

Introduction à l'analyse mathématique de la propagation
d'ondes en régime harmonique

JOLY Patrick

Année 1994-95

Chapitre 1

Solutions périodiques de l'équation des ondes. Equation de Helmholtz

Nous nous intéressons à l'équation des ondes scalaire:

$$(1.1) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f$$

où la donnée f et l'inconnue u sont des fonctions scalaires de $x \in \mathbf{R}^N$ (variable d'espace) et $t > 0$ (le temps). Nous supposons que l'équation (1.1) est satisfaite dans tout l'espace et faisons les hypothèses habituelles sur les coefficients ρ et μ :

$$(1.2) \quad \begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty & p.p. x \in \mathbf{R}^N \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty & p.p. x \in \mathbf{R}^N \end{cases}$$

Dans cette partie du cours nous nous intéressons au cas où la source $f(x, t)$ est une excitation harmonique en temps, c'est à dire :

$$(1.3) \quad f(x, t) = f(x)e^{-i\omega t} \quad \omega > 0$$

où la fonction $f(x)$ est a priori à valeurs complexes. Par définition ω est par la pulsation, elle correspond à une période temporelle égale à $T = 2\pi/\omega$

Remarque 1 *Par abus d'appellation, on parlera de "fréquence ω " du problème. En toute rigueur la fréquence ν est définie par :*

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

Partant de sources harmoniques (cf (1.3)), il est naturel de rechercher des solutions de (1.1) qui soient elles-mêmes harmoniques c'est à dire de la forme :

$$(1.4) \quad u(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}$$

Remarque 2 *La formule (1.4) définit a priori une solution de (1.1) à valeurs complexes. Ceci n'est en fait pas un problème. Ainsi si $f(x)$ est à valeurs réelles, la fonction $\operatorname{Re}(u(x)e^{-i\omega t})$ définit une solution réelle de (1.1) associée à la source $f(x)\cos\omega t$ alors que la fonction $\operatorname{Im}(u(x)e^{-i\omega t})$ définit une autre solution réelle de (1.1) associée à la source $f(x)\sin\omega t$.*

Si on injecte (1.4) dans l'équation (1.1), on voit que la fonction $u(x)$ doit être solution de l'équation de Helmholtz :

$$(1.5) \quad -\operatorname{div}(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = f.$$

Il est fondamental de remarquer que :

- dans (1.5), la dépendance en fonction du temps a disparu et a été remplacée par l'introduction du paramètre $\omega > 0$ (qui, lui, impose la dépendance en temps). Notons que l'on peut résoudre (1.5) à ω fixé alors que cela n'avait pas de sens de résoudre (1.1) à t fixé!
- On a bien sûr perdu avec (1.5) la notion de conditions initiales puisque le temps n'apparaît plus. Le lien entre (1.5) et la physique n'est donc pas si évident a priori. Nous verrons qu'en fait la relation entre le problème d'évolution (1.5) et le problème de nature stationnaire (1.5) passe par le principe d'amplitude limite: la solution de (1.5) représente l'état stationnaire (en toute rigueur atteint au bout d'un temps infini) de la solution du problème d'évolution initial.
- l'équation (1.5) ressemble à un type d'équation que l'on rencontre également dans la littérature, à savoir les équations de nature elliptique dont un prototype est l'équation (que l'on pourrait obtenir à partir de l'équation des ondes (1.1) si on cherchait des solutions de la forme $u(x)e^{-st}$):

$$(1.6) \quad -\operatorname{div}(\mu \nabla u) + s^2 \rho u = f, \quad s > 0.$$

La résolution mathématique de (1.6) passe par un problème variationnel équivalent qui s'écrit (dès que f appartient à $L^2(\mathbf{R}^N)$ par exemple)

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\mathbf{R}^N), / \quad \forall v \in H^1(\mathbf{R}^N), \int (\mu \nabla u \nabla v + s^2 \rho uv) dx = \int f v dx. \end{array} \right.$$

