} / b(\sigma, v) - b_\Gamma(\sigma, \lambda) \geq k \|\sigma\|_{\underline{X}} (\|v\|_{\underline{M}} + \|\lambda\|_{\underline{G}}).$$

De nouveau, on montre cette condition de manière constructive, c'est à dire en exhibant un  $\sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym}$  particulier qui la vérifie. Soit  $(v, \lambda) \in \underline{M} \times \underline{G}$ , on définit  $\sigma$  comme un relèvement de  $(v, \lambda)$ ,

$$\sigma = R(v, \lambda)$$

avec  $\sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym}$  et  $R \in \mathcal{L}(\underline{M} \times \underline{G}, \underline{\underline{X}})$  l'opérateur de relèvement défini par:

$$R(v, \lambda) = R^1(v) + R^2(\lambda) = \sigma^1 + \sigma^2 = \sigma$$

avec  $R^1 \in \mathcal{L}(\underline{M}, \underline{\underline{X}})$ ,  $R^2 \in \mathcal{L}(\underline{G}, \underline{\underline{X}})$  et où

$$\sigma = \sigma^1 + \sigma^2,$$

$$\sigma^1 = \sigma_i^1 = C\varepsilon(u_i^1), \text{ dans } \Omega_i, \quad \sigma^1 = \sigma_e^1 = \varepsilon(u_e^1), \text{ dans } \Omega_e = C - \bar{\Omega}_i,$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(C\varepsilon(u_i^1)) = -v, \text{ dans } \Omega_i, \\ C\varepsilon(u_i^1) \cdot n = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(C\varepsilon(u_e^1)) = -v, \text{ dans } \Omega_e, \\ C\varepsilon(u_e^1) \cdot n = 0, \text{ sur } \Gamma, \\ u_e^1 = 0, \text{ sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \sigma_i^2 = C\varepsilon(u_i^2) \text{ dans } \Omega_i \quad \sigma^2 = \sigma_e^2 = C\varepsilon(u_e^2) \text{ dans } \Omega_e,$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(C\varepsilon(u_i^2)) = 0, \text{ dans } \Omega_i, \\ u_i^2 = -\lambda, \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(C\varepsilon(u_e^2)) = 0, \text{ dans } \Omega_e, \\ C\varepsilon(u_e^2) \cdot n = C\varepsilon(u_i^2) \cdot n, \text{ sur } \Gamma \\ u_e^2 = 0, \text{ sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

On montre alors que le  $\sigma$  ainsi défini satisfait la condition inf-sup continue.

**Remarque 6.2.7** *Pour assurer l'existence et l'unicité de  $\sigma^1$  dans  $\Omega_i$  on suppose initialement que  $v$  est à moyenne nulle dans  $\Omega_i$  et pour conclure on traite le cas de la constante comme dans la Remarque 6.2.6.*

En reprenant ensuite une par une les étapes de la démonstration de la condition inf-sup discrète on constate qu'il suffit de prouver qu'il existe un opérateur  $\Pi_h \in \mathcal{L}(\underline{\underline{X}}^{sym}, \underline{\underline{X}}_h^{sym})$  tel que,

$$(i) \quad b(\Pi_h \tau - \tau, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in \underline{M}_h$$

$$(ii) \quad \|\tau - \Pi_h \tau\|_{\underline{\underline{X}}} \leq c h \|\tau\|_{1, div, C}, \quad \forall \tau \in H^1(\operatorname{div}; C)$$

Malheureusement, on n'a pas réussi à montrer l'existence d'un tel opérateur. On veut remarquer que l'opérateur d'interpolation habituel  $\Pi_h^s$  ne satisfait pas ces propriétés car pour  $\sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym}$ ,  $\Pi_h^s \sigma$  n'est pas nécessairement symétrique. Il est clair que la difficulté vient encore une fois de la symétrie du tenseur des contraintes.

Nous avons ensuite remarqué que l'opérateur de projection elliptique  $\Pi_h$  défini par (2.3.3) dans le chapitre 2 est bien dans  $\mathcal{L}(\underline{\underline{X}}^{sym}, \underline{\underline{X}}_h^{sym})$  et vérifie la première propriété (i), mais au-lieu de (ii) il vérifie,

$$\|\tau - \Pi_h^s \tau\|_{\underline{\underline{X}}} + |\Pi_h^r \tau|_H \leq c h \|\tau\|_{1, div, C}, \quad \forall \tau \in H^1(\operatorname{div}; C)$$

où  $\Pi_h \tau = \Pi_h^s \tau + \Pi_h^r$  avec  $(\Pi_h^s \tau, \Pi_h^r) \in \underline{X}_h^s \times \underline{X}_h^r$  vérifiant  $(\Pi_h^s \tau, \Pi_h^r)_X = 0$ . Cependant, on n'a pas réussi à montrer que cela suffit pour obtenir la condition inf-sup discrète uniforme.

Quatrième partie

Traitement des bords





---

## Introduction

Nous sommes intéressés ici par la modélisation des problèmes de propagation des ondes dans des milieux ouverts. Du point de vue de la résolution numérique, il s'agit d'un problème délicat, car pour des raisons pratiques on ne peut calculer la solution discrète que sur un nombre fini des points. Le domaine de calcul est alors artificiellement borné et il convient de déterminer un traitement spécifique sur les frontières artificielles ainsi introduites. Pour ce faire, deux techniques ont été développées au cours de ces vingt dernières années: les conditions aux limites absorbantes (CLA), plutôt introduites par des mathématiciens, et les couches absorbantes, inspirées par la physique et développées plutôt par des ingénieurs.

Ce procédé qui consiste à remplacer le problème original (posé en domaine non borné) par un nouveau problème (posé en domaine borné) doit bien sûr satisfaire les critères suivants: conduire à un problème bien posé et assurer que la solution du nouveau problème est assez "proche" de celle du problème original. Si ces critères sont vérifiés, la deuxième étape consistera à approcher ce nouveau problème. Finalement, on demandera à la méthode numérique obtenue après ces deux étapes de satisfaire:

1. la stabilité
2. la précision (contrôler l'erreur induite par la l'introduction de bords artificiels)
3. l'efficacité (au niveau de l'implémentation et du temps de calcul).

La technique de CLA consiste à adjoindre aux équations du problème initial une condition aux limites sur les bords artificiels du domaine de calcul. Cette condition est construite de façon à ce que le problème couplé (équations initiales + condition aux limites) soit bien posé et conduise à une solution proche de celle du problème dans le milieu ouvert. Dans le cas de l'équation des ondes acoustiques, les CLA ont été initialement introduites par B. Engquist et A. Majda [51] dans les années 70. Leur démarche consiste à écrire dans un premier temps la condition transparente, c'est à dire l'équation qui relie sur le bord absorbant la trace d'une solution de l'équation des ondes homogènes à celle de sa dérivée normale. Cette équation implique l'introduction d'un opérateur pseudo-différentiel scalaire. Les conditions absorbantes sont ensuite obtenues par l'approximation du symbole de cet opérateur à l'aide de fractions rationnelles. Ces conditions ont été depuis étendues et étudiées par plusieurs auteurs [62, 66, 110, 47, 11]. Ces études ont permis de mettre en évidence la nécessité de conditions d'ordre élevé afin d'obtenir une bonne précision pour des ondes se propageant avec une direction oblique par rapport au bord. Pour ce faire, des familles de conditions absorbantes d'ordre arbitrairement élevés et stables ont été développées (cf. [56, 39, 60]).

Dans le cas de l'élastodynamique les premières études concernant les conditions transparentes et les CLA d'ordre un ont été effectuées par A. Reynolds [95] et L. Halpern [61]. Cependant, comme dans le cas de l'équation des ondes, des CLA d'ordre élevé sont nécessaires afin d'obtenir une bonne précision. Dans ce sens, la seule méthode qui est actuellement bien analysée à été proposée par R. Higdon [65, 68]. La démarche est dans ce cas différente de celle suivie par B. Engquist et A. Majda. Plus précisément, ces conditions s'obtiennent comme le produit de CLA du premier ordre pour l'équation des ondes scalaire qui sont appliquées à chaque équation du système de l'élastodynamique. Ces conditions sont stables [67] et précises

---

pour des ondes se propageant selon des directions proches de l'incidence normale. Cependant, des réflexions importantes peuvent apparaître pour des grands angles d'incidence (cf. [90]) et dans certains cas, des instabilités numériques ont été observées pour des schémas d'ordre élevé [102]. De plus, pour les ordres supérieurs à trois l'implémentation numérique de ces conditions devient très complexe.

C'est pour ces raisons que nous avons repris la démarche suivie par B. Engquist et A. Majda dans le cas acoustique pour construire des CLA d'ordres élevés pour l'élastodynamique, avec le souci supplémentaire d'aboutir à des conditions aux limites compatibles avec une formulation variationnelle. Nous présentons notre démarche dans le chapitre 7. On veut remarquer que dans le cas de l'élastodynamique la condition transparente relie la trace du déplacement à celle de la contrainte normale via l'introduction d'un opérateur pseudo-différentiel matriciel. La construction des conditions approchées est alors plus compliquée que dans le cas de l'équation des ondes car il faut approcher le symbole d'un opérateur matriciel. Les résultats de notre étude sont mitigés: une condition d'ordre 1 stable et facile à implémenter a été développée mais dans le cas des CLA d'ordre supérieurs le schéma numérique que nous proposons est implicite, ce qui peut entraîner un coût de calcul élevé (spécialement en 3D).

La technique des couches absorbantes consiste à entourer le domaine de calcul par un milieu artificiel dans lequel les ondes sont atténuées. Cependant son utilisation en pratique s'avère assez délicate. La difficulté principale est due au fait que les ondes "voient" le changement d'impédance entre le milieu physique et la couche, ce qui induit une réflexion parasite. Une solution à ce problème a été proposée par J.P Bérenger [26] pour les équations de Maxwell. Il s'agit, bien sûr, de la méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées: pour ce modèle il n'y a pas de réflexion à l'interface entre le milieu physique et le milieu absorbant! Cette méthode a amélioré considérablement les performances des couches absorbantes et connaît sans doute un grand succès dans la communauté des numériciens. F. Collino a donné une interprétation originale du modèle des couches parfaitement adaptées introduites par J.P Bérenger qui permet de généraliser ce modèle à tout système hyperbolique du premier ordre. Ceci nous a permis en particulier, de généraliser ce modèle à la formulation en vitesse-contraintes de l'élastodynamique. Notre démarche est présentée dans le chapitre 8. Notons que le modèle des couches absorbantes parfaitement adaptées donne des résultats remarquables du point de vue précision et est une méthode particulièrement simple à implémenter. Cependant, la stabilité de la méthode n'est pas encore démontrée.

## Chapitre 7

# Conditions aux limites absorbantes

Nous allons présenter ici la démarche que nous avons suivie pour construire une famille de conditions absorbantes. Nous avons voulu atteindre un double objectif: définir une famille de conditions absorbantes stables et compatibles avec une formulation variationnelle de façon à assurer une implémentation compatible avec une méthode d'éléments finis.

### 7.1 Construction d'une condition transparente

Nous considérons ici le problème de l'élastodynamique dans un milieu homogène isotrope et nous supposons que les conditions initiales sont à support compact  $K$  inclus dans le demi plan  $\mathbb{R}_-^2 (= \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$ . La géométrie du problème est représentée sur la Figure 7.1.1 . Notre

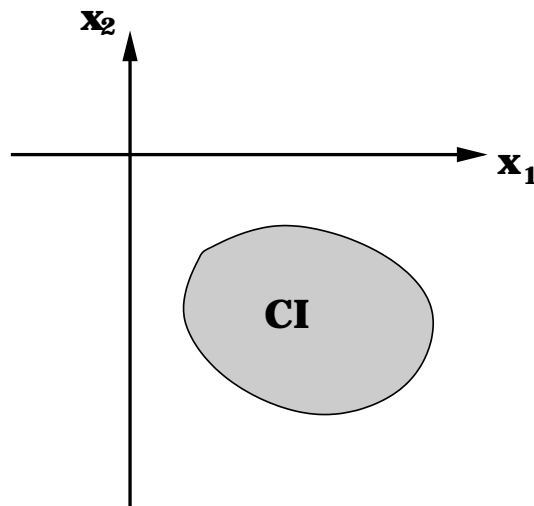


FIG. 7.1.1: *La géométrie du problème.*

problème modèle s'écrit sous la forme suivante,

$$(7.1.1) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(C\varepsilon(u)) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times ]0, T[ \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = u_1(x_1, x_2), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

où  $u = (u_1, u_2)$  désigne le champ des déplacements,  $\varepsilon(u)$  le tenseur des déformations,  $\rho$  la masse volumique et  $C$  le tenseur des coefficients d'élasticité. On suppose aussi que  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}_-^2)$  et  $u_1 \in L^2(\mathbb{R}_-^2)$ . Par la théorie classique des EDP nous avons le théorème suivant.

**Théorème 7.1.1** *Le problème (7.1.1) admet une solution unique  $u$  telle que*

$$u \in C^1(0, T, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^0(0, T, H^1(\mathbb{R}^2))$$

Notre objectif est maintenant de se ramener à un problème posé dans le demi plan  $\mathbb{R}_-^2$  de la forme,

$$(7.1.2) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \operatorname{div}(C\varepsilon(v)) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}_-^2 \times ]0, T[ \\ \mathcal{T}v = 0, & \text{sur } x_1 = 0 \\ v(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), & \text{dans } \mathbb{R}_-^2 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = u_1(x_1, x_2), & \text{dans } \mathbb{R}_-^2 \end{cases}$$

où  $v$  approche  $u$  la solution du problème initial (7.1.1). La condition

$$\mathcal{T}v = 0, \quad \text{sur } x_1 = 0$$

sera dite transparente si, quelques soient les données initiales  $u_0$  et  $u_1$ , on a

$$v = u|_{\mathbb{R}_-^2}.$$

Afin d'aboutir à des conditions aux limites compatibles avec une formulation variationnelle, il paraît naturel de chercher la condition transparente comme une condition qui relie la trace du déplacement à celle de la contrainte normale. La dérivation de cette condition est maintenant bien connue (cf. [61]). Elle est basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier en  $x_1$  et  $t$  appliquée au problème (7.1.1). Remarquons qu'on peut effectivement utiliser la transformée de Fourier dans ces directions, car le problème (7.1.1) est invariant par translation en  $x_1$  et  $t$ . Plus précisément on définit,

$$(7.1.3) \quad \hat{u}(k, \omega, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, t) e^{i(\omega t - kx_1)} dx_1 dt$$

Choisissons maintenant  $\delta > 0$  tel que

$$\operatorname{supp}(u_0) \cup \operatorname{supp}(u_1) \subset \{x_2 < -\delta\}.$$

Nous savons alors, que pour  $x_2 \geq -\delta$ , il existe deux constantes  $\widehat{A}_p(k, \omega)$  et  $\widehat{A}_s(k, \omega)$  telles que,

$$(7.1.4) \quad \widehat{u}(k, \omega, x_2) = \widehat{A}_p(k, \omega) \begin{pmatrix} ik \\ i\frac{\xi_p}{V_p} \end{pmatrix} e^{i\frac{\xi_p}{V_p}x_2} + \widehat{A}_s(k, \omega) \begin{pmatrix} i\frac{\xi_s}{V_s} \\ -ik \end{pmatrix} e^{i\frac{\xi_s}{V_s}x_2}$$

avec,

$$(7.1.5) \quad \begin{cases} \left(i\frac{\xi_p}{V_p}\right)^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2} \\ \left(i\frac{\xi_s}{V_s}\right)^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_s^2} \end{cases}$$

où  $\xi_p$  et  $\xi_s$  sont déterminés par

$$\begin{cases} \xi_p = \sqrt{\omega^2 - k^2 V_p^2} \\ \xi_s = \sqrt{\omega^2 - k^2 V_s^2} \end{cases}$$

la racine  $z \rightarrow \sqrt{z}$  étant définie comme celle de partie imaginaire positive ou nulle. Cette détermination vient du fait que la solution du problème (7.1.1) ne peut croître exponentiellement en  $x_2$ . Nous rappelons que  $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  est la vitesse des ondes P et  $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  celle des ondes S.

En particulier, sur la droite  $x_2 = 0$  que nous considérons comme frontière artificielle nous avons (en omettant de préciser la dépendance de  $\widehat{A}_p$  et  $\widehat{A}_s$  en  $(k, \omega)$ , pour alléger les notations).

$$(7.1.6) \quad \begin{cases} \widehat{u}_1(k, \omega, 0) = ik\widehat{A}_p + i\frac{\xi_s}{V_s}\widehat{A}_s \\ \widehat{u}_2(k, \omega, 0) = i\frac{\xi_p}{V_p}\widehat{A}_p - ik\widehat{A}_s \end{cases}$$

$$(7.1.7) \quad \begin{cases} \frac{d\widehat{u}_1}{dx_2}(k, \omega, 0) = (ik) \left(i\frac{\xi_p}{V_p}\right) \widehat{A}_p + \left(i\frac{\xi_s}{V_s}\right)^2 \widehat{A}_s \\ \frac{d\widehat{u}_2}{dx_2}(k, \omega, 0) = \left(i\frac{\xi_p}{V_p}\right)^2 \widehat{A}_p - (ik) \left(i\frac{\xi_s}{V_s}\right) \widehat{A}_s \end{cases}$$

Introduisons le vecteur contrainte normale sur la ligne  $x_2 = 0$ , vecteur de coordonnées  $\sigma_{21}(x_1, t)$  et  $\sigma_{22}(x_1, t)$  définies par,

$$(7.1.8) \quad \begin{cases} \sigma_{21}(x_1, t) = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) (x_1, 0, t) \\ \sigma_{22}(x_1, t) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} (x_1, 0, t) + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} (x_1, 0, t) \end{cases}$$

Compte tenu de (7.1.7) et (7.1.5), nous avons,

$$(7.1.9) \quad \begin{cases} \widehat{\sigma}_{21}(x_1, t) = \mu \left\{ (ik) \left(i\frac{\xi_p}{V_p}\right) \widehat{A}_p + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{V_s^2}\right) \widehat{A}_s + ik\widehat{u}_2(k, \omega) \right\} \\ \widehat{\sigma}_{22}(x_1, t) = (\lambda + 2\mu) \left\{ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2}\right) \widehat{A}_p - (ik) \left(i\frac{\xi_s}{V_s}\right) \widehat{A}_s \right\} + \lambda (ik)\widehat{u}_1(k, \omega) \end{cases}$$

“Habituellement”, pour écrire une condition transparente en  $x_2 = 0$ , on calcule  $\widehat{A}_p$  et  $\widehat{A}_s$  en fonction de  $\widehat{u}_1$  et  $\widehat{u}_2$  à partir de (7.1.6) puis on déduit de (7.1.9), l’expression de  $\widehat{\sigma}_{21}$  et  $\widehat{\sigma}_{22}$  en fonction de  $\widehat{u}_1$  et  $\widehat{u}_2$ . Cette approche a pour inconvénient de faire intervenir la fonction  $k^2 + \frac{\xi_p \xi_s}{V_s V_p}$ , ce qui complique ensuite le procédé d’approximation [61]. Nous avons suivi ici une démarche différente qui simplifie ce procédé. Le point clé consiste à introduire comme inconnues auxiliaires supplémentaires les fonctions  $A_p(x_1, t)$  et  $A_s(x_1, t)$ , de transformées de Fourier  $\widehat{A}_p$  et  $\widehat{A}_s$ , puis à écrire la condition transparente sous la forme d’un système de 4 équations à 4 inconnues. Plus précisément nous introduisons  $T_p$  et  $T_s$  les opérateurs pseudodifférentiels en les variables  $(x_1, t)$  tels que,

$$T_p \widehat{A}_p = i \xi_p \widehat{A}_p, \quad T_s \widehat{A}_s = i \xi_s \widehat{A}_s.$$

Le système (7.1.9)-(7.1.6), s’écrit,

$$(7.1.10) \quad \begin{cases} \sigma_{21} = \mu \left\{ \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2} + \frac{1}{V_p} \frac{\partial [T_p A_p]}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial [T_s A_s]}{\partial x_1} \right\} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ u_1 = \frac{\partial A_p}{\partial x_1} + \frac{1}{V_s} [T_s A_s] \\ u_2 = \frac{1}{V_p} [T_p A_p] - \frac{\partial A_s}{\partial x_1} \end{cases}$$

En dérivant les deux dernières équations par rapport à  $x_1$  nous remarquons que,

$$\begin{cases} -\frac{1}{V_s} \frac{\partial [T_s A_s]}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{1}{V_p} \frac{\partial [T_p A_p]}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{cases}$$

de telle sorte que le (7.1.10) se simplifie:

$$(7.1.11) \quad \begin{cases} \sigma_{21} = \mu \left\{ \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ u_1 = \frac{\partial A_p}{\partial x_1} + \frac{1}{V_s} [T_s A_s] \\ u_2 = \frac{1}{V_p} [T_p A_p] - \frac{\partial A_s}{\partial x_1} \end{cases}$$

Le système écrit sous la forme (7.1.11) a de plus l’avantage de ne faire intervenir les opérateurs non locaux  $T_p$  et  $T_s$  que dans les deux dernières équations. Si on considère maintenant le problème (7.1.2) avec comme condition aux limites sur  $x_2 = 0$  le système (7.1.11) (avec  $v$  à la place de  $u$ ), on peut montrer facilement que la solution  $v$  de (7.1.2) coïncide avec la restriction dans  $\mathbb{R}^2$  de la solution  $u$  du problème (7.1.1): le bord artificiel  $x_2 = 0$  n’induit aucune réflexion et donc le système (7.1.11) est une condition transparente.

## 7.2 Les conditions Absorbantes

### 7.2.1 Généralités

La condition transparente (7.1.11) fait intervenir les opérateurs  $T_p$  et  $T_s$  qui sont non locaux en espace et en temps : leurs symboles ne sont ni un polynôme ni une fraction rationnelle en  $(k, \omega)$ . Afin d'obtenir des opérateurs plus maniables numériquement, nous allons approcher ces opérateurs par des opérateurs différentiels. Pour ce faire, on peut approcher leurs symboles par des polynômes ou des fractions rationnelles. Bien évidemment, cette approximation ne peut être uniforme en  $(k, \omega)$ . Comme habituellement, nous considérons ici, la zone des  $(k, \omega)$  tels que,

$$\left| \frac{kV_i}{\omega} \right| < 1, \quad i = p, s$$

correspondant aux ondes propagatives. Il s'agit alors de définir une approximation des racines,

$$\sqrt{\omega^2 - k^2 V_p^2} \text{ et } \sqrt{\omega^2 - k^2 V_s^2}.$$

On part de l'équivalence, vraie sur  $\mathcal{I}m(\omega) > 0$ ,

$$\mathcal{I}m \left( \sqrt{\omega^2 - k^2 V_p^2} \right) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\omega^2 - k^2 V_p^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2 V_p^2}} = \omega \sqrt{1 - x_p^2},$$

de même, on a,

$$\mathcal{I}m \left( \sqrt{\omega^2 - k^2 V_s^2} \right) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\omega^2 - k^2 V_s^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2 V_s^2}} = \omega \sqrt{1 - x_s^2},$$

avec

$$x_p = \frac{k}{\omega V_p}, \quad |x_p| < 1, \quad \text{et} \quad x_s = \frac{k}{\omega V_s}, \quad |x_s| < 1.$$

Pour approcher la racine  $\sqrt{1 - x^2}$  par des polynômes on peut utiliser un développement de Taylor. Cependant, ceci conduit (pour un ordre supérieur à 2) à des problèmes mal posés [51]. Une autre idée consiste à construire des approximations par fractions rationnelles. Pour cela, on se donne  $2L$  nombres réels  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  et on écrit,

$$\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \sum_{l=1}^L \beta_l \frac{x^2}{1 - \alpha_l x^2}.$$

Le choix des coefficients  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  a fait l'objet d'études approfondies, cf. [110, 25]. Citons, par exemple, l'approximation de Padé pour laquelle  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  sont définis par,

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} \alpha_l &= \cos^2 \left( \frac{l\pi}{2L+1} \right), \quad l = 1, \dots, L \\ \beta_l &= \frac{2}{2L+1} \sin^2 \left( \frac{l\pi}{2L+1} \right), \quad l = 1, \dots, L \end{aligned}$$

et nous avons

$$\sqrt{1 - z} = 1 - \sum_{l=1}^L \beta_l \frac{z}{1 - \alpha_l z} + O(z^{2L+1}).$$

Après avoir défini une condition absorbante, il est essentiel, d'une part, d'étudier la stabilité du problème couplé (conditions absorbantes + équations de l'élastodynamique) et d'autre part, de mener une analyse pour évaluer l'erreur induite par la présence du bord absorbant.

En ce qui concerne l'étude de stabilité deux techniques s'offrent à nous, les techniques d'énergie et le critère de Kreiss. Notons que les techniques d'énergie peuvent s'avérer difficiles à mettre en oeuvre. Les techniques de Kreiss ont un caractère plus systématique et permettent de ramener l'étude de stabilité à l'étude des solutions dans le plan complexe d'une équation souvent appelée équation caractéristique. Nous donnons comme exemple l'équation des ondes, (nous allons voir dans la suite qu'il y a beaucoup de similitudes entre ce problème et le problème de l'élastodynamique)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

avec  $c$  la vitesse de propagation. Dans ce cas, la condition transparente (en  $x_2 = 0$ ) s'écrit ,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_2} + Tu = 0, \\ \widehat{T}u = i\xi \widehat{u} \end{cases}$$

avec,

$$(i\xi)^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

ou  $\xi$  est déterminé par

$$\xi = \sqrt{\omega^2 - k^2 c^2},$$

la racine  $z \rightarrow \sqrt{z}$  étant définie comme celle de partie imaginaire positive ou nulle. On peut alors construire des conditions absorbantes en approchant  $\xi$  par  $\xi^N$  défini de la façon suivante (cf. [38, 110]),

$$\xi^N = \omega \left( 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l k^2 c^2}{\omega^2 - \alpha_l c^2 k^2} \right)$$

L'étude de stabilité selon le critère de Kreiss revient alors à étudier les solutions de l'équation caractéristique suivante [110],

$$\xi + \xi^N = 0$$

dont l'inconnue est  $\omega$ . Plus précisément, il s'agit de montrer que cette équation n'admet pas de solution vérifiant,

$$\begin{cases} \bullet k \in \mathbb{R}, k \neq 0 \\ \bullet \text{Im}(\omega) \leq 0, \omega \neq 0 \end{cases}$$

Ce problème a été étudié par L. Halpern et L. Trefethen [110] et ils ont montré que le problème est bien posé au sens de Kreiss si et seulement si les coefficients  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  sont choisis tels que,

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_L < 1 \\ \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{1 - \alpha_l} < 1 ; \beta_l \geq 0 \end{cases}$$



Notons que les coefficients correspondant à l'approximation de Padé (définies par 7.2.1) vérifient ces relations. Signalons enfin que T. Ha Duong et P. Joly ont étudié ce problème avec des techniques d'énergie et ils ont établie un lien entre le critère de Kreiss et l'énergie [47].

Un moyen classique d'analyser de façon quantitative la précision d'une condition absorbante consiste à étudier la réflexion des ondes planes sur le bord absorbant. Plus précisément dans le cas de l'élastodynamique nous considérons une onde plane P (resp. S) se propageant avec un angle d'incidence  $\theta$  par rapport au bord absorbant et d'amplitude 1, on met alors en évidence l'existence de deux ondes réfléchies: une onde P d'amplitude  $R_{pp}$  (resp.  $R_{sp}$ ) et une onde S d'amplitude  $R_{ps}$  (resp.  $R_{ss}$ ). Les quantités  $R_{pp}$ ,  $R_{ps}$  et  $R_{ss}$ ,  $R_{sp}$ , appelées coefficients de réflexion, dépendent de l'angle d'incidence  $\theta$  et représentent un moyen quantitatif d'évaluation de l'erreur induite par le bord absorbant. Il est alors naturel de privilégier les angles d'incidence près de l'incidence normale et donc de s'intéresser au comportement des coefficients de réflexion au voisinage de  $\theta = 0$ . Dans ce qui suit nous poserons

$$R(\theta) = \sup \{ R_{pp}, R_{ps}, R_{ss}, R_{sp} \}.$$

et nous dirons qu'une condition d'absorbante est d'ordre  $m$  si

$$R(\theta) = O(\theta^{2m}).$$

Remarquons que cette définition est consistante avec celle qu'on adopte habituellement dans le cas de l'équation des ondes où il y a un seul coefficient de réflexion.

Dans les sections qui suivent nous rappelons d'abord la condition introduite par A. Reynolds [95] et L. Halpern [61], elle consiste d'une part à approcher

$$(7.2.2) \quad \sqrt{1-z} = 1 + O(z)$$

et d'autre part à négliger les termes qui comportent une dérivation dans la direction  $x_1$ . Cette condition appelée habituellement condition d'ordre 1 sera appelée ici condition d'ordre 1/2 car dans ce cas on a  $R(\theta) = O(\theta)$ .

Nous considérons ensuite une deuxième condition absorbante introduite par B. Chalindar [33] que nous appellerons condition d'ordre 1. Cette condition est aussi obtenue à partir de l'approximation (7.2.2), la différence avec la condition d'ordre 1/2 vient du fait qu'on néglige dans ce cas seulement les termes qui comportent une dérivation du second ordre (ou plus) dans la direction  $x_1$ .

Finalement nous définissons une famille de conditions absorbantes d'ordre élevé qui consistent à utiliser l'approximation de Padé:

$$\sqrt{1-z} = 1 - \sum_{l=1}^L \beta_l \frac{z}{1-\alpha_l z} + O(z^{2L+1}).$$

### 7.2.2 La condition d'ordre 1/2

C'est la condition classique introduite par A. Reynolds [95] et L. Halpern [61]. Elle consiste à écrire ce qui se passe pour les solutions indépendantes de  $x_1$  (ondes se propageant à l'incidence normale) et donc à éliminer toutes les dérivées en  $x_1$ . À partir de (7.1.11) on obtient

dans un premier temps,

$$\begin{cases} \sigma_{21} = \frac{\mu}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} \\ \sigma_{22} = \frac{\lambda + 2\mu}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} \\ u_1 = \frac{1}{V_s} [T_s^N A_s] \\ u_2 = \frac{1}{V_p} [T_p^N A_p] \end{cases}$$

On peut alors réécrire les deux dernières équations de ce système sous la forme suivante (en utilisant les approximations  $\xi_p \approx \xi_p^N = i\omega$  et  $\xi_s \approx \xi_s^N = i\omega$ )

$$\begin{aligned} \widehat{u}_1 &= \frac{1}{V_s} i\xi_s^N \widehat{A}_s = \frac{i\omega}{V_s} \widehat{A}_s \\ \widehat{u}_2 &= \frac{1}{V_p} i\xi_p^N \widehat{A}_p = \frac{i\omega}{V_s} \widehat{A}_s \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} \\ u_2 &= -\frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} \end{aligned}$$

Il est alors très facile d'éliminer  $A_p$  et  $A_s$  et obtenir les équations bien connues,

$$(7.2.3) \quad \begin{cases} \sigma_{21} + \frac{\mu}{V_s} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \\ \sigma_{22} + \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Outre leur simplicité, ces conditions aux limites sont stables de façon évidente. Ainsi si on considère le système de l'élastodynamique homogène dans le demi espace  $x_2 < 0$  avec la condition (7.2.3) en  $x_2 = 0$ , on a l'identité d'énergie,

$$(7.2.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dx + \varrho \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \right) \\ + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\mu}{V_s} \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \left| \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|^2 \right\} dx_1 = 0 \end{cases}$$

(où  $\Omega = \mathbb{R}_-^2$  et  $\Gamma = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\} = \partial\Omega$ ) qui entraîne de toute évidence la stabilité du problème.

## 7.2.3 La condition d'ordre 1 de Chalindar

Dans ce cas, on va garder seulement les dérivées d'ordre 1 dans la direction  $x_1$ . En partant toujours du système (7.1.11) on obtient dans un premier temps,

$$\begin{aligned}\sigma_{21} &= \mu \left\{ \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ u_1 &= \frac{\partial A_p}{\partial x_1} + \frac{1}{V_s} [T_s^N A_s] \\ u_2 &= \frac{1}{V_p} [T_p^N A_p] - \frac{\partial A_s}{\partial x_1}\end{aligned}$$

On réécrit ensuite les deux dernières équations de ce système sous la forme suivante (en utilisant les approximations  $\xi_p \approx \xi_p^N = i\omega$  et  $\xi_s \approx \xi_s^N = i\omega$ )

$$\begin{aligned}\widehat{u}_1 &= (ik)\widehat{A}_p + \frac{1}{V_s} i\xi_s^N \widehat{A}_s = (ik)\widehat{A}_p + \frac{i\omega}{V_s} \widehat{A}_s \\ \widehat{u}_2 &= -(ik)\widehat{A}_s + \frac{1}{V_p} i\xi_p^N \widehat{A}_p = -(ik)\widehat{A}_s + \frac{i\omega}{V_p} \widehat{A}_p\end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{\partial A_p}{\partial x_1} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} \\ u_2 &= -\frac{\partial A_s}{\partial x_1} - \frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t}\end{aligned}$$

Il est alors déjà difficile à ce stade d'éliminer  $(A_p, A_s)$ . On peut toutefois faire apparaître la condition d'ordre 1 comme une perturbation de la condition d'ordre 1/2 en l'écrivant sous la forme suivante,

$$(7.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{21} + \frac{\mu}{V_s} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\mu}{V_s} \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1 \partial t} + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \sigma_{22} + \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1 \partial t} - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ u_1 = -\frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{\partial A_p}{\partial x_1} \\ u_2 = -\frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} - \frac{\partial A_s}{\partial x_1} \end{array} \right.$$

A ce stade on peut éliminer  $(A_p, A_s)$  en écrivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1 \partial t} = V_s \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2} - V_s \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1 \partial t} = -V_p \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2} - V_p \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{array} \right.$$

où les termes  $\frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2}$  et  $\frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2}$  peuvent être éliminés car ils sont du deuxième ordre en  $\frac{k}{\omega}$  et donc on a,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1 \partial t} = -V_s \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1 \partial t} = -V_p \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{cases}$$

En remplaçant les dernières relations dans (7.2.5) on obtient,

$$(7.2.6) \quad \begin{cases} \sigma_{21} + \frac{\mu}{V_s} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \left( 2\mu - V_p \frac{\mu}{V_s} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \sigma_{22} + \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \frac{\partial u_2}{\partial t} = \left( V_s \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} - 2\mu \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \end{cases}$$

Cette condition à été introduite par B. Chalindar [33]. Sa stabilité n'est pas évidente. Dans [33] B. Chalindar à montré que le problème couplé est stable lorsque la condition suivante est satisfaite,

$$\frac{V_s}{V_p} > 2 - \sqrt{3}$$

Cependant ce résultat n'implique pas que le système est instable pour les autres valeurs de  $V_p$  et  $V_s$ , de plus nous avons implémenté cette condition et nous n'avons pas observé d'instabilités.

Nous allons comparer dans la section suivante les deux conditions absorbantes (ordre 1/2 et ordre 1) en termes d'une étude de coefficients de réflexion.

## 7.2.4 Étude des conditions aux limites d'ordre 1/2 et 1 en termes de coefficients de réflexion

### 7.2.4.1 Réflexion d'une onde P

Soient les trois ondes harmoniques planes,

$$(7.2.7) \quad \begin{aligned} \vec{u}^{(0)} &= A_0 \vec{p}^{(0)} e^{ik_0(\vec{p}^{(0)} \vec{x} - V_p t)} \quad \text{où} \quad \vec{p}^{(0)} = (\sin(\theta), \cos(\theta)) \\ \vec{u}^{(1)} &= A_1 \vec{p}^{(1)} e^{ik_1(\vec{p}^{(1)} \vec{x} - V_p t)} \quad \text{où} \quad \vec{p}^{(1)} = (\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) \\ \vec{u}^{(2)} &= A_2 \vec{d}^{(2)} e^{ik_2(\vec{p}^{(2)} \vec{x} - V_s t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(2)} = (\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \\ &\quad \text{et} \quad \vec{p}^{(2)} = (\sin(\theta_2), -\cos(\theta_2)) \end{aligned}$$

On dit que l'onde P  $\vec{u}^{(0)}$  se réfléchit en une onde P  $\vec{u}^{(1)}$  et une onde S  $\vec{u}^{(2)}$  si  $\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}$  vérifie le système (7.2.3) pour la condition d'ordre 1/2 (resp. (7.2.6) pour celle d'ordre 1). On voit facilement (par la linéarité des équations) que nous avons les relations,

$$k_0 = k_1, \quad k_0 V_p = k_2 V_s,$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta_1), \quad \cos(\theta) = \cos(\theta_1), \quad k_2 \sin(\theta_2) = k_0 \sin(\theta)$$

En remplaçant  $\vec{u}$  en  $x_2 = 0$  dans le système (7.2.3) (resp. (7.2.6) ) pour la condition d'ordre 1/2 (resp. 1) on obtient une relation pour les coefficients de réflexion  $R_{pp} = \frac{A_1}{A_0}$  et  $R_{ps} = \frac{A_2}{A_0}$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ . Le développement de Taylor de  $R_{pp}(\theta)$  et  $R_{ps}(\theta)$  en  $\theta = 0$  pour les deux conditions absorbantes (ordre 1/2 et ordre 1) a été effectué à l'aide du logiciel MAPLE et nous avons obtenu les résultats suivants,

**Condition d'ordre 1/2**

$$R_{pp}^{1/2}(\theta) = \frac{(4V_s^2 - V_p^2)(V_p + V_s)}{4V_p^3} \theta^2 + O(\theta^4)$$

$$R_{ps}^{1/2}(\theta) = -\frac{V_p - 2V_s}{2V_p} \theta + O(\theta^3)$$

**Condition d'ordre 1**

$$R_{pp}^1(\theta) = -\frac{V_p - 2V_s}{4V_p} \theta^2 + O(\theta^4)$$

$$R_{ps}^1(\theta) = -\frac{V_s}{2V_p} \theta^3 + O(\theta^5)$$

et nous avons

$$\frac{(4V_s^2 - V_p^2)(V_p + V_s)}{4V_p^3} \geq -\frac{V_p - 2V_s}{4V_p}.$$

La condition d'ordre 1 donne une meilleure précision que celle d'ordre 1/2, notamment en ce qui concerne les coefficients des réflexion  $R_{ps}$ .

On présente sur les figures suivantes la variation des modules des coefficients de réflexion  $|R_{pp}|$  (fig. 7.2.1) et  $|R_{ps}|$  (fig. 7.2.2) en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  pour différentes valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$ .