Il se trouve que la forme bilinéaire du problème (1.7) est évidemment coercive dans $H^1(\mathbf{R}^N)$ de telle sorte que le théorème de Lax-Milgram permet de conclure à l'existence et l'unicité de la solution. Si on désirait (ce qui n'est pas possible!) résoudre l'équation de Helmholtz dans le même cadre fonctionnel, il faudrait passer par le problème variationnel:

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\mathbf{R}^N) / \quad \forall v \in H^1(\mathbf{R}^N) \\ a(\omega; u, v) = \int f v dx \\ a(\omega; u, v) := \int (\mu \nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 \rho uv) dx \end{array} \right.$$

Or il se trouve que la forme $a(\omega; u, v)$ n'est plus coercive ni même positive dans $H^1(\mathbf{R}^N)$. Il faut donc passer par l'utilisation d'un nouvel arsenal mathématique pour résoudre le problème (1.5). Nous avons ici touché du doigt l'une des difficultés essentielles liées à la résolution de l'équation de Helmholtz: l'absence de coercivité.

Exercice 1 *Démontrer que la forme bilinéaire $a(\omega; u, v)$ n'est pas positive dans $H^1(\mathbf{R}^N)$.*

Chapitre 2

Résolution de l'équation de Helmholtz homogène dans \mathbb{R}^3

2.1 L'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3 - cadre fonctionnel

Nous supposons dans ce paragraphe que nous sommes en milieu homogène, c'est à dire que les fonctions ρ et μ sont constantes ce qui nous permet d'introduire la vitesse de propagation $c = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, quitte à changer f , l'équation de Helmholtz se réécrit :

$$(2.1) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = f$$

En outre, nous nous placerons en dimension $N = 3$, ce cas présentant le double avantage d'être physiquement réaliste (le monde réel est tridimensionnel) et plus facile à résoudre qu'en dimension 2 pour des raisons purement techniques. Ainsi la résolution du même problème en dimension 2 nécessiterait, même si l'on conserve essentiellement la même démarche, la manipulation de fonctions spéciales, les fonctions de Hankel en l'occurrence, moins familières que celles que nous allons rencontrer en dimension 3.

Pour mieux analyser (2.1), nous allons situer le problème dans le cadre fonctionnel L^2 . Nous désignons donc par H l'espace de Hilbert :

$$(2.2) \quad H = L^2(\mathbf{R}^3; \mathbb{C})$$

muni du produit scalaire usuel :

$$(2.3) \quad (u, v) = \int u \bar{v} \, dx$$

Nous définissons alors l'opérateur non borné dans H défini par :

$$(2.4) \quad \begin{cases} D(A) = H^2(\mathbf{R}^N) \\ Au = -\Delta u, \quad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

Il est alors facile d'établir le :

Théorème 1 *L'opérateur A défini par (2.4) est non borné, autoadjoint et positif dans H .*

Exercice 2 *Démontrer le théorème 1.*

A l'aide de l'opérateur A nous pouvons réécrire, au moins formellement, l'équation de Helmholtz (2.1) sous la forme :

$$(2.5) \quad \left(A - \frac{\omega^2}{c^2}I\right) u = f$$

Tout se passe comme si on désirait inverser l'opérateur $A - \frac{\omega^2}{c^2}I$. La difficulté du problème apparaît alors clairement grâce au :

Théorème 2 *Le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A est purement continu et égal à l'intervalle \mathbf{R}^+ .*

Démonstration : Voir partie “Théorie spectrale” du polycopié. \square

En d'autres termes la résolvante $\rho(A)$ de l'opérateur A , à savoir l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $A - zI$ est inversible de $D(A)$ dans H , est le plan complexe privé de la demi droite réelle \mathbf{R}^+ . Il est donc hors de question d'inverser dans ce cadre l'opérateur $A - \frac{\omega^2}{c^2}I$. Devant cette difficulté il convient donc :

1. de définir une bonne notion de solution pour (2.1),
2. de préciser pour quel type de données on va être capable de résoudre (2.1),
3. de trouver un procédé pour démontrer un résultat d'existence et d'unicité.

Ceci va nous amener à :

- (i) rajouter une notion de comportement à l'infini pour définir “la” bonne solution de u . Cela va en particulier nous amener à **élargir** l'espace dans lequel nous allons chercher la solution, (espace qui ne peut plus être $H^2(\mathbf{R}^3)$ par exemple),
- (ii) **restreindre** l'espace des seconds membres f pour lesquels on sera capable de résoudre (2.1), (espace qui ne peut plus être $L^2(\mathbf{R}^3)$),
- (iii) introduire pour résoudre (2.1) la méthode dite **d'absorption limite**.

2.2 Calcul explicite de la résolvante de l'opérateur A

Pour z n'appartenant pas au spectre de A , en l'occurrence z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbf{R}^+$, il s'agit de calculer $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$ en tant qu'opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbf{R}^3)$ dans lui même. Dans notre cas il s'agit de résoudre l'équation :

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\Delta u - zu = f & f \in L^2(\mathbf{R}^3) \\ u \in L^2(\mathbf{R}^3) \end{cases}$$

ce qui peut se faire explicitement. On a le :

Théorème 3 *La solution u de (2.6) pour $z \notin \mathbf{R}^+$ est donnée par :*

$$(2.7) \quad u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy$$

où la racine \sqrt{z} est l'unique racine carrée de z de partie imaginaire strictement positive.

Démonstration : Utilisons la transformation de Fourier \mathcal{F} dans \mathbf{R}^3 :

$$u(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\xi)$$

définie, lorsque u est dans $L^1(\mathbf{R}^3)$ par :

$$\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-ix\xi} d\xi$$

Nous avons alors (notons que $|\xi|^2 - z$ ne s'annule pas car $z \notin \mathbf{R}^+$) :

$$(2.8) \quad \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2 - z}$$

Posons alors :

$$(2.9) \quad \hat{G}(z; \xi) = \frac{1}{|\xi|^2 - z} \quad (\in L^2(\mathbf{R}^3))$$

et :

$$G(z; \cdot) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{G}(z; \cdot)]$$

Des propriétés de la transformation de Fourier on déduit que :

$$(2.10) \quad u = G(z; \cdot) * f$$

où $u * v$ désigne le produit de convolution (au sens des distributions en général) de u et v . Notons que :

$$\begin{cases} -\Delta G - zG = \delta & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3) \\ G(z; \cdot) \in L^2(\mathbf{R}^3) \end{cases}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que :

$$(2.11) \quad G(z; x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{i\sqrt{z}|x|}$$

l'expression intégrale (2.7) se déduisant alors de (2.10) et du fait que $G(z; \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^3)$.

Pour établir (2.11), nous commençons par remarquer que comme $\hat{G}(z; \xi)$ ne dépend que de $|\xi|$ alors $G(z; x)$ ne dépend que de $r = |x|$. Plus précisément, il existe une fonction $u(r) \in L^2(\mathbf{R}^+; r^2 dr)$ telle que :

$$(2.12) \quad G(z; x) = u(|x|)$$

De plus si on a $U(x) = u(|x|), x \in \mathbf{R}^N$, on a la formule générale :

$$\Delta U(x) = \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{du}{dr} \right) (|x|)$$

Alors, en introduisant la nouvelle inconnue $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$, il vient :

$$\Delta U(x) = |x|^{\frac{N-1}{2}} \left[\frac{d^2 v}{dr^2} (|x|) - \frac{(N-1)(N-3)}{|x|^2} v(|x|) \right]$$

Bien entendu en dimension 3, cette formule se simplifie considérablement et on a simplement ($N = 3$) :

$$\Delta U(x) = |x| \frac{d^2 v}{dr^2} (|x|)$$

Nous déduisons donc finalement qu'il existe une fonction $v(r) \in L^2(\mathbf{R}^+)$ telle que :

$$(2.13) \quad G(z; |x|) = \frac{1}{|x|} v(|x|)$$

où la fonction $v(r)$ vérifie :

$$(2.14) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + zv = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^+)$$