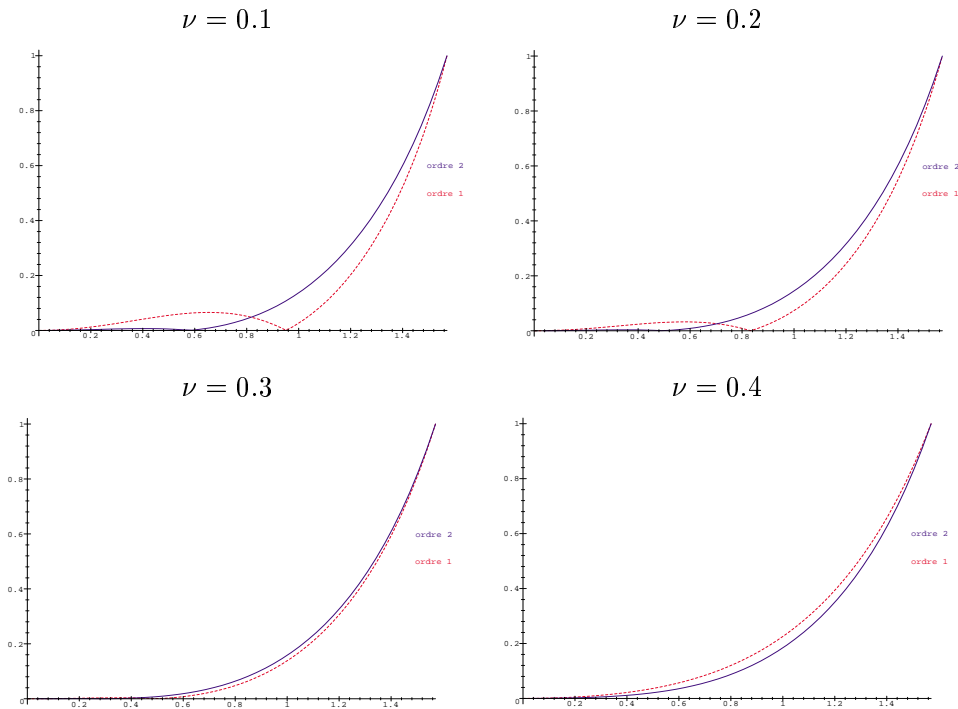


FIG. 7.2.1: Le module  $|R_{pp}|$  en fonction de  $\theta$ , pour la condition d'ordre 1/2 (en pointillé) et 1 (en trait continu)

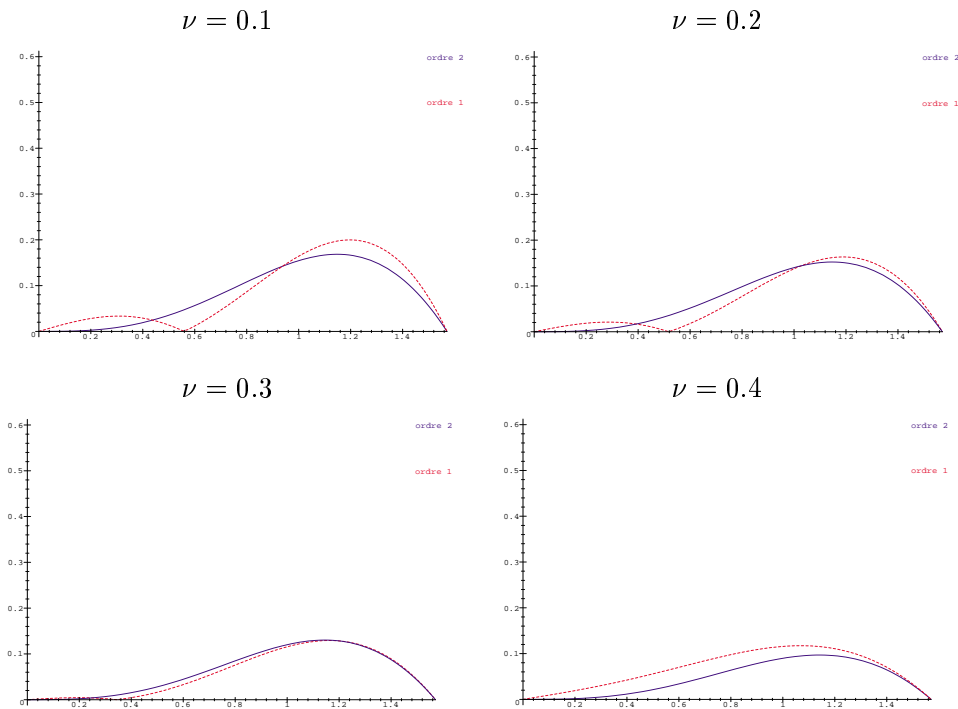


FIG. 7.2.2: Le module  $|R_{ps}|$  en fonction de  $\theta$ , pour la condition d'ordre 1/2 (en pointillé) et 1 (en trait continu)

7.2.4.2 Réflexion d'une onde S

Soient les trois ondes harmoniques planes,

(7.2.8)

$$\vec{u}^{(0)} = A_0 \vec{d}^{(0)} e^{ik_0(\vec{p}^{(0)} \cdot \vec{x} - V_p t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(0)} = (\cos(\theta), -\sin(\theta)) \text{ et } \vec{p}^{(0)} = (\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\vec{u}^{(1)} = A_1 \vec{d}^{(1)} e^{ik_1(\vec{p}^{(1)} \cdot \vec{x} - V_p t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(1)} = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \text{ et } \vec{p}^{(1)} = (\sin(\theta_1), -\cos(\theta_1))$$

$$\vec{u}^{(2)} = A_2 \vec{p}^{(2)} e^{ik_2(\vec{p}^{(2)} \cdot \vec{x} - V_s t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(2)} = (\sin(\theta_2), -\cos(\theta_2))$$

On dit que l'onde S  $\vec{u}^{(0)}$  se réfléchit en une onde S  $\vec{u}^{(1)}$  et une onde P  $\vec{u}^{(2)}$  si  $\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}$  vérifie le système (7.2.3) pour la condition d'ordre 1/2 (resp. (7.2.6) pour celle d'ordre 1). On voit facilement (par la linéarité des équations) que nous avons les relations,

$$k_0 = k_1, \quad k_2 V_p = k_0 V_s,$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta_1), \quad \cos(\theta) = \cos(\theta_1), \quad k_2 \sin(\theta_2) = k_0 \sin(\theta)$$

En remplaçant  $\vec{u}$  en  $x_2 = 0$  dans le système (7.2.3) (resp. (7.2.6) ) pour la condition d'ordre 1/2 (resp. 1) on obtient une relation pour les coefficients de réflexion  $R_{ss} = \frac{A_1}{A_0}$  et  $R_{sp} = \frac{A_2}{A_0}$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ . Le développement de Taylor de  $R_{ss}(\theta)$  et  $R_{sp}(\theta)$  en  $\theta = 0$  pour les deux conditions absorbantes (ordre 1/2 et 1) a été effectué à l'aide du logiciel MAPLE et nous avons obtenu les résultats suivants,

**Condition d'ordre 1/2**

$$R_{ss}^{1/2}(\theta) = \frac{(V_p + V_s)(V_p - 4V_s)}{4V_p V_s} \theta^2 + O(\theta^4)$$

$$R_{sp}^{1/2}(\theta) = -\frac{V_p - 2V_s}{2V_p} \theta + O(\theta^3)$$

**Condition d'ordre 1**

$$R_{ss}^1(\theta) = \frac{V_s - 2V_p}{4V_s} \theta^2 + O(\theta^4)$$

$$R_{sp}^1(\theta) = -\frac{V_p}{2V_s} \theta^3 + O(\theta^5)$$

et nous avons

$$\frac{(V_p + V_s)(V_p - 4V_s)}{4V_p V_s} \geq \frac{V_s - 2V_p}{4V_s}$$

La condition d'ordre 1 donne une meilleure précision que celle d'ordre 1/2 notamment en ce qui concerne les coefficients des réflexion  $R_{sp}$ .

On présente sur les figures suivantes la variation des modules des coefficients de réflexion  $|R_{ss}|$  (fig. 7.2.3) et  $|R_{sp}|$  (fig. 7.2.4) en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  pour différentes valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$ .

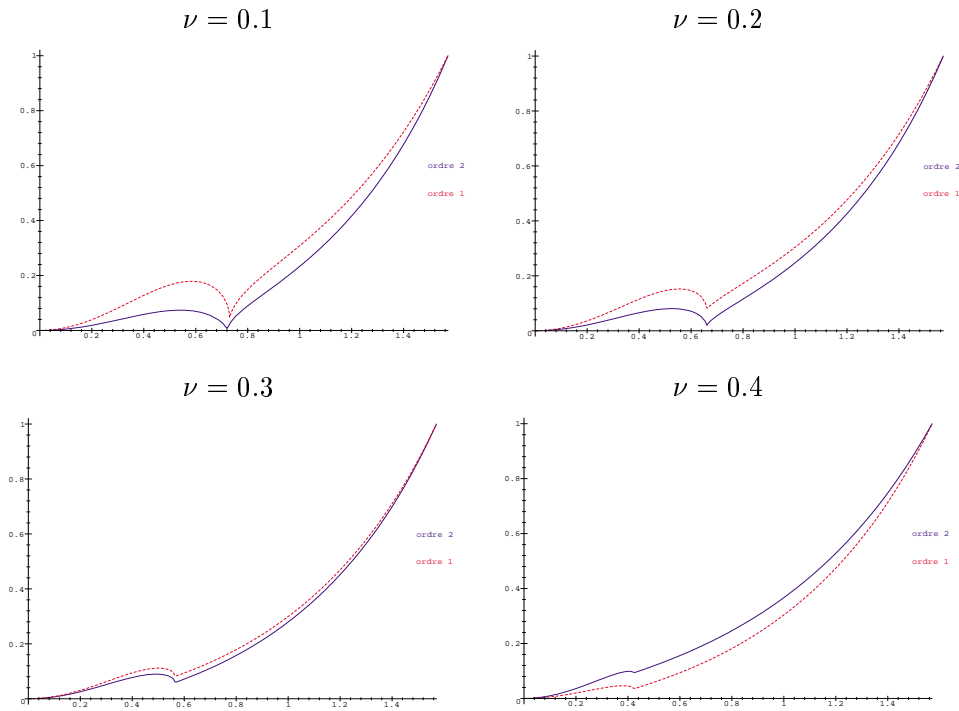


FIG. 7.2.3: Le module  $|R_{ss}|$  en fonction de  $\theta$ , pour la condition d'ordre 1/2 (en pointillé) et 1 (en trait continu)

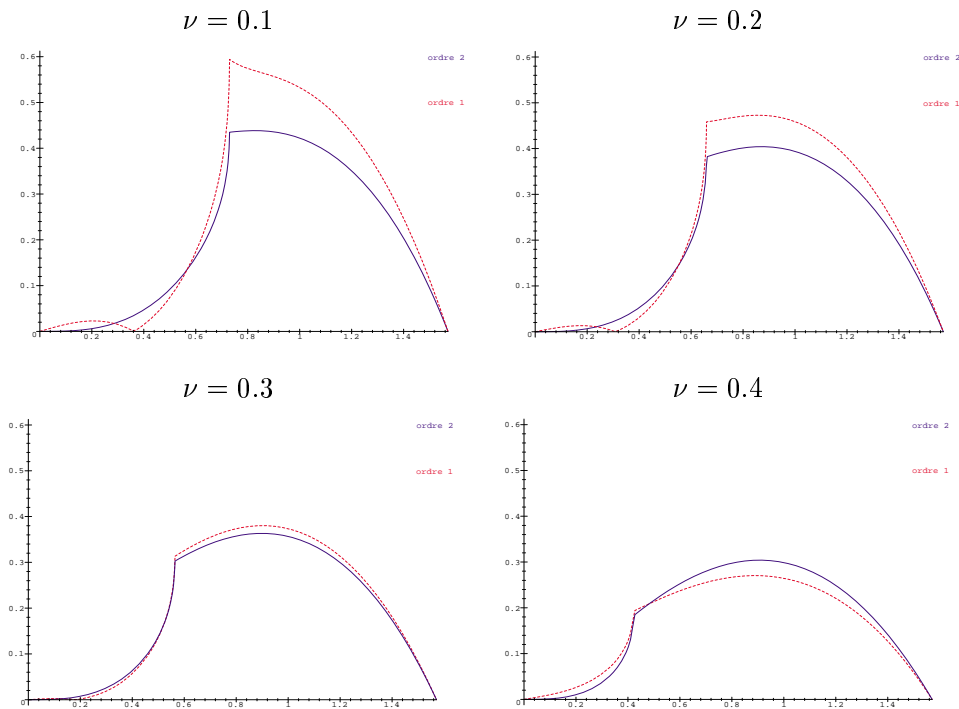


FIG. 7.2.4: Le module  $|R_{sp}|$  en fonction de  $\theta$ , pour la condition d'ordre 1/2 (en pointillé) et 1 (en trait continu)



**Remarque 7.2.1** Pour chaque valeur du coefficient de Poisson  $\nu$ , il existe un angle d'incidence  $\theta_c$ , dite critique, à partir duquel l'amplitude de l'onde  $P$  issue de la réflexion d'une onde  $S$  incidente devient complexe. En d'autres termes, pour  $\theta > \theta_c$ , l'onde  $P$  réfléchie est une onde évanescente. Cette angle critique est déterminé par relation suivante

$$\sin(\theta_c) = \frac{V_s}{V_p},$$

ce qui correspond aux angles 0.73, 0.66, 0.56 et 0.42 pour les valeurs de  $\nu$  de 0.1 à 0.4 correspondant aux courbes représentées sur la figure 7.2.4,

### 7.2.5 Une famille des conditions absorbantes d'ordre élevé

Elles sont basées sur des approximations supérieures en  $\frac{k}{\omega}$  de l'opérateur transparent. Ainsi on approche  $T_p$  (respectivement  $T_s$ ) par les opérateurs  $T_p^N$  (respectivement  $T_s^N$ ) avec  $\xi_p^N$  et  $\xi_s^N$  définis par,

$$\begin{cases} \xi_p^N = \omega \left( 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l k^2 V_p^2}{\omega^2 - \alpha_l V_p^2 k^2} \right) \\ \xi_s^N = \omega \left( 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l k^2 V_s^2}{\omega^2 - \alpha_l V_s^2 k^2} \right) \end{cases}$$

On sait alors que l'action de  $T_p^N$  ou  $T_s^N$  sur une fonction s'exprime facilement à l'aide d'équations différentielles, modulo l'introduction de variables supplémentaires (fonctions auxiliaires). La condition approchée ou absorbante s'écrit alors,

$$(7.2.9) \quad \begin{cases} \sigma_{21} = \mu \left\{ \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ u_1 = \frac{\partial A_p}{\partial x_1} + \frac{1}{V_s} [T_s^N A_s] \\ u_2 = \frac{1}{V_p} [T_p^N A_p] - \frac{\partial A_s}{\partial x_1} \end{cases}$$

On réécrit ensuite les deux dernières équations de ce système sous la forme suivante

$$(7.2.10) \quad \begin{aligned} \widehat{u}_1 &= (ik)\widehat{A}_p + \frac{1}{V_s} i\xi_s^N \widehat{A}_s = (ik)\widehat{A}_p + \frac{1}{V_s} \widehat{A}_s \left( i\omega - i\omega \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i k^2 V_s^2}{\omega^2 - \alpha_i V_s^2 k^2} \right) \\ \widehat{u}_2 &= -(ik)\widehat{A}_s + \frac{1}{V_p} i\xi_p^N \widehat{A}_p = -(ik)\widehat{A}_s + \frac{1}{V_p} \widehat{A}_p \left( i\omega - i\omega \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i k^2 V_p^2}{\omega^2 - \alpha_i V_p^2 k^2} \right) \end{aligned}$$

On introduit maintenant des fonctions auxiliaires  $\phi_l^p(x_1, t)$  et  $\phi_l^s(x_1, t)$  (de transformées de Fourier  $\widehat{\phi}_l^p$  et  $\widehat{\phi}_l^s$ ) telles que,

$$(7.2.11) \quad \begin{aligned} (\omega^2 - \alpha_l V_p^2 k^2) \widehat{\phi}_l^p &= k^2 V_p^2 \widehat{A}_p, \quad \forall l = 1, \dots, N \\ (\omega^2 - \alpha_l V_s^2 k^2) \widehat{\phi}_l^s &= k^2 V_s^2 \widehat{A}_s, \quad \forall l = 1, \dots, N \end{aligned}$$

En fait,  $\phi_l^p(x_1, t)$  et  $\widehat{\phi}_l^p$  sont solutions d'une équation des ondes monodimensionnelle, car ces équations s'écrivent sous la forme suivante,

$$(7.2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial t^2} - \alpha_l V_p^2 \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial x_1^2} &= V_p^2 \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2}, \quad \forall l = 1, \dots, N \\ \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial t^2} - \alpha_l V_s^2 \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial x_1^2} &= V_s^2 \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2}, \quad \forall l = 1, \dots, N \end{aligned}$$

En combinant (7.2.10) et (7.2.11) on obtient,

$$\begin{aligned} \widehat{u}_1 &= (ik)\widehat{A}_p + \frac{1}{V_s}i\omega\widehat{A}_s - i\omega \sum_{i=1}^N \frac{\beta_l}{V_s} \widehat{\phi}_l^s \\ \widehat{u}_2 &= -(ik)\widehat{A}_s + \frac{1}{V_p}i\omega\widehat{A}_p - i\omega \sum_{i=1}^N \frac{\beta_l}{V_p} \widehat{\phi}_l^p \end{aligned}$$

ou encore,

$$(7.2.13) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial A_p}{\partial x_1} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_s} \frac{\partial \phi_l^s}{\partial t} \\ u_2 &= -\frac{\partial A_s}{\partial x_1} - \frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_p} \frac{\partial \phi_l^p}{\partial t} \end{aligned}$$

Finalement par (7.2.9) en utilisant (7.2.13) et (7.2.12) on obtient le système global,

$$(7.2.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_{21} &= \mu \left\{ \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ u_1 &= \frac{\partial A_p}{\partial x_1} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_s} \frac{\partial \phi_l^s}{\partial t} \\ u_2 &= -\frac{\partial A_s}{\partial x_1} - \frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_p} \frac{\partial \phi_l^p}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial t^2} - \alpha_l V_p^2 \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial x_1^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial t^2} - \alpha_l V_s^2 \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial x_1^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

On peut toujours écrire ces conditions comme une perturbation de la condition d'ordre 1. Il suffit de remarquer que,

$$(7.2.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{V_s} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} &= -\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1 \partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_s} \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial t^2} \\ \frac{1}{V_p} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} &= -\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1 \partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_p} \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial t^2} \end{aligned} \right.$$

On obtient alors,

$$(7.2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{21} + \frac{\mu}{V_s} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\mu}{V_s} \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1 \partial t} + \mu \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_s^2} \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial t^2} \\ \sigma_{22} + \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \frac{\partial u_2}{\partial t} = -2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1 \partial t} + (\lambda + 2\mu) \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_p^2} \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial t^2} \\ \frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} - \frac{\partial A_p}{\partial x_1} + u_1 = \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_s} \frac{\partial \phi_l^s}{\partial t} \\ \frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial x_1} + u_2 = \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_p} \frac{\partial \phi_l^p}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial t^2} - \alpha_l V_p^2 \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial x_1^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2} = 0 \quad l = 1, \dots, N \\ \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial t^2} - \alpha_l V_s^2 \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial x_1^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2} = 0 \quad l = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

### 7.2.5.1 Stabilité des conditions approchées

Nous considérons le problème mixte suivant,

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ équations de l'élastodynamique dans } \Omega \\ \bullet \text{ conditions aux limites (7.2.9) sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Pour analyser sa stabilité, nous allons passer par le critère de Kreiss.  $(P)$ , apparaît comme un système en  $(u_1, u_2, A_p, A_s)$ . Sans entrer dans les détails, la méthode de Kreiss consiste à étudier les solutions particulières de  $(P)$  qui sont de la forme,

$$(7.2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{u}(k, \omega, x_2) = \left\{ \widehat{\alpha}_p \begin{pmatrix} ik \\ -i \frac{\xi_p}{V_p} \end{pmatrix} e^{-\left(i \frac{\xi_p}{V_p} x_2\right)} + \widehat{\alpha}_s \begin{pmatrix} -i \frac{\xi_s}{V_s} \\ -ik \end{pmatrix} e^{-\left(i \frac{\xi_s}{V_s} x_2\right)} \right\} e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ A_p(x_1, t) = \widehat{A}_p e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad A_s(x_1, t) = \widehat{A}_s e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{array} \right.$$

Plus précisément il s'agit de démontrer qu'il n'existe pas de solution de cette forme vérifiant,

$$(7.2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet k \in \mathbb{R}, k \neq 0 \\ \bullet \text{Im}(\omega) \leq 0, \omega \neq 0 \end{array} \right.$$

On dit alors que le problème mixte  $(P)$  est fortement stable au sens de Kreiss. Nous allons établir le théorème suivant.

**Théorème 7.2.1** *Sous les conditions*

$$(7.2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet 0 \leq \alpha_l < 1, \beta_l \geq 0, \quad 1 \leq l \leq N \\ \bullet 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{1 - \alpha_l} > 0 \end{array} \right.$$

le problème mixte (P) est fortement stable au sens de Kreiss.

**Démonstration.**

Elle est très simple et s'appuie sur un résultat bien connu issu de l'analyse de l'équation des ondes scalaires qui exprime que pour  $k \in \mathbb{R}$  les équations en  $\omega$ ,

$$(7.2.20) \quad \begin{cases} \xi_p + \xi_p^N = 0 \\ \xi_s + \xi_s^N = 0 \end{cases}$$

n'ont pas de solution dans le demi plan complexe  $Im(\omega) \leq 0$ . Par construction (7.2.17) satisfait les équations de l'élastodynamique. Il ne reste plus qu'à vérifier les conditions aux limites (7.2.9). Celles ci conduisent à un système linéaire en  $(\widehat{\alpha}_p, \widehat{\alpha}_s, \widehat{A}_p, \widehat{A}_s)$ ,

$$(7.2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \left[ (ik) \left( -i \frac{\xi_p}{V_p} \right) \widehat{\alpha}_p + \left( k^2 - \frac{\omega^2}{V_s^2} \right) \widehat{\alpha}_s + (ik) \left( -i \frac{\xi_p}{V_p} \widehat{\alpha}_p - ik \widehat{\alpha}_s \right) \right] \\ = -\frac{\mu}{V_s^2} \omega^2 \widehat{A}_s + 2\mu(ik) \left( -i \frac{\xi_p}{V_p} \widehat{\alpha}_p - ik \widehat{\alpha}_s \right) \\ (\lambda + 2\mu) \left[ \left( k^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2} \right) \widehat{\alpha}_p + (ik) \left( i \frac{\xi_s}{V_s} \right) \widehat{\alpha}_s \right] + \lambda(ik) \left( ik \widehat{\alpha}_p - i \frac{\xi_s}{V_s} \widehat{\alpha}_s \right) = \\ -\frac{\lambda + 2\mu}{V_p^2} \omega^2 \widehat{A}_p - 2\mu(ik) \left( ik \widehat{\alpha}_p - i \frac{\xi_s}{V_s} \widehat{\alpha}_s \right) \\ ik \widehat{\alpha}_p - i \frac{\xi_s}{V_s} \widehat{\alpha}_s = ik \widehat{A}_p + i \frac{\xi_s^N}{V_s} \widehat{A}_s \\ -i \frac{\xi_p}{V_p} \widehat{\alpha}_p - ik \widehat{\alpha}_s = -ik \widehat{A}_s + i \frac{\xi_p^N}{V_p} \widehat{A}_p \end{array} \right.$$

dont il s'agit de montrer qu'il n'admet que la solution nulle. Or la première équation de (7.2.21) se réécrit,

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{V_s^2} \right) \widehat{\alpha}_s + k^2 \widehat{\alpha}_s = -\frac{\omega^2}{V_s^2} \widehat{A}_s + 2k^2 \widehat{\alpha}_s$$

soit encore,

$$\frac{\omega^2}{V_s^2} (\widehat{\alpha}_s - \widehat{A}_s) = 0$$

ce qui entraîne, pour  $\omega \neq 0$ ,  $\widehat{\alpha}_s = \widehat{A}_s$ .

De même la deuxième équation de (7.2.21) se réécrit

$$(\lambda + 2\mu) \left( k^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2} \right) \widehat{\alpha}_p - \lambda k^2 \widehat{\alpha}_p = 2\mu k^2 \widehat{\alpha}_p - \frac{\lambda + 2\mu}{V_p^2} \omega^2 \widehat{A}_p$$

ce qui fournit,

$$\frac{\omega^2}{V_p^2} (\widehat{\alpha}_p - \widehat{A}_p) = 0$$

donc, toujours pour  $\omega \neq 0$ ,  $\widehat{\alpha}_p = \widehat{A}_p$ .

En les reportant dans les deux dernières équations de (7.2.21) nous obtenons,

$$\begin{cases} i \frac{1}{V_s} (\xi_s + \xi_s^N) \widehat{\alpha}_s = 0 \\ i \frac{1}{V_p} (\xi_p + \xi_p^N) \widehat{\alpha}_p = 0 \end{cases}$$

qui entraîne, puisque  $\xi_s + \xi_s^N \neq 0$  et  $\xi_p + \xi_p^N \neq 0$ ,  $\widehat{\alpha}_s = \widehat{\alpha}_p = 0$  et par suite  $\widehat{A}_s = \widehat{A}_p = 0$ . ■

Remarquons que ce résultat de stabilité ne s'applique pas aux conditions d'ordre 1 et 1/2 définies précédemment car ces conditions ne découlent pas du système général (7.2.9).

### 7.2.6 Étude des conditions approchées en termes de coefficients de réflexion

Nous allons prouver dans cette section le résultat suivant. Les coefficients de réflexion pour la famille de conditions absorbantes définie par (7.2.14) sont donnés par,

$$\begin{aligned} R_{pp} &= \frac{\cos(\theta) - \cos_{app}(\theta)}{\cos(\theta) + \cos_{app}(\theta)} = \frac{(\cos(\theta) - 1)^{2N+1}}{(\cos(\theta) + 1)^{2N+1}}, & R_{ps} &= 0, \\ R_{ss} &= -\frac{\cos(\theta) - \cos_{app}(\theta)}{\cos(\theta) + \cos_{app}(\theta)} = -\frac{(\cos(\theta) - 1)^{2N+1}}{(\cos(\theta) + 1)^{2N+1}}, & R_{sp} &= 0, \end{aligned}$$

avec  $\cos_{app}(\theta) = 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta)}$

Ce qui implique que nous avons

$$\begin{aligned} R_{pp} &= O(\theta^{4N+2}) & R_{ps} &= 0, \\ R_{ss} &= O(\theta^{4N+2}), & R_{sp} &= 0, \end{aligned}$$

et donc la condition correspondant à  $N$  fractions rationnelles est une condition d'ordre  $2N + 1$ . Ce résultat est très intéressant; il implique que, avec ces conditions absorbantes, nous avons une sorte de découplage entre les ondes P et S. Quand une onde plane P (resp. S) arrive sur un bord absorbant il n'y a pas de réflexion en ondes S (resp. P). De plus, les coefficients de réflexion  $R_{pp}$  et  $R_{ss}$  sont égaux (à un signe près), ne dépendent pas du coefficient de Poisson  $\nu$  et coïncident avec le coefficient de réflexion obtenu par F. Collino pour les conditions absorbantes d'ordre élevée pour l'équation des ondes. L'expression de  $R_{pp}$  montre par ailleurs, que la réflexion est directement liée au défaut d'approximation de la racine carrée par les fractions rationnelles. L'objectif étant bien évidemment d'obtenir le coefficient de réflexion le plus faible possible, nous pouvons choisir les coefficients  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  qui minimisent  $R_{pp}$ . Cependant, des études qui ont été menées pour le problème de l'équation des ondes [38, 39], montrent que l'approximation de Padé donne des meilleurs résultats. Nous avons représenté

sur la figure suivante (fig. 7.2.5) la variation de module des coefficients de réflexion  $|R_{pp}| = |R_{ss}|$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ . Ces courbes correspondent aux approximations de Padé avec  $L = 1, 2, 3$ .

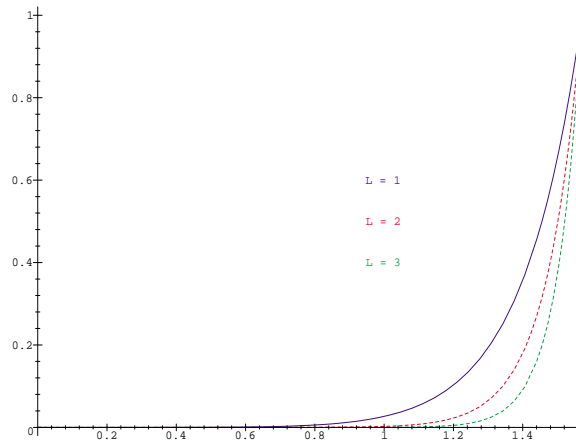


FIG. 7.2.5: Le module  $|R_{pp}| = |R_{ss}|$  en fonction de  $\theta$  pour les conditions absorbantes correspondant aux approximations de Padé avec  $L = 1, 2, 3$ .

Nous pouvons remarquer sur la figure 7.2.5 l'amélioration induite par une approximation d'ordre élevée: en augmentant l'ordre de l'approximation (le nombre des fractions rationnelles) on obtient un coefficient de réflexion qui reste faible pour des angles d'incidence de plus en plus grands.

### 7.2.6.1 Réflexion d'une onde P

Soient les trois ondes harmoniques planes,

$$\begin{aligned}
 \vec{u}^{(0)} &= A_0 \vec{p}^{(0)} e^{ik_0(\vec{p}^{(0)} \cdot \vec{x} - V_p t)} & \text{où} & \quad \vec{p}^{(0)} = (\sin(\theta), \cos(\theta)) \\
 \vec{u}^{(1)} &= A_1 \vec{p}^{(1)} e^{ik_1(\vec{p}^{(1)} \cdot \vec{x} - V_p t)} & \text{où} & \quad \vec{p}^{(1)} = (\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) \\
 \vec{u}^{(2)} &= A_2 \vec{d}^{(2)} e^{ik_2(\vec{p}^{(2)} \cdot \vec{x} - V_s t)} & \text{où} & \quad \vec{d}^{(2)} = (\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \\
 & & \text{et} & \quad \vec{p}^{(2)} = (\sin(\theta_2), -\cos(\theta_2))
 \end{aligned}
 \tag{7.2.22}$$

On dit que l'onde P  $\vec{u}^{(0)}$  se réfléchit en une onde P  $\vec{u}^{(1)}$  et une onde S  $\vec{u}^{(2)}$  si  $\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}$  vérifie le système (7.2.14) (en  $x_2 = 0$ ),

$$(7.2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \sigma_{21} = \mu \left\{ \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 A_s}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\} \\ (ii) \quad \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ (iii) \quad u_1 = \frac{\partial A_p}{\partial x_1} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_s} \frac{\partial \phi_l^s}{\partial t} \\ (iv) \quad u_2 = -\frac{\partial A_s}{\partial x_1} - \frac{1}{V_p} \frac{\partial A_p}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l}{V_p} \frac{\partial \phi_l^p}{\partial t} \\ (v) \quad \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial t^2} - \alpha_l V_p^2 \frac{\partial^2 \phi_l^p}{\partial x_1^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2} = 0, \quad \forall l = 1, \dots, N \\ (vi) \quad \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial t^2} - \alpha_l V_s^2 \frac{\partial^2 \phi_l^s}{\partial x_1^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 A_s}{\partial x_1^2} = 0, \quad \forall l = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

Comme pour les conditions d'ordre 1 et 1/2 par la linéarité des équations nous avons les relations,

$$(7.2.24) \quad \begin{aligned} k_0 &= k_1, \quad k_0 V_p = k_2 V_s \\ \sin(\theta) &= \sin(\theta_1), \quad \cos(\theta) = \cos(\theta_1), \quad k_2 \sin(\theta_2) = k_0 \sin(\theta) \end{aligned}$$

Donc on a, (dans ce qui suit, on omet systématiquement l'exponentielle  $e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_p t)}$ ),

$$u_1 = (A_0 + A_1) \sin(\theta) + A_2 \cos(\theta_2)$$

$$u_2 = (A_0 - A_1) \cos(\theta) + A_2 \frac{V_s}{V_p} \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = (A_0 + A_1) i k_0 \sin^2(\theta) + i k_0 A_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = (A_0 - A_1) i k_0 \sin(\theta) \cos(\theta) + i k_0 A_2 \frac{V_s}{V_p} \sin^2(\theta)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = (A_0 - A_1) i k_0 \sin(\theta) \cos(\theta) - i k_0 A_2 \frac{V_p}{V_s} \cos^2(\theta_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = (A_0 + A_1) i k_0 \sin(\theta) \cos(\theta) - i k_0 A_2 \sin(\theta) \cos(\theta_2)$$

et

$$\sigma_{21} = 2\mu i (A_0 - A_1) k_0 \cos(\theta) \sin(\theta) + \mu i A_2 k_0 \left( \frac{V_s}{V_p} \sin^2(\theta) - \frac{V_p}{V_s} \cos^2(\theta_2) \right)$$

$$\sigma_{22} = \lambda i (A_0 + A_1) k_0 + 2\mu i k_0 \cos^2(\theta) - 2\mu i A_2 k_0 \sin(\theta) \cos(\theta_2)$$

De plus la linéarité des équations implique que les inconnues  $A_p$ ,  $A_s$ ,  $\phi_l^p$  et  $\phi_l^s$  s'écrivent sous la forme suivante,

$$A_p(x_1, t) = A_{p0} e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_p t)}$$

$$A_s(x_1, t) = A_{s0} e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_p t)}$$

$$\phi_l^p(x_1, t) = \Phi_l^p e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_p t)}, \quad \forall l = 1, \dots, N$$

$$\phi_l^s(x_1, t) = \Phi_l^s e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_p t)}, \quad \forall l = 1, \dots, N$$

En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation (7.2.23)-(i) on obtient,

$$A_{s0} = \frac{iV_s A_2}{k_0 V_p}$$

Par (7.2.23)-(ii) on obtient,

$$A_{p0} = -\frac{i(A_0 + A_1)}{k_0}$$

Par (7.2.23)-(v) on obtient,

$$\Phi_l^p(\alpha_l \sin^2(\theta) - 1) = -A_{p0} \sin^2(\theta)$$

ou encore,

$$\Phi_l^p = \frac{i(A_0 + A_1) \sin^2(\theta)}{k_0(\alpha_l \sin^2(\theta) - 1)}, \quad \forall l = 1, \dots, N$$

L'équation (7.2.23)-(vi) conduit à,

$$\Phi_l^s(\alpha_l V_s^2 \sin^2(\theta) - V_p^2) = -V_s^2 \sin^2(\theta) A_{s0}$$

d'où

$$\Phi_l^s = -\frac{iV_s^3 \sin^2(\theta) A_2}{k_0 V_p(\alpha_l V_s^2 \sin^2(\theta) - V_p^2)}$$

Ensuite en utilisant les expressions précédentes dans (7.2.23)-(iii) (et après quelques calculs) on obtient

$$A_2 \left( \cos(\theta_2) + 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta_2)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta_2)} \right) = 0$$

d'où

$$(7.2.25) \quad A_2 = 0 \Rightarrow R_{ps} = 0$$

car on ne peut pas avoir

$$\left( \cos(\theta_2) + 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta_2)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta_2)} \right) = 0$$

En effet la quantité

$$\cos_{app}(\theta_2) = 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta_2)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta_2)}$$



est l'approximation de  $\sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)} = \cos(\theta_2)$  et donc on a

$$\left( \cos(\theta_2) + 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta_2)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta_2)} \right) = \cos(\theta_2) + \cos_{app}(\theta_2) \neq 0.$$

Finalement, l'équation (7.2.23)-(iv) conduit à,

$$(7.2.26) \quad R_{pp} = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\cos(\theta) - \cos_{app}(\theta)}{\cos(\theta) + \cos_{app}(\theta)}$$

avec

$$\cos_{app}(\theta) = 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta)}$$

### 7.2.6.2 Réflexion d'une onde S

Soient les trois ondes harmoniques planes,

$$\vec{u}^{(0)} = A_0 \vec{d}^{(0)} e^{ik_0(\vec{p}^{(0)} \vec{x} - V_p t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(0)} = (\cos(\theta), -\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \vec{p}^{(0)} = (\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\vec{u}^{(1)} = A_1 \vec{d}^{(1)} e^{ik_1(\vec{p}^{(1)} \vec{x} - V_p t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(1)} = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \quad \text{et} \quad \vec{p}^{(1)} = (\sin(\theta_1), -\cos(\theta_1))$$

$$\vec{u}^{(2)} = A_2 \vec{p}^{(2)} e^{ik_2(\vec{p}^{(2)} \vec{x} - V_s t)} \quad \text{où} \quad \vec{d}^{(2)} = (\sin(\theta_2), -\cos(\theta_2))$$

On dit que l'onde S  $\vec{u}^{(0)}$  se réfléchit en une onde S  $\vec{u}^{(1)}$  et une onde P  $\vec{u}^{(2)}$  si  $\vec{u} = \vec{u}^{(0)} + \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}$  vérifie le système (7.2.23). Nous avons alors,

$$k_0 = k_1, \quad k_0 V_s = k_2 V_p$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta_1), \quad \cos(\theta) = \cos(\theta_1), \quad k_2 \sin(\theta_2) = k_0 \sin(\theta)$$

Donc on a, (dans ce qui suit, on omet systématiquement l'exponentielle  $e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_s t)}$ ),

$$u_1 = (A_0 + A_1) \cos(\theta) + A_2 \frac{V_p}{V_s} \sin(\theta)$$

$$u_2 = (-A_0 + A_1) \sin(\theta) - A_2 \cos(\theta_2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = (A_0 + A_1) ik_0 \sin(\theta) \cos(\theta) + ik_0 A_2 \frac{V_p}{V_s} \sin^2(\theta)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = (-A_0 + A_1) ik_0 \sin^2(\theta) - ik_0 A_2 \sin(\theta) \cos(\theta_2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = (A_0 - A_1) ik_0 \cos^2(\theta) - ik_0 A_2 \sin(\theta) \cos(\theta_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -(A_0 + A_1) ik_0 \sin(\theta) \cos(\theta) + ik_0 A_2 \frac{V_s}{V_p} \cos^2(\theta_2)$$

et

$$\sigma_{21} = \mu i (A_0 - A_1) k_0 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - 2\mu i A_2 k_0 \sin(\theta) \cos(\theta_2)$$

$$\sigma_{22} = \lambda i A_2 k_0 \frac{V_s}{V_p} - 2\mu i k_0 (A_0 + A_1) \cos(\theta) \sin(\theta) + 2\mu i A_2 \frac{V_s}{V_p} k_0 \cos^2(\theta_2)$$

De plus la linéarité des équations implique que les inconnues  $A_p$ ,  $A_s$ ,  $\phi_l^p$  et  $\phi_l^s$  s'écrivent sous la forme suivante,

$$A_p(x_1, t) = A_{p0} e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_s t)}$$

$$A_s(x_1, t) = A_{s0} e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_s t)}$$

$$\phi_l^p(x_1, t) = \Phi_l^p e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_s t)}, \quad \forall l = 1, \dots, N$$

$$\phi_l^s(x_1, t) = \Phi_l^s e^{ik_0(\sin(\theta)x_1 - V_s t)}, \quad \forall l = 1, \dots, N$$

En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation (7.2.23)-(i) on obtient,

$$A_{s0} = -\frac{i(A_0 - A_1)}{k_0}$$

Par (7.2.23)-(ii) on obtient,

$$A_{p0} = -\frac{iA_2 V_p}{V_s k_0}$$

Par (7.2.23)-(v) on obtient,

$$\Phi_l^p = -\frac{iA_2 \sin^2(\theta) V_p^3}{V_s k_0 (V_s^2 - \alpha_l \sin^2(\theta) V_p^2)}, \quad \forall l = 1, \dots, N$$

L'équation (7.2.23)-(vi) conduit à,

$$\Phi_l^s = \frac{i(A_0 - A_1) \sin^2(\theta)}{k_0 (\alpha_l \sin^2(\theta) - 1)}$$

Ensuite en utilisant les expressions précédentes dans (7.2.23)-(iii) on obtient

$$R_{ss} = \frac{A_1}{A_0} = -\frac{\cos(\theta) - \cos_{app}(\theta)}{\cos(\theta) + \cos_{app}(\theta)}$$

Finalement, l'équation (7.2.23)-(iv) conduit à,

$$A_2 \left( \cos(\theta_2) + 1 - \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \sin^2(\theta_2)}{1 - \alpha_l \sin^2(\theta_2)} \right) = 0$$

d'où

$$A_2 = 0 \Rightarrow R_{sp} = 0$$

### 7.3 Résultats Numériques

Dans cette section on présente un exemple numérique qui montre la supériorité des conditions absorbantes d'ordre élevée. Le problème à résoudre est l'équation de l'élastodynamique linéaire en 2D dans un milieu homogène et isotrope, ( $V_p = 3000\text{m/sec}$ ,  $V_s = 2000\text{m/sec}$ ),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_1, u_2 : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \text{(I) } \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + V_s^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (V_p^2 - V_s^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + f(t)g_1(x_1, x_2) \\ \text{(II) } \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + V_s^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (V_p^2 - V_s^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + f(t)g_2(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

On résout le système précédent dans le domaine  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  avec les conditions de bord suivantes:

- $u_1 = u_2 = 0$  en  $x_1 = L_1 (= 225\text{Km})$
- $u_1 = u_2 = 0$  en  $x_1 = 0$
- $u_1 = u_2 = 0$  en  $x_2 = 0$
- Conditions absorbantes en  $x_2 = L_2 (= 150\text{Km})$

Nous avons réalisé quatre expériences, les deux premières avec les conditions absorbantes d'ordre 1/2 et 1, et les deux autres avec les conditions absorbantes d'ordre élevé correspondant aux approximations de Padé avec  $L = 1, 2$ . Pour la discrétisation des équations nous avons utilisé les éléments finis  $Q_1$ , et une discrétisation d'ordre 2 en temps. En ce qui concerne les conditions absorbantes nous avons utilisé un schéma implicite car nous n'avons pas réussi à trouver un schéma numérique explicite et stable. La source utilisée est une source d'onde P, plus précisément on a,

$$f(t) = \begin{cases} -2(\pi f_o)^2 (t - t_o) \exp(-(\pi f_o (t - t_o))^2) & \text{si } t_o \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$(g_1, g_2) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right)^3 \left(\frac{x_1 - x_1^s}{r}, \frac{x_2 - x_2^s}{r}\right) & \text{si } r \leq r_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $f_o = \frac{V_s}{hN}$  la fréquence de la source,  $N (= 15)$  le nombre de points par longueur d'onde S,  $h (= 750\text{m})$  le pas de discrétisation en espace,  $t_o = \frac{1}{f_o}$ ,  $t_1 = 2t_o$  et  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^s)^2 + (x_2 - x_2^s)^2}$ ,  $r_o = 4h$ . Sur la figure 7.3.1 nous avons représenté la composante  $u_1$  et  $u_2$  du déplacement à un instant  $T = 33.28\text{sec}$  pour les quatre expériences. Nous pouvons voir sur la figure 7.3.1 que la condition d'ordre 1 donne effectivement de meilleurs résultats que celle d'ordre 1/2. Pour les conditions absorbantes d'ordre élevé nous avons une amélioration remarquable des résultats. En fait pour cet exemple une fraction rationnelle ( $L = 1$ ) suffit pour donner de très bons résultats.

## 7.4 Conclusions

Nous avons présenté une famille des conditions absorbantes d'ordre élevé qui sont compatibles avec une formulation variationnelle. Du point de vue théorique nous avons montré la stabilité de ces conditions en utilisant le critère de Kreiss. Cependant du point de vue numérique la stabilité semble un problème délicat. Notamment nous n'avons pas réussi à trouver un schéma numérique explicite et stable. Nous sommes de ce fait ramenés à utiliser un schéma implicite qui couple toutes les inconnues au bord, ce qui donne lieu à une méthode assez chère tant du point de vue du stockage et du coût de calcul spécialement pour le problème 3D. De plus,

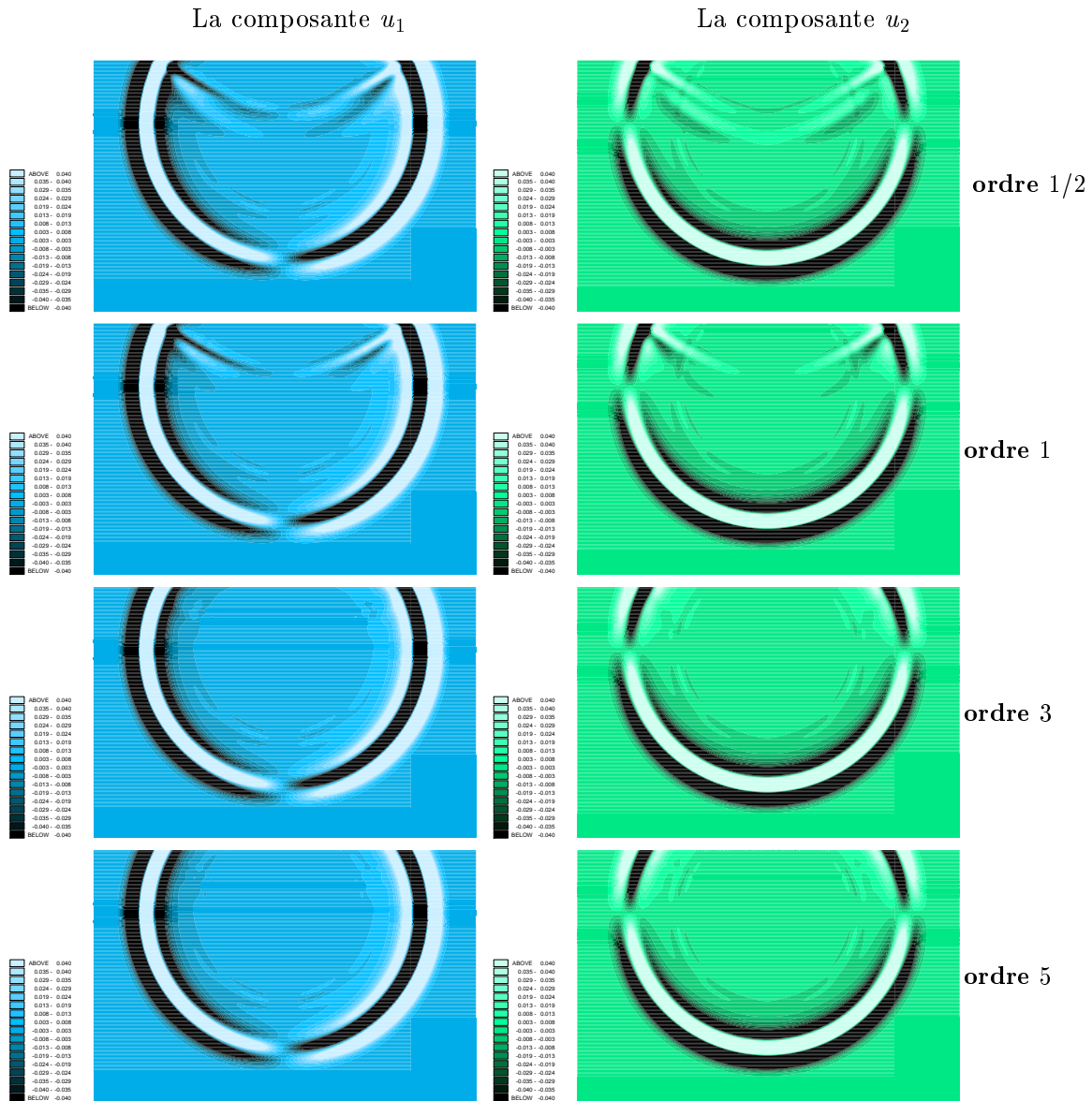


FIG. 7.3.1: Les deux composantes du déplacement à  $T = 33.28\text{sec}$ , avec des conditions absorbantes d'ordre 1/2, 1, 3 et 5 en allant du haut vers le bas.

la généralisation de ces conditions dans le cas plus général des milieux élastiques anisotropes est un problème qui comporte plusieurs difficultés techniques. Nous référons notamment aux travaux de E. Bécache [15] qui concernent la généralisation de la condition d'ordre  $1/2$  dans le cas des milieu anisotropes.

Afin de définir une méthode efficace qui permette de traiter le problème dans des milieux anisotropes et en 3D nous nous sommes intéressés au modèle des couches absorbantes parfaitement adaptées. Nous présentons notre démarche dans le chapitre suivant.



## Chapitre 8

# Couches absorbantes parfaitement adaptées

Dans ce chapitre nous présentons et analysons un modèle de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) pour la formulation en vitesse-contraintes de l'élastodynamique. Ce modèle a la propriété étonnante de ne générer aucune réflexion parasite à l'interface entre le milieu élastique et la couche absorbante. Ceci nous permet d'obtenir des réflexions très faibles même dans le cas de couches fines. Plusieurs expériences numériques montrent l'efficacité et la généralité du modèle. Ce chapitre est rédigé en anglais, car nous avons repris ici un article écrit avec F. Collino, accepté pour publication dans le journal *Geophysics*.

Cinquième partie

**Simulations numériques**





# Chapitre 9

## Résultats numériques

Pour illustrer les capacités de la méthode numérique que nous avons développée, nous allons présenter dans ce chapitre une série de résultats numériques. Nous considérons le problème de l'élastodynamique en deux et trois dimensions et dans le cas de milieux complexes, tels que milieux hétérogènes, anisotropes, comportant des fissures.

### 9.1 Notations

Soit  $\Omega$  un domaine non borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), occupé par un milieu élastique. Nous sommes intéressés ici par la modélisation de la propagation des ondes élastiques dans ce milieu. Dans ce qui suit nous supposons que la source (et/ou les données initiales) du problème sont à support compact  $K$  inclu dans  $\Omega$ . Pour caractériser le milieu de propagation nous donnerons les vitesses des ondes P et S ( $V_p$  et  $V_s$ ) dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope la densité volumique  $\rho$  et le tenseur d'élasticité  $C$ .

Afin de résoudre numériquement le problème de l'élastodynamique dans  $\Omega$  nous allons systématiquement borner le domaine de calcul en utilisant le modèle des couches absorbantes parfaitement adaptées que nous avons présenté au chapitre 8. Dans le cas des fissures ou des frontières libres la condition aux limites ( $\sigma \cdot n = 0$ ) est prise en compte avec la méthode des domaines fictifs présentée dans le chapitre 6. Ces deux techniques nous permettent de se ramener toujours à un domaine borné  $C$  d'une géométrie très simple, typiquement un rectangle dans le cas 2D et un parallélépipède rectangle dans le cas 3D.

Pour la discrétisation nous pouvons alors considérer un maillage volumique régulier composé de carrés (ou de cubes) de côté  $h$  et un maillage surfacique irrégulier permettant une bonne approximation de la géométrie de la fissure ou de la frontière libre. Pour la discrétisation en espace de la formulation en vitesse-contraintes de l'élastodynamique nous utilisons la nouvelle famille d'éléments finis mixtes décrite dans le chapitre 2. Plus précisément nous considérons ici l'élément fini de plus bas degré. La discrétisation en temps s'effectue ensuite à l'aide d'un schéma de différences finies d'ordre 2 (cf. chapitre 4). Pour choisir alors le pas de discrétisation en temps nous utilisons les résultats de l'analyse de stabilité donnés dans le chapitre 4. Plus précisément nous avons,

$$\Delta t = \alpha_{CFL}^d h, \quad d = 2, 3$$

avec  $\alpha_{CFL}^d$ ,  $d = 2, 3$  le coefficient de stabilité pour le nouveau schéma en 2 et 3 dimensions.

Ce qui correspond à,

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{CFL}^2 = \frac{1}{V_p}, \\ \alpha_{CFL}^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3V_p}. \end{array} \right.$$

Dans les expériences qui vont suivre nous utilisons une source excitatrice située au point  $S$  à l'intérieur du domaine de calcul. Ceci revient à résoudre le problème avec un second membre  $f(x, t)$  donné par

$$f(x, t) = F(t)\vec{g}(r) ,$$

avec

$$(9.1.1) \quad \left| \begin{array}{l} F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t - t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{si } t > 2t_0 \end{cases} , \\ t_0 = \frac{1}{f_0}, \quad f_0 = \frac{V_s}{h} \frac{1}{N_L} \text{ la fréquence centrale,} \\ N_L \text{ le nombre de points par longueur d'onde } S, \end{array} \right.$$

et  $\vec{g}(r)$  est la fonction radiale :

$$(9.1.2) \quad \vec{g}(r) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 1_{B_a} \vec{e}$$

où  $1_{B_a}$  est la fonction indicatrice du disque  $B_a$ , le disque de centre  $S$  et de rayon  $a (= 5h)$ . Dans le cas bidimensionnel nous avons,

$$(9.1.3) \quad \left| \begin{array}{l} (i) \quad \vec{e} = \left( \frac{x_1 - x_1^s}{r}, \frac{x_2 - x_2^s}{r} \right) \\ (ii) \quad \vec{e} = \left( -\frac{x_2 - x_2^s}{r}, \frac{x_1 - x_1^s}{r} \right) \\ (iii) \quad \vec{e} = (0, 1) \\ \text{avec } r = \sqrt{(x_1 - x_1^s)^2 + (y_1 - y_1^s)^2} \end{array} \right.$$

et dans le cas 3D,

$$(9.1.4) \quad \left| \begin{array}{l} (i) \quad \vec{e} = \left( \frac{x_1 - x_1^s}{r}, \frac{x_2 - x_2^s}{r}, \frac{x_3 - x_3^s}{r} \right) \\ \text{avec } r = \sqrt{(x_1 - x_1^s)^2 + (x_2 - x_2^s)^2 + (x_3 - x_3^s)^2} \\ (ii) \quad \vec{e} = \left( -\frac{x_3 - x_3^s}{r}, 0, \frac{x_1 - x_1^s}{r} \right) \\ \text{avec } r = \sqrt{(x_1 - x_1^s)^2 + (x_3 - x_3^s)^2} \end{array} \right.$$

Finalement, dans les couches absorbantes nous utilisons le modèle suivant pour la fonction  $d(x)$  (cf. chapitre 8)

$$(9.1.5) \quad d(x) = d_0 \left( \frac{x}{\delta} \right)^L ,$$

ou  $\delta$  est la largeur de la couche et  $d_0$  est un paramètre donné par

$$d_0 = \log\left(\frac{1}{R}\right) \frac{(L+1)V_p}{L\delta},$$

avec  $R = R_{pp}^\delta$  le coefficient de réflexion théorique. En pratique nous considérons  $L = 2$  ou  $L = 4$ .

## 9.2 Résultats dans le cas bidimensionnel

### 9.2.1 Milieu homogène isotrope, le cas du demi espace

Nous considérons ici le problème de l'élastodynamique dans le demi espace  $x_2 < 0$  avec une condition de surface libre sur l'axe  $x_2 = 0$ . Le milieu élastique considéré est un milieu homogène isotrope avec  $V_p = \sqrt{5}$  m/s et  $V_s = \sqrt{2}$  m/s. Nous plaçons une source d'ondes P au point  $S$  à la proximité de la surface libre, la géométrie du problème est illustrée sur la figure 9.2.1. Pour résoudre ce problème numériquement nous considérons un domaine borné

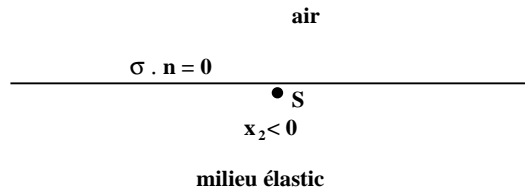


FIG. 9.2.1: *Le cas du demi espace*

$C = [0, 100\text{m}] \times [-100\text{m}, 0]$  et nous introduisons une couche absorbante (PML) de largeur  $\delta = 10h$  (cf. figure 9.2.2), le pas du maillage est  $h = 0.5$ . La source est située au point  $S$  de

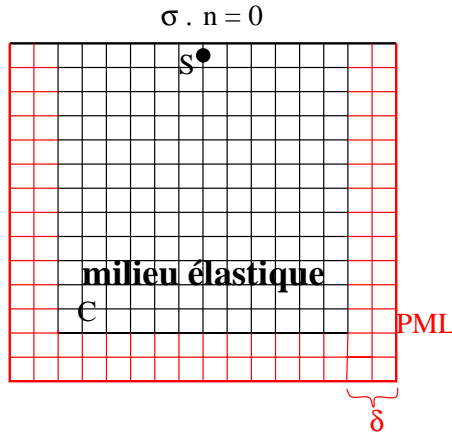


FIG. 9.2.2: *Le domaine borné, exemple de maillage*

coordonnées  $(50\text{m}, -3\text{m})$  et elle est décrite par les relations (9.1.1), (9.1.2) avec  $N_L = 10$  et le vecteur  $\vec{e}$  défini par (9.1.3)-(i). Le modèle que nous avons utilisé dans la couche absorbante est décrit par la relation (9.1.5) avec  $L = 2$  et  $R = 0.001$ .

Nous avons représenté sur les figures 9.2.3 à 9.2.6, la norme du champ de vitesses à différents instants. Sur ces figures nous remarquons la propagation de trois ondes volumiques:

les ondes de Pression émises par la source, les ondes de Pression issues de la réflexion de ces ondes sur la surface libre et finalement les ondes de Cisaillement réfléchies qui se propagent avec une vitesse inférieure. Nous pouvons également remarquer la propagation des ondes guidées par la surface libre, il s'agit des ondes de Rayleigh qui se propagent à une vitesse légèrement inférieure à la vitesse des ondes S. Nous avons choisi cette expérience afin de tester l'efficacité du modèle PML sur les ondes de Rayleigh qui sont généralement plus difficiles à absorber. Comme nous pouvons l'observer sur la figure 9.2.6 le coefficient de réflexion obtenu numériquement est environ 0.001, ce qui correspond à la valeur prévue par la théorie.

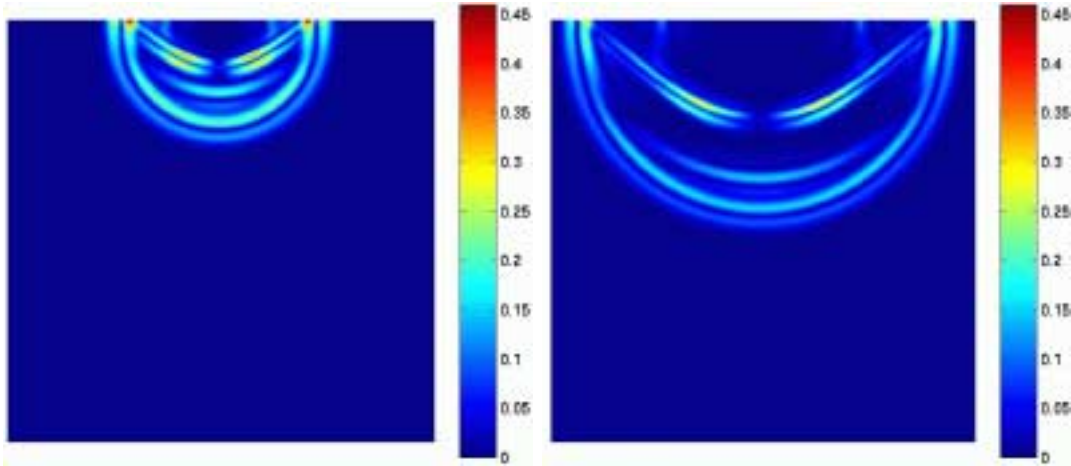


FIG. 9.2.3: La norme de la vitesse ( $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ) à l'instant  $t = 13.44s$  à gauche et à  $t = 22.4s$  à droite

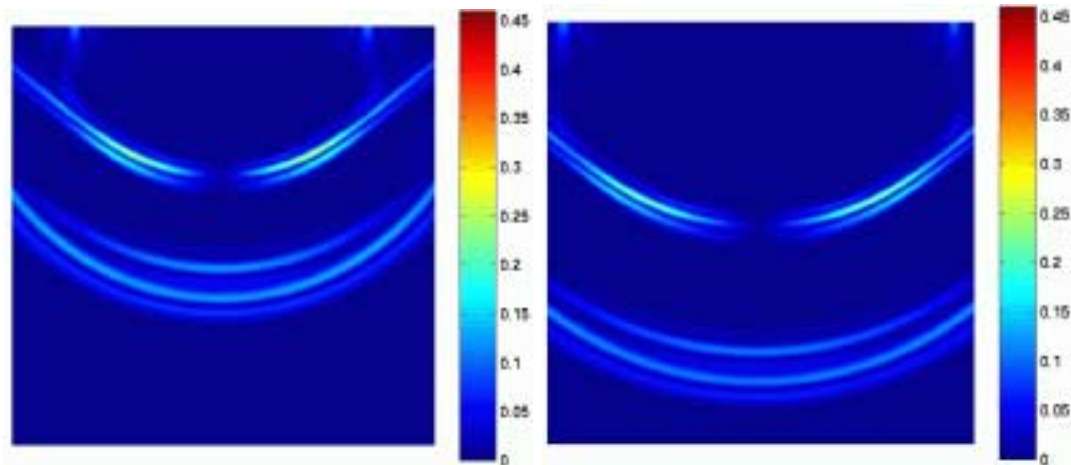


FIG. 9.2.4: La norme de la vitesse ( $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ) à l'instant  $t = 31.36s$  à gauche et à  $t = 40.32s$  à droite

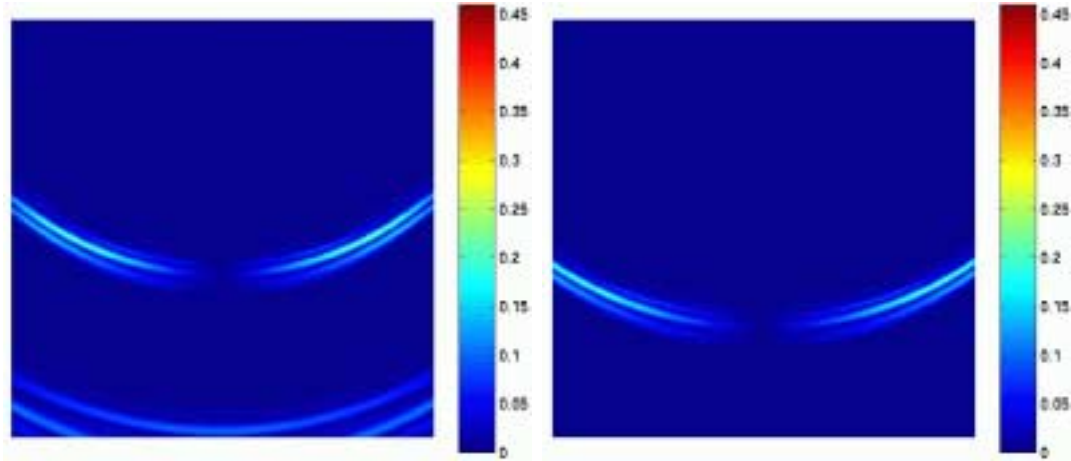


FIG. 9.2.5: La norme de la vitesse ( $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ) à l'instant  $t = 49.28s$  à gauche et à  $t = 58.24s$  à droite

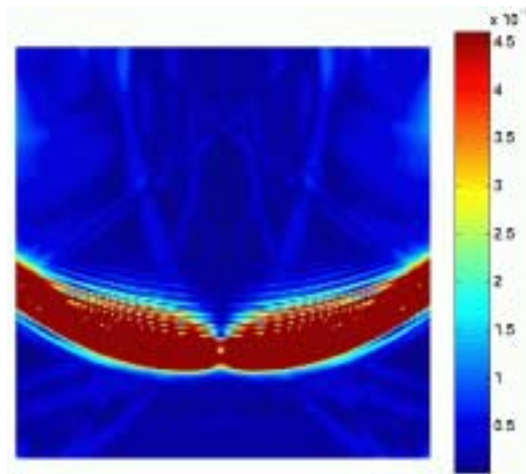


FIG. 9.2.6: La norme de la vitesse ( $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ) amplifiée par un facteur 100 à l'instant  $t = 58.24s$

### 9.2.2 Milieu homogène anisotrope.

Nous considérons ici un milieu élastique homogène anisotrope: le cristal apatite. La densité volumique de ce milieu est  $\rho = 3.2 \text{ gr/cm}^3$  et le tenseur d'élasticité  $C$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 16.7 & 6.6 & 0 \\ 6.6 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6.63 \end{pmatrix} 10^{11} \text{ Pa}$$

Le domaine de calcul est un carré et le maillage est composé de  $240 \times 240$  éléments de coté  $h = 0.33m$ . La source est située au milieu du domaine  $S = (40m, 40m)$ , elle est décrite par les relations (9.1.1), (9.1.2) avec  $N_L = 10$  et le vecteur  $\vec{e}$  défini par (9.1.3)-(iii). Le modèle que nous avons utilisé dans la couche absorbante est décrit par la relation (9.1.5) avec  $L = 2$ ,  $\delta = 5h$  et  $R = 0.01$ .

Dans le cas d'un milieu élastique homogène anisotrope on peut distinguer deux types d'ondes: les ondes quasi-longitudinales (QP) et les ondes quasi-transversales (QS). Avant de présenter les résultats numériques, nous avons illustré sur les figures 9.2.7 et 9.2.8 les fronts d'ondes et les amplitudes correspondant aux ondes QP et QS que nous avons calculés analytiquement.

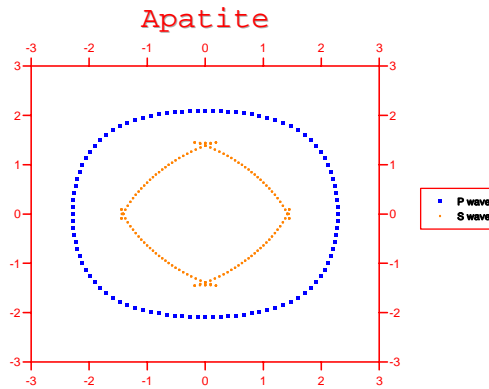


FIG. 9.2.7: Les frondes d'ondes pour l'apatite.

Sur la figure (9.2.9) nous avons représenté la norme de la vitesse à trois instants.

Nous pouvons remarquer que les résultats numériques confirment les prédictions théoriques, à savoir : l'amplitude de l'onde QP est plus faible que celle de l'onde QS, l'amplitude de l'onde QP est plus faible à proximité de l'axe  $x_1$  tandis que celle de l'onde QS est plus faible à proximité de l'axe  $x_2$ .

### 9.2.3 Applications en géophysique - milieu avec surface libre

Dans cet exemple nous considérons le problème de l'élastodynamique dans un domaine avec une surface libre de géométrie complexe, la géométrie du problème est illustrée sur la figure 9.2.10. Nous présentons deux expériences: la première dans un milieu homogène isotrope et la deuxième dans un milieu hétérogène isotrope. Pour résoudre numériquement ce problème nous utilisons la méthode des domaines fictifs. Plus précisément nous considérons un domaine borné  $C = [0, 80] \times [0, 80]$ , entouré de couches absorbantes (PML). Le maillage volumique sur

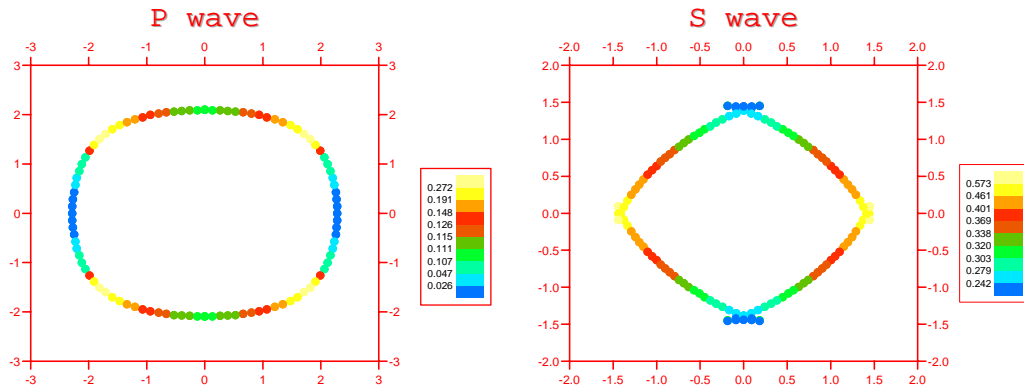


FIG. 9.2.8: L'amplitude des ondes QP à gauche et QS à droite.

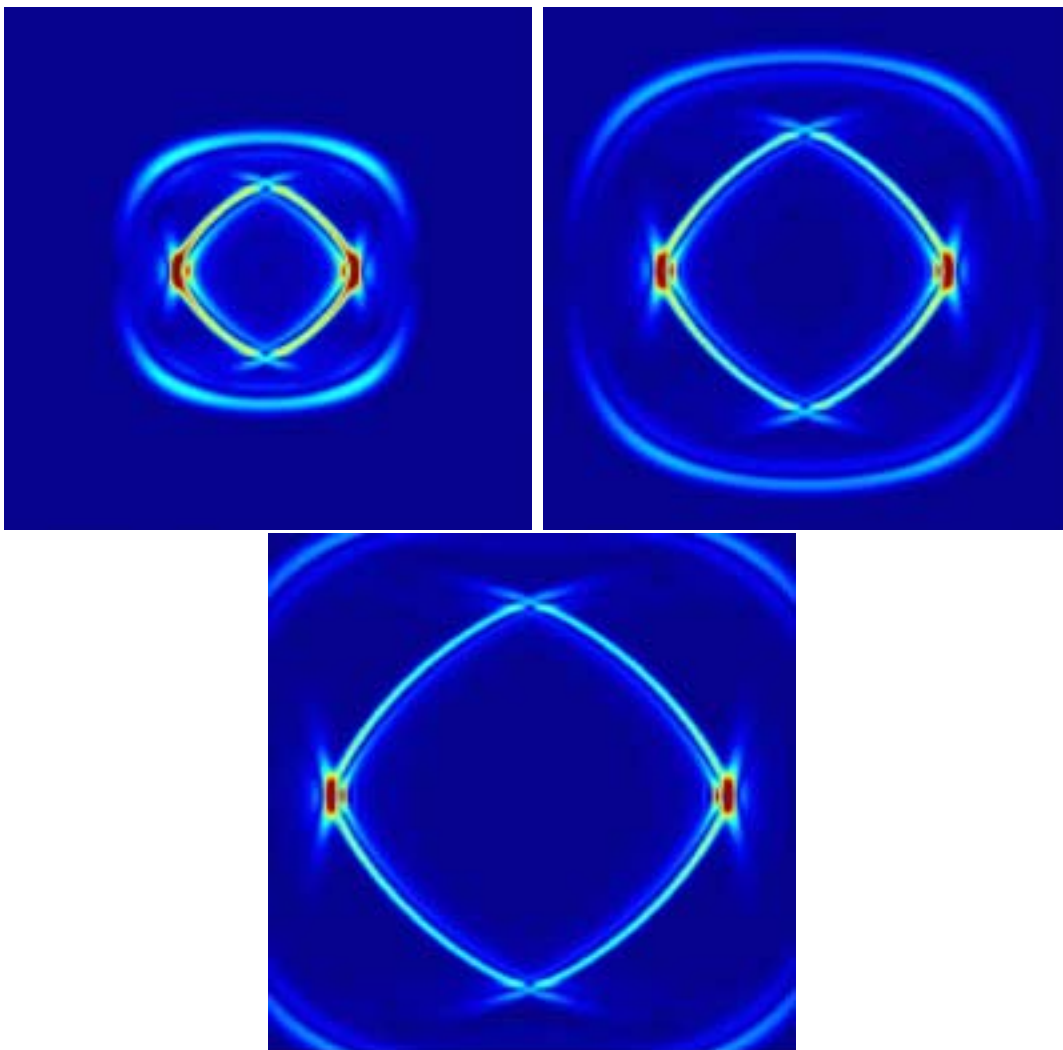


FIG. 9.2.9:  $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  à  $t = 11.67$  s (en haut à gauche), 17.51 s (en haut à droite) et 23.35 s (en bas)



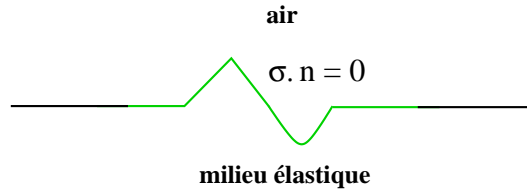


FIG. 9.2.10: La géométrie du problème

$C$  est un maillage régulier de pas  $h = \frac{1}{3}$ . Pour prendre en compte la condition aux limites sur  $\Gamma_S$  nous avons un deuxième maillage surfacique (cf. figure 9.2.11). La source est située à

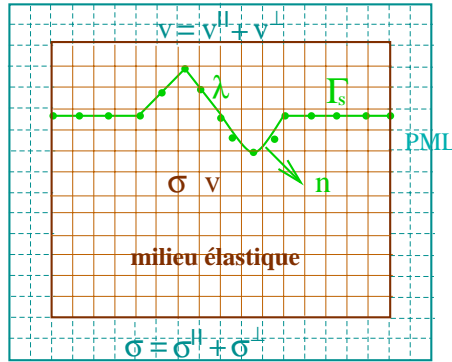


FIG. 9.2.11: Le problème en domaine borné, exemple de maillage.

proximité de la surface libre au point  $S$  (36.67, 56.67), elle est décrite par les relations (9.1.1), (9.1.2) avec  $N_L = 10$  et le vecteur  $\vec{e}$  défini par (9.1.3)-(i). Le modèle que nous avons utilisé dans la couche absorbante est décrit par la relation (9.1.5) avec  $L = 2$ ,  $\delta = 5h$  et  $R = 0.01$ .

Le milieu homogène est caractérisé par les vitesses  $V_p = \sqrt{5}$  m/s et  $V_s = \sqrt{2}$  m/s. Le milieu hétérogène est décrit par le modèle des vitesses illustré sur la figure 9.2.12 et nous avons  $\frac{\max V_p}{\min V_p} = 2.1$  et  $V_p = 1.6V_s$ . Pour la discrétisation nous avons approché ce modèle par des constantes par morceaux (une valeur par élément). Sur la figure 9.2.13 nous avons représenté la solution (la norme de la vitesse) pour le milieu homogène dans le domaine de calcul tout entier. Nous rappelons que d'un point de vue théorique la solution doit être nulle au dessus de la surface libre. D'un point de vue numérique, elle n'est pas identiquement nulle mais elle est en effet proche de zéro.

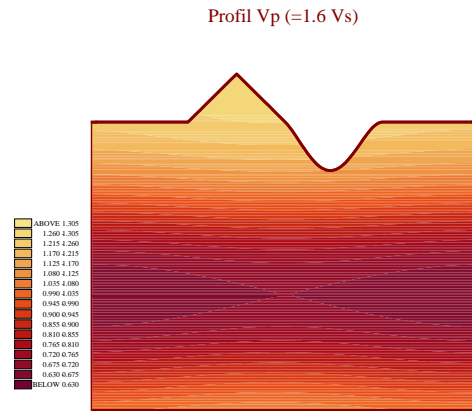


FIG. 9.2.12: *Le modèle des vitesses pour le milieu hétérogène*,  $\frac{\max V_p}{\min V_p} = 2.1$  et  $V_p = 1.6 V_s$ .