Il existe donc deux constantes A et B telles que :

$$(2.15) \quad v(r) = Ae^{i\sqrt{z}r} + Be^{-i\sqrt{z}r}$$

où \sqrt{z} est, par convention, l'unique racine carrée de z dont la partie imaginaire est strictement positive. Avec cette convention :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow +\infty} |e^{i\sqrt{z}r}| = 0 & \text{(exponentiellement)} \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} |e^{-i\sqrt{z}r}| = +\infty \end{cases}$$

La condition $v \in L^2(\mathbf{R}^+)$ impose donc $B = 0$. Il nous reste à déterminer la constante A . Choisissons alors $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$, vérifiant $\psi(0) = 1$ et posons $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$. De l'égalité

$$(2.16) \quad -\Delta G - zG = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$$

Nous tirons :

$$\langle -\Delta G, \psi_n \rangle - z \langle G, \psi_n \rangle = 1$$

Or par ailleurs :

$$\langle -\Delta G, \psi_n \rangle = - \langle G, \Delta \psi_n \rangle$$

de telle sorte que :

$$| \langle -\Delta G, \psi_n \rangle | \leq \| G(z, \cdot) \|_{L^2} \| \Delta \psi_n \|_{L^2}$$

Comme $\Delta \psi_n = \frac{1}{n^2} \Delta \psi(\frac{x}{n})$, il vient :

$$\left| \begin{aligned} \| \Delta \psi_n \|_{L^2}^2 &= \frac{1}{n^4} \int |\Delta \psi(\frac{x}{n})|^2 dx \\ &= \frac{1}{n} \int |\Delta \psi(y)|^2 dy \end{aligned} \right.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle -\Delta G, \psi_n \rangle = 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle G, \psi_n \rangle = -\frac{1}{z}$$

Soit encore

$$A \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|} \psi_n(x) dx = -\frac{1}{z}$$

Si nous choisissons $\psi(x)$ de façon à ce que $\sup |\psi(x)| = |\psi(0)| = 1$, nous notons alors que :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_n(x) &\rightarrow 1 \text{ p.p. } x \in \mathbf{R}^3, |\psi_n(x)| \leq 1 \\ \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|} &\in L^1(\mathbf{R}^3) \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir :

$$A \int \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|} dx = -\frac{1}{z}$$

Or nous avons (en intégrant par parties):

$$\left| \begin{aligned} \int \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{|x|} dx &= 4\pi \int_0^{+\infty} e^{i\sqrt{z}r} r dr \\ &= \frac{4i\pi}{\sqrt{z}} \int_0^{+\infty} e^{i\sqrt{z}r} dr \\ &= -\frac{4i\pi}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{i\sqrt{z}} = -\frac{4\pi}{z} \end{aligned} \right.$$

De ce calcul nous tirons $A = (4\pi)^{-1}$ et donc (2.11). \square

Remarque 3 Le choix de \sqrt{z} tel qu'il a été effectué consiste à introduire une coupure dans le plan complexe \mathbb{C} coïncidant avec le demi axe réel positif \mathbf{R}^+ , comme illustré sur la figure ci-dessous. Notons que cette coupure coïncide précisément avec le spectre A .

2.3 Principe d'absorption limite

L'idée consiste à approcher $\frac{\omega^2}{c^2} \in \mathbf{R}$ par $\frac{\omega^2}{c^2} \pm i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant destiné à tendre vers 0 et d'étudier le passage à la limite

$$(2.17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_A\left(\frac{\omega^2}{c^2} \pm i\varepsilon\right)f$$

Notons tout d'abord qu'il y a deux façons de se rapprocher de $\omega^2 > 0$ en se déplaçant dans l'ensemble $\mathbb{C} - \mathbf{R}^-$: soit par partie imaginaire positive (ce qui correspond à $\omega^2/c^2 + i\varepsilon$), soit par partie imaginaire négative (ce qui correspond à $\omega^2/c^2 - i\varepsilon$). Le choix "physique" correspond au principe d'absorption limite et consiste à prendre $\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon$. Autrement dit on va s'intéresser à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la fonction u^ε définie par :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^\varepsilon - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon\right)u^\varepsilon = f u^\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}^3) \end{array} \right.$$