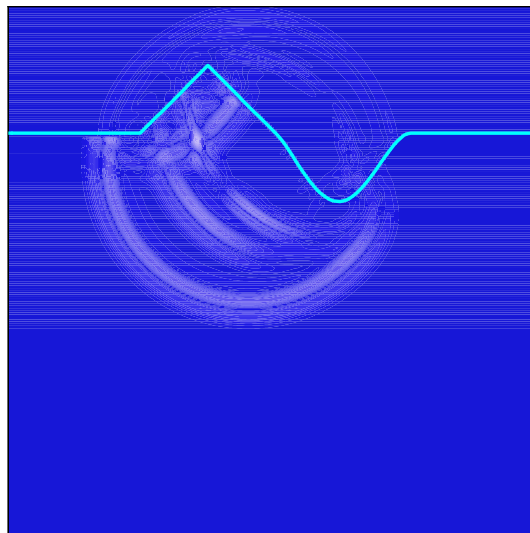
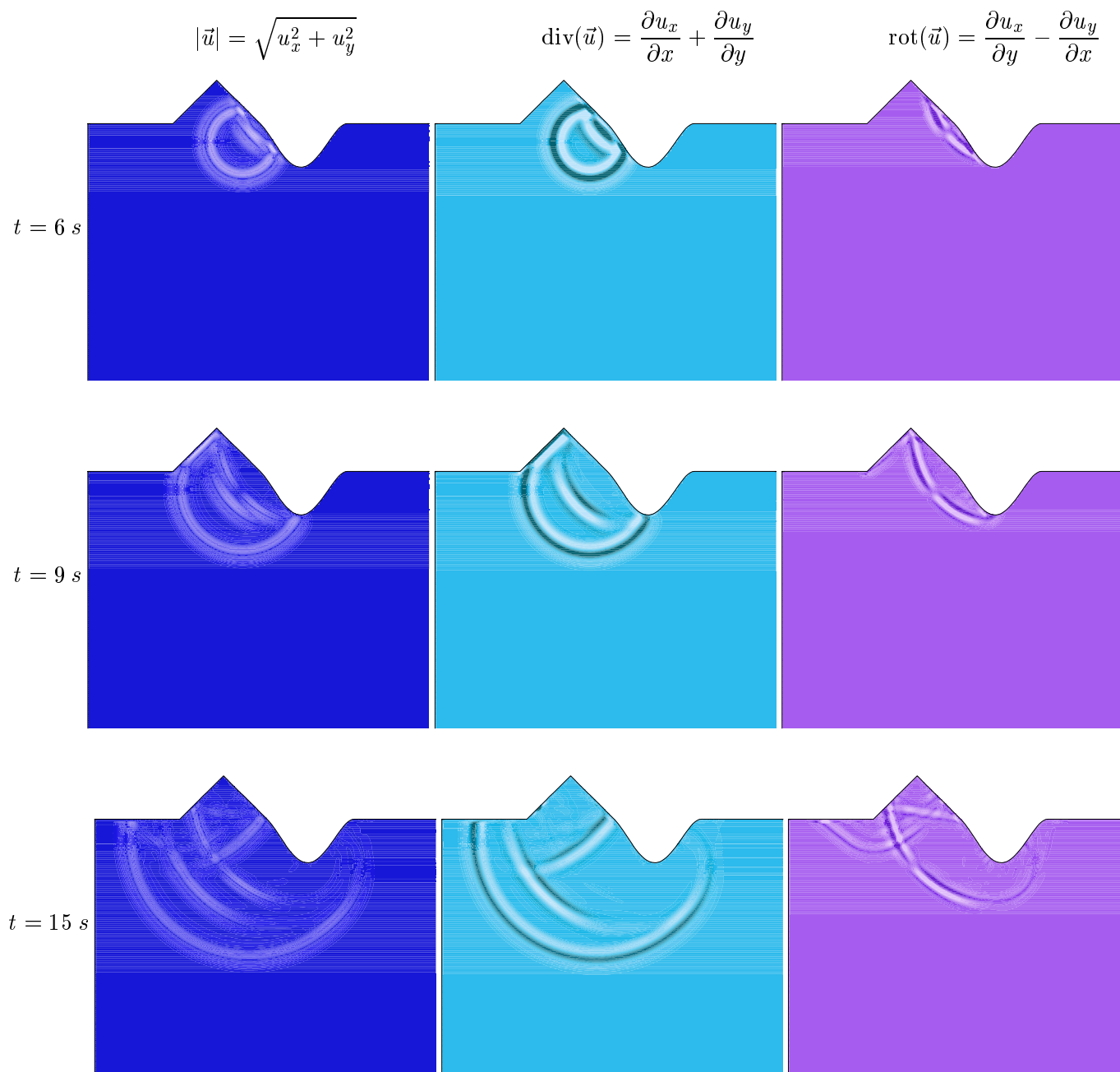
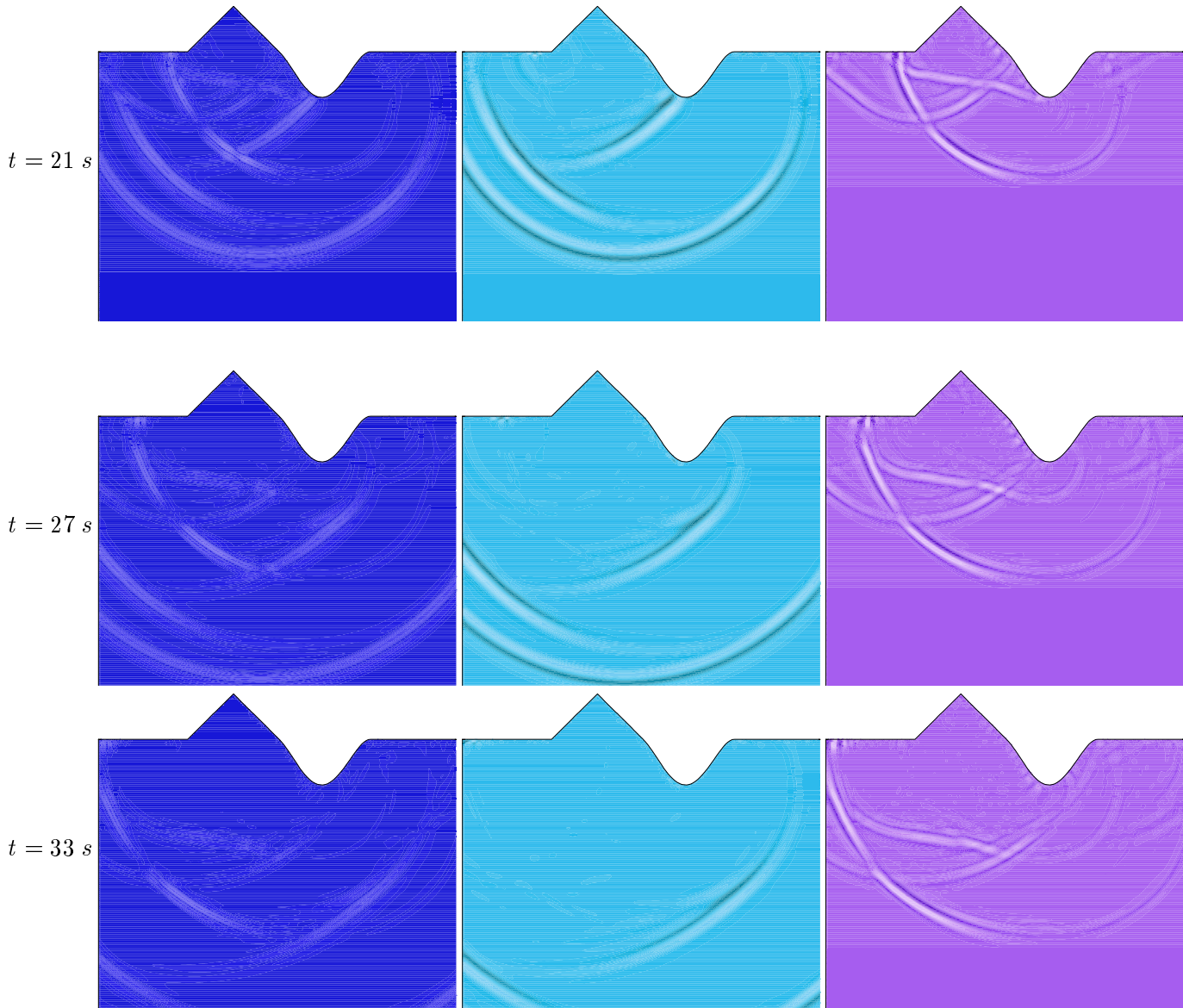


FIG. 9.2.13: *La norme de la vitesse* ( $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ) à  $t = 12s$

Nous présentons sur les figures suivantes la solution pour le problème posé en milieu homogène dans le domaine physique à différents instants.



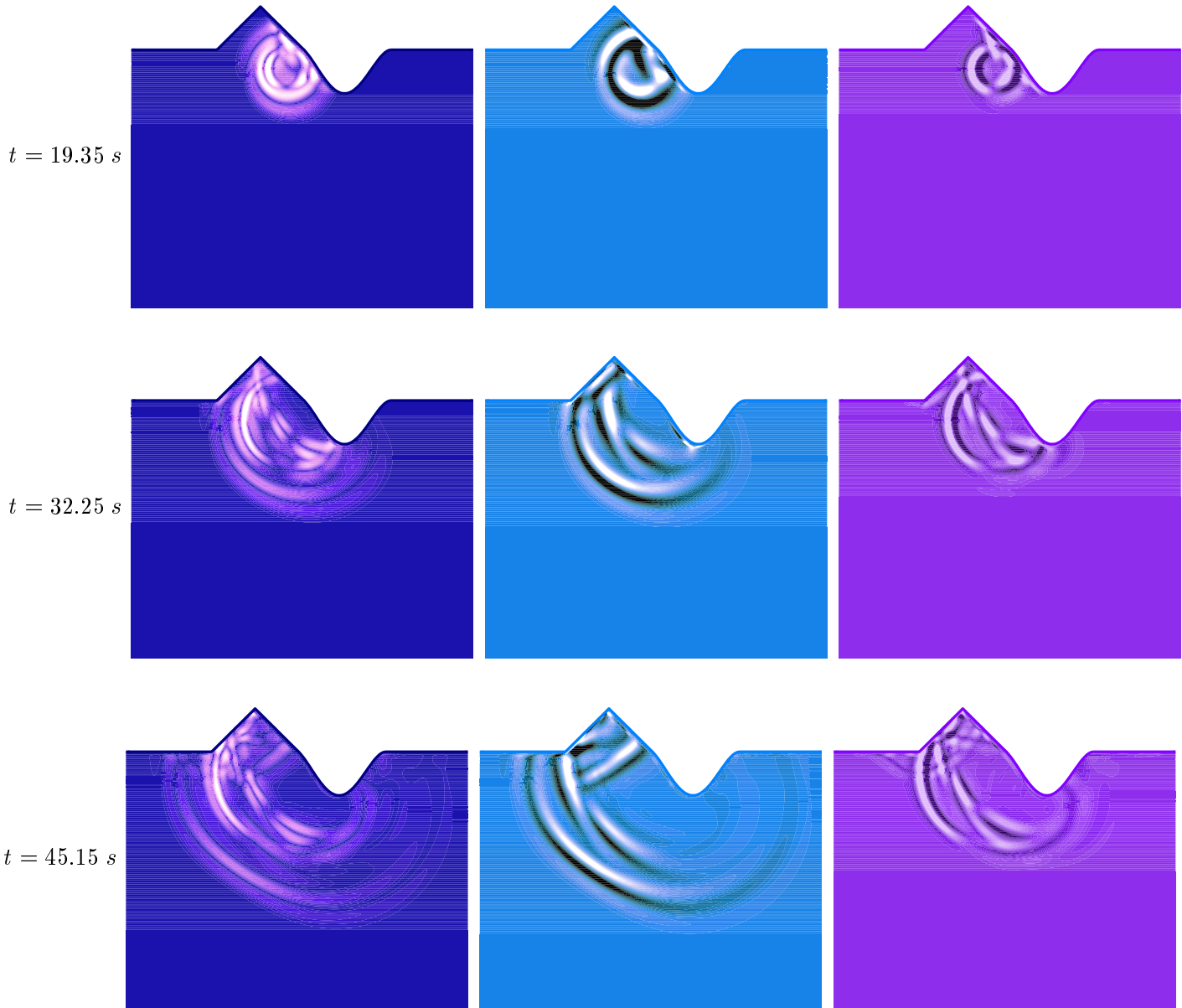


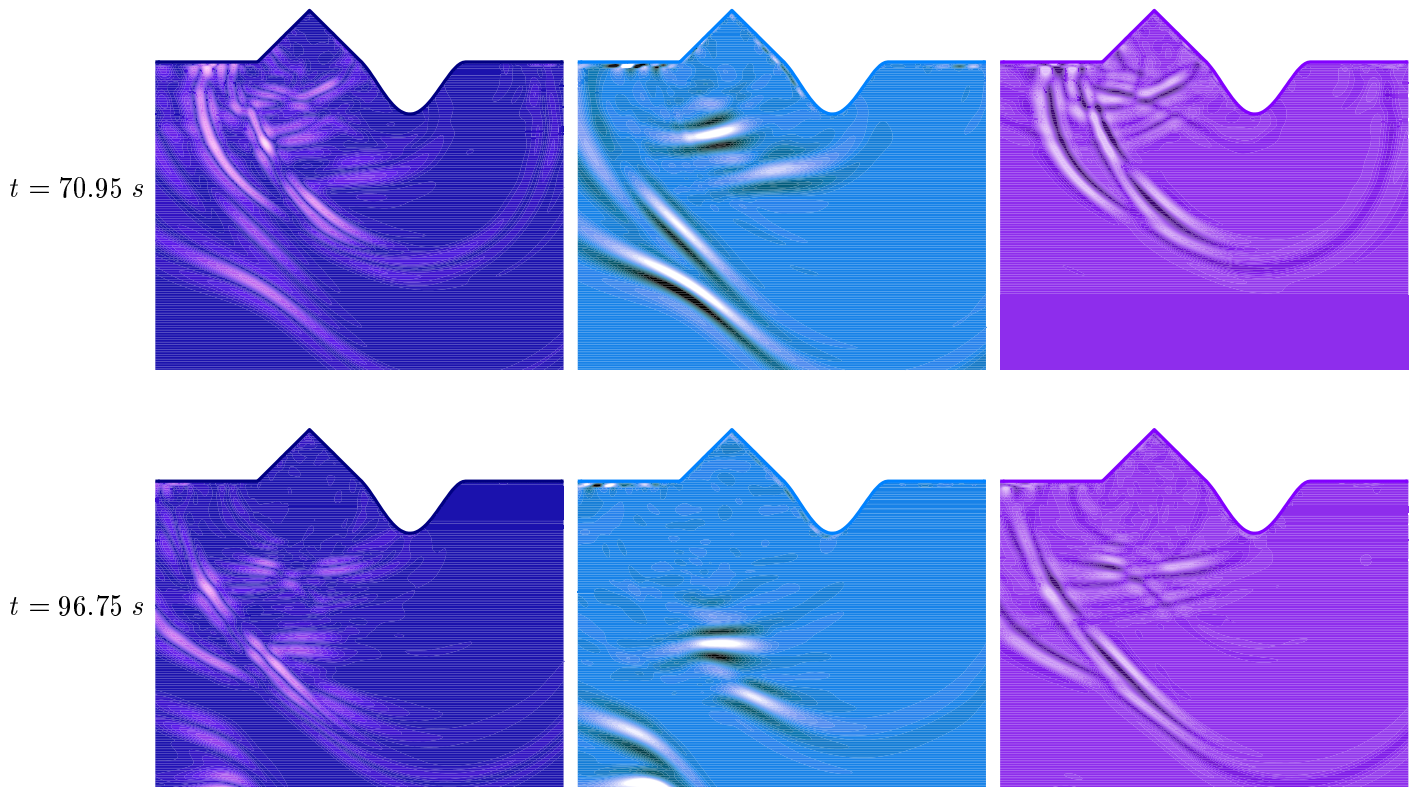
Nous présentons ensuite la solution pour le problème posé en milieu hétérogène.

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\text{rot}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}$$





La source que nous avons utilisée dans ces deux expériences correspond à une force radiale. Dans le cas du milieu homogène l'onde émise initialement par la source est une onde de Pression, comme nous pouvons l'observer sur les figures en remarquant que son rotationnel est nul. Cette onde se réfléchit ensuite sur la surface libre et donne naissance à une onde P et une onde S, comme dans le cas du demi plan. L'influence de la géométrie de la surface libre est certainement plus visible sur la partie rotationnel de la solution qui correspond aux ondes de Cisaillement. Comme le milieu est homogène l'énergie est équirépartie sur les fronts d'ondes. Nous pouvons voir également des ondes diffractées par les points anguleux de la topographie et des ondes de surface.

Dans le cas du milieu hétérogène les phénomènes sont plus complexes. La même source émet dans ce cas une onde de Pression mais aussi une onde de Cisaillement. Chacune de ces ondes est ensuite réfléchié par la surface libre et transformée en des ondes P et S. À cause de l'hétérogénéité du milieu, les fronts d'ondes ne sont plus circulaires et l'énergie est concentrée en certains endroits. Comme dans le cas du milieu homogène on observe également des ondes diffractées par les points anguleux de la topographie et des ondes de surface.

Dans les deux expériences on remarque que les couches PML font très bien leur travail: il n'y a pas des réflexions parasites induites par les bords artificiels (le coefficient de réflexion est ici 1%).

### 9.2.4 Application au contrôle non destructif- Milieu hétérogène anisotrope

Nous considérons ici un milieu hétérogène anisotrope. Il s'agit d'un milieu élastique linéaire composé de trois métaux différents, un isotrope (milieu 1) et deux anisotropes (milieux 2 et 3). La géométrie du problème est illustrée sur la figure 9.2.14. Le problème physique est posé initialement dans un domaine non borné (cf. figure 9.2.14- à gauche). Pour la modélisation numérique on introduit un domaine borné  $C = [20m, 10m]$  avec des couches absorbantes (PML) sur les trois cotés (cf. figure 9.2.14 - à droite). Les caractéristiques du milieu élastique

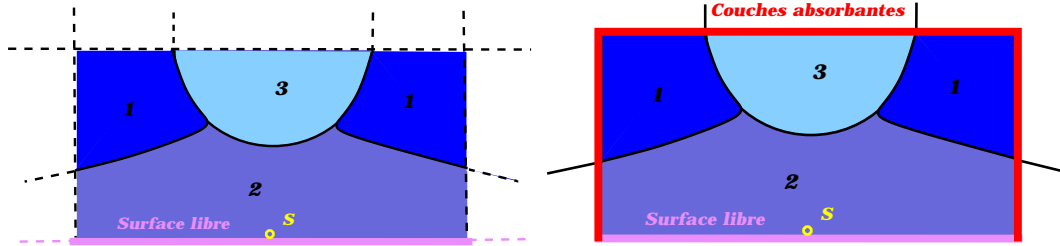


FIG. 9.2.14: La géométrie du problème du problème physique (à gauche), le domaine borné (à droite)

sont

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= 2.324, & c_{12}^1 &= 1.208, & c_{22}^1 &= 2.324, & c_{33}^1 &= 0.558 \\ c_{11}^2 &= 2.324, & c_{12}^2 &= 0.704, & c_{22}^2 &= 0.873, & c_{33}^2 &= 0.558 \\ c_{11}^3 &= 3.450, & c_{12}^3 &= 1.160, & c_{22}^3 &= 4.020, & c_{33}^3 &= 0.850 \end{aligned}$$

Les coefficients  $c_{13}$  et  $c_{23}$  sont nuls pour les trois métaux et la densité volumique est égale à 1.

Pour la discrétisation nous considérons un maillage régulier composé de carrés de côté  $h = 0.05m$ . Le modèle que nous avons utilisé dans la couche absorbante est décrit par la relation (9.1.5) avec  $L = 2$ ,  $\delta = 15h$  et  $R = 0.01$ .

Nous allons présenter trois expériences, dans la première nous considérons une source radiale située sur la surface libre au point  $(10m, 0m)$ , elle est décrite par les relations (9.1.1), (9.1.2) avec  $N_L = 10$  et le vecteur  $\vec{e}$  défini par (9.1.3)-(i).

Nous présentons sur la figure 9.2.15 la norme du champ de vitesses à différents instants.

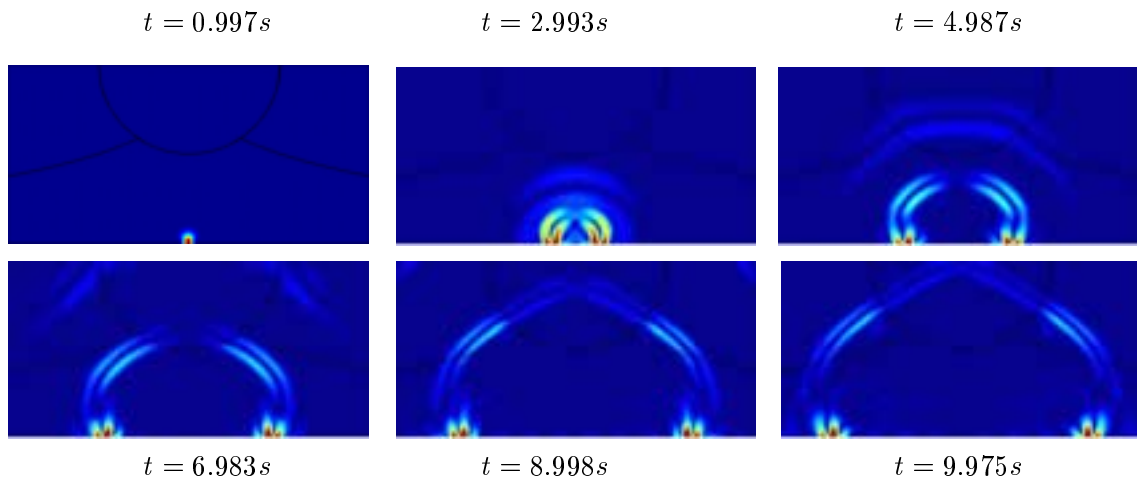


FIG. 9.2.15: Première expérience: Source radiale. La norme de la vitesse à différents instants.



Dans la deuxième expérience nous imposons le champ de pression suivant sur la surface libre,

$$\begin{cases} \sigma_{12}(x) = 0 \\ \sigma_{22}(x) = \begin{cases} P_0(x) (1 - \cos g(x)) \cos 2g(x) & \text{si } 0 \leq g(x) \leq 2\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

avec  $g(x)$  définie par

$$g(x) = 2\pi f_0 \left( t + \frac{x - x_{q1}}{\sqrt{2}V_p} \right)$$

$$P_0(x) = \begin{cases} \frac{P_0}{2} \left( 1 - \cos \pi \frac{x - x_{p1}}{x_p - x_{p1}} \right) & \text{pour } x_{p1} \leq x \leq x_p \\ P_0 & \text{pour } x_p \leq x \leq x_q \\ \frac{P_0}{2} \left( 1 - \cos \pi \frac{x - x_{q1}}{x_q - x_{q1}} \right) & \text{pour } x_q \leq x \leq x_{q1} \end{cases}$$

et où  $P_0 = 14.451Pa$ ,  $x_{p1} = 6.45m$ ,  $x_p = 6.7m$ ,  $x_q = 7.7m$ ,  $x_{q1} = 7.95m$  et  $f_0 = \frac{V_s}{h N_L}$  est la fréquence centrale (calculée avec  $V_s = (V_s)_{min}$  la vitesse d'ondes S minimale dans les trois métaux). L'objectif de cette expérience est de détecter la présence éventuelle d'une fissure. Nous supposons ici qu'une fissure est présente dans le solide, la géométrie du problème est illustrée sur la figure 9.2.16. La source génère une onde de Cisaillement qui est dirigée sur la

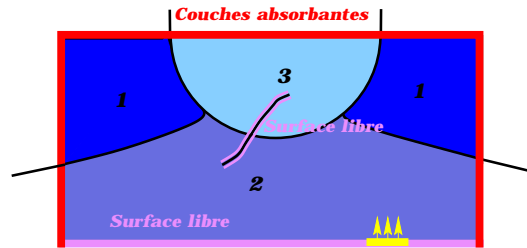


FIG. 9.2.16: La géométrie du problème avec fissure.

fissure. Nous présentons sur la figure 9.2.17 la norme de la vitesse à différents instants.

Dans la troisième expérience nous avons calculé la solution du problème avec les mêmes données que dans la deuxième expérience mais sans fissure. Nous présentons sur la figure 9.2.18 la différence entre la solution du problème avec fissure et celle du problème sans fissure, c'est à dire l'onde diffractée par la fissure. Les résultats les plus intéressants sont sans doute ceux de la troisième expérience qui concernent l'onde diffractée. On peut voir sur la figure 9.2.18 comment la présence de la fissure dans le milieu perturbe la propagation de l'onde initiale. Notre objectif avec cette expérience est d'illustrer les capacités de la méthode numérique, qui nous permet de modéliser les phénomènes de propagation des ondes dans des milieux complexes. On espère ainsi apporter une aide efficace à la compréhension et l'interprétation des résultats obtenus par EDF dans le cadre des expériences de contrôle non-destructif.

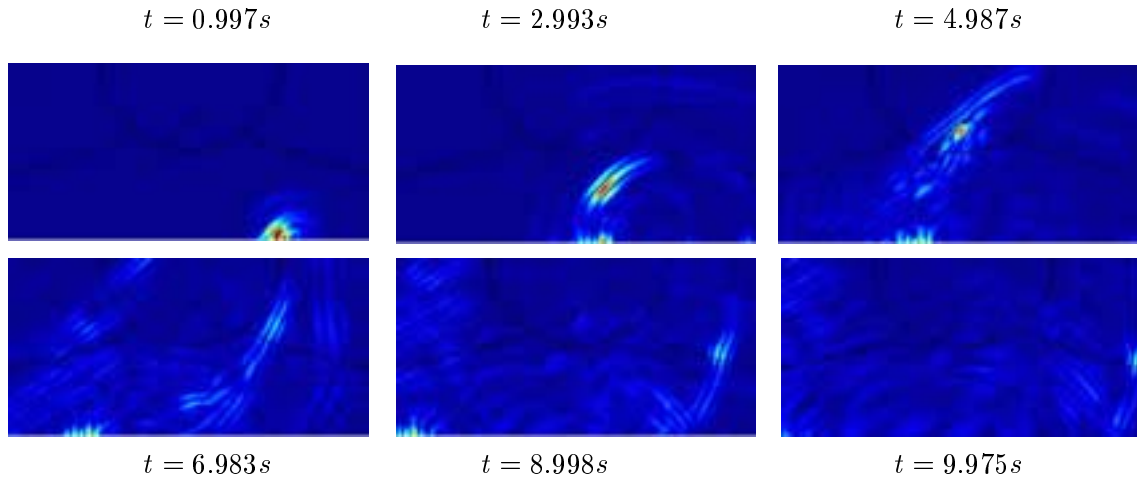


FIG. 9.2.17: *Deuxième expérience: diffraction par une fissure de géométrie complexe.*

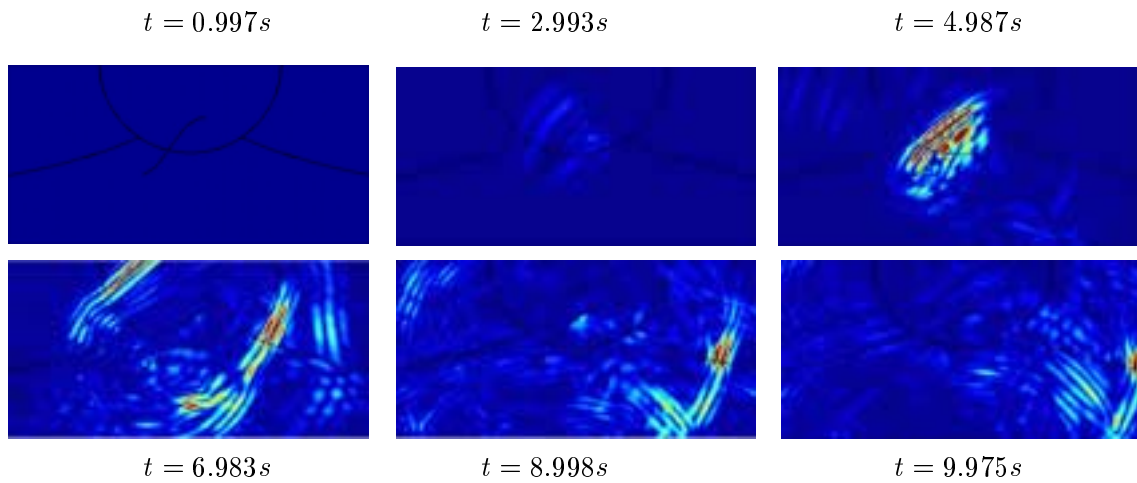


FIG. 9.2.18: *Troisième expérience: la différence entre la solution du problème avec fissure et celle du problème sans fissure*

### 9.3 Résultats dans le cas tridimensionnel

#### 9.3.1 Milieu homogène isotrope

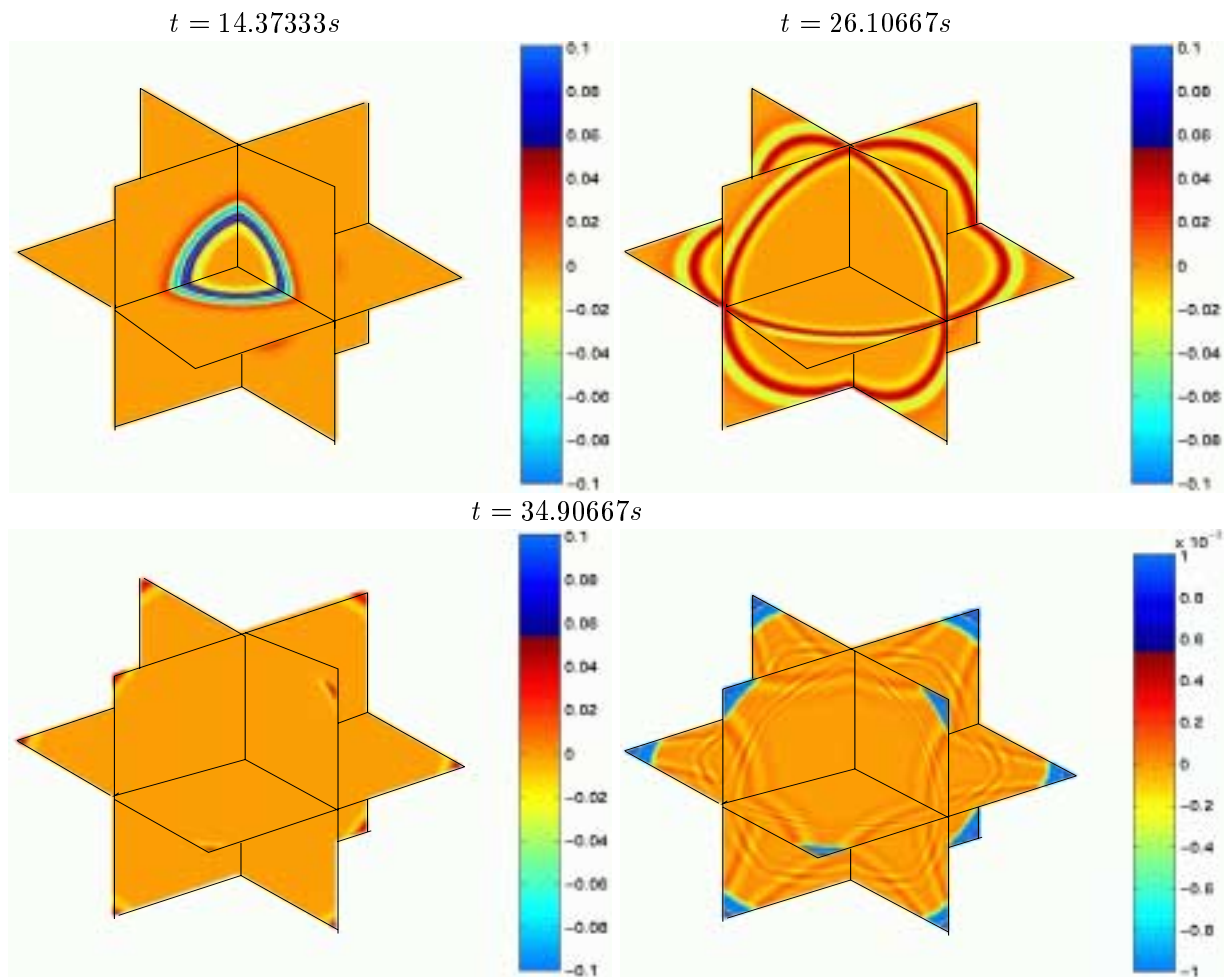
Nous considérons ici un domaine tridimensionnel non borné occupé par un milieu élastique homogène et isotrope. Les vitesses de propagation sont  $V_p = 1.125$  m/s et  $V_s = 0.5$  m/s. Pour le calcul numérique nous considérons un cube entouré de couches absorbantes parfaitement adaptées. Le maillage est composé de  $140^3$  éléments cubiques de côté  $h = 0.33$ .

La source est située au milieu du domaine, elle est décrite par les relations (9.1.1), (9.1.2) avec  $N_L = 10$  et le vecteur  $\vec{e}$  défini par (9.1.4)-(i).

Le modèle que nous avons utilisé dans les couches absorbantes est décrit par la relation (9.1.5) avec  $L = 4$ ,  $\delta = 5h$  et  $R = 0.001$ .

Dans un milieu homogène isotrope la source considérée génère seulement des ondes de pression. Pour représenter la solution nous avons choisi d'illustrer sur les figures suivantes la divergence du champ des vitesses à différents instants, dans les trois plans passant par le centre du domaine de calcul.

#### La divergence du champ de vitesses



Nous pouvons voir sur ces figures les fronts d'ondes sphériques caractéristiques d'un milieu

isotrope homogène. Les deux figures en haut et la figure en bas à gauche sont représentées à l'échelle normale. Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de réflexion visible induite par les bords absorbantes. Pour quantifier l'erreur induite par ces bords nous avons amplifié la solution par un facteur 100 sur la figure en bas à droite. Sur cette figure nous pouvons voir que l'amplitude des ondes réfléchies est environ 0.1% de l'amplitude de l'onde initiale, ce qui correspond à la valeur prévue théoriquement.

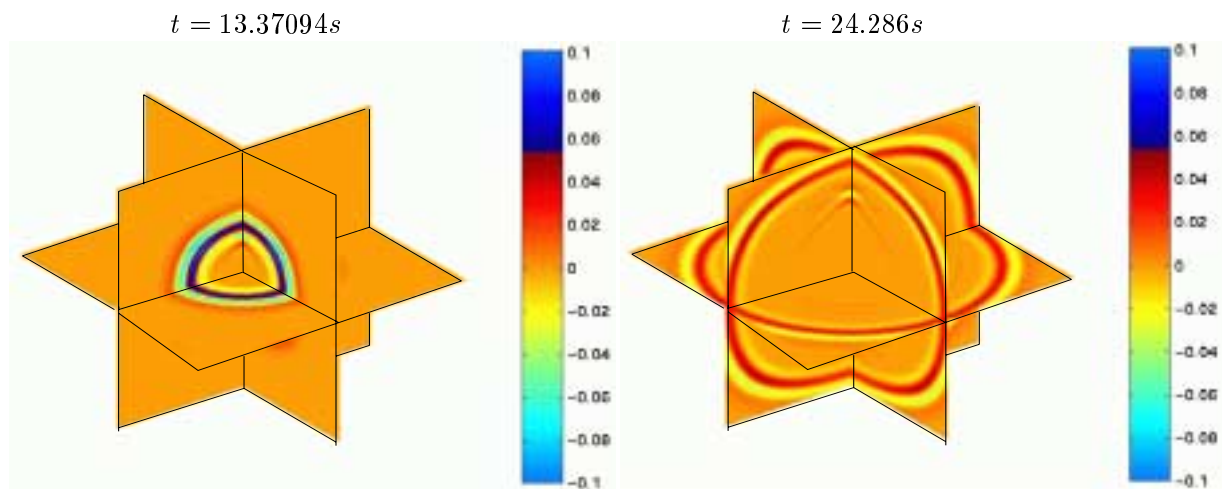
### 9.3.2 Milieu homogène anisotrope

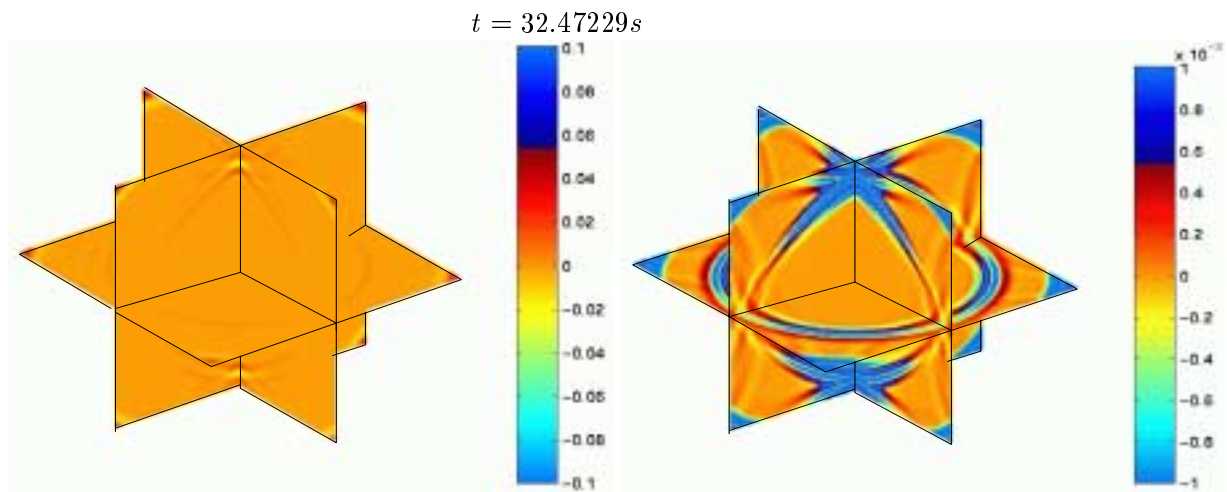
Nous faisons maintenant la même expérience dans un milieu élastique homogène, anisotrope. La seule différence par rapport à l'expérience précédente concerne les caractéristiques du milieu. Dans ce cas la densité volumique du milieu est égale à 1 et la matrice d'élasticité est donnée par,

$$C = \begin{pmatrix} 1.30 & 0.25 & 0.52 & 0 & 0 & 0 \\ & 1.30 & 0.52 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1.10 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.52 & 0 & 0 \\ & & & & 0.52 & 0 \\ & & & & & 0.525 \end{pmatrix} Pa$$

Ce milieu correspond à un matériau transversalement isotrope, c'est à dire anisotrope dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  et isotrope dans la troisième direction. Dans ce cas la même source va generer des ondes (QP) et (QS) à cause de l'anisotropie du milieu. Pour représenter la solution nous avons illustré sur les figures suivantes la divergence (associée plutôt aux ondes de QP) et le rotationnel (associé plutôt aux ondes de QS), dans les trois plans passant par le centre du domaine de calcul.

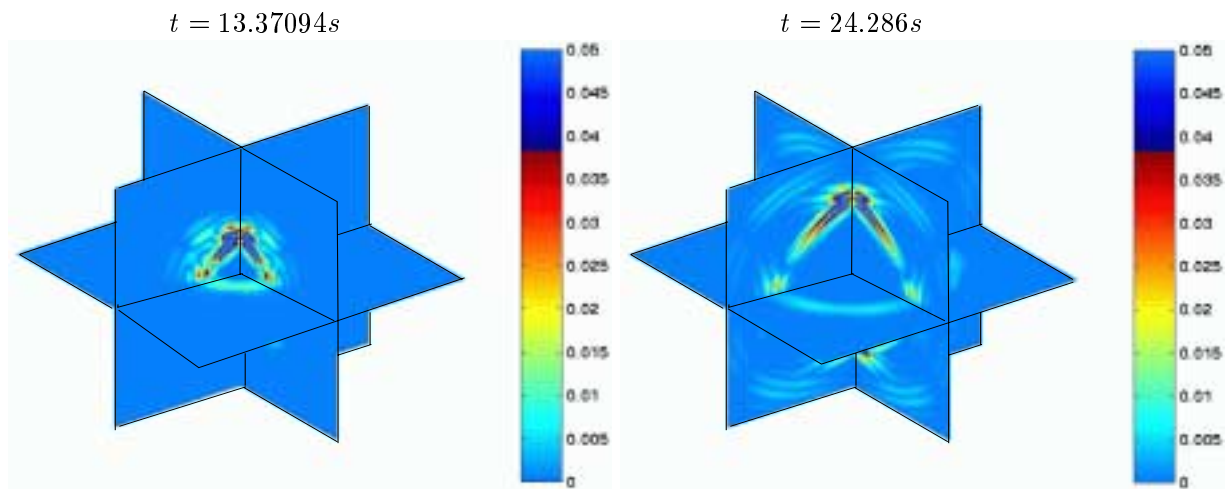
#### La divergence du champ de vitesses

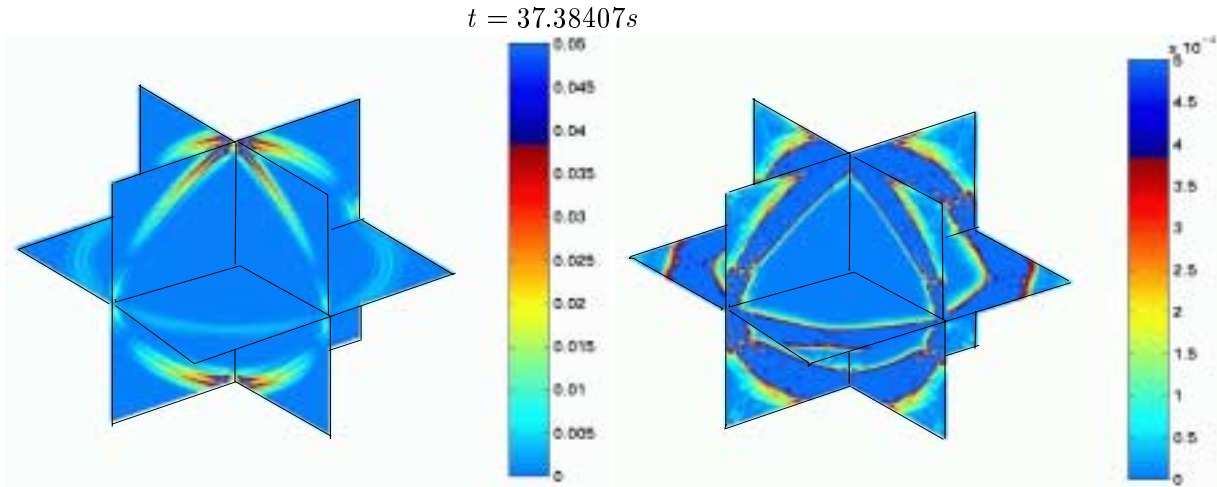




Nous pouvons voir sur ces figures que le front d'onde (QP) est quasi circulaire sur les plans  $x_1$  et  $x_2$  mais l'amplitude de l'onde est plus importante sur les directions diagonales ( $x_1 = x_3$ ,  $x_2 = x_3$ , etc...). Sur le plan  $x_3$  le front d'onde est circulaire, c'est la direction dans laquelle le milieu est isotrope. Comme dans le cas du milieu homogène on n'observe pas de réflexion parasite quand les résultats sont représentés à l'échelle normale. En les amplifiant par un facteur 100, on retrouve le coefficient de réflexion théorique (i.e 0.1%).

### La norme du rotationnel du champ de vitesses





Sur ces figures, nous pouvons voir sur les plans  $x_1$  et  $x_2$  le front d'onde étoilé caractéristique de l'anisotropie du milieu, l'amplitude des ondes (QS) est plus important à proximité de l'axe  $x_3$ . Sur le plan  $x_3$  comme pour les ondes (QP) on observe un front d'onde circulaire. Comme précédemment nous avons amplifié les résultats par un facteur 100 (image en bas à droite) pour retrouver le coefficient de réflexion théorique (i.e 0.1%).

### 9.3.3 Diffraction par une fissure plane circulaire en milieu isotrope homogène

Nous allons comparer dans cette section nos résultats avec les résultats obtenues par S. Hirose&J.D Achenbach [69, 70] et D. Barbier [12]. Dans [69, 70], les auteurs proposent une méthode basée sur une formulation intégrale en temps, qu'ils résolvent par collocation. La méthode proposée par D. Barbier dans [12] est une méthode d'équations intégrales en temps (potentiels retardés).

Dans cette expérience nous considérons un milieu élastique homogène isotrope, caractérisé par les vitesses  $V_p = \sqrt{3}m/s$ ,  $V_s = 1m/s$  et de densité volumique  $\rho = 1gr/cm^3$ . Nous supposons aussi qu'une fissure plane et circulaire est présente dans le solide. La géométrie du problème est représenté sur la figure 9.3.1: le centre de la fissure est l'origine  $(0, 0, 0)$  et son rayon est  $\alpha = 1m$ .

Nous allons étudier ici la diffraction d'une onde P, d'incidence normale par rapport à la fissure. Plus précisément, nous considérons l'onde incidente  $\vec{U}_{Inc}$ , donnée par

$$\vec{U}_{Inc} = \frac{V_p t}{\alpha} H(V_p t) \vec{e}_3,$$

ou  $H(\cdot)$  est la fonction de Heaviside.

Dans ce cas, on peut facilement calculer le champ des contraintes sur la fissure,

$$\sigma \cdot \vec{n} = \frac{\rho V_p^2}{\alpha} H(V_p t) \vec{n},$$

avec  $\vec{n} = \vec{e}_3$  la normale sur la fissure.

Pour calculer l'onde diffractée avec la méthode des domaines fictifs, nous allons imposer dans cette expérience le champ des contraintes sur la fissure. Ceci revient à résoudre le

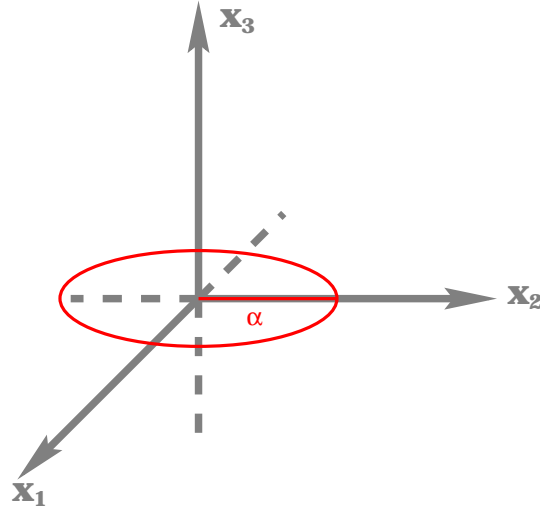


FIG. 9.3.1: La géométrie du problème: Diffraction par une fissure plane circulaire.

problème suivant (avec les notations du chapitre 6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma, v, \lambda) : [0, T] \mapsto \underline{\underline{X}}^{sym}(C) \times \underline{M}(C) \times \underline{G}(\Gamma) \text{ tels que:} \\ \frac{d}{dt}a(\sigma, \tau) + b(\tau, v) - b_{\Gamma}(\tau, \lambda) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}^{sym}(C), \\ \frac{d}{dt}c(v, w) - b(\sigma, w) = (f, w), \quad \forall w \in \underline{M}(C), \\ b_{\Gamma}(\sigma, \mu) = \langle F, \mu \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mu \in \underline{G}(\Gamma), \end{array} \right.$$

avec

$$F = \sigma \cdot \vec{n} = \frac{\rho V_p^2}{\alpha} H(V_p t) \vec{n}.$$

On remarque alors que pour tout  $t > 0$ , le chargement devient constant. Pour la formulation en déplacement, ceci signifie que le régime transitoire va tendre vers un régime statique, définie par le saut du déplacement sur la fissure [12],

$$[\vec{u}^{st}] = 4 \frac{V_p^2 (1 - \nu)}{V_s^2 \pi} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2} \vec{e}_3$$

Dans [12, 69, 70] les auteurs considèrent la formulation en déplacement de l'élastodynamique, le saut du déplacement est alors une inconnue du problème. Comme dans notre méthode, on utilise la formulation en vitesse-contraintes, pour comparer les résultats, nous avons besoin d'intégrer la solution en temps (le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  correspondant au saut de la vitesse).

Pour notre expérience, le domaine volumique  $C$  (occupé par le milieu élastique) est le cube  $[-3.5, 3.5] \times [-3.5, 3.5] \times [-3.5, 3.5]$ . Pour la discrétisation nous avons considéré un maillage volumique régulier en cubes de coté  $h = 0.05\text{m}$  et un maillage surfacique (de la fissure  $\Gamma$ ) irrégulier composé de 756 triangles (voir figure 9.3.2). Aux bord de notre domaine de calcul

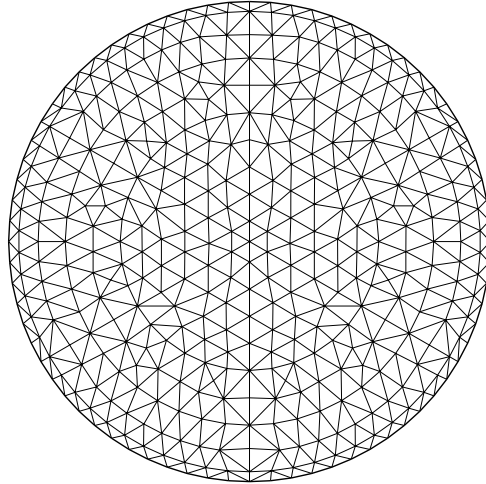


FIG. 9.3.2: *Le maillage de la fissure (756 triangles).*

nous utilisons le modèle PML décrit par la relation (9.1.5) avec  $L = 4$ ,  $\delta = 5h$  et  $R = 0.001$ .

Dans les figures 9.3.3, 9.3.4 nous présentons la solution transitoire sur certains points de la fissure ( $r$  dénote la distance du point par rapport au centre de la fissure). Plus précisément nous avons représenté le saut du déplacement en fonction de  $V_p t$ . Nous pouvons remarquer sur les figures 9.3.3 et 9.3.4 que la solution obtenue avec la méthode des domaines fictifs est très proche de celle obtenue par D. Barbier (en superposant les deux figures on peut voir que les courbes sont presque identiques sauf pour  $r = 0.959m$ ). Pour  $r = 0.959m$  la solution obtenue avec la méthode de domaines fictifs (figure 9.3.3) présente un écart assez important avec celle obtenue par les deux autres méthodes (figure 9.3.3). Cet écart est dû au fait que dans notre approche nous n'avons pas pris en compte la singularité de la solution au bord de la fissure.

Nous pouvons également voir sur la figure 9.3.3 qu'un régime statique est effectivement établi. Nous comparons sur la figure 9.3.5 le saut du déplacement calculé numériquement au temps  $T = 21.7\text{sec}$  avec la solution statique (calculée analytiquement). On voit sur cette figure que la solution calculée numériquement est très proche de la solution analytique.

Nous présentons finalement sur les figures suivantes la norme du champ des vitesses à différents instants dans les trois plans passant par le centre du domaine de calcul. Les plans  $x_1$  et  $x_2$  sont représentés à gauche et le plan  $x_3$  (le plan dans lequel est située la fissure) à droite.



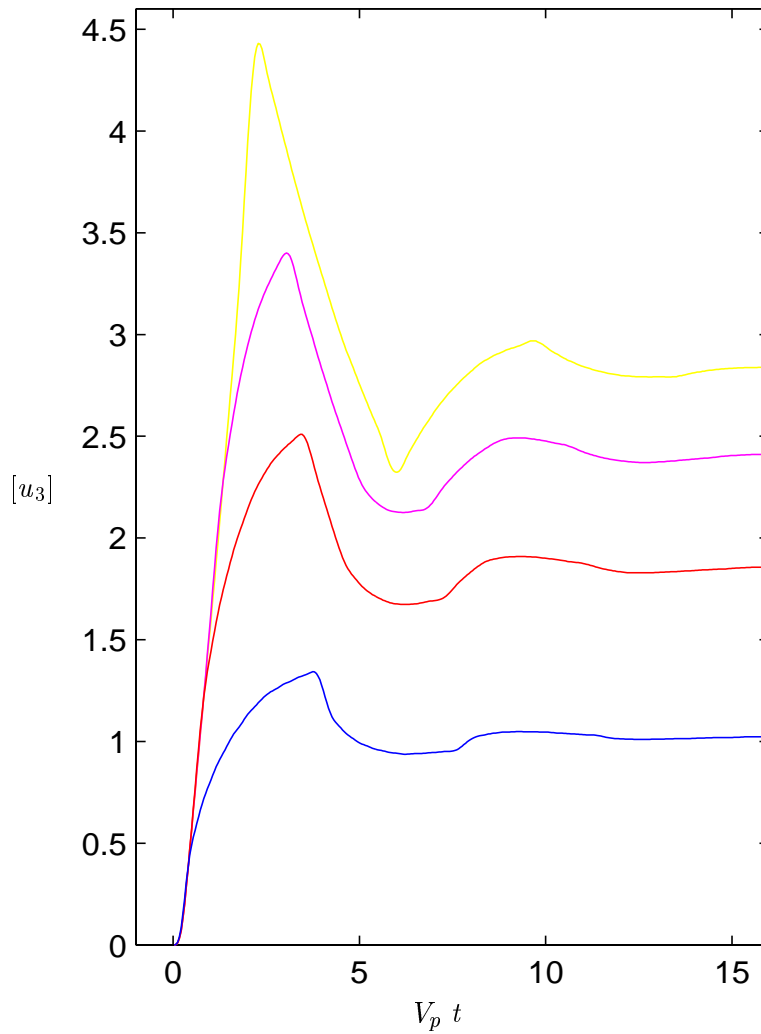


FIG. 9.3.3: Méthode des domaines fictifs. Saut du déplacement en fonction de  $V_p t$  pour plusieurs points du maillage; nous avons  $r = 0.085m$ ,  $r = 0.537m$ ,  $r = 0.765m$  et  $r = 0.959m$  pour les différentes courbes en allant du haut vers le bas.

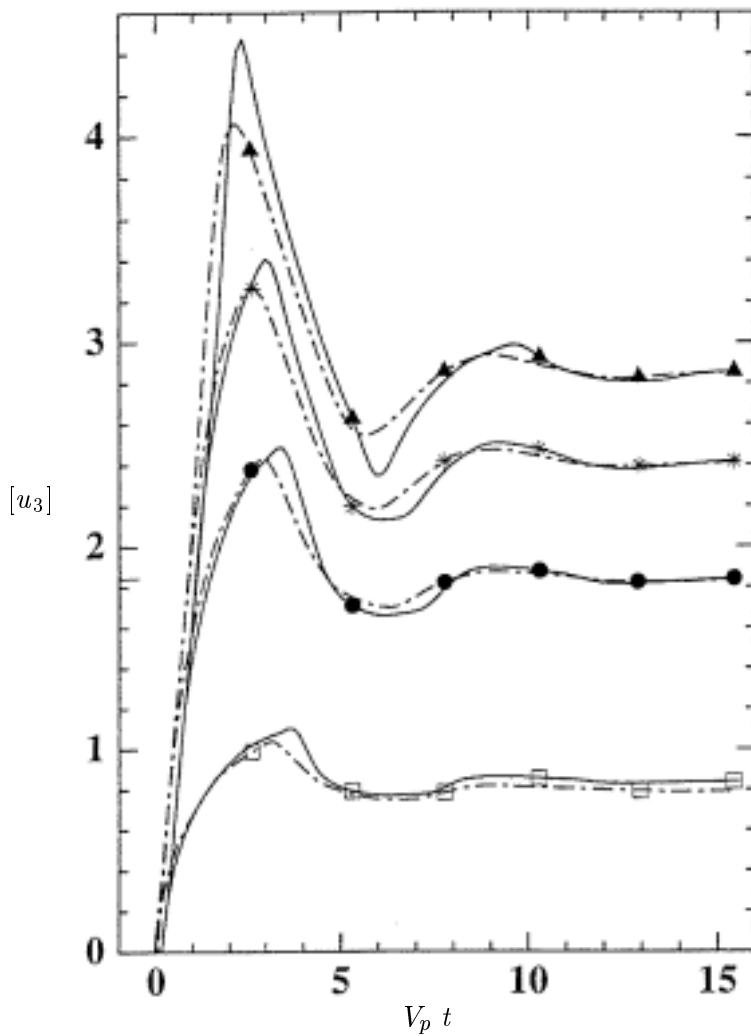


FIG. 9.3.4: Saut du déplacement en fonction de  $V_p t$  pour plusieurs points du maillage; nous avons  $r = 0.085m$ ,  $r = 0.537m$ ,  $r = 0.765m$  et  $r = 0.959m$  pour les différentes courbes en allant du haut vers le bas. En trait continue la solution obtenu par D. Barbier et en pointillé celle obtenue par Hirose et Achenbach

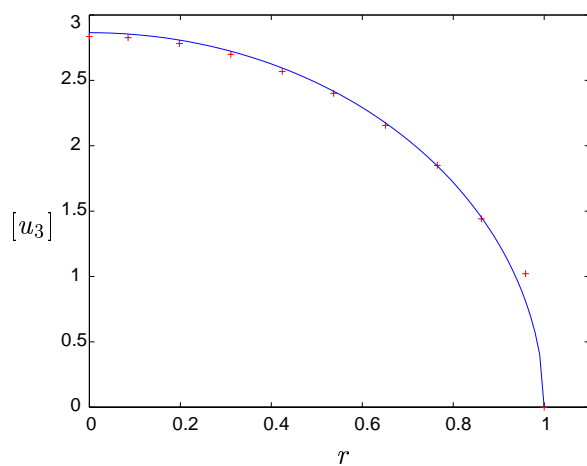
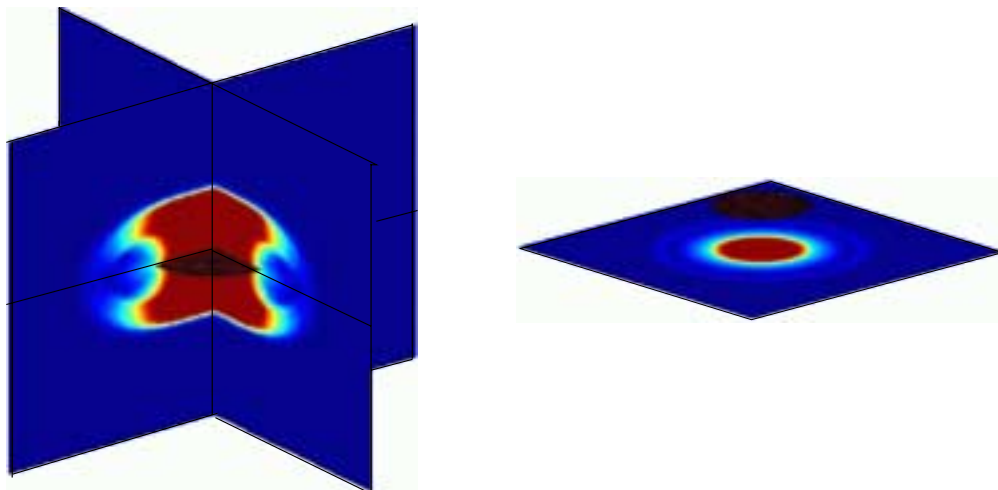


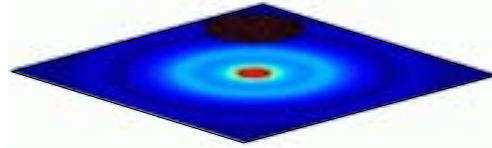
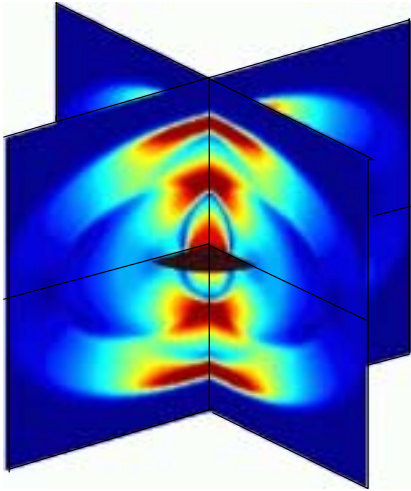
FIG. 9.3.5: Saut du déplacement en fonction de la distance au centre  $r$ ; En continue la solution analytique, avec les points en rouge la solution calculée numériquement en  $T = 21.7\text{sec}$

### La norme du champ de vitesses

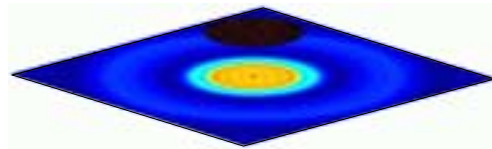
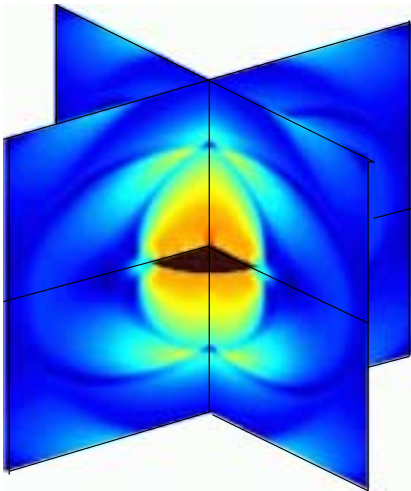
$$V_p t = 1.139s$$



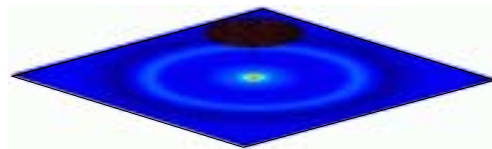
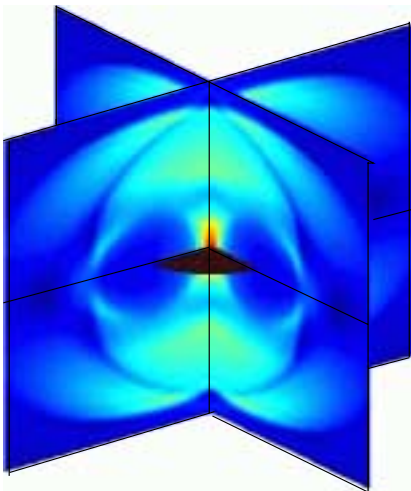
$V_p t = 2.805 s$



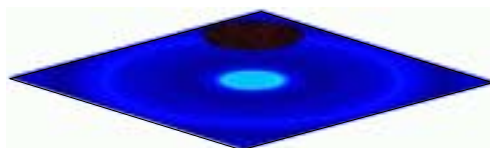
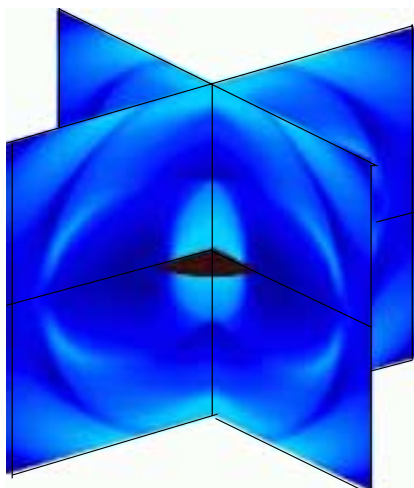
$V_p t = 4.219 s$



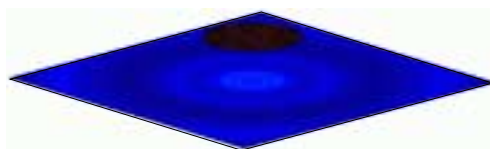
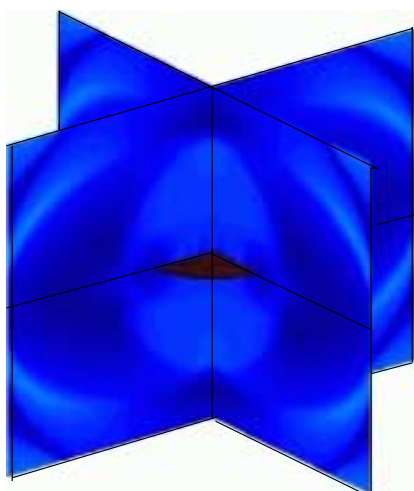
$V_p t = 5.633 s$



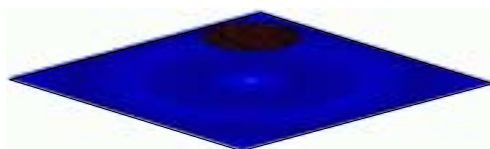
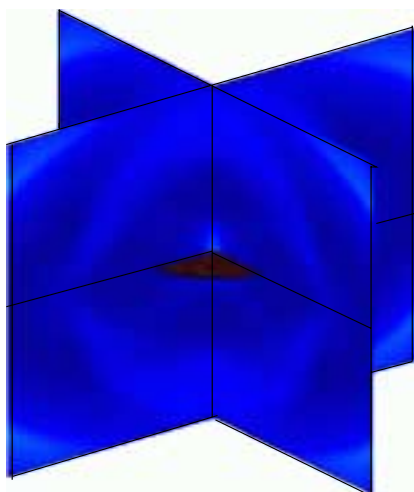
$V_p t = 6.046 s$



$V_p t = 8.462 s$



$V_p t = 9.866 s$



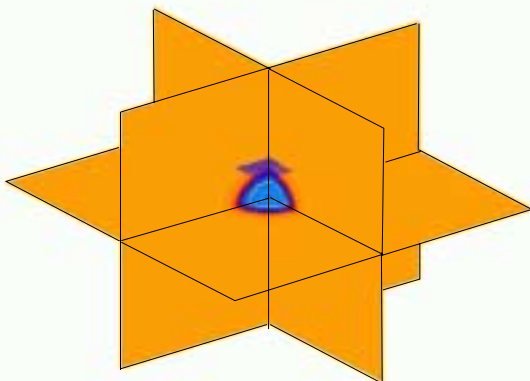
### 9.3.4 Diffraction par une fissure plane milieu isotrope homogène

Nous supposons ici qu'une fissure plane et carrée est présente dans un milieu homogène isotrope. Pour prendre en compte numériquement sa présence on utilise la méthode des domaines fictifs. Dans cette expérience, toutes les autres données sont les mêmes que dans la section 9.3.1.

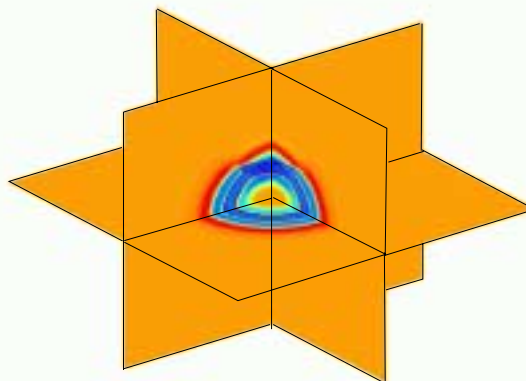
Comme précédemment nous présentons sur les figures suivantes, la divergence et le rotationnel du champ de vitesses, dans les trois plans passant par le centre du domaine de calcul.

#### La divergence du champ de vitesses

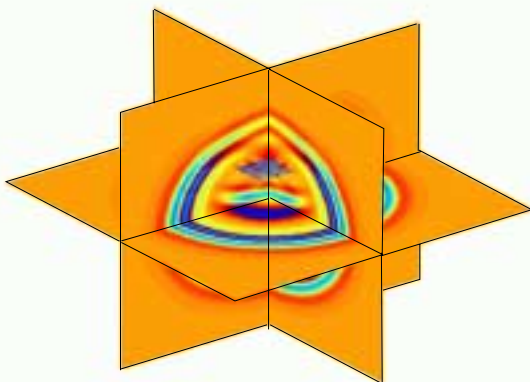
$t = 3.940942s$



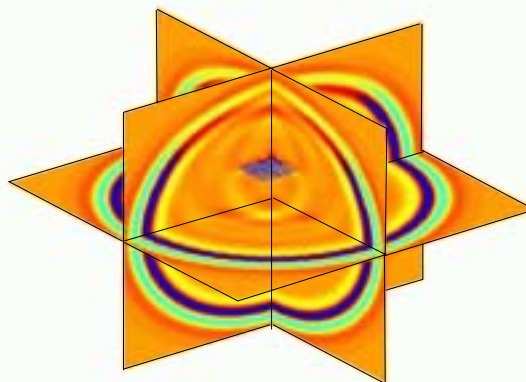
$t = 8.089301s$



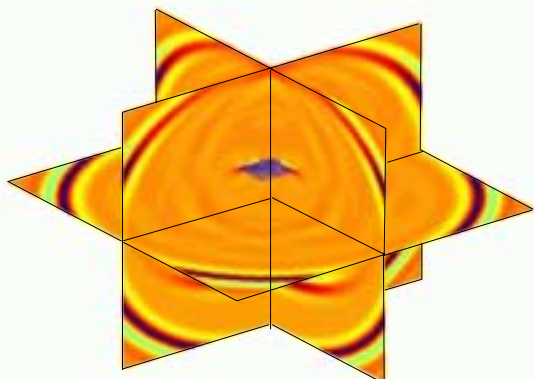
$t = 12.23766s$



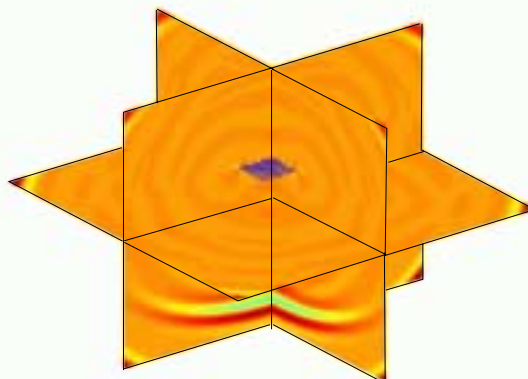
$t = 16.38602s$



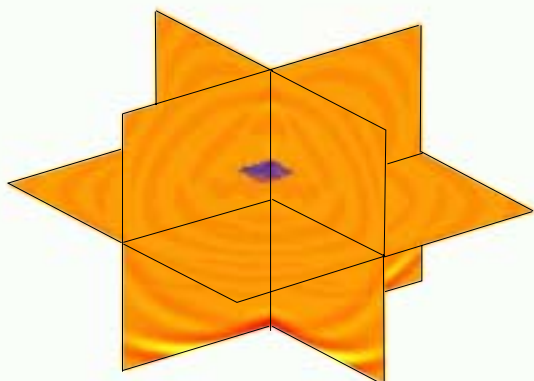
$t = 20.53438s$



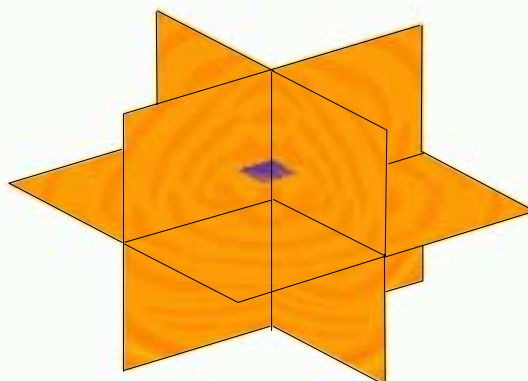
$t = 24.68274s$



$t = 28.83110s$

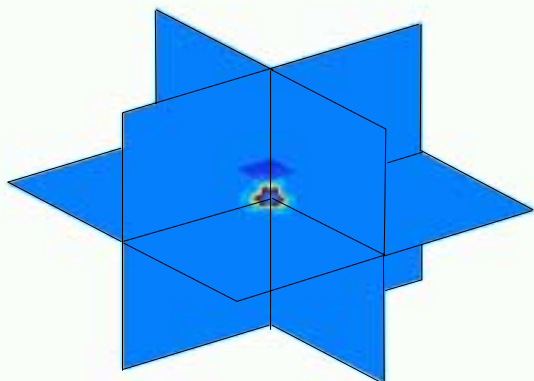


$t = 32.97946s$

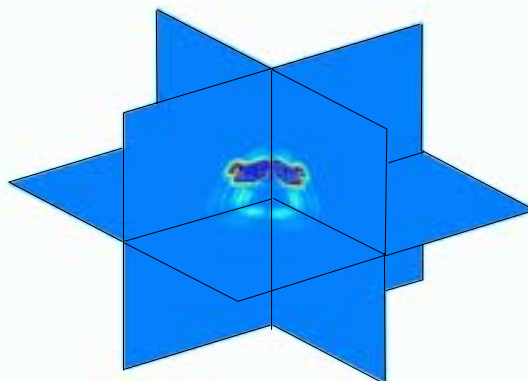


La norme du rotationnel du champ de vitesses

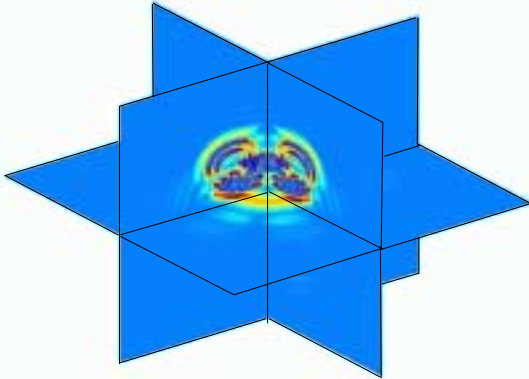
$t = 3.940942s$



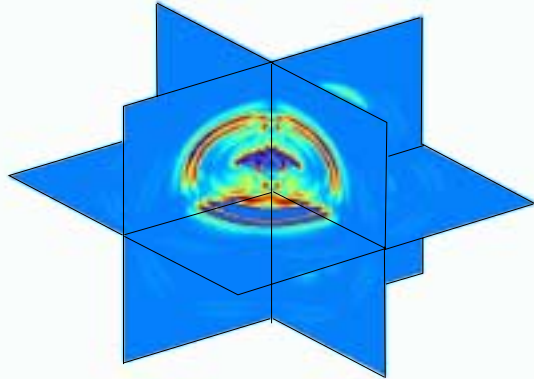
$t = 8.089301s$



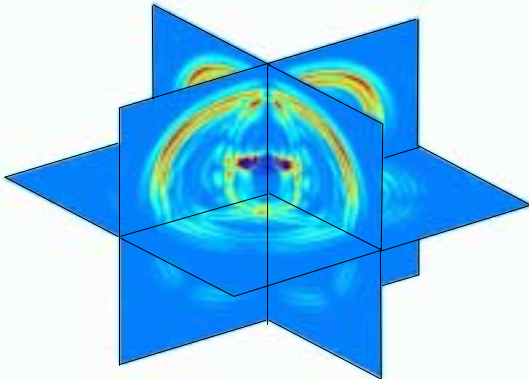
$t = 12.23766s$



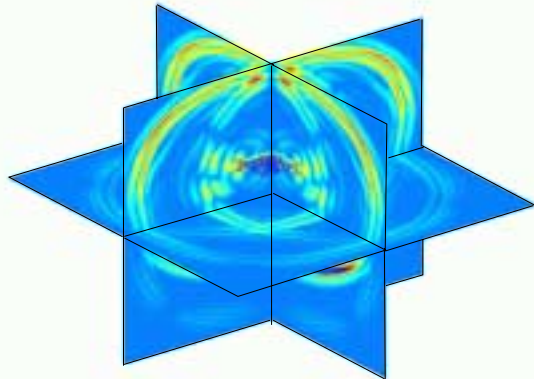
$t = 16.38602s$



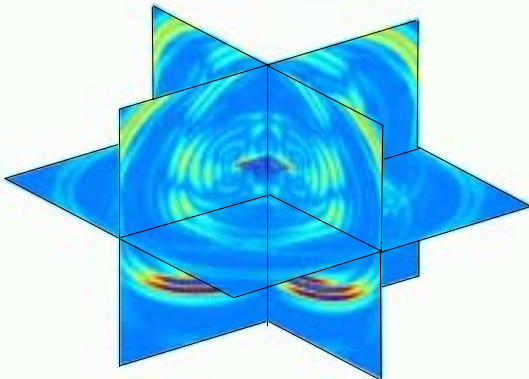
$t = 20.53438s$



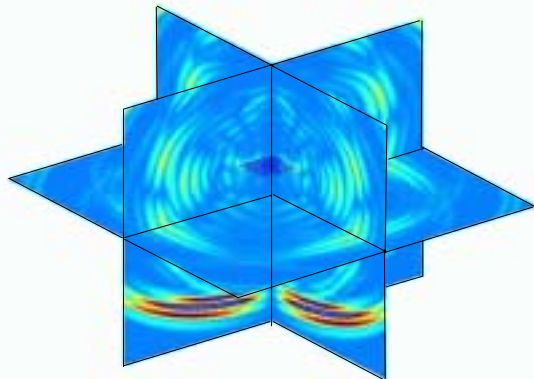
$t = 24.68274s$



$t = 28.83110s$



$t = 32.97946s$





Nous avons vu dans la section 9.3.1 que dans le solide isotrope seulement les ondes de pression étaient générées par la source. On voit ici d'abord se propager les ondes de Pression émises par la source. Ensuite, comme la source est située au dessous de la fissure, les ondes de Pression qui initialement se dirigent vers le haut sont réfléchies en rencontrant la fissure qui agit comme une barrière et sont transformées en des ondes de Pression qui se dirigent vers le bas.

Sur le rotationnel de la solution (qui serait nul pour le même solide sans fissure) on voit se propager des ondes de Cisaillement. Ce sont des ondes issues de la réflexion et de la diffraction des ondes de pression émises initialement par la source. On voit également des ondes diffractées par les quatre coins de la fissure ainsi que des ondes de surface à sa proximité.

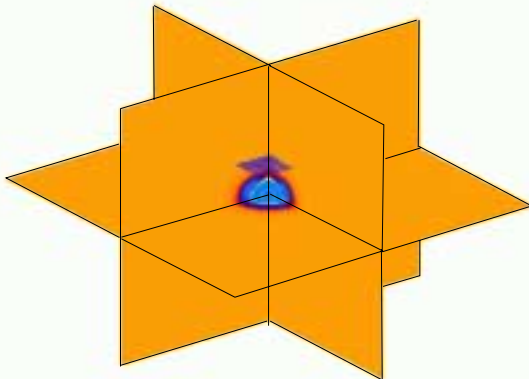
### 9.3.5 Diffraction par une fissure plane en milieu anisotrope homogène

Nous reproduisons ici la même expérience que dans la section 9.3.2 en présence d'une fissure plane et carrée dans le solide.

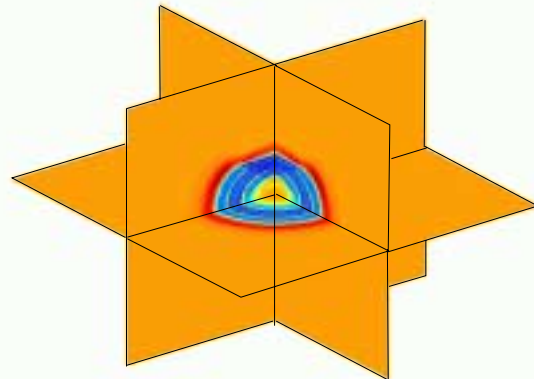
Sur les figures suivantes, nous représentons la divergence et le rotationnel du champ de vitesses, dans les trois plans passant par le centre du domaine de calcul.