Ce choix se justifie aisément si on revient à l'équation des ondes :

$$(2.19) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

Cette équation peut s'approcher par l'équation perturbée :

$$(2.20) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u^\eta}{\partial t} - \Delta u^\eta = f$$

où η est un petit paramètre positif. Le terme $\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial t}$ est bien un terme d'absorption. Par exemple pour l'équation libre, $f = 0$, l'identité de l'énergie devient simplement :

$$(2.21) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int \left(\left| \frac{1}{c} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u^\eta|^2 \right) dx \right) + \eta \int \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 dx = 0$$

La présence du terme $\eta \int \left| \frac{\partial u^\eta}{\partial t} \right|^2 dx$ se traduit donc par la décroissance de l'énergie au cours du temps : il y a bien absorption au sens physique du terme. On peut d'ailleurs même démontrer que la solution du problème de Cauchy (i.e. associé à $f = 0$) correspondant à l'équation des ondes amortie (2.20) tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Par le même type d'argument on peut obtenir des estimations a priori indépendantes de η sur la solution u^η du problème avec second membre (2.20), estimations qui permettent de démontrer que la solution u^η de (2.20) converge uniformément en temps sur $[0, +\infty[$ vers la solution u de (2.19) lorsque $\eta \rightarrow 0$. Si nous transposons cela à l'équation de Helmholtz avec fréquence $\omega > 0$, l'approximation de (2.19) par (2.20) équivaut à approcher l'équation de Helmholtz :

$$(2.22) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f$$

par l'équation

$$(2.23) \quad -\Delta u^\eta - i\eta\omega u^\eta - \frac{\omega^2}{c^2} u^\eta = 0$$

ce qui correspond bien à remplacer $\frac{\omega^2}{c^2}$ par $\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon$ avec $\varepsilon = \eta\omega > 0$.

Remarque 4 On aurait pu aussi faire le choix d'approcher l'équation (2.19) par :

$$(2.24) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial u^\nu}{\partial t} - \Delta u^\nu = f \quad \nu > 0$$

ce qui pour Helmholtz revient à approcher $\frac{\omega^2}{c^2}$ par $\frac{\omega^2}{c^2} - i\varepsilon$ avec $\varepsilon = \nu\omega$. Dans ce cas le terme $-\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial t}$ est un terme de croissance (exponentielle) de l'énergie. On n'a évidemment pas dans ce

cas convergence uniforme en temps sur $[0, +\infty[$ de u^ν vers u solution de (2.19) lorsque $\nu \rightarrow 0$. Bien entendu nos conclusions seraient inversées si on intégrait les équations (2.19), (2.20) et (2.24) pour les temps négatifs, ce qui reviendrait à changer le sens du temps. En quelque sorte le principe d'absorption limite permet de "récupérer" le sens du temps, présent dans l'équation des ondes, mais perdu par l'équation de Helmholtz.

Revenons maintenant au problème approché (2.18). Pour étudier ce qui se passe lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, nous allons supposer que le second membre f est à support compact, ce que nous noterons :

$$(2.25) \quad f \in L_c^2(\mathbf{R}^3)$$

En fait, le passage à la limite ne pourrait pas se faire pour tout f dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ ainsi que nous l'avons déjà annoncé à la fin de la section 2.1.