#### La divergence du champ de vitesses

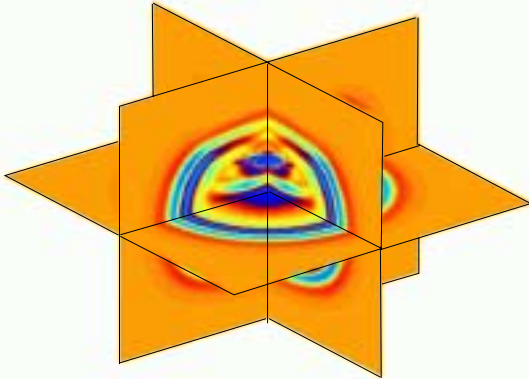
$t = 5.184652s$



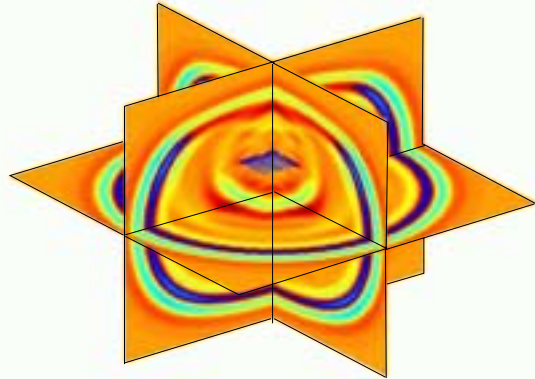
$t = 10.64218s$



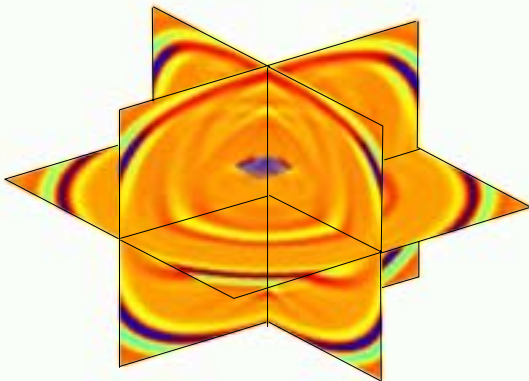
$t = 16.09971s$



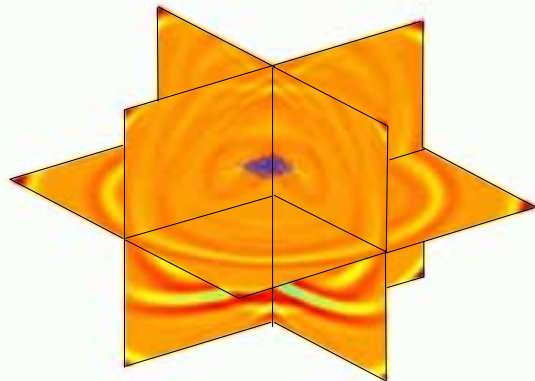
$t = 21.55724s$



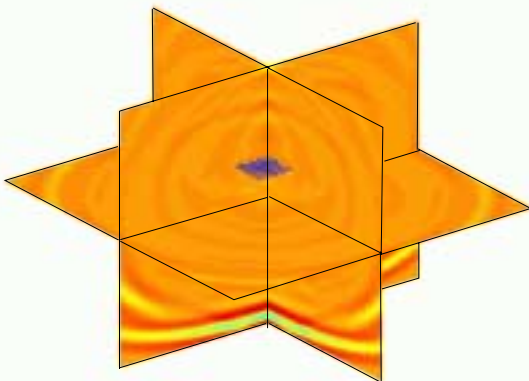
$t = 27.01476s$



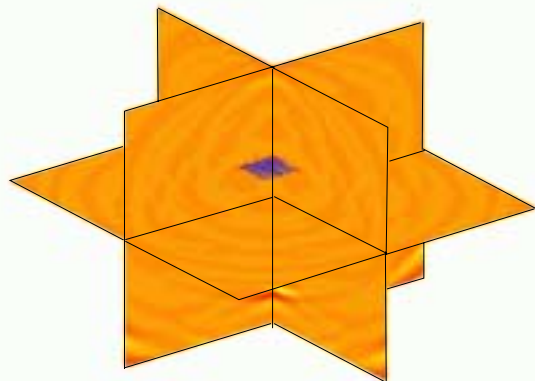
$t = 32.47229s$



$t = 37.92982s$

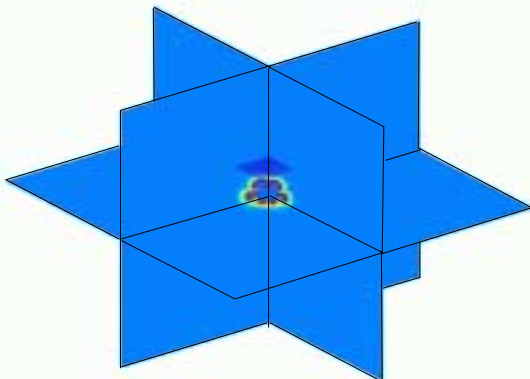


$t = 43.38735s$

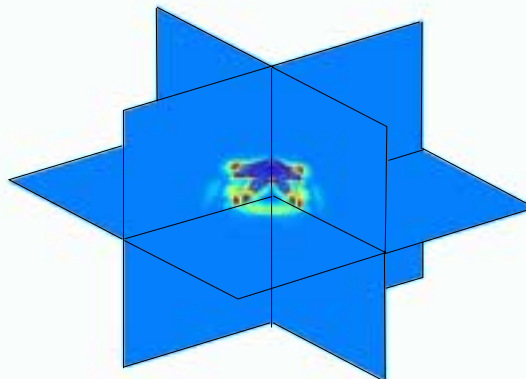


La norme du rotationnel du champ de vitesses

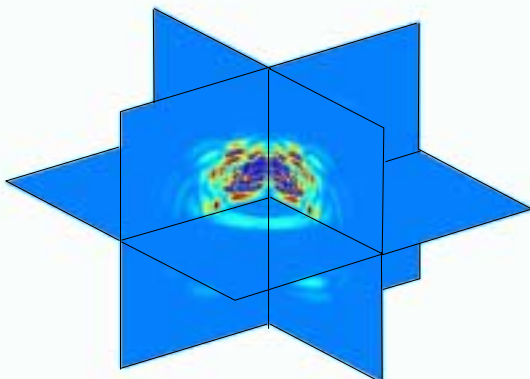
$t = 5.184652s$



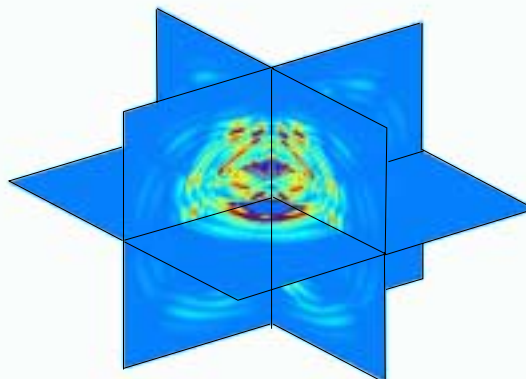
$t = 10.64218s$



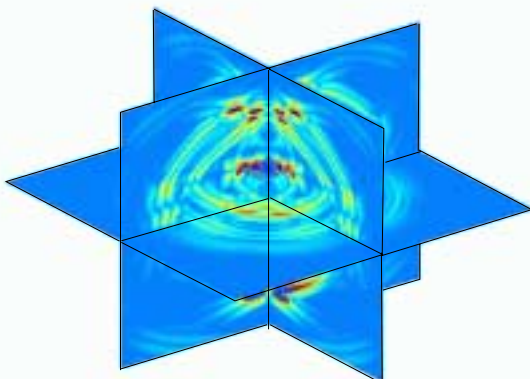
$t = 16.09971s$



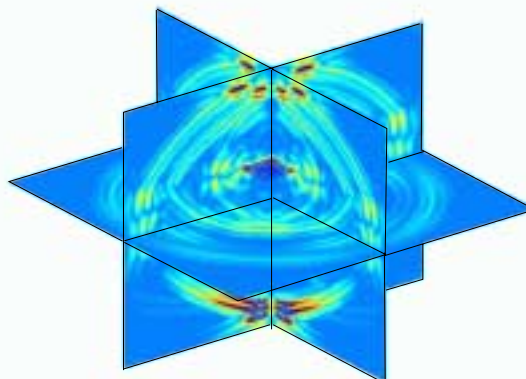
$t = 21.55724s$



$t = 27.01476s$

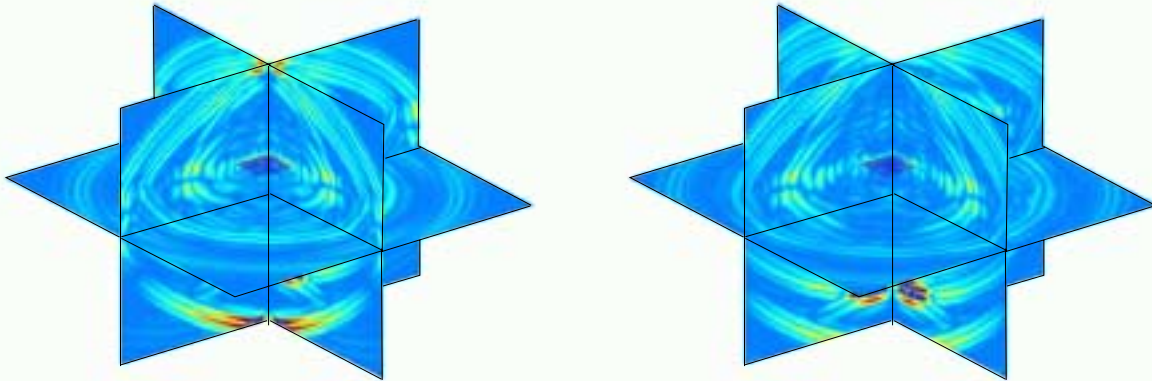


$t = 32.47229s$



$t = 37.92982s$

$t = 43.38735s$



Dans le cas du milieu anisotrope, la source génère des ondes (QP) et (QS). Chacune de ces ondes est ensuite diffractée par la fissure et génère à son tour des ondes (QP) et (QS), d'où la complexité de ces figures.

Comme dans le cas du milieu isotrope on remarque également la présence des ondes diffractées par les cotés et les coins de la fissure ainsi que des ondes de surface localisées à proximité de la fissure.

### 9.3.6 Diffraction par une fissure de géométrie complexe dans un milieu élastique anisotrope, homogène.

Nous présentons en conclusion une expérience avec une fissure de géométrie complexe. La méthode des domaines fictifs nous permet de prendre en compte la géométrie particulière de cette fissure tout en utilisant le même maillage volumique en cubes que pour les expériences précédentes. Bien évidemment, le maillage de la fissure est dans ce cas différent. Il s'agit ici d'un maillage surfacique qui est irrégulier afin de permettre une bonne approximation de la géométrie de la fissure (cf. figure 9.3.6). On veut remarquer ici que d'un point de vue nu-

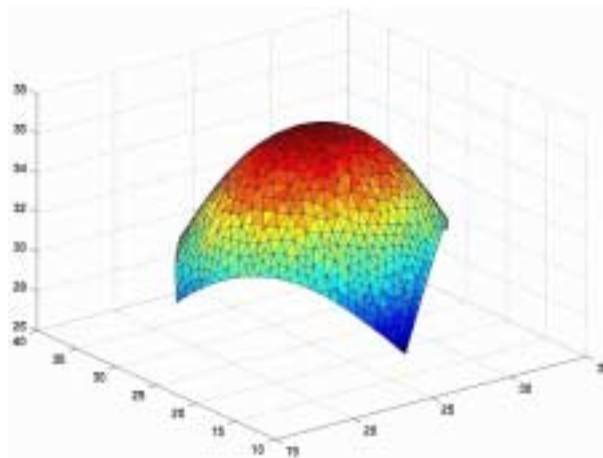


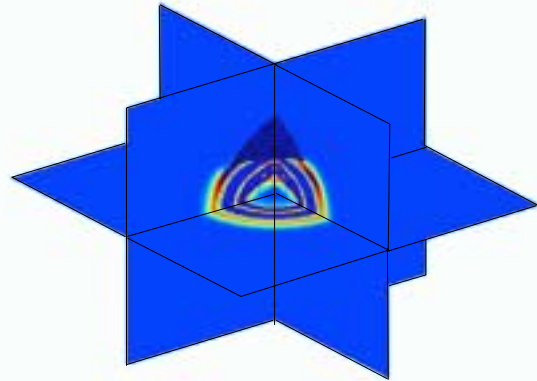
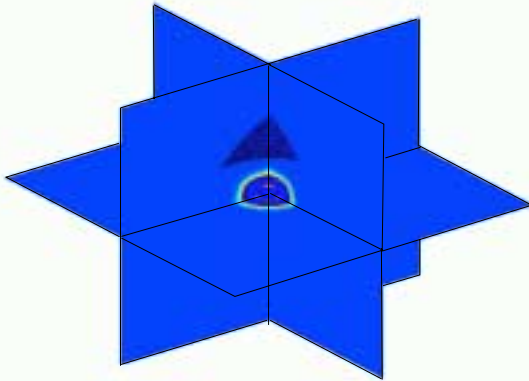
FIG. 9.3.6: *Le maillage de la fissure*

mérique, la complexité de la géométrie de la fissure n'a pas d'effet significatif sur le temps de calcul. En effet, le coût de la méthode tant du point de vue temps de calcul que celui du stockage dépend principalement des caractéristiques du problème volumique (inconnues  $\sigma$ ,  $v$ ). Ceci est dû à l'utilisation de la méthode des domaines fictifs qui nous permet de prendre en compte de géométries complexes tout en utilisant un maillage volumique régulier.

### La norme du champ de vitesses

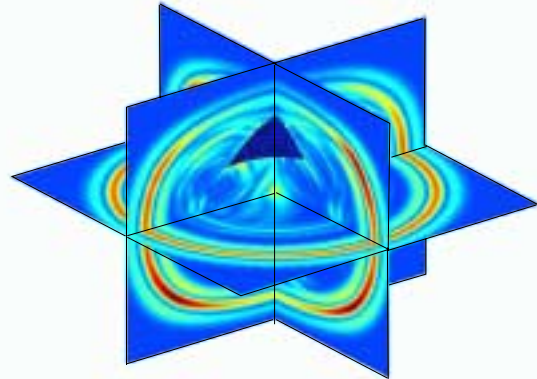
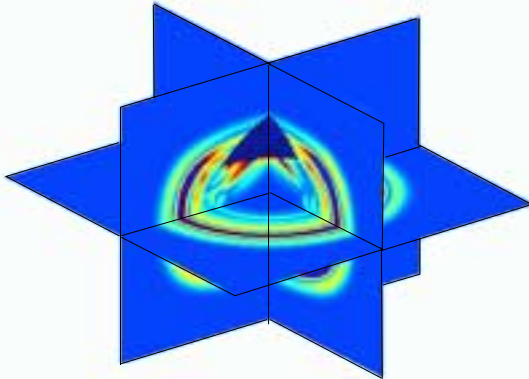
$t = 5.184652s$

$t = 10.64218s$

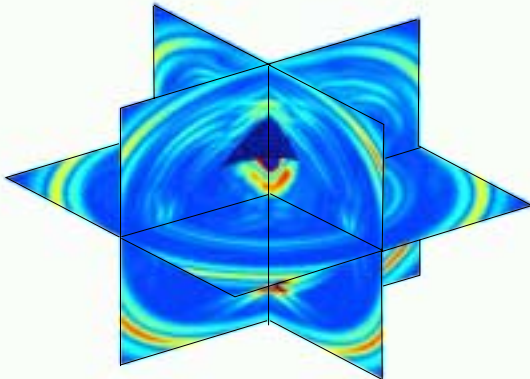


$t = 16.09971s$

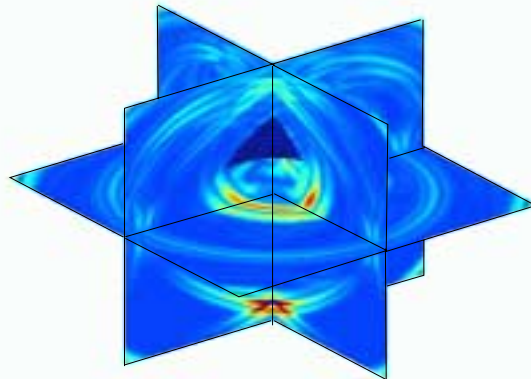
$t = 21.55724s$



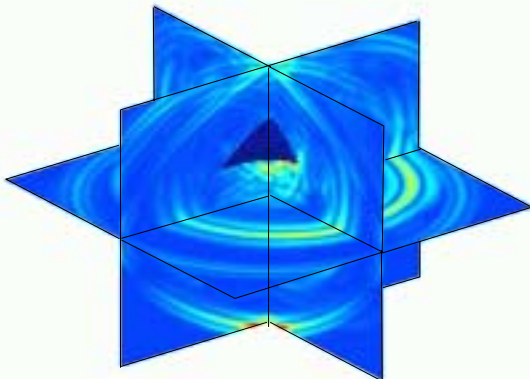
$t = 27.01476s$



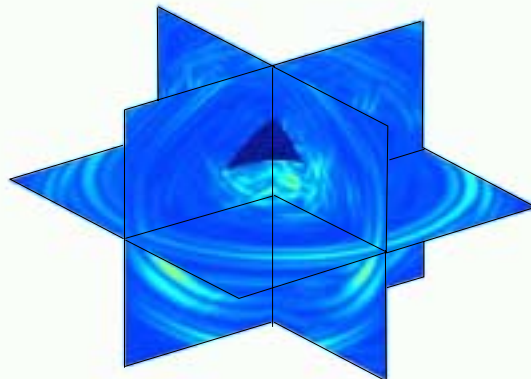
$t = 32.47229s$



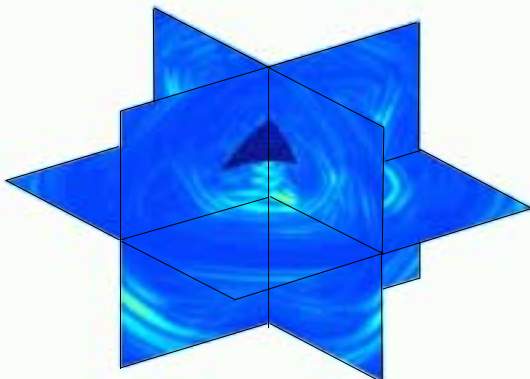
$t = 37.92982s$



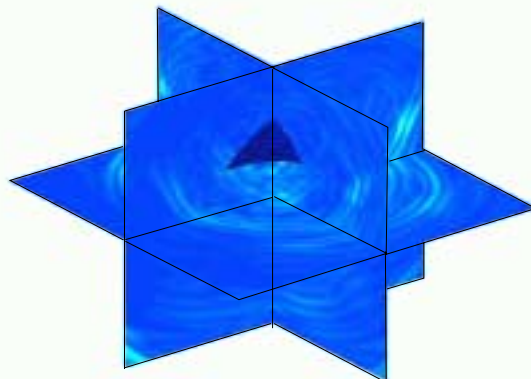
$t = 43.38735s$



$t = 48.84488s$



$t = 54.30241s$



Le milieu de propagation est dans ce cas le solide anisotrope dont les coefficients ont été définis à la section 9.3.2 et les ondes sont émises par une source de compression ponctuelle. Toutes les données sont les mêmes que dans l'expérience précédente. Nous présentons ici la norme de la vitesse dans les trois plans passant par le centre du domaine de calcul.

Nous pouvons constater sur ces figures que les ondes initiales émises par la source vérifient un certain nombre de symétries. Cependant du fait de la présence de la fissure ces symétries ne sont plus satisfaites par les ondes diffractées par la fissure.

On remarque également un phénomène de focalisation dû à la géométrie paraboloidale de la fissure.

Dans le cas tridimensionnel nous avons présenté des expériences dans des milieux élastiques homogènes. Cependant, le code numérique que nous avons développé est actuellement généralisé au cas des milieux hétérogènes. En collaboration avec EDF nous avons convenu de faire une expérience dans un milieu hétérogène anisotrope afin de comparer les résultats numériques avec ceux obtenus expérimentalement par EDF.

Les différents résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de trois films scientifiques:

- Diffraction d'une onde élastique bidimensionnelle par une fissure (1997, Français, 9 mn 30)
- A numerical simulation of a non destructive testing experiment (1998, Anglais, 2 mn 30).
- Propagation des ondes élastiques dans les milieux complexes en 3D. (1999, Français, 13 mn 30)

Des extraits de ces films sont disponibles sur la page web du service multimedia de l'INRIA à l'adresse: “ <http://www.inria.fr/multimedia/Videotheque/2-Listes-Videos/CC3-fra.html>”

# Annexe A

## Les schémas semi-discrétisés en espace.

### A.1 L'élément fini $Q_2 - Q_1$

Nous donnons ici les équations semi-discrétisées en espace associées à l'élément fini  $Q_2 - Q_1$ . Dans ce qui suit les constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définies par (3.1.5) et les constantes  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  par

$$c_1 = \frac{1}{8} \frac{1 + 2\zeta}{\zeta}, \quad c_2 = \frac{1}{8} \frac{1 - 2\zeta}{\zeta}, \quad c_3 = \frac{1}{18} \frac{1 + 3\zeta}{\zeta}, \quad c_4 = \frac{1}{18} \frac{1 - 3\zeta}{\zeta}, \quad c_5 = \frac{1}{9\zeta}.$$

À partir de la première équation du système (2.1.12) on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p-\zeta, q-\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( c_1 c_5 (\sigma_{11}^h)_{p,j} - c_1 c_3 (\sigma_{11}^h)_{i,j} - c_1 c_4 (\sigma_{11}^h)_{i+1,j} - c_4 (\sigma_{11})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_4 (\sigma_{11}^b)_{i+1,j+1} - c_2 c_5 (\sigma_{11}^b)_{p,j+1} + c_2 c_3 (\sigma_{11}^b)_{i,j+1} - c_2 c_3 (\sigma_{11})_{i,q} + c_5 (\sigma_{11})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( -c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i,j} - c_3 (\sigma_{12})_{p,j} + c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j} - c_2 c_5 (\sigma_{12})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} - c_4 (\sigma_{12})_{p,j+1} - c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i,j+1} + c_1 c_5 (\sigma_{12})_{i,q} + c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p-\zeta, q-\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( -c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i,j} + c_1 c_5 (\sigma_{12})_{p,j} - c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j} - c_4 (\sigma_{12})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} - c_2 c_5 (\sigma_{12})_{p,j+1} + c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i,j+1} - c_3 (\sigma_{12})_{i,q} + c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( -c_1 c_3 (\sigma_{22}^d)_{i,j} - c_3 (\sigma_{22})_{p,j} + c_2 c_3 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j} - c_2 c_5 (\sigma_{22}^g)_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_4 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j+1} - c_4 (\sigma_{22})_{p,j+1} - c_1 c_4 (\sigma_{22}^d)_{i,j+1} + c_1 c_5 (\sigma_{22}^d)_{i,q} + c_5 (\sigma_{22})_{p,q} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p+\zeta, q-\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( c_1 c_4 (\sigma_{11}^h)_{i,j} - c_1 c_5 (\sigma_{11}^h)_{p,j} + c_1 c_3 (\sigma_{11}^h)_{i+1,j} + c_3 (\sigma_{11})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. - c_2 c_3 (\sigma_{11}^b)_{i+1,j+1} + c_2 c_5 (\sigma_{11}^b)_{p,j+1} - c_2 c_4 (\sigma_{11}^b)_{i,j+1} + c_4 (\sigma_{11})_{i,q} - c_5 (\sigma_{11})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i,j} - c_3 (\sigma_{12})_{p,j} - c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j} + c_1 c_5 (\sigma_{12})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. - c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} - c_4 (\sigma_{12})_{p,j+1} + c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i,j+1} - c_2 c_5 (\sigma_{12})_{i,q} + c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p+\zeta, q-\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i,j} - c_1 c_5 (\sigma_{12})_{p,j} + c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j} + c_3 (\sigma_{12})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. - c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} + c_2 c_5 (\sigma_{12})_{p,j+1} - c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i,j+1} + c_4 (\sigma_{12})_{i,q} - c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( c_2 c_3 (\sigma_{22}^d)_{i,j} - c_3 (\sigma_{22})_{p,j} - c_1 c_3 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j} + c_1 c_5 (\sigma_{22}^g)_{i+1,q} - c_1 c_4 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j+1} \right. \\ &\quad \left. - c_4 (\sigma_{22})_{p,j+1} + c_2 c_4 (\sigma_{22}^d)_{i,j+1} - c_2 c_5 (\sigma_{22}^d)_{i,q} + c_5 (\sigma_{22})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p+\zeta, q+\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( -c_2 c_4 (\sigma_{11}^h)_{i,j} + c_2 c_5 (\sigma_{11}^h)_{p,j} - c_2 c_3 (\sigma_{11}^h)_{i+1,j} + c_3 (\sigma_{11})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_1 c_3 (\sigma_{11}^b)_{i+1,j+1} - c_1 c_5 (\sigma_{11}^b)_{p,j+1} + c_1 c_4 (\sigma_{11}^b)_{i,j+1} + c_4 (\sigma_{11})_{i,q} - c_5 (\sigma_{11})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( -c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i,j} + c_4 (\sigma_{12})_{p,j} + c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j} - c_1 c_5 (\sigma_{12})_{i+1,q} + c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} \right. \\ &\quad \left. + c_3 (\sigma_{12})_{p,j+1} - c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i,j+1} + c_2 c_5 (\sigma_{12})_{i,q} - c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p+\zeta, q+\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( -c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i,j} + c_2 c_5 (\sigma_{12})_{p,j} - c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j} + c_3 (\sigma_{12})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} - c_1 c_5 (\sigma_{12})_{p,j+1} + c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i,j+1} + c_4 (\sigma_{12})_{i,q} - c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( -c_2 c_4 (\sigma_{22}^d)_{i,j} + c_4 (\sigma_{22})_{p,j} + c_1 c_4 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j} - c_1 c_5 (\sigma_{22}^g)_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. + c_1 c_3 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j+1} + c_3 (\sigma_{22})_{p,j+1} - c_2 c_3 (\sigma_{22}^d)_{i,j+1} + c_2 c_5 (\sigma_{22}^d)_{i,q} - c_5 (\sigma_{22})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p-\zeta, q+\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( c_2 c_3 (\sigma_{11}^h)_{i,j} - c_2 c_5 (\sigma_{11}^h)_{p,j} + c_2 c_4 (\sigma_{11}^h)_{i+1,j} - c_4 (\sigma_{11})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. - c_1 c_4 (\sigma_{11}^b)_{i+1,j+1} + c_1 c_5 (\sigma_{11}^b)_{p,j+1} - c_1 c_3 (\sigma_{11}^b)_{i,j+1} - c_3 (\sigma_{11})_{i,q} + c_5 (\sigma_{11})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i,j} + c_4 (\sigma_{12})_{p,j} - c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j} + c_2 c_5 (\sigma_{12})_{i+1,q} - \right. \\ &\quad \left. c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} + c_3 (\sigma_{12})_{p,j+1} + c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i,j+1} - c_1 c_5 (\sigma_{12})_{i,q} - c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p-\zeta, q+\zeta}}{dt} &= \frac{4}{h} \left( c_2 c_3 (\sigma_{12})_{i,j} - c_2 c_5 (\sigma_{12})_{p,j} + c_2 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j} - c_4 (\sigma_{12})_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. - c_1 c_4 (\sigma_{12})_{i+1,j+1} + c_1 c_5 (\sigma_{12})_{p,j+1} - c_1 c_3 (\sigma_{12})_{i,j+1} - c_3 (\sigma_{12})_{i,q} + c_5 (\sigma_{12})_{p,q} \right) \\ &\quad + \frac{4}{h} \left( c_1 c_4 (\sigma_{22}^d)_{i,j} + c_4 (\sigma_{22})_{p,j} - c_2 c_4 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j} + c_2 c_5 (\sigma_{22}^g)_{i+1,q} \right. \\ &\quad \left. - c_2 c_3 (\sigma_{22}^g)_{i+1,j+1} + c_3 (\sigma_{22})_{p,j+1} + c_1 c_3 (\sigma_{22}^d)_{i,j+1} - c_1 c_5 (\sigma_{22}^d)_{i,q} - c_5 (\sigma_{22})_{p,q} \right) \end{aligned}$$

La deuxième équation du système (2.1.12) conduit pour chaque noeud à un système linéaire en  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ . Plus précisément nous avons, au noeud  $(i, j)$ :

$$(A.1.1) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^h)_{i,j} \\ (\sigma_{11}^b)_{i,j} \\ (\sigma_{22}^d)_{i,j} \\ (\sigma_{22}^g)_{i,j} \end{bmatrix} = 18 \begin{bmatrix} a & c & b & b \\ c & a & b & b \\ b & b & a & c \\ b & b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bij_1 \\ Bij_2 \\ Bij_3 \\ Bij_4 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} Bij_1 &= \frac{1}{h} \left( c_1 c_3 ((v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q-\zeta}) + c_1 c_4 ((v_1)_{p-1-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta}) \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_3 ((v_1)_{p-1+\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta}) + c_2 c_4 ((v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-1-\zeta, q+\zeta}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bij_2 &= \frac{1}{h} \left( c_1 c_3 ((v_1)_{p-\zeta, q-1+\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q-1+\zeta}) + c_1 c_4 ((v_1)_{p-1-\zeta, q-1+\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-1+\zeta}) \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_3 ((v_1)_{p-1+\zeta, q-1-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-1-\zeta}) + c_2 c_4 ((v_1)_{p+\zeta, q-1-\zeta} - (v_1)_{p-1-\zeta, q-1-\zeta}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bij_3 &= \frac{1}{h} \left( c_1 c_3 ((v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-1+\zeta}) + c_1 c_4 ((v_2)_{p-\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta}) \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_3 ((v_2)_{p+\zeta, q-1+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta}) + c_2 c_4 ((v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-1-\zeta}) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Bij_4 &= \frac{1}{h} \left( c_1 c_3 ((v_2)_{p-1+\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-1+\zeta, q-1+\zeta}) + c_1 c_4 ((v_2)_{p-1+\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p-1+\zeta, q+\zeta}) \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_3 ((v_2)_{p-1-\zeta, q-1+\zeta} - (v_2)_{p-1-\zeta, q-\zeta}) + c_2 c_4 ((v_2)_{p-1-\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-1-\zeta, q-1-\zeta}) \right) \end{aligned}$$

au noeud  $(i, q)$ :

$$(A.1.2) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{i,q} \\ (\sigma_{22}^g)_{i,q} \\ (\sigma_{22}^d)_{i,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Biq_1 \\ Biq_2 \\ Biq_3 \end{bmatrix}$$

où

$$Biq_1 = \frac{1}{h} \left( c_3 \left( (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q-\zeta} + (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q+\zeta} \right) \right. \\ \left. + c_4 \left( (v_1)_{p-1-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} + (v_1)_{p-1-\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} \right) \right)$$

$$Biq_2 = \frac{1}{h} \left( c_1 c_5 \left( (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} \right) + c_2 c_5 \left( (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} \right) \right)$$

$$Biq_3 = \frac{1}{h} \left( c_1 c_5 \left( (v_2)_{p-1+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-1+\zeta, q-\zeta} \right) + c_2 c_5 \left( (v_2)_{p-1-\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-1-\zeta, q+\zeta} \right) \right)$$

au noeud  $(p, j)$ :

$$(A.1.3) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^h)_{p,j} \\ (\sigma_{11}^b)_{p,j} \\ (\sigma_{22})_{p,j} \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a & b \\ b & b & \frac{a+c}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bpj_1 \\ Bpj_2 \\ Bpj_3 \end{bmatrix}$$

où

$$Bpj_1 = \frac{1}{h} \left( c_1 c_5 \left( (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} \right) + c_2 c_5 \left( (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} \right) \right)$$

$$Bpj_2 = \frac{1}{h} \left( c_1 c_5 \left( (v_1)_{p+\zeta, q-1+\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-1+\zeta} \right) + c_2 c_5 \left( (v_1)_{p-\zeta, q-1-\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-1-\zeta} \right) \right)$$

$$Bpj_3 = \frac{1}{h} \left( c_3 \left( (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-1+\zeta} + (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-1+\zeta} \right) \right. \\ \left. + c_4 \left( (v_2)_{p-\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} + (v_2)_{p+\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} \right) \right)$$

au noeud  $(p, q)$ :

$$(A.1.4) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{p,q} \\ (\sigma_{22})_{p,q} \end{bmatrix} = \frac{9}{4} \begin{bmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bpq_1 \\ Bpq_2 \end{bmatrix}$$

où

$$Bpq_1 = \frac{c_5}{h} \left( (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} + (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} \right)$$

$$Bpq_2 = \frac{c_5}{h} \left( (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} + (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} \right)$$

De plus, on obtient pour  $\sigma_{12}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{i,j}}{dt} &= \frac{9\mu}{h} \left( c_1 c_3 \left( (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-1+\zeta} + (v_1)_{p-1+\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q-1+\zeta} \right) \right. \\ &\quad + c_1 c_4 \left( (v_1)_{p-\zeta, q-1-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} + (v_1)_{p-1+\zeta, q-1-\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q+\zeta} \right) \\ &\quad + c_2 c_3 \left( (v_1)_{p-1-\zeta, q-1+\zeta} - (v_1)_{p-1-\zeta, q-\zeta} + (v_1)_{p+\zeta, q-1+\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} \right) \\ &\quad \left. + c_2 c_4 \left( (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-1-\zeta} + (v_1)_{p-1-\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-1-\zeta, q-1-\zeta} \right) \right) \\ &+ \frac{9\mu}{h} \left( c_1 c_3 \left( (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-1+\zeta, q-\zeta} + (v_2)_{p-\zeta, q-1+\zeta} - (v_2)_{p-1+\zeta, q-1+\zeta} \right) \right. \\ &\quad + c_1 c_4 \left( (v_2)_{p-1-\zeta, q-1+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-1+\zeta} + (v_2)_{p-1-\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} \right) \\ &\quad + c_2 c_3 \left( (v_2)_{p-1+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} + (v_2)_{p-1+\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-1-\zeta} \right) \\ &\quad \left. + c_2 c_4 \left( (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-1-\zeta, q+\zeta} + (v_2)_{p+\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p-1-\zeta, q-1-\zeta} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{p,j}}{dt} &= \frac{9\mu}{2h} \left( c_3 \left( (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-1+\zeta} + (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-1+\zeta} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_4 \left( (v_1)_{p-1-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} + (v_1)_{p+\zeta, q-1-\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} \right) \right) \\ &+ \frac{9\mu}{2h} \left( c_1 c_5 \left( (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} + (v_2)_{p+\zeta, q-1+\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-1+\zeta} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_5 \left( (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} + (v_2)_{p-\zeta, q-1-\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-1-\zeta} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{i,q}}{dt} &= \frac{9\mu}{2h} \left( c_1 c_5 \left( (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} + (v_1)_{p-1+\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-1+\zeta, q-\zeta} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_2 c_5 \left( (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} + (v_1)_{p-1-\zeta, q-\zeta} - (v_1)_{p-1-\zeta, q+\zeta} \right) \right) \\ &+ \frac{9\mu}{2h} \left( c_3 \left( (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-1+\zeta, q+\zeta} + (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-1-\zeta, q-\zeta} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_4 \left( (v_2)_{p-1-\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} + (v_2)_{p-1-\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{p,q}}{dt} &= \frac{9c_5}{4h} \mu \left( (v_1)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p+\zeta, q-\zeta} + (v_1)_{p-\zeta, q+\zeta} - (v_1)_{p-\zeta, q-\zeta} \right) \\ &+ \frac{9c_5}{4h} \mu \left( (v_2)_{p+\zeta, q+\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q+\zeta} + (v_2)_{p+\zeta, q-\zeta} - (v_2)_{p-\zeta, q-\zeta} \right) \end{aligned}$$

## A.2 L'élément fini $Q_3 - Q_2$

Nous donnons ici les équations semi-discrétisés en espace associés à l'élément fini  $Q_3 - Q_2$ . À partir de la première équation du système (2.1.12) on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p-\eta,q-\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{p_2,j} \right. \\ &+ \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} + \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} \\ &- \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} + \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} + \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{11}^b)_{i,j} \\ &+ \frac{t_8 - t_{10}}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} + \frac{t_7 - t_9}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{11})_{i,q_1} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{11})_{i,q_2} \\ &\left. + \frac{t_8 + t_{10}}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} - \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{11}^h)_{i,j} + \frac{t_7 + t_9}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p,q-\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{4} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} - \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{p_1,j} \sqrt{15} - \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{p_2,j} \sqrt{15} \right. \\ &- \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} \\ &+ \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} - \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} \\ &\left. + \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} + \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} - \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} - \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{12})_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p+\eta,q-\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{p_2,j} \right. \\ &- \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} \\ &+ \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} - \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{11}^b)_{i,j} + \frac{t_9 - t_7}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} \\ &+ \frac{t_{10} - t_8}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{11})_{i,q_1} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{11})_{i,q_2} - \frac{t_9 + t_7}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} \\ &\left. + \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{11}^h)_{i,j} - \frac{t_{10} + t_8}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p+\eta,q}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{i,q_1} + \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} \right. \\ &\quad - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} \\ &\quad - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} - \frac{1}{8} (\sigma_{11}^b)_{i,j} \sqrt{15} + \frac{1}{16} t_7 (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} + \frac{1}{16} t_8 (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} \\ &\quad + \frac{5}{8} (\sigma_{11})_{i,q_1} \sqrt{15} + \frac{5}{8} (\sigma_{11})_{i,q_2} \sqrt{15} + \frac{1}{16} t_7 (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} - \frac{1}{8} (\sigma_{11}^h)_{i,j} \sqrt{15} \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} t_8 (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} + \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p+\eta,q+\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{p_2,j} \right. \\ &\quad - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} + \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} \\ &\quad - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} + \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{11}^b)_{i,j} - \frac{t_7+t_9}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} \\ &\quad - \frac{t_8+t_{10}}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{11})_{i,q_1} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{11})_{i,q_2} + \frac{t_9-t_7}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{11}^h)_{i,j} + \frac{t_{10}-t_8}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{i,q_2} - \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p,q+\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{4} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{p_1,j} \sqrt{15} + \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{p_2,j} \sqrt{15} \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{12})_{i,q_2} - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} \\ &\quad - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} + \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} - \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} + \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} - \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} + \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} + \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{12})_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p-\eta,q+\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{p_2,j} \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} + \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} \\ &\quad + \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} - \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} - \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{11}^b)_{i,j} \\ &\quad + \frac{t_8+t_{10}}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} + \frac{t_7+t_9}{8} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{11})_{i,q_1} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{11})_{i,q_2} \\ &\quad \left. + \frac{t_8-t_{10}}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} + \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{11}^h)_{i,j} + \frac{t_7-t_9}{8} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p-\eta,q}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{i,q_1} + \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{i,q_2} - \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} \right. \\ &+ \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{11})_{p_1,q_1} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{11})_{p_2,q_1} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{11})_{p_2,q_2} - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} \\ &+ \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{11})_{p_1,q_2} + \frac{1}{8} (\sigma_{11}^b)_{i,j} \sqrt{15} - \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} - \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} \\ &\left. - \frac{5}{8} (\sigma_{11})_{i,q_1} \sqrt{15} - \frac{5}{8} (\sigma_{11})_{i,q_2} \sqrt{15} - \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} + \frac{1}{8} (\sigma_{11}^h)_{i,j} \sqrt{15} - \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_1)_{p,q}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} - \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} - \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} + \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} \right. \\ &- \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11})_{p_1,q_1} + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11})_{p_2,q_1} + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11})_{p_2,q_2} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{11})_{p_1,q_2} \\ &+ \frac{5}{16} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{i,q_1} - \frac{5}{16} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{i,q_2} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,q_1} \\ &\left. + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,q_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p-\eta,q-\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{t_8 - t_{10}}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} + \frac{t_8 + t_{10}}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} \right. \\ &+ \frac{t_7 + t_9}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} + \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} \\ &+ \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,j} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{i,q_1} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} \\ &+ \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{22}^g)_{i,j} + \frac{t_7 - t_9}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} - \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{22}^d)_{i,j} \\ &\left. - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{22})_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{22})_{p_2,j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p,q-\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} - \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} - \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} \right. \\ &+ \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} - \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,j} + \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,j} \\ &- \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{1}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,j} \sqrt{15} - \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} \\ &\left. + \frac{1}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,j} \sqrt{15} - \frac{5}{8} (\sigma_{22})_{p_1,j} \sqrt{15} - \frac{5}{8} (\sigma_{22})_{p_2,j} \sqrt{15} + \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p+\eta,q-\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{t_8 + t_{10}}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} \right. \\ &\quad + \frac{t_7 - t_9}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} - \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} - \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} \\ &\quad - \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,j} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{i,q_1} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{i,q_2} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} \\ &\quad + \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{22}^g)_{i,j} + \frac{t_7 + t_9}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} + \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{22}^d)_{i,j} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{22})_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{22})_{p_2,j} + \frac{t_8 - t_{10}}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p+\eta,q}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{4} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} - \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} \right. \\ &\quad + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} - \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} + \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} + \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,j} \\ &\quad + \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,j} + \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{i,q_1} \sqrt{15} + \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{i,q_2} \sqrt{15} - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} + \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p+\eta,q+\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} - \frac{t_7 + t_9}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} \right. \\ &\quad + \frac{t_{10} - t_8}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} \\ &\quad + \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} - \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{p_2,j} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{i,q_1} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{i,q_2} \\ &\quad - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{22}^g)_{i,j} + \frac{t_9 - t_7}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} \\ &\quad \left. - \frac{t_8 + t_{10}}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} - \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{22}^d)_{i,j} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{22})_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{22})_{p_2,j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p,q+\eta}}{dt} &= \frac{1}{h} \left( -\frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{16} t_7 (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} + \frac{1}{16} t_7 (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} + \frac{1}{16} t_8 (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} \right. \\ &\quad - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} - \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} - \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,j} + \frac{5}{8} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,j} \\ &\quad + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} + \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{1}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,j} \sqrt{15} + \frac{1}{16} t_8 (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} \\ &\quad \left. + \frac{5}{8} (\sigma_{22})_{p_2,j} \sqrt{15} + \frac{5}{8} (\sigma_{22})_{p_1,j} \sqrt{15} - \frac{1}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,j} \sqrt{15} - \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p-\eta,q+\eta}}{dt} = & \frac{1}{h} \left( \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} - \frac{1}{2} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} + \frac{t_9 - t_7}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} - \frac{t_9 + t_7}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} \right. \\ & - \frac{t_8 + t_{10}}{8} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} + \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_4 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} + \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} \\ & - \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} + \frac{1}{4} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,j} + \frac{1}{4} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,j} + \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{12})_{i,q_1} - \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{12})_{i,q_2} \\ & - \frac{1}{8} t_2 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} - \frac{1}{8} t_1 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} + \frac{1}{8} t_3 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} - \frac{1}{4} t_{11} (\sigma_{22}^g)_{i,j} + \frac{t_{10} - t_8}{8} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} \\ & \left. + \frac{1}{4} t_{12} (\sigma_{22}^d)_{i,j} + \frac{1}{4} t_5 (\sigma_{22})_{p_1,j} - \frac{1}{4} t_6 (\sigma_{22})_{p_2,j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p-\eta,q}}{dt} = & \frac{1}{h} \left( \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,q_1} + \frac{1}{4} (\sigma_{12})_{i,j} \sqrt{15} - \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} + \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} \right. \\ & - \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{22})_{p_1,q_1} + \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{22})_{p_2,q_1} - \frac{5}{16} t_1 (\sigma_{22})_{p_2,q_2} + \frac{5}{16} t_2 (\sigma_{22})_{p_1,q_2} - \frac{1}{8} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,j} \\ & - \frac{1}{8} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,j} - \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{i,q_1} \sqrt{15} - \frac{5}{8} (\sigma_{12})_{i,q_2} \sqrt{15} + \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,q_1} + \frac{5}{16} t_8 (\sigma_{12})_{p_2,q_2} \\ & \left. + \frac{5}{16} t_7 (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{5}{16} t_{14} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} - \frac{5}{16} t_{13} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_2)_{p,q}}{dt} = & \frac{1}{h} \left( \frac{5}{16} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,j} - \frac{5}{16} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,j} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,q_1} + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,q_1} \right. \\ & + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_2,q_2} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{12})_{p_1,q_2} + \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} - \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22}^g)_{i,q_2} \\ & - \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22}^d)_{i,q_2} + \frac{5}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22})_{p_1,q_1} - \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22})_{p_2,q_1} \\ & \left. + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22})_{p_2,q_2} + \frac{25}{32} \sqrt{5} (\sigma_{22})_{p_1,q_2} \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{15} - \sqrt{5} & t_2 &= \sqrt{15} + \sqrt{5} \\ t_3 &= 3\sqrt{15} + 5\sqrt{5} & t_4 &= 3\sqrt{15} - 5\sqrt{5} \\ t_5 &= 3\sqrt{5} + \sqrt{15} & t_6 &= 3\sqrt{5} - \sqrt{15} \\ t_7 &= \sqrt{15} + 2\sqrt{5} & t_8 &= \sqrt{15} - 2\sqrt{5} \\ t_9 &= 3 + 2\sqrt{3} & t_{10} &= 3 - 2\sqrt{3} \\ t_{11} &= 3 - \sqrt{15} & t_{12} &= 3 + \sqrt{15} \\ t_{13} &= \sqrt{3} + \sqrt{5} & t_{14} &= \sqrt{3} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

La deuxième équation du système (2.1.12) conduit pour chaque noeud à un système linéaire en  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ ,  
au noeud  $(i, j)$ :

$$(A.2.1) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^h)_{i,j} \\ (\sigma_{11}^b)_{i,j} \\ (\sigma_{22}^d)_{i,j} \\ (\sigma_{22}^g)_{i,j} \end{bmatrix} = 72 \begin{bmatrix} a & c & b & b \\ c & a & b & b \\ b & b & a & c \\ b & b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bij_1 \\ Bij_2 \\ Bij_3 \\ Bij_4 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} Bij_1 = & \frac{5}{2592h} \left( \frac{4s_1}{5} (v_1)_{p,q+\eta} + s_2 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 4s_3 (v_1)_{p-\eta,q} + \frac{16}{5} (v_1)_{p,q} \right. \\ & + s_1 (v_1)_{p-1-\eta,q-\eta} + \frac{4s_2}{5} (v_1)_{p-1,q-\eta} - s_5 (v_1)_{p-1+\eta,q-\eta} + 4s_3 (v_1)_{p-1+\eta,q} \\ & - s_2 (v_1)_{p-1+\eta,q+\eta} - \frac{4s_1}{5} (v_1)_{p-1,q+\eta} + s_6 (v_1)_{p-1-\eta,q+\eta} - 4s_4 (v_1)_{p-1-\eta,q} - \frac{16}{5} (v_1)_{p-1,q} \\ & \left. + s_5 (v_1)_{p-\eta,q-\eta} - \frac{4s_2}{5} (v_1)_{p,q-\eta} - s_1 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} - s_6 (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 4s_4 (v_1)_{p+\eta,q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bij_2 = & \frac{5}{2592h} \left( -s_2 (v_1)_{p-1+\eta,q-1-\eta} + 4s_3 (v_1)_{p-1+\eta,q-1} - s_5 (v_1)_{p-1+\eta,q-1+\eta} \right. \\ & + s_1 (v_1)_{p-1-\eta,q-1+\eta} - 4s_4 (v_1)_{p-1-\eta,q-1} - \frac{16}{5} (v_1)_{p-1,q-1} + s_2 (v_1)_{p-\eta,q-1-\eta} \\ & - s_6 (v_1)_{p+\eta,q-1-\eta} + s_6 (v_1)_{p-1-\eta,q-1-\eta} + \frac{4s_2}{5} (v_1)_{p-1,q-1+\eta} + \frac{4s_1}{5} (v_1)_{p,q-1-\eta} \\ & - \frac{4s_1}{5} (v_1)_{p-1,q-1-\eta} + 4s_4 (v_1)_{p+\eta,q-1} - s_1 (v_1)_{p+\eta,q-1+\eta} - \frac{4s_2}{5} (v_1)_{p,q-1+\eta} \\ & \left. + s_5 (v_1)_{p-\eta,q-1+\eta} - 4s_3 (v_1)_{p-\eta,q-1} + \frac{16}{5} (v_1)_{p,q-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bij_3 = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 4(v_2)_{p,q-1-\eta} + (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 9(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right. \right. \\ & + \frac{4}{5} (v_2)_{p-\eta,q-1} - \frac{4}{5} (v_2)_{p-\eta,q} - 9(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \\ & + 4(v_2)_{p,q-1+\eta} + 4(v_2)_{p,q+\eta} - (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 9(v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\ & \left. - \frac{4}{5} (v_2)_{p+\eta,q-1} + 9(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + \frac{4}{5} (v_2)_{p+\eta,q} - 4(v_2)_{p,q-\eta} \right) \\ & - 5(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 16(v_2)_{p,q-1-\eta} - 35(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 4(v_2)_{p+\eta,q-1} \\ & + 35(v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 16(v_2)_{p,q-\eta} + 5(v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 4(v_2)_{p+\eta,q} - \frac{16}{5} (v_2)_{p,q-1} \\ & + 35(v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 16(v_2)_{p,q+\eta} + 5(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 4(v_2)_{p-\eta,q} + \frac{16}{5} (v_2)_{p,q} \\ & \left. - 5(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} + 16(v_2)_{p,q-1+\eta} - 35(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} + 4(v_2)_{p-\eta,q-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bij_4 = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( 4(v_2)_{p-1,q+\eta} - 9(v_2)_{p-1+\eta,q-1+\eta} + \frac{4}{5}(v_2)_{p-1+\eta,q-1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{4}{5}(v_2)_{p-1+\eta,q} + (v_2)_{p-1+\eta,q-1-\eta} + (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} \right) \right. \\
 & - 35(v_2)_{p-1+\eta,q-1+\eta} + 16(v_2)_{p-1,q-1+\eta} - 5(v_2)_{p-1-\eta,q-1+\eta} \\
 & + 4(v_2)_{p-1-\eta,q-1} - \frac{16}{5}(v_2)_{p-1,q-1} - 16(v_2)_{p-1,q+\eta} - 4(v_2)_{p-1+\eta,q} \\
 & + 5(v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} + 35(v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} - 4(v_2)_{p-1-\eta,q} + \frac{16}{5}(v_2)_{p-1,q} \\
 & - 35(v_2)_{p-1-\eta,q-1-\eta} + 16(v_2)_{p-1,q-1-\eta} - 5(v_2)_{p-1+\eta,q-1-\eta} \\
 & + 4(v_2)_{p-1+\eta,q-1} + 5(v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} - 16(v_2)_{p-1,q-\eta} + 35(v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \\
 & + \sqrt{15} \left( -\frac{4}{5}(v_2)_{p-1-\eta,q-1} + \frac{4}{5}(v_2)_{p-1-\eta,q} - (v_2)_{p-1-\eta,q-1+\eta} - 4(v_2)_{p-1,q-1-\eta} \right. \\
 & \left. + 4(v_2)_{p-1,q-1+\eta} - (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 4(v_2)_{p-1,q-\eta} + 9(v_2)_{p-1-\eta,q-1-\eta} \right. \\
 & \left. - 9(v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} + 9(v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right) \Big)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(p_1, j)$ :

$$(A.2.2) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^h)_{p_1,j} \\ (\sigma_{11}^b)_{p_1,j} \\ (\sigma_{22})_{p_1,j} \end{bmatrix} = \frac{144}{5} \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a & b \\ b & b & \frac{a+c}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bp_1j_1 \\ Bp_1j_2 \\ Bp_1j_3 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Bp_1j_1 = & \frac{5}{2592h} \left( -20t_{14}(v_1)_{p,q+\eta} + (10t_{14} + 5t_{11})(v_1)_{p-\eta,q+\eta} + 4t_7(v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & - 16\sqrt{5}(v_1)_{p,q} - (10t_{13} + 5t_{12})(v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 20t_{13}(v_1)_{p,q-\eta} + 5(t_8 + t_{10})(v_1)_{p+\eta,q-\eta} \\
 & \left. + 5(t_8 - t_{10})(v_1)_{p+\eta,q+\eta} - 4t_8(v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_1j_2 = & \frac{5}{2592h} \left( (10t_{14} + 5t_{11})(v_1)_{p-\eta,q-1-\eta} - 20t_{14}(v_1)_{p,q-1-\eta} + (10t_{14} - 5t_{11})(v_1)_{p+\eta,q-1-\eta} \right. \\
 & - 4t_8(v_1)_{p+\eta,q-1} + (5t_{12} - 10t_{13})(v_1)_{p+\eta,q-1+\eta} + 20t_{13}(v_1)_{p,q-1+\eta} \\
 & \left. - (10t_{13} + 5t_{12})(v_1)_{p-\eta,q-1+\eta} + 4t_7(v_1)_{p-\eta,q-1} - 16\sqrt{5}(v_1)_{p,q-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_1j_1 = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{3} \left( 4(v_2)_{p-\eta,q-1} - 20(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 20(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} \right. \right. \\
 & - 4(v_2)_{p+\eta,q-1} + 20(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 20(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 4(v_2)_{p-\eta,q} + 4(v_2)_{p+\eta,q} \\
 & + 20(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20(v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 20(v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 20(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \left. \right) \\
 & + \sqrt{5} \left( 15(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 15(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 15(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 15(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} \right. \\
 & + 15(v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 15(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 15(v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 15(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \left. \right) \\
 & + \sqrt{15} \left( 5(v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 20(v_2)_{p,q-1-\eta} + 5(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 5(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right. \\
 & - 5(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 5(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20(v_2)_{p,q-1+\eta} - 20(v_2)_{p,q+\eta} \\
 & - 5(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 5(v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 5(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 20(v_2)_{p,q-\eta} \left. \right) \\
 & - 80(v_2)_{p,q-1-\eta} - 20(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 4(v_2)_{p+\eta,q-1} + 20(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \\
 & + 80(v_2)_{p,q-\eta} + 20(v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 4(v_2)_{p+\eta,q} + 20(v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\
 & + 80(v_2)_{p,q+\eta} + 20(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 4(v_2)_{p-\eta,q} - 16(v_2)_{p,q} \\
 & - 20(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 80(v_2)_{p,q-1+\eta} - 20(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} + 4(v_2)_{p-\eta,q-1} \\
 & \left. + 16(v_2)_{p,q-1} - 20(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(p_2, j)$ :

$$(A.2.3) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}^h)_{p_2,j} \\ (\sigma_{11}^b)_{p_2,j} \\ (\sigma_{22})_{p_2,j} \end{bmatrix} = \frac{144}{5} \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a & b \\ b & b & \frac{a+c}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bp_2j_1 \\ Bp_2j_2 \\ Bp_2j_3 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Bp_2j_1 = & \frac{5}{2592h} \left( 20t_{14}(v_1)_{p,q+\eta} + (5t_{11} - 10t_{14})(v_1)_{p-\eta,q+\eta} + 4t_8(v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & + 16\sqrt{5}(v_1)_{p,q} + (10t_{13} - 5t_{12})(v_1)_{p-\eta,q-\eta} - 20t_13(v_1)_{p,q-\eta} \\
 & \left. + (5t_{12} + 10t_{13})(v_1)_{p+\eta,q-\eta} - (5t_{11} + 10t_{14})(v_1)_{p+\eta,q+\eta} - 4t_7(v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_2j_2 = & \frac{5}{2592h} \left( (5t_{11} - 10t_{14})(v_1)_{p-\eta,q-1-\eta} + 20t_{14}(v_1)_{p,q-1-\eta} - 4t_7(v_1)_{p+\eta,q-1} \right. \\
 & - (5t_{11} + 10t_{14})(v_1)_{p+\eta,q-1-\eta} + (5t_{12} + 10t_{13})(v_1)_{p+\eta,q-1+\eta} - 20t_{13}(v_1)_{p,q-1+\eta} \\
 & \left. + (10t_{13} - 5t_{12})(v_1)_{p-\eta,q-1+\eta} + 4t_8(v_1)_{p-\eta,q-1} + 16\sqrt{5}(v_1)_{p,q-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_2j_3 = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{3} \left( -4(v_2)_{p-\eta,q-1} + 20(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 4(v_2)_{p+\eta,q-1} \right. \right. \\
 & - 20(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} + 4(v_2)_{p-\eta,q} - 20(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 4(v_2)_{p+\eta,q} + 20(v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\
 & \left. \left. + 20(v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 20(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 20(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 20(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \right. \\
 & + \sqrt{5} \left( -15(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 15(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} + 15(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 15(v_2)_{p+\eta,q+\eta} \right. \\
 & \left. + 15(v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 15(v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 15(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 15(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{15} \left( 5(v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 20(v_2)_{p,q-1-\eta} + 5(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 5(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right. \\
 & - 5(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 5(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20(v_2)_{p,q-1+\eta} - 20(v_2)_{p,q+\eta} \\
 & - 5(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 5(v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 5(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 20(v_2)_{p,q-\eta} \\
 & - 80(v_2)_{p,q-1-\eta} - 20(v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 4(v_2)_{p+\eta,q-1} + 20(v_2)_{p-\eta,q-\eta} \\
 & + 80(v_2)_{p,q-\eta} + 20(v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 4(v_2)_{p+\eta,q} + 20(v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\
 & + 80(v_2)_{p,q+\eta} + 20(v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 4(v_2)_{p-\eta,q} - 16(v_2)_{p,q} - 20(v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} \\
 & \left. \left. - 20(v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 80(v_2)_{p,q-1+\eta} - 20(v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} + 4(v_2)_{p-\eta,q-1} + 16(v_2)_{p,q-1} \right) \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(i, q_1)$ :

$$(A.2.4) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{i,q_1} \\ (\sigma_{22}^g)_{i,q_1} \\ (\sigma_{22}^d)_{i,q_1} \end{bmatrix} = \frac{144}{5} \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Biq_{11} \\ Biq_{12} \\ Biq_{13} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Biq_{11} = & \frac{5}{2592h} \left( 4s_7(v_1)_{p,q+\eta} - (5t_6 + 20s_7)(v_1)_{p-\eta,q+\eta} + 20s_3(v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & - 16(v_1)_{p,q} - 20s_3(v_1)_{p-1+\eta,q} + (5t_5 - 20s_8)(v_1)_{p-1-\eta,q-\eta} \\
 & + 4s_8(v_1)_{p-1,q-\eta} - (5t_5 + 20s_8)(v_1)_{p-1+\eta,q-\eta} + 20s_4(v_1)_{p-1-\eta,q} \\
 & + (20s_7 + 5t_6)(v_1)_{p-1+\eta,q+\eta} - 4s_7(v_1)_{p-1,q+\eta} + (20s_7 - 5t_6)(v_1)_{p-1-\eta,q+\eta} \\
 & + 16(v_1)_{p-1,q} + (20s_8 + 5t_5)(v_1)_{p-\eta,q-\eta} - 4s_8(v_1)_{p,q-\eta} \\
 & \left. + (20s_8 - 5t_5)(v_1)_{p+\eta,q-\eta} + (5t_6 - 20s_7)(v_1)_{p+\eta,q+\eta} - 20s_4(v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Biq_{12} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( -5 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta, q-\eta} + 5 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 4 (v_2)_{p, q+\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta, q+\eta} + 4 (v_2)_{p, q-\eta} \right) \right. \\
 & - 15 \left( (v_2)_{p-\eta, q-\eta} - (v_2)_{p+\eta, q-\eta} + (v_2)_{p+\eta, q+\eta} - (v_2)_{p-\eta, q+\eta} \right) - 16\sqrt{5} (v_2)_{p, q} \\
 & + \sqrt{5} \left( 8 (v_2)_{p, q-\eta} + 20 (v_2)_{p-\eta, q} + 20 (v_2)_{p+\eta, q} - 10 (v_2)_{p+\eta, q+\eta} \right. \\
 & \left. + 8 (v_2)_{p, q+\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta, q-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{3} \left( 20 (v_2)_{p-\eta, q} t_1 - 10 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} t_1 - 20 (v_2)_{p+\eta, q} t_1 \right. \\
 & \left. + 10 (v_2)_{p+\eta, q+\eta} t_1 + 10 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} t_1 - 10 (v_2)_{p-\eta, q-\eta} t_1 \right) \Big)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Biq_{13} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{5} \left( 20 (v_2)_{p-1+\eta, q} + 8 (v_2)_{p-1, q-\eta} - 10 (v_2)_{p-1+\eta, q+\eta} + 8 (v_2)_{p-1, q+\eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 10 (v_2)_{p-1-\eta, q+\eta} + 20 (v_2)_{p-1-\eta, q} - 10 (v_2)_{p-1-\eta, q-\eta} - 10 (v_2)_{p-1+\eta, q-\eta} \right) \right. \\
 & - 16\sqrt{5} (v_2)_{p-1, q} + 15 \left( (v_2)_{p-1+\eta, q+\eta} - (v_2)_{p-1-\eta, q+\eta} + (v_2)_{p-1-\eta, q-\eta} - (v_2)_{p-1+\eta, q-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{3} \left( 20 (v_2)_{p-1+\eta, q} - 10 (v_2)_{p-1+\eta, q+\eta} + 10 (v_2)_{p-1-\eta, q+\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta, q} \right. \\
 & \left. + 10 (v_2)_{p-1-\eta, q-\eta} - 10 (v_2)_{p-1+\eta, q-\eta} + 4 (v_2)_{p-1, q-\eta} t_2 - 4 (v_2)_{p-1, q+\eta} t_2 \right) \\
 & \left. + \sqrt{15} \left( -5 (v_2)_{p-1-\eta, q-\eta} + 5 (v_2)_{p-1+\eta, q+\eta} + 5 (v_2)_{p-1-\eta, q+\eta} - 5 (v_2)_{p-1+\eta, q-\eta} \right) \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(i, q_2)$ :

$$(A.2.5) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{i, q_2} \\ (\sigma_{22}^g)_{i, q_2} \\ (\sigma_{22}^d)_{i, q_2} \end{bmatrix} = \frac{144}{5} \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Biq_{21} \\ Biq_{22} \\ Biq_{23} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Biq_{21} = & \frac{5}{2592h} \left( -4s_8 (v_1)_{p, q+\eta} + (20s_8 + 5t_5) (v_1)_{p-\eta, q+\eta} + 20s_8 (v_1)_{p-\eta, q} \right. \\
 & - 16 (v_1)_{p, q} - 20s_3 (v_1)_{p-1+\eta, q} + (20s_7 - 5t_6) (v_1)_{p-1-\eta, q-\eta} \\
 & - 4s_7 (v_1)_{p-1, q-\eta} + (5t_6 + 20s_7) (v_1)_{p-1+\eta, q-\eta} - (5t_5 + 20s_8) (v_1)_{p-1+\eta, q+\eta} \\
 & + 4s_8 (v_1)_{p-1, q+\eta} + (5t_5 - 20s_8) (v_1)_{p-1-\eta, q+\eta} + 20s_4 (v_1)_{p-1-\eta, q} \\
 & + 16 (v_1)_{p-1, q} + (5t_6 - 20s_7) (v_1)_{p+\eta, q-\eta} - (5t_6 + 20s_7) (v_1)_{p-\eta, q-\eta} \\
 & \left. + 4s_7 (v_1)_{p, q-\eta} + (20s_8 - 5t_5) (v_1)_{p+\eta, q+\eta} - 20s_4 (v_1)_{p+\eta, q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Biq_{22} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( -5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 4 (v_2)_{p,q+\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 4 (v_2)_{p,q-\eta} \right) \right. \\
 & + 15 \left( (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \right) \\
 & + \sqrt{5} \left( 16 (v_2)_{p,q} - 8 (v_2)_{p,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} \right. \\
 & \left. - 20 (v_2)_{p+\eta,q} + 10 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 8 (v_2)_{p,q+\eta} \right. \\
 & \left. + 10 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 10 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \\
 & \left. + \sqrt{3} \left( -20 (v_2)_{p-\eta,q} + 10 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 10 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Biq_{23} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{5} \left( -20 (v_2)_{p-1+\eta,q} + 10 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 8 (v_2)_{p-1,q+\eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 10 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q} + 16 (v_2)_{p-1,q} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 10 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} - 8 (v_2)_{p-1,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{3} \left( -20 (v_2)_{p-1+\eta,q} + 10 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 10 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 20 (v_2)_{p-1-\eta,q} - 10 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{15} \left( -4 (v_2)_{p-1,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 5 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 (v_2)_{p-1,q-\eta} + 5 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right) \right. \\
 & \left. + 15 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 15 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} - 15 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(p_1, q_1)$ :

$$(A.2.6) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{p_1, q_1} \\ (\sigma_{22})_{p_1, q_1} \end{bmatrix} = \frac{144}{25} \begin{bmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bp_1q_{11} \\ Bp_1q_{12} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Bp_1q_{11} = & \frac{5}{2592h} \left( -20t_1 (v_1)_{p,q+\eta} + 5t_2 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 20t_7 (v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & \left. + 80\sqrt{5} (v_1)_{p,q} - 5t_3 (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 20t_2 (v_1)_{p,q-\eta} \right. \\
 & \left. - 5t_1 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} + 5t_4 (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 20t_8 (v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_1q_{12} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( -15 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p,q-\eta} t_2 \right. \right. \\
 & + 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p+\eta,q} + 15 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\
 & \left. \left. + 20 (v_2)_{p,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-\eta,q} \right) \right. \\
 & + \sqrt{5} \left( -25 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 40 (v_2)_{p,q-\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} \right. \\
 & + 20 (v_2)_{p+\eta,q} - 25 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 40 (v_2)_{p,q+\eta} \\
 & \left. \left. + 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-\eta,q} + 80 (v_2)_{p,q} \right) \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(p_2, q_1)$ :

$$(A.2.7) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{p_2, q_1} \\ (\sigma_{22})_{p_2, q_1} \end{bmatrix} = \frac{144}{25} \begin{bmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bp_2q_{11} \\ Bp_2q_{12} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Bp_2q_{11} = & \frac{5}{2592h} \left( 20t_1 (v_1)_{p,q+\eta} - 5t_4 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 20t_8 (v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & - 80\sqrt{5} (v_1)_{p,q} + 5t_1 (v_1)_{p-\eta,q-\eta} - 20t_2 (v_1)_{p,q-\eta} \\
 & \left. + 5t_3 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} - 5t_2 (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 20t_7 (v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_2q_{12} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p,q-\eta} - 15 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} \right) \right. \\
 & + \sqrt{5} \left( 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 40 (v_2)_{p,q-\eta} - 25 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} \right. \\
 & + 20 (v_2)_{p+\eta,q} + 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 40 (v_2)_{p,q+\eta} \\
 & \left. \left. - 25 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-\eta,q} + 80 (v_2)_{p,q} \right) \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(p_2, q_2)$ :

$$(A.2.8) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{p_2, q_2} \\ (\sigma_{22})_{p_2, q_2} \end{bmatrix} = \frac{144}{25} \begin{bmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bp_2q_{21} \\ Bp_2q_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Bp_2q_{21} = & \frac{5}{2592h} \left( -20t_2 (v_1)_{p,q+\eta} + 5t_1 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 20t_8 (v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & - 80\sqrt{5} (v_1)_{p,q} - 5t_4 (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 20t_1 (v_1)_{p,q-\eta} \\
 & \left. - 5t_2 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} + 5t_3 (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 20t_7 (v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 Bp_2q_{22} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( -15 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p,q-\eta} - 20 (v_2)_{p+\eta,q} \right. \right. \\
 & + 15 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-\eta,q} + 20 (v_2)_{p,q+\eta} \left. \right) \\
 & + \sqrt{5} \left( -5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p+\eta,q} + 25 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \right. \\
 & + 40 (v_2)_{p,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} \\
 & \left. \left. - 80 (v_2)_{p,q} + 25 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 40 (v_2)_{p,q-\eta} \right) \right)
 \end{aligned}$$

au noeud  $(p_1, q_2)$ :

$$(A.2.9) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (\sigma_{11})_{p_1, q_2} \\ (\sigma_{22})_{p_1, q_2} \end{bmatrix} = \frac{144}{25} \begin{bmatrix} a + c & 2b \\ 2b & a + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bp_1q_{21} \\ Bp_1q_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 Bp_1q_{21} = & \frac{5}{2592h} \left( 20t_2 (v_1)_{p,q+\eta} - 5t_3 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 20t_7 (v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & + 80\sqrt{5} (v_1)_{p,q} + 5t_2 (v_1)_{p-\eta,q-\eta} - 20t_1 (v_1)_{p,q-\eta} \\
 & \left. + 5t_4 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} - 5t_1 (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 20t_8 (v_1)_{p+\eta,q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bp_1q_{22} = & \frac{5}{2592h} \left( \sqrt{15} \left( 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p,q-\eta} - 15 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} \right) \right. \\
 & + \sqrt{5} \left( -5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 40 (v_2)_{p,q+\eta} + 25 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \right. \\
 & - 20 (v_2)_{p-\eta,q} - 80 (v_2)_{p,q} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \\
 & \left. \left. + 40 (v_2)_{p,q-\eta} + 25 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p+\eta,q} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Pour  $\sigma_{12}$  on obtient,

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sigma_{12})_{i,j}}{dt} = & \frac{5\mu}{72h} \left( 5s_5 (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 5s_2 (v_1)_{p-1-\eta,q-\eta} - 20s_4 (v_1)_{p-1,q-1-\eta} \right. \\
 & - 20s_3 (v_1)_{p,q-\eta} - 5s_2 (v_1)_{p+\eta,q-1+\eta} - 4s_1 (v_1)_{p+\eta,q-1} + 20s_3 (v_1)_{p,q-1+\eta} \\
 & + \sqrt{15} \left( -5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 4 (v_2)_{p,q-1-\eta} + 5 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 45 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right. \\
 & - 20 (v_2)_{p-\eta,q-1} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} + 45 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} + 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 4 (v_2)_{p,q-1+\eta} \\
 & + 4 (v_2)_{p,q+\eta} - 5 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 45 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q-1} - 45 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} \\
 & - 4 (v_2)_{p-1,q+\eta} - 45 (v_2)_{p-1+\eta,q-1+\eta} + 20 (v_2)_{p-1+\eta,q-1} + 20 (v_2)_{p-1+\eta,q} \\
 & + 5 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q} - 5 (v_2)_{p-1+\eta,q-1-\eta} - 4 (v_2)_{p,q-\eta} \\
 & + 5 (v_2)_{p-1-\eta,q-1+\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q-1} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q} \\
 & + 4 (v_2)_{p-1,q-1+\eta} - 5 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 4 (v_2)_{p-1,q-1-\eta} + 4 (v_2)_{p-1,q-\eta} \\
 & \left. + 45 (v_2)_{p-1-\eta,q-1-\eta} + 45 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} - 45 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right) \\
 & - 175 (v_2)_{p-1+\eta,q-1+\eta} + 20 (v_2)_{p-1,q-1+\eta} - 25 (v_2)_{p-1-\eta,q-1+\eta} + 80 (v_2)_{p-1-\eta,q-1} \\
 & - 16 (v_2)_{p-1,q-1} + 25 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 20 (v_2)_{p,q-1-\eta} + 175 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} \\
 & - 80 (v_2)_{p+\eta,q-1} + 20 (v_2)_{p-1,q+\eta} + 80 (v_2)_{p-1+\eta,q} - 25 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} \\
 & - 175 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} + 80 (v_2)_{p-1-\eta,q} - 16 (v_2)_{p-1,q} - 175 (v_2)_{p-1-\eta,q-1-\eta} \\
 & + 20 (v_2)_{p-1,q-1-\eta} - 25 (v_2)_{p-1+\eta,q-1-\eta} + 80 (v_2)_{p-1+\eta,q-1} + 175 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \\
 & - 20 (v_2)_{p,q-\eta} + 25 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 80 (v_2)_{p+\eta,q} + 175 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\
 & - 20 (v_2)_{p,q+\eta} + 25 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 80 (v_2)_{p-\eta,q} + 16 (v_2)_{p,q} \\
 & - 25 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p-1,q-\eta} + 25 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 20 (v_2)_{p,q-1+\eta} \\
 & + 175 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 80 (v_2)_{p-\eta,q-1} + 16 (v_2)_{p,q-1} - 175 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \\
 & - 5s_6 (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 4s_1 (v_1)_{p+\eta,q} + 4s_2 (v_1)_{p-\eta,q-1} + 5s_2 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} \\
 & - 5s_5 (v_1)_{p-\eta,q-1+\eta} - 20s_3 (v_1)_{p-1,q-\eta} + 5s_3 (v_1)_{p-1+\eta,q-\eta} - 5s_1 (v_1)_{p-1+\eta,q+\eta} \\
 & - 16 (v_1)_{p,q-1} - 4s_2 (v_1)_{p-1+\eta,q} + 4s_1 (v_1)_{p-1-\eta,q} + 16 (v_1)_{p-1,q} \\
 & + 20s_4 (v_1)_{p-1,q+\eta} + 4s_2 (v_1)_{p-1+\eta,q-1} - 5s_5 (v_1)_{p-1+\eta,q-1+\eta} + 20s_3 (v_1)_{p-1,q-1+\eta} \\
 & - 5s_2 (v_1)_{p-1-\eta,q-1+\eta} - 4s_1 (v_1)_{p-1-\eta,q-1} + 5s_1 (v_1)_{p-\eta,q-1-\eta} - 20s_4 (v_1)_{p,q-1-\eta} \\
 & - 5s_6 (v_1)_{p-1-\eta,q+\eta} - 16 (v_1)_{p-1,q-1} + 5s_6 (v_1)_{p+\eta,q-1-\eta} + 20s_4 (v_1)_{p,q+\eta} \\
 & \left. + 5s_1 (v_1)_{p-1+\eta,q-1-\eta} + 16 (v_1)_{p,q} - 5s_1 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 4s_2 (v_1)_{p-\eta,q} + 5s_6 (v_1)_{p-1-\eta,q-1-\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sigma_{12})_{p_1,j}}{dt} = & \frac{5\mu}{36h} \left( (5t_5 - 10s_8) (v_1)_{p-\eta,q-1-\eta} + 20s_4 (v_1)_{p,q-1-\eta} + (20s_7 - 5t_6) (v_1)_{p+\eta,q-1-\eta} \right. \\
 & - 20s_4 (v_1)_{p,q+\eta} + (20s_8 - 5t_5) (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 4s_8 (v_1)_{p-\eta,q} - 16 (v_1)_{p,q} \\
 & + (20s_8 + 5t_5) (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 20s_3 (v_1)_{p,q-\eta} - 4s_7 (v_1)_{p+\eta,q-1} + (5t_6 + 20s_7) (v_1)_{p+\eta,q-1+\eta} \\
 & - 20s_3 (v_1)_{p,q-1+\eta} - (20s_8 + 5t_5) (v_1)_{p-\eta,q-1+\eta} + 4s_8 (v_1)_{p-\eta,q-1} + 16 (v_1)_{p,q-1} \\
 & - (5t_6 + 20s_7) (v_1)_{p+\eta,q-\eta} + (5t_6 - 20s_7) (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 4s_7 (v_1)_{p+\eta,q} \\
 & + \sqrt{5} \left( 8 (v_2)_{p-\eta,q-1} + 20 (v_2)_{p,q-1+\eta} + 8 (v_2)_{p+\eta,q-1} + 20 (v_2)_{p,q-1-\eta} \right. \\
 & - 10 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 16 (v_2)_{p,q-1} \\
 & + 8 (v_2)_{p-\eta,q} + 8 (v_2)_{p+\eta,q} - 10 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} \\
 & + 20 (v_2)_{p,q-\eta} + 20 (v_2)_{p,q+\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \\
 & \left. - 10 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 16 (v_2)_{p,q} - 10 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{3} \left( 10 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} + 10 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 20 (v_2)_{p,q+\eta} \right. \\
 & + 20 (v_2)_{p,q-1+\eta} - 20 (v_2)_{p,q-1-\eta} + 20 (v_2)_{p,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \\
 & \left. + 10 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{15} \left( 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 4 (v_2)_{p-\eta,q-1} \right. \\
 & + 4 (v_2)_{p-\eta,q} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} \\
 & \left. - 4 (v_2)_{p+\eta,q-1} + 5 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 4 (v_2)_{p+\eta,q} + 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \right) \\
 & + 15 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 15 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 15 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 15 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} \\
 & \left. - 15 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 15 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sigma_{12})_{p_2,j}}{dt} = & \frac{5\mu}{16h} \left( (20s_7 - 5t_6) (v_1)_{p-\eta,q-1-\eta} + 20s_4 (v_1)_{p,q-1-\eta} + (5t_5 - 20s_8) (v_1)_{p+\eta,q-1-\eta} \right. \\
 & - 20s_4 (v_1)_{p,q+\eta} + (5t_6 - 20s_7) (v_1)_{p-\eta,q+\eta} + 4s_7 (v_1)_{p-\eta,q} - 16 (v_1)_{p,q} \\
 & - (5t_6 + 20s_7) (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 20s_3 (v_1)_{p,q-\eta} + 4s_8 (v_1)_{p+\eta,q-1} - (5t_5 + 20s_8) (v_1)_{p+\eta,q-1+\eta} \\
 & - 20s_3 (v_1)_{p,q-1+\eta} + (5t_6 + 20s_7) (v_1)_{p-\eta,q-1+\eta} - 4s_7 (v_1)_{p-\eta,q-1} + 16 (v_1)_{p,q-1} \\
 & + (5t_5 + 20s_8) (v_1)_{p+\eta,q-\eta} + (20s_8 - 5t_5) (v_1)_{p+\eta,q+\eta} - 4s_8 (v_1)_{p+\eta,q} \\
 & + \sqrt{5} \left( 10 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p,q-\eta} - 8 (v_2)_{p-\eta,q} - 8 (v_2)_{p+\eta,q} \right. \\
 & - 20 (v_2)_{p,q+\eta} + 10 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 10 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 16 (v_2)_{p,q} \\
 & + 10 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} + 10 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 10 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} \\
 & + 10 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} + 16 (v_2)_{p,q-1} - 8 (v_2)_{p-\eta,q-1} \\
 & \left. - 20 (v_2)_{p,q-1+\eta} - 8 (v_2)_{p+\eta,q-1} - 20 (v_2)_{p,q-1-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{3} \left( 10 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 10 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} \right. \\
 & + 10 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 10 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 10 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} + 10 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} \\
 & \left. + 20 (v_2)_{p,q+\eta} - 20 (v_2)_{p,q-1+\eta} + 20 (v_2)_{p,q-1-\eta} - 20 (v_2)_{p,q-\eta} \right) \\
 & + \sqrt{15} \left( 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right. \\
 & + 4 (v_2)_{p-\eta,q-1} + 4 (v_2)_{p-\eta,q} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \\
 & + 5 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 4 (v_2)_{p+\eta,q-1} + 5 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 4 (v_2)_{p+\eta,q} \\
 & + 15 (v_2)_{p-\eta,q-1-\eta} - 15 (v_2)_{p+\eta,q-1-\eta} - 15 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 15 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} \\
 & \left. - 15 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p+\eta,q-1+\eta} - 15 (v_2)_{p-\eta,q-1+\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sigma_{12})_{i,q_1}}{dt} = & \frac{5\mu}{16h} \left( -4t_8 (v_1)_{p,q+\eta} + (5t_{12} - 10t_{13}) (v_1)_{p-\eta,q+\eta} + 20t_{13} (v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & - 16\sqrt{5} (v_1)_{p,q} + (5t_{11} - 10t_{13}) (v_1)_{p-1-\eta,q-\eta} + 4t_7 (v_1)_{p-1,q-\eta} \\
 & - (5t_{12} + 10t_{13}) (v_1)_{p-1+\eta,q-\eta} + 20t_{13} (v_1)_{p-1+\eta,q} - (20t_{13} - 5t_{12}) (v_1)_{p-1+\eta,q+\eta} \\
 & - 4t_8 (v_1)_{p-1,q+\eta} - (5t_{11} - 10t_{14}) (v_1)_{p-1-\eta,q+\eta} - 20t_{14} (v_1)_{p-1-\eta,q} \\
 & - 16\sqrt{5} (v_1)_{p-1,q} - (10t_{13} + 5t_{12}) (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 4t_7 (v_1)_{p,q-\eta} \\
 & + (10t_{14} + 5t_{11}) (v_1)_{p+\eta,q-\eta} + (10t_{14} - 5t_{11}) (v_1)_{p+\eta,q+\eta} - 20t_{14} (v_1)_{p+\eta,q} \\
 & - \sqrt{5} \left( 15 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} - 15 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} - 15 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} \right. \\
 & \left. - 15 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 15 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \\
 & - \sqrt{3} \left( 20 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} - 4 (v_2)_{p,q+\eta} + 4 (v_2)_{p,q-\eta} \right. \\
 & - 4 (v_2)_{p-1,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 4 (v_2)_{p-1,q+\eta} - 20 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} \\
 & \left. + 20 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} \right) \\
 & - \sqrt{15} \left( 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} \right. \\
 & + 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-1+\eta,q} - 5 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q} \\
 & \left. - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q} + 5 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} + 5 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right) \\
 & - 20 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} + 4 (v_2)_{p-1,q+\eta} - 4 (v_2)_{p,q-\eta} - 80 (v_2)_{p-1+\eta,q} \\
 & - 20 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} - 80 (v_2)_{p-1-\eta,q} + 16 (v_2)_{p-1,q} - 16 (v_2)_{p,q} \\
 & + 20 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 80 (v_2)_{p+\eta,q} + 20 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} \\
 & \left. - 4 (v_2)_{p,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 80 (v_2)_{p-\eta,q} + 4 (v_2)_{p-1,q-\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sigma_{12})_{i,q_2}}{dt} = & \frac{5\mu}{36h} \left( -4t_7 (v_1)_{p,q+\eta} + 4t_8 (v_1)_{p-1,q-\eta} + (10t_{13} + 5t_{12}) (v_1)_{p-\eta,q+\eta} - 20t_{13} (v_1)_{p-\eta,q} \right. \\
 & + 16\sqrt{5} (v_1)_{p,q} - (10t_{14} - 5t_{11}) (v_1)_{p-1-\eta,q-\eta} + (10t_{13} - 5t_{12}) (v_1)_{p-1+\eta,q-\eta} \\
 & - 20t_{13} (v_1)_{p-1+\eta,q} + (10t_{13} + 5t_{12}) (v_1)_{p-1+\eta,q+\eta} - (10t_{14} + 5t_{11}) (v_1)_{p-1-\eta,q+\eta} \\
 & + 20t_{14} (v_1)_{p-1-\eta,q} + 16\sqrt{5} (v_1)_{p-1,q} + (10t_{13} - 5t_{12}) (v_1)_{p-\eta,q-\eta} + 4t_8 (v_1)_{p,q-\eta} \\
 & - 4t_7 (v_1)_{p-1,q+\eta} - (10t_{14} - 5t_{11}) (v_1)_{p+\eta,q-\eta} - (10t_{14} + 5t_{11}) (v_1)_{p+\eta,q+\eta} + 20t_{14} (v_1)_{p+\eta,q} \\
 & - \sqrt{5} \left( 15 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 15 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} + 15 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} - 15 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right. \\
 & \left. + 15 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 15 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 15 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 15 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} \right) \\
 & - \sqrt{3} \left( 20 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + 4 (v_2)_{p-1,q-\eta} + 20 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} \right. \\
 & - 20 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 4 (v_2)_{p,q+\eta} \\
 & \left. - 4 (v_2)_{p,q-\eta} - 4 (v_2)_{p-1,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \right) \\
 & - \sqrt{15} \left( 5 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-\eta,q} \right. \\
 & + 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} + 20 (v_2)_{p-1+\eta,q} - 5 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} + 20 (v_2)_{p+\eta,q} \\
 & - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q} + 5 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 5 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} + 5 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \\
 & + 4 (v_2)_{p-1,q+\eta} - 80 (v_2)_{p-1+\eta,q} - 20 (v_2)_{p-1+\eta,q+\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q+\eta} \\
 & - 80 (v_2)_{p-1-\eta,q} + 16 (v_2)_{p-1,q} + 20 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 4 (v_2)_{p,q-\eta} - 20 (v_2)_{p-1-\eta,q-\eta} \\
 & + 20 (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 80 (v_2)_{p+\eta,q} + 20 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} - 4 (v_2)_{p,q+\eta} + 4 (v_2)_{p-1,q-\eta} \\
 & \left. + 20 (v_2)_{p-\eta,q+\eta} + 80 (v_2)_{p-\eta,q} - 16 (v_2)_{p,q} - 20 (v_2)_{p-1+\eta,q-\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sigma_{12})_{p_1,q_1}}{dt} = & \frac{5\sqrt{5}\mu}{18h} \left( 4s_9 (v_1)_{p,q+\eta} - s_7 (v_1)_{p-\eta,q+\eta} + 4s_8 (v_1)_{p-\eta,q} + 16 (v_1)_{p,q} \right. \\
 & - s_{11} (v_1)_{p-\eta,q-\eta} - 4s_{10} (v_1)_{p,q-\eta} + s_8 (v_1)_{p+\eta,q-\eta} + s_{12} (v_1)_{p+\eta,q+\eta} - 4s_7 (v_1)_{p+\eta,q} \\
 & + 4 (v_2)_{p,q-\eta} - 8 (v_2)_{p-\eta,q} - 5 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} - 5 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \\
 & + (v_2)_{p+\eta,q-\eta} - 8 (v_2)_{p+\eta,q} + 16 (v_2)_{p,q} + 4 (v_2)_{p,q+\eta} + (v_2)_{p-\eta,q+\eta} \\
 & + \sqrt{3} \left( 4 (v_2)_{p+\eta,q} - 4 (v_2)_{p,q+\eta} + 4 (v_2)_{p,q-\eta} - 4 (v_2)_{p-\eta,q} \right. \\
 & \left. - 3 (v_2)_{p-\eta,q-\eta} + (v_2)_{p-\eta,q+\eta} - (v_2)_{p+\eta,q-\eta} + 3 (v_2)_{p+\eta,q+\eta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{p_2, q_1}}{dt} = & \frac{5\sqrt{5}\mu}{18h} \left( 4s_9 (v_1)_{p, q+\eta} + s_{12} (v_1)_{p-\eta, q+\eta} - 4s_7 (v_1)_{p-\eta, q} + 16 (v_1)_{p, q} \right. \\ & + s_8 (v_1)_{p-\eta, q-\eta} - 4s_{10} (v_1)_{p, q-\eta} - s_{11} (v_1)_{p+\eta, q-\eta} - s_7 (v_1)_{p+\eta, q+\eta} + 4s_8 (v_1)_{p+\eta, q} \\ & + 8 (v_2)_{p-\eta, q} - (v_2)_{p-\eta, q-\eta} - (v_2)_{p+\eta, q+\eta} - 4 (v_2)_{p, q-\eta} - 16 (v_2)_{p, q} \\ & + 5 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} + 8 (v_2)_{p+\eta, q} - 4 (v_2)_{p, q+\eta} + 5 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} \\ & \left. + \sqrt{3} \left( (v_2)_{p-\eta, q-\eta} - 3 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} + 3 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} - (v_2)_{p+\eta, q+\eta} \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 (v_2)_{p+\eta, q} + 4 (v_2)_{p, q+\eta} - 4 (v_2)_{p, q-\eta} - 4 (v_2)_{p-\eta, q} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{p_2, q_2}}{dt} = & \frac{5\sqrt{5}\mu}{18h} \left( 4s_{10} (v_1)_{p, q+\eta} - s_8 (v_1)_{p-\eta, q+\eta} + 4s_7 (v_1)_{p-\eta, q} - 16 (v_1)_{p, q} \right. \\ & - s_{12} (v_1)_{p-\eta, q-\eta} - 4s_9 (v_1)_{p, q-\eta} + s_7 (v_1)_{p+\eta, q-\eta} + s_{11} (v_1)_{p+\eta, q+\eta} - 4s_8 (v_1)_{p+\eta, q} \\ & + 8 (v_2)_{p-\eta, q} + 5 (v_2)_{p-\eta, q-\eta} + 5 (v_2)_{p+\eta, q+\eta} - 4 (v_2)_{p, q-\eta} \\ & - (v_2)_{p+\eta, q-\eta} + 8 (v_2)_{p+\eta, q} - 16 (v_2)_{p, q} - 4 (v_2)_{p, q+\eta} - (v_2)_{p-\eta, q+\eta} \\ & \left. + \sqrt{3} \left( (v_2)_{p-\eta, q+\eta} - 3 (v_2)_{p-\eta, q-\eta} - (v_2)_{p+\eta, q-\eta} + 3 (v_2)_{p+\eta, q+\eta} \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 (v_2)_{p+\eta, q} - 4 (v_2)_{p, q+\eta} + 4 (v_2)_{p, q-\eta} - 4 (v_2)_{p-\eta, q} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_{12})_{p_1, q_2}}{dt} = & \frac{5\sqrt{5}\mu}{18h} \left( 4s_{10} (v_1)_{p, q+\eta} + s_{11} (v_1)_{p-\eta, q+\eta} - 4s_8 (v_1)_{p-\eta, q} - 16 (v_1)_{p, q} \right. \\ & + s_7 (v_1)_{p-\eta, q-\eta} - 4s_9 (v_1)_{p, q-\eta} - s_{12} (v_1)_{p+\eta, q-\eta} - s_8 (v_1)_{p+\eta, q+\eta} + 4s_7 (v_1)_{p+\eta, q} \\ & + 16 (v_2)_{p, q} + (v_2)_{p-\eta, q-\eta} + 4 (v_2)_{p, q-\eta} - 8 (v_2)_{p+\eta, q} + 4 (v_2)_{p, q+\eta} \\ & + (v_2)_{p+\eta, q+\eta} - 5 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} - 8 (v_2)_{p-\eta, q} - 5 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} \\ & \left. + \sqrt{3} \left( + (v_2)_{p-\eta, q-\eta} - 4 (v_2)_{p-\eta, q} - 4 (v_2)_{p, q-\eta} + 3 (v_2)_{p+\eta, q-\eta} \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 (v_2)_{p+\eta, q} - (v_2)_{p+\eta, q+\eta} + 4 (v_2)_{p, q+\eta} - 3 (v_2)_{p-\eta, q+\eta} \right) \right) \end{aligned}$$