Nous savons (section 2.2) que u^ε est donné par :

$$(2.26) \quad u^\varepsilon = G_\varepsilon * f$$

où le noyau $G_\varepsilon(x)$ est donné par

$$(2.27) \quad G_\varepsilon(x) = \frac{e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon}|x|}}{4\pi|x|}$$

Il est naturel d'introduire la limite formelle G du noyau G_ε :

$$(2.28) \quad G(x) = \frac{e^{i\omega\frac{|x|}{c}}}{4\pi|x|}$$

En effet pour $\omega > 0$, la limite de $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon}$ est égale à $\frac{\omega}{c}$. De façon générale on a :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon} = \frac{|\omega|}{c}$$

On peut remarquer dès à présent que le noyau $G(x)$ ne décroît pas exponentiellement lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, contrairement à G_ε , mais seulement en $|x|^{-1}$ ce qui est insuffisant pour le rendre intégrable, voire même de carré intégrable, à l'infini. En revanche, $G(x)$ reste localement intégrable puisque l'on a même :

$$(2.29) \quad G \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$$

Remarque 5 Soit $p \geq 1$, on dit que u est dans $L_{loc}^p(\mathbf{R}^N)$ si tout $R > 0, u|_{B_R} \in L^p(B_R)$, B_R désignant la boule de rayon R . Il est alors facile de voir que :

- $L_{loc}^p(\mathbf{R}^N) = \{u : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R} / \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N), \varphi u \in L^p(\mathbf{R}^N)\}$
- $q \geq p \Rightarrow L_{loc}^q(\mathbf{R}^N) \subset L_{loc}^p(\mathbf{R}^N)$

De plus on dira qu'une suite u^n converge vers u dans $L_{loc}^p(\mathbf{R}^3)$ si et seulement si :

$$\forall R > 0 \quad u_n|_{B_R} \longrightarrow u_n|_{B_R} \text{ dans } L^p(B_R)$$

ou encore, de façon équivalente :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3) \quad \varphi u_n \longrightarrow \varphi u \text{ dans } L^p(\mathbf{R}^3)$$

Bien évidemment si $q > p$, la convergence dans $L_{loc}^q(\mathbf{R}^3)$ entraîne la convergence dans $L_{loc}^p(\mathbf{R}^3)$.

Nous pouvons maintenant préciser la convergence de G_ε vers G grâce au :

Lemme 1 G_ε converge vers G dans $L_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

Démonstration : En effet, nous avons :

$$\|G_\varepsilon - G\|_{L^2(B_R)}^2 = \int_{B_R} |G_\varepsilon(x) - G(x)|^2 dx$$

Or pour tout $x \neq 0$, $G_\varepsilon(x) \rightarrow G(x)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Par ailleurs il est facile de voir que $|G_\varepsilon(x)| \leq |G(x)|$ (positivité de $\text{Im} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon}$) et donc que $|G_\varepsilon - G| \leq 2|G|$ comme G est dans $L_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$, le théorème de Lebesgue permet de conclure. \square

Il est maintenant naturel d'introduire la fonction $u(x)$ définie par :

$$(2.30) \quad u(x) = \int G(x-y)f(y)dy = \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y)dy$$

Notons tout d'abord que $u(x)$ est bien défini en tout point x de \mathbf{R}^3 . En effet soit K le support de f , lorsque y décrit K , $x-y$ décrit $\{x-K\}$ qui est un compact, par conséquent :

$$y \rightarrow G(x-y) \in L^2(K)$$

(puisque $G \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$). Comme par ailleurs $f \in L^2(K)$, la fonction produit :

$$y \rightarrow G(x-y)f(y)$$

est bien intégrable sur K ce qui donne un sens à (2.30). Nous allons maintenant montrer que u^ε converge en un certain sens, vers u . Nous montrerons également la convergence des dérivées. Pour cela nous aurons besoin d'un deuxième lemme technique facile à démontrer :

Lemme 2 $\nabla G \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^3)^3, \nabla G_\varepsilon \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^3)^3$ pour tout $\varepsilon > 0$ et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ∇G_ε converge vers ∇G dans $L_{loc}^1(\mathbf{R}^3)^3$.

Démonstration : Notons que $\nabla G(x) = x \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{4\pi|x|^2} \{i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x|}\}$ a une singularité à l'origine en $0(\frac{1}{|x|^2})$ qui est localement intégrable en dimension 3 en raison du poids $r^2 dr$. L'argument est exactement le même pour G_ε . La convergence de ∇G_ε vers ∇G dans L_{loc}^1 se fait en utilisant le théorème de Lebesgue. Nous omettons les détails. \square

Remarque 6 Le lecteur notera que ∇G et ∇G_ε ne sont pas dans $L_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ de même que les dérivées secondes de G et G_ε ne sont pas localement intégrables.