où nous avons utiliser les notations

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{15} - 5 & s_2 &= \sqrt{15} + 5 \\ s_3 &= \sqrt{15} + 4 & s_4 &= \sqrt{15} - 4 \\ s_5 &= 9\sqrt{15} + 35 & s_6 &= 9\sqrt{15} - 35 \\ s_7 &= \sqrt{3} - 1 & s_8 &= \sqrt{3} + 1 \\ s_9 &= \sqrt{3} - 2 & s_{10} &= \sqrt{3} + 2 \\ s_{11} &= 3\sqrt{3} + 5 & s_{12} &= 3\sqrt{3} - 5 \end{aligned}$$

## Annexe B

# Démonstration des lemmes 3.1.2 et 3.1.3

Nous allons ici donner seulement les étapes principales de la démonstration. On réécrit la relation de dispersion des schémas semi-discretisés en espace sous la forme suivante :

$$\omega_h^2 \widehat{M}_h U_h = \widehat{\mathbb{K}}_h U_h$$

ou encore

$$\widehat{\lambda}_h \widehat{M}_h U_h = \widehat{\mathbb{N}}_h U_h$$

avec  $\widehat{\mathbb{N}}_h = \widehat{\mathbb{K}}_h / |\vec{k}|^2$  et  $\widehat{\lambda}_h = \lambda_h / |\vec{k}|^2 = \omega_h^2 / |\vec{k}|^2$ . À l'aide du logiciel MAPLE, on peut obtenir le développement asymptotique de la matrice  $\widehat{\mathbb{N}}_h$  au voisinage  $K = 0$  (où  $K = \frac{|\vec{k}|h}{2\pi}$ ). Plus précisément, on écrit :

$$\widehat{\mathbb{N}}_h = \frac{N_{-2}}{K^2} + \frac{N_{-1}}{K} + N_0 + N_1 K + N_2 K^2 + N_3 K^3 + \dots$$

Considérons le produit scalaire défini par :

$$((u, v)) = (\widehat{M}_h u, v)$$

avec  $\widehat{M}_h$  une matrice diagonale définie par :

$$\widehat{M}_h = \frac{1}{4} \text{Diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])$$

pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et

$$\widehat{M}_h = \frac{1}{324} \text{Diag}([25, 40, 25, 40, 25, 40, 25, 40, 64, 25, 40, 25, 40, 25, 40, 25, 40, 64])$$

pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ . On note  $\lambda_K^i$  et  $W_K^i$  les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbb{N}}_h$ , normalisés à l'aide du produit scalaire qui vient d'être défini, avec  $i = 1, \dots, 8$  pour l'élément  $Q_2 - Q_1$  et  $i = 1, \dots, 18$  pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ . On cherche  $\lambda_K^i$  et  $W_K^i$  sous la forme :

$$W_K^i = \sum_{j=0}^{+\infty} X_j^i K^j \text{ et } \lambda_K^i = \sum_{j=-2}^{+\infty} \lambda_j^i K^j$$



On introduit ensuite ces expressions dans

$$\widehat{\mathbb{N}}_h W_K^i = \lambda_K^i \widehat{M}_h W_K^i$$

et en identifiant terme à terme les deux séries on obtient les développements de  $\lambda_K^i$  en particulier pour  $i = 1, 2$ , c'est à dire pour les valeurs propres physiques qui nous intéressent. Plus précisément on a :

• **Identification des termes d'ordre -2**

$$N_{-2} X_0^i = \lambda_{-2}^i X_0$$

ce qui nous donne

$$\lambda_{-2}^1 = \lambda_{-2}^2 = 0$$

pour les deux schémas et

$$X_0^1 = \begin{bmatrix} t_1 & , & t_2 \\ t_1 & , & t_2 \\ t_1 & , & t_2 \\ t_1 & , & t_2 \end{bmatrix}, \quad X_0^2 = \begin{bmatrix} t_1 & , & -t_2 \\ t_1 & , & -t_2 \\ t_1 & , & -t_2 \\ t_1 & , & -t_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t_1 = \frac{\cos \varphi}{2}, \quad t_2 = \frac{\sin \varphi}{2}$$

pour l'élément  $Q_2 - Q_1$  et

$$X_0^1 = \begin{bmatrix} t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \\ t_3 & , & t_4 \end{bmatrix}, \quad X_0^2 = \begin{bmatrix} t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \\ t_3 & , & -t_4 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t_3 = \frac{\cos \varphi}{3}, \quad t_4 = \frac{\sin \varphi}{3}$$

pour l'élément  $Q_3 - Q_2$ . Dans ce qui suit, on donne seulement les valeurs de  $\lambda_j^i$ ,  $i = 1, 2$ .

• **Identification des termes d'ordre -1**

$$N_{-2}^i X_1^i + N_{-1}^i X_0^i = \lambda_{-1}^i X_0^i$$

Le produit avec  $X_0^i$ ,  $i = 1, 2$  donne

$$\lambda_{-1}^1 = \lambda_{-1}^2 = 0$$

pour les deux schémas. En effet on a

$$((N_{-2}^i Y, X_0)) = 0 \quad \forall Y$$

et  $((N_{-1}^i X_0, X_0)) = 0$ . Ensuite pour calculer  $X_1^i$ ,  $i = 1, 2$  il faut résoudre le système linéaire :

$$N_{-2}^i X_1^i = -N_{-1}^i X_0^i$$

Pour les termes d'ordre supérieur on utilise la même démarche, c'est à dire :

1. on définit d'abord une équation en identifiant les termes d'ordre  $j$ ,

2. en prenant ensuite le produit de cette équation avec  $X_0^i$ ,  $i = 1, 2$  on détermine les valeurs de  $\lambda_j^i$ ,  $i = 1, 2$

3. finalement on résout un système linéaire pour déterminer  $X_j^i$ ,  $i = 1, 2$ .

• **Identification des termes d'ordre 0**

$$\begin{aligned} N_{-2}^i X_2^i + N_{-1}^i X_1^i + N_0^i X_0^i &= \lambda_0^i X_0^i \\ \Rightarrow \\ \lambda_0^1 &= V_p^2, \quad \lambda_0^2 = V_s^2 \end{aligned}$$

pour les deux schémas.

• **Identification des termes d'ordre 1**

$$\begin{aligned} N_{-2}^i X_3^i + N_{-1}^i X_2^i + N_0^i X_1^i + N_1^i X_0^i &= \lambda_0^i X_1^i + \lambda_1^i X_0^i \\ \Rightarrow \\ \lambda_1^1 &= \lambda_1^2 = 0 \end{aligned}$$

pour les deux schémas.

• **Identification des termes d'ordre 2**

$$\begin{aligned} N_{-2}^i X_4^i + N_{-1}^i X_3^i + N_0^i X_2^i + N_1^i X_1^i + N_2^i X_0^i &= \lambda_0^i X_2^i + \lambda_2^i X_0^i \\ \Rightarrow \\ \lambda_2^1 &= \lambda_2^2 = 0 \end{aligned}$$

pour les deux schémas.

• **Identification des termes d'ordre 3**

$$\begin{aligned} N_{-2}^i X_5^i + N_{-1}^i X_4^i + N_0^i X_3^i + N_1^i X_2^i + N_2^i X_1^i + N_3^i X_0^i &= \lambda_0^i X_3^i + \lambda_3^i X_0^i \\ \Rightarrow \\ \lambda_3^1 &= \lambda_3^2 = 0 \end{aligned}$$

pour les deux schémas.

• **Identification des termes d'ordre 4**

$$N_{-2}^i X_6^i + N_{-1}^i X_5^i + N_0^i X_4^i + N_1^i X_3^i + N_2^i X_2^i + N_3^i X_1^i + N_4^i X_0^i = \lambda_0^i X_4^i + \lambda_4^i X_0^i$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \lambda_4^1 &= -\frac{\pi^4 V_p^2 K^4}{90} (1 + e_1) \\ \lambda_4^2 &= -\frac{\pi^4 V_s^2 K^4}{90} (1 + e_2) \\ e_1 &= 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \frac{V_s^2}{V_p^2} \left( 1 - \frac{V_s^2}{V_p^2} \right) 40 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi \\ e_2 &= -12 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 40 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi \\ &\quad + 20 \frac{V_s^4}{V_p^4} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

pour le schéma  $Q_2 - Q_1$  et

$$\lambda_4^1 = \lambda_4^2 = 0$$

pour le schéma  $Q_3 - Q_2$ . Ensuite on continue l'identification des autres termes seulement pour le schéma correspondant à l'élément  $Q_3 - Q_2$ .

• **Identification des termes d'ordre 5**

$$\begin{aligned} N_{-2}^i X_7^i + N_{-1}^i X_6^i + N_0^i X_5^i + N_1^i X_4^i + N_2^i X_3^i + N_3^i X_2^i + N_4^i X_1^i + N_5^i X_0^i &= \lambda_0^i X_5^i + \lambda_5^i X_0^i \\ &\Rightarrow \\ \lambda_5^1 &= \lambda_5^2 = 0 \end{aligned}$$

• **Identification des termes d'ordre 6**

$$N_{-2}^i X_8^i + N_{-1}^i X_7^i + N_0^i X_6^i + N_1^i X_5^i + N_2^i X_4^i + N_3^i X_3^i + N_4^i X_2^i + N_5^i X_1^i + N_6^i X_0^i = \lambda_0^i X_6^i + \lambda_6^i X_0^i$$

ceci implique

$$\begin{aligned} \lambda_6^1 &= -\frac{\pi^6 V_p^2 K^6}{42525} (1 + e_3) \\ \lambda_6^2 &= -\frac{\pi^6 V_s^2 K^6}{42525} (1 - e_4) \\ e_3 &= 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^2(2\varphi) - \frac{V_s^2}{V_p^2} \left(1 - \frac{V_s^2}{V_p^2}\right) 28 \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi \\ e_4 &= -72 \cos^4 \varphi (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 1) - 25 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + \frac{V_s^4}{V_p^4} (84 \cos^6 \varphi \sin^2 \varphi + 28 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 84 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

**Remarque B.0.1** Pour le schéma  $Q_2 - Q_1$ , si on laisse le paramètre  $\zeta$  dans l'expression de  $\widehat{\mathbb{N}}_h$ , on trouve :

$$\begin{cases} \lambda_2^1 &= \frac{1}{3} \pi^2 V_p^2 K^2 h^2 (1 - 12\zeta^2) \\ \lambda_2^2 &= \frac{1}{3} \pi^2 V_s^2 K^2 h^2 (1 - 12\zeta^2) \end{cases}$$

ce qui implique que le schéma est d'ordre 4 seulement pour la valeur  $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ . C'est par ailleurs pour cette valeur, que la formule de quadrature utilisée pour l'approximation de la matrice  $c(v_h, w_h)$  devient exacte.

## Annexe C

# Démonstration du Lemme 3.2.1

La démonstration de ce lemme est similaire à celle des lemmes 3.1.2 et 3.1.3. On réécrit la relation de dispersion sous la forme suivante :

$$\widehat{\lambda}_h U_h = \widehat{\mathbb{N}}_h U_h$$

avec  $\widehat{\mathbb{N}}_h = \widehat{\mathbb{K}}_h / |\vec{k}|^2$  et  $\widehat{\lambda}_h = \lambda_h / |\vec{k}|^2 = \omega_h^2 / |\vec{k}|^2$ . À l'aide du logiciel MAPLE, on peut obtenir le développement asymptotique de la matrice  $\widehat{\mathbb{N}}_h$  au voisinage  $K = 0$ . Plus précisément, on écrit :

$$\widehat{\mathbb{N}}_h = \frac{N_{-2}}{K^2} + \frac{N_{-1}}{K} + N_0 + N_1 K + N_2 K^2 + N_3 K^3 + \dots$$

Dans ce cas et pour toutes les valeurs des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\delta$  nous avons :

$$N_{-2} = N_{-1} = N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note  $\lambda_K^i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  et  $W_K^i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $\widehat{\mathbb{N}}_h$ . On cherche  $\lambda_K^i$  et  $W_K^i$  sous la forme :

$$W_K^i = \sum_{j=0}^{+\infty} X_j^i K^j \text{ et } \lambda_K^i = \sum_{j=-2}^{+\infty} \lambda_j^i K^j$$

On introduit ensuite ces expressions dans

$$\widehat{\mathbb{N}}_h W_K^i = \lambda_K^i W_K^i$$

et en identifiant terme à terme les deux séries on obtient les développements de  $\lambda_K^i$  pour  $i = 1, \dots, 3$ .

• **Identification de termes d'ordre -2**

$$N_{-2} X_0^i = \lambda_{-2}^i X_0^i \Rightarrow \lambda_{-2}^i X_0^i = 0$$

ceci nous donne

$$\lambda_{-2}^i = 0, \quad i = 1, \dots, 3$$

• Identification des termes d'ordre -1

$$N_{-2}X_1^i + N_{-1}X_0^i = \lambda_{-1}^i X_0^i \Rightarrow \lambda_{-1}^i X_0^i = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_{-1}^i = 0, \quad i = 1, \dots, 3$$

• Identification des termes d'ordre 0

$$N_{-2}X_2^i + N_{-1}X_1^i + N_0X_0^i = \lambda_0^i X_0^i \Rightarrow N_0X_0^i = \lambda_0^i X_0^i$$

On trouve alors,

$$\lambda_0^1 = V_p^2, \quad \lambda_0^2 = \lambda_0^3 = V_s^2$$

et

$$\begin{aligned} X_0^1 &= [\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta)] \\ X_0^2 \perp X_0^1, \quad X_0^3 \perp X_0^1, \quad X_0^2 \perp X_0^3, \quad |X_0^2| &= |X_0^3| = 1 \end{aligned}$$

On remarque que les vecteurs propres  $X_0^2$  et  $X_0^3$  associés à la double valeur propre  $V_s^2$  ne sont pas uniquement définis.

• Identification des termes d'ordre 1

$$N_{-2}X_3^i + N_{-1}X_2^i + N_0X_1^i + N_1X_0^i = \lambda_1^i X_0^i + \lambda_1^i X_0^i \Rightarrow N_0X_0^1 = \lambda_0^1 X_1^1 + \lambda_1^1 X_0^1$$

En prenant le produit scalaire de cette équation avec  $X_0^i$  on trouve

$$\lambda_1^i = 0, \quad i = 1, \dots, 3$$

Ce qui remontre que la classe des schémas définis par le système (3.2.5) est d'ordre 2 par rapport à l'approximation des vitesses de phases. On peut continuer notre raisonnement pour calculer les coefficients du développement et identifier les vecteurs propres  $X_0^2$  et  $X_0^3$ . Mais comme les calculs deviennent assez compliqués, on préfère donner seulement les grandes lignes du raisonnement sans entrer dans les calculs. Nous avons

$$N_0X_1^i = \lambda_0^i X_1^i$$

pour  $i = 1$  on a  $X_1^1 \parallel X_0^1$  et par la normalisation ( $\|W_K^i\| = 1$ ) on obtient  $X_1^1 \perp X_0^1$ , ce qui implique  $X_1^1 = 0$ . De la même façon on obtient

$$X_0^2 \perp X_1^2 \Leftrightarrow X_1^2 \parallel X_0^3 \quad \text{et} \quad X_0^3 \perp X_1^3 \Leftrightarrow X_1^3 \parallel X_0^2.$$

• Identification des termes d'ordre 2

$$N_0X_2^i + N_2X_0^i = \lambda_0^i X_2^i + \lambda_2^i X_0^i, \quad i = 1, \dots, 3$$

et en prenant ensuite le produit scalaire de cette équation par  $X_0^1$  on trouve

$$\lambda_2^1 = (N_2X_0^1, X_0^1)$$

mais on ne peut pas calculer de la même façon  $\lambda_2^i$ ,  $i = 2, 3$  car nous n'avons pas encore identifié les  $X_0^2$  et  $X_0^3$ . Pour ce faire on écrit

$$(N_0X_2^2 + N_2X_0^2, X_0^3) = \lambda_0^2(X_2^2, X_0^3) + \lambda_2^2(X_0^2, X_0^3)$$

ce qui nous donne

$$(N_2 X_0^2, X_0^3) = 0$$

on utilise cette équation pour identifier  $X_0^2$  et  $X_0^3$  et ensuite on peut calculer

$$\lambda_2^i = (N_2 X_0^i, X_0^i), \quad i = 2, 3$$

■



# Bibliographie

- [1] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier Science Publ. B.V., 1984.
- [2] R.M. Alford, K.R. Kelly, and D.M. Boore. Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39(6):834–842, 1974.
- [3] M. Amara and J.M. Thomas. Equilibrium finite elements for the linear elastic problem. *Numer. Math.*, 33:367–383, 1979.
- [4] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi, and Jim Douglas. PEERS: A new mixed finite element for plane elasticity. *Japan J. Appl. Math.*, 1:347–367, 1984.
- [5] C. Atamian and P. Joly. Une analyse de la méthode des domaines fictifs pour le problème de Helmholtz extérieur. Technical Report 1378, INRIA, 1991.
- [6] D. Aubry and D. Clouteau. A regularised Boundary Element Method for Stratified Media. In G. Cohen, L. Halpern, and P. Joly, editors, *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, pages 660–668. SIAM, 1991.
- [7] B.A. Auld. *Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids*, volume I et II. Wiley, 1973.
- [8] Ivo Babuska. The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.
- [9] G.A. Baker and V.A. Dougalis. The effect of quadrature errors on finite element approximations for the second-order hyperbolic equations. *SIAM Jour. Numer. Anal.*, 13(4):577–598, 1976.
- [10] A. Bamberger, G. Chavent, and P. Lailly. 'Etude de schémas numériques pour les équations de l' élastodynamique linéaire. Technical Report 41, INRIA, 1980. Rapport Interne.
- [11] A. Bamberger, P. Joly, and J.E. Roberts. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):323–352, 1990.
- [12] D. Barbier. *Méthode des potentiels retardés pour la simulation de la diffraction d'onde élastodynamique par une fissure tridimensionnelle*. PhD thesis, École Polytechnique, 1999.
- [13] M. Barbiéra. *Schémas aux différences finies d' ordre quatre pour l' approximation de l' élastodynamique linéaire*. PhD thesis, Paris IX, 1993.



- [14] A. Bayliss, K.E Jordan, B. Lemesurier, and E. Turkel. A forth order accurate finite difference scheme for the computation of elastic waves. *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 76(4):1115–1132, 1986.
- [15] E. Bécache. *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure*. PhD thesis, Univ. of Paris VI, 1991.
- [16] E. Bécache and T. Ha Duong. A Space-Time Variational Formulation for the Boundary Integral Equation in a 2D Elastic Crack Problem. *RAIRO, M2AN*, 28(2):141–176, 94.
- [17] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Eléments finis mixtes et condensation de masse en élastodynamique linéaire. (i) construction. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I:545–550, 1997.
- [18] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Etude d'un nouvel élément fini mixte permettant la condensation de masse. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Série I:1281–1286, 1997.
- [19] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Fictitious domain method applied to the scattering by a crack of transient elastic waves in anisotropic media : a new family of mixed finite elements leading to explicit schemes. pages 322–326. SIAM, 1998.
- [20] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Some new mixed finite elements in view of the numerical solution of time dependent wave propagation problems. Technical Report 3445, INRIA, June 1998. accepted for publ. in SIAM J. Num. An.
- [21] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. Technical report, INRIA, 1999. submitted in SIAM J. Num. An.
- [22] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2d elastic wave propagation. *J. Comp. Acous.*, to appear.
- [23] E. Bécache, J.C. Nédélec, and N. Nishimura. Regularization in 3D for anisotropic elastodynamic crack and obstacle problems. *J. Elasticity*, 31:25–46, 1993.
- [24] A. Bemberger and T. Ha Duong. Formulation Variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiels retardés de la diffraction d'une onde acoustique. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8:405–435, 1986.
- [25] A. Bemberger, B. Engquist, L. Halpern, and P. Joly. Higher order paraxial approximations for the wave equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 48(1):129–154, 1988.
- [26] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comp. Physics.*, 114:185–200, 1994.
- [27] J.P. Bérenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 127(2):363–379, 1996.
- [28] J.P. Bérenger. Improved PML for the FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems . *IEEE transactions on Antennas and Propagation.*, 45(3):466–473, march 1997.

- 
- [29] F. Brezzi. On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Ser. Rouge*, 8:129–151, 1974.
- [30] F. Brezzi, J. Douglas, and L.D Marini. Two families of mixed finite element methods for second order elliptic problems. *Numer. Math.*, 47:217–235, 1985.
- [31] F. Brezzi, J. Douglas, and L.D Marini. Recent results on mixed finite element methods for second order elliptic problems. In *Vistas in Applied Mathematics. Numerical Analysis, Atmospheric Sciences and Immunology*, pages 25–43. Heidelberg Berlin New York: Springer, 1986.
- [32] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [33] B. Chalindar. *Conditions aux limites artificielles pour les équations de l'élastodynamique*. PhD thesis, Univ. Saint Etienne, 1987.
- [34] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, eds, 1978.
- [35] G. Cohen, P. Joly, and N. Tordjman. Construction and analysis of higher order finite elements with mass lumping for the wave equation. In SIAM, editor, *Proceedings of the second Int. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 152–160, U. of Delaware, USA, 1993.
- [36] G. Cohen and P. Monk. Gauss point mass lumping schemes for maxwell's equations. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 14(1):63–88, 1998.
- [37] G. Cohen and P. Monk. Mur-nédélec finite element schemes for maxwell's equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 169(3-4):197–217, 1999.
- [38] F. Collino. Conditions absorbantes d'ordre eleve pour des modeles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1790, INRIA, Novembre 1992.
- [39] F. Collino. High order absorbing boundary conditions for wave propagation models: straight line boundary and corner cases. In PA SIAM, Philadelphia, editor, *Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Newark, DE, 1993)*, pages 161–171, 1993.
- [40] F. Collino. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. *J. Comput. Phys.*, 131(1):164–180, 1996.
- [41] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: Application to electromagnetic scattering. Technical Report 2963, INRIA, Août 1996.
- [42] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: Application to electromagnetic scattering. *J.C.P.*, 138(2):907–938, December 1997.
- [43] F. Collino and P.B. Monk. Optimizing the perfectly matched layer exterior problems of wave propagation (boulder, co, 1997; san francisco, ca, 1997). *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 164(1-2), 1998.

- [44] M. A. Dablain. The application of high order differencing for the scalar wave equation . *Geophysics*, 1(51):54–66, 1986.
- [45] B.X. Fraijs de Veubeke. Stress function approach. In *Bournemouth, World conference in Finite Elements*, pages J.1–J.51, 1975.
- [46] Yu Ding. *Méthodes numériques pour l'équation intégrale de bord dans le problème de diffraction d'ondes acoustiques par une surface rigide.* . PhD thesis, Université d'Orsay, 1989. Thèse.
- [47] T. Ha Duong and P. Joly. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. part 1: The homogeneous case. Technical Report 1306, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, 1990.
- [48] T. Dupont.  $l^2$ -estimates for galerkin methods for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(5):880–889, 1973.
- [49] A. Elmkies. *Sur les éléments finis d' arête pour la résolution des équations de Maxwell en milieu anisotrope et pour des maillages quelconques.* PhD thesis, Univ. Paris XI, 1998.
- [50] A. Elmkies and P. Joly. Éléments finis et condensation de masse pour les équations de maxwell: le cas 2d. Technical Report 3035, INRIA, Novembre 1996.
- [51] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, July 1977.
- [52] M. Filipe-Rocha. *Étude mathématique et numérique d'un problème d'interaction fluide - structure dépendant du temps par la méthode de couplage Éléments finis - Équations intégrales.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1994. Thèse de doctorat.
- [53] P. Joly G. Cohen. Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation. Spectral and high order methods for partial differential equations (Como, 1989). *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 80(1–3):397–407, 1990.
- [54] S. Garcès. *Application des méthodes de domaines fictifs à la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles.* PhD thesis, ENSAE, 1998.
- [55] V. Girault and R. Glowinski. Error analysis of a fictitious domain method applied to a dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(3):487–514, 1995.
- [56] D. Givoli. Non reflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 94(1), 1991.
- [57] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, pages 283–303, 1994.
- [58] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, 111(3–4):283–304, 1994.

- [59] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, 1985.
- [60] T. Hagstrom. *On High-order Radiation Boundary Condition*, volume **86** of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 1–21. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [61] L. Halpern. *Étude de conditions aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs à des équations hyperboliques linéaires*. PhD thesis, Paris IV, 1980.
- [62] L. Halpern. Absorbing boundary conditions for the discretization schemes of the one-dimensional wave equation. *Math. Comp.*, 38:421–435, 1982.
- [63] F. Hannyer. High order tetrahedral elements with mass lumping, application to the wave equation. Technical report, École Polytechnique, 1996. Rapport de Stage.
- [64] F. Hastings, J.B. Schneider, and S. L. Broschat. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100:3061–3069, 1996.
- [65] R.C. Higdon. Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics*, 56:231–241, 1991.
- [66] R.L. Higdon. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.
- [67] R.L. Higdon. Radiation boundary conditions for elastic wave propagation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:831–870, 1990.
- [68] R.L. Higdon. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media. *J. Comput. Phys.*, 101:386–418, 1992.
- [69] S. Hirose. Scattering from elliptic crack by the time-domain boundary integral equation method. In *Proc. XI<sup>th</sup> Intern. Conf. on BEM*, volume 3, pages 99–110. Springer-Verlag, 1989.
- [70] S. Hirose and J.D. Achenbach. Application of bem to transient analysis of 3-d crack. In M. Tanaka and T.A. Cruse, editors, *Boundary Element Methods in Applied Mechanics*, pages 255–264. Pergamon Press, Oxford, 1988.
- [71] F. Imedni. Éléments finis mixtes d'ordre quatre pour l'élastodynamique en 2d. Technical report, INRIA, 1997.
- [72] M. Israeli and S.A. Orszag. Approximation of radiation boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 41:115–135, 1981.
- [73] C. Johnson and B. Mercier. Some equilibrium finite element methods for two-dimensional elasticity problems. *Numer. Math.*, 30:103–116, 1978.
- [74] P. Joly and L. Rhaouti. Domaines fictifs, éléments finis  $h(\text{div})$  et condition de neumann: le problème de la condition inf-sup. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série I:1255–1230, 1999.

- [75] M. Kern and A. Oloui. Construction of higher order finite elements with mass lumping using computer algebra techniques. Technical report, INRIA, 1998. SIGMA annual Report.
- [76] R. E. Kleinman and G. F. Roach. Boundary Integral Equations for the 3-dimensional Helmholtz Equation . *SIAM Review*, 16:214–236, 1974.
- [77] V. Lange. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*. PhD thesis, Univ. Bordeaux I, 1995. Thèse de doctorat.
- [78] A.R Levander. Fourth-order velocity stress finite difference scheme. In *Proc. of the 57th SEG Annual International meeting and Exposition*. New Orleans, 1987.
- [79] J.L. Lions and E. Magenès. *Problèmes aux limites Non Homogènes et Applications*. Dunod, 1968.
- [80] V. Lubet. *Couplage Potentiels retardés-Eléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle inhomogène*. PhD thesis, Univ. Paris VI, 1991. Thèse de doctorat.
- [81] Y. Maday, D. Meiron, A.T Patera, and E.M Rønquist. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady stokes problem: application to spectral element discretizations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(2):310–337, 1993.
- [82] Mary E. Morley. A family of mixed finite elements for linear elasticity. *Numer. Math.*, 55:633–666, 1989.
- [83] W.A Mulder. A comparison between higher order finite elements and finite differences for solving the wave equation. In *Proceedings of the second ECCOMACS*, pages 344–350. Wiley, 1996.
- [84] W.A. Mulder. A comparison between higher-order finite elements and finite differences for solving the wave equation. *Num. Meth. in Eng.*, pages "344–350", 1996.
- [85] J.C. Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.
- [86] J.C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.*, 50:57–81, 1986.
- [87] J.C. Nédélec. Ondes acoustiques et électromagnétiques. equations intégrales. Ecole Polytechnique, 1996. Cours de DEA, à paraître.
- [88] L. Nicoletis. *Simulation numérique de la propagation d'ondes sismiques*. PhD thesis, Paris VI, 1981.
- [89] A.T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 54:468–488, 1984.
- [90] C. Peng and M.N. Toksoz. An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling . *Geophysics.*, 60 (1):296–301, January-February 1995.

- [91] E. Priolo, J.M. Carcione, and G. Seriani. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modelling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(2):681–693, 1994.
- [92] A. Pujols. *Equations intégrales Espace-Temps pour le système de Maxwell - Application au calcul de la Surface Equivalente Radar*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1991. Thèse de doctorat.
- [93] C.M. Rappaport. Perfectly Matched Absorbing Conditions Based on Anisotropic Lossy Mapping of Space. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters.*, 5(3):90–92, 1995.
- [94] P.A. Raviart and J.M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Lecture Notes in Mathematics*, number 606, pages 292–315. Proc. of math. aspects on the finite element method, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1977.
- [95] A. Reynolds. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. *Geophysics*, 43:1099–1110, 1978.
- [96] L. Rhaouti. *Domaines fictifs pour la modélisation d'un problème d'interaction fluide-structure: simulation de la timbale*. PhD thesis, Paris IX, 1999.
- [97] J.E. Roberts and J.M. Thomas. *Mixed and Hybrid Methods, in Handbook of Numerical Analysis*. 1989.
- [98] T. Sayah. *Méthodes de potentiels retardés pour les milieux hétérogènes et l'approximation des couches minces par conditions d'impédance généralisées en électromagnétisme*. PhD thesis, Univ. Paris VI, 1995. Thèse de doctorat.
- [99] A. Sei. A family of numerical schemes for the computation of elastic waves. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16:898–916, 1995.
- [100] G. Seriani and E. Priolo. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. In *ICOSAHOM '92 (Montpellier, 1992)*, volume 16, pages 337–348. Finite Elem. Anal. Des., 1994.
- [101] G. Seriani, E. Priolo, and A. Pregarz. Modelling waves in anisotropic media by a spectral element method. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Mandelieu-La Napoule, 1995)*, pages 289–298. SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [102] A. Simone and S. Hestholm. Instability in applying absorbing boundary conditions to high-order seismic modeling algorithms. *Geophysics.*, 63:1017–1023, 1998.
- [103] J. Sochacki, R. Kubichek, J. George, W.R. Fletcher, and S. Smithson. Absorbing boundary conditions and surface waves. *Geophysics*, 52:60–71, 1987.
- [104] Rolf Stenberg. On the construction of optimal mixed finite element methods for the linear elasticity Problem. *Numer. Math.*, 48:447–462, 1986.
- [105] Rolf Stenberg. A family of mixed finite elements for the elasticity problem. *Numer. Math.*, 53:513–538, 1988.
- [106] Rolf Stenberg. A Technique for analysing finite element methods for viscous incompressible flow. *Int. Jour. for Numer. Meth. in Fluids*, 11:935–948, 1990.

- [107] F. L. Teixeira and W. C. Chew. Analytical derivation of a conformal perfectly matched absorber for electromagnetic waves. *Micro. Opt. Tech. Lett.*, 17:231–236, 1998.
- [108] I. Terrasse. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell insationnaires par une méthode de potentiels retardés*. PhD thesis, École Polytechnique, 1993.
- [109] N. Tordjman. *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Univ. Paris IX, 1995.
- [110] L. Trefethen and L. Halpern. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:421–435, 1986.
- [111] E. Turkel and A. Yefet. Absorbing pml boundary layers for wave-like equations. absorbing boundary conditions. *Appl. Numer. Math.*, 27:553–557, 1998.
- [112] J. Virieux. P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 51(4):889–901, 1986.
- [113] L. Zhao and A.C. Cangellaris. A general approach to for developping unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for FDTD grid truncation. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 44:2555–2563, 1996.