Exercice 3 Démontrer l'égalité $\nabla G(x) = \frac{x}{4\pi} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{|x|^2} (i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x|})$ au sens des distributions.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4 La fonction u appartient à $H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ et est une solution au sens des distributions de l'équation de Helmholtz (2.1). De plus u^ε converge vers u dans $H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ ce qui signifie que, pour tout $R > 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{H^2(B_R)} = 0$$

Commentaires

- Par définition de l'espace $H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$:

$$\begin{aligned} u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3) &\Leftrightarrow \forall R > 0 \quad u|_{B_R} \in H^2(B_R) \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3), \varphi u \in H^2(\mathbf{R}^3) \end{aligned}$$

Notons que l'appartenance à l'espace $H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ n'impose que la régularité locale de la solution. En revanche elle ne précise aucun comportement à l'infini (contrairement à l'appartenance de $H^2(\mathbf{R}^3)$).

- Dans la démonstration qui suit nous allons utiliser la convergence de u^ε vers u pour montrer que u est bien une solution de l'équation de Helmholtz. Une démonstration directe est bien entendu possible.

Démonstration : Nous la décomposons en quatre étapes :

(i) **Convergence de u^ε vers u dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^3)$.** Nous avons si $K = \text{supp} f \subset B_a$:

$$\begin{aligned} \left| u^\varepsilon(x) - u(x) \right| &= \left| \int_{B_a} (G_\varepsilon - G)(x - y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)|^{\frac{1}{2}} |(G_\varepsilon - G)(x - y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)|^{\frac{1}{2}} dy \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons :

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 \leq \left(\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| dy \right) \left(\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| |f(y)|^2 dy \right)$$

Si maintenant $|x| \leq R$, nous avons :

$$\int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| dy \leq \int_{B_{R+a}} |(G_\varepsilon - G)(y)| dy$$

Par conséquent, pour tout $|x| \leq R$

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(B_{R+a})} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| |f(y)|^2 dy$$

Après intégration sur B_R , nous obtenons :

$$(2.31) \quad \int_{B_R} |u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 dx \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(B_{R+a})} \int_{B_a} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| |f(y)|^2 dx dy$$

Mais, en utilisant Fubini :

$$\int_{B_a} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| |f(y)|^2 dx dy = \int_{B_a} |f(y)|^2 \left\{ \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| dx \right\} dy$$

Comme $\int_{B_R} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| dx \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(B_{R+a})}$ pour tout y dans B_a il vient :

$$\int_{B_a} \int_{B_a} |(G_\varepsilon - G)(x - y)| |f(y)|^2 dx dy \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(B_{R+a})} \|f\|_{L^2(B_a)}^2$$

En reportant dans (2.31) nous obtenons l'estimation :

$$(2.32) \quad \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(B_R)} \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(B_{R+a})} \|f\|_{L^2},$$

ce qui démontre en particulier grâce au lemme 1 que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(B_R)} = 0.$$

(ii) **Convergence de u^ε vers u dans $H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^3)$.** Par dérivation sous le signe somme, nous avons les égalités :

$$(2.33) \quad \nabla u^\varepsilon(x) = \int \nabla G_\varepsilon(x - y) f(y) dy$$

$$(2.34) \quad \nabla u(x) = \int \nabla G(x - y) f(y) dy.$$

En réalité, ces égalités doivent être comprises au sens des distributions. Il n'est pas clair avec ces formules que $\nabla u(x)$ et $\nabla u^\varepsilon(x)$ soient définies en tout point x . Par contre, ce sont des fonctions de $L^2_{loc}(\mathbf{R}^3)$. En effet, en raisonnant comme précédemment on obtient :

$$(2.35) \quad \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{L^2(B_R)} \leq \|\nabla G_\varepsilon - \nabla G\|_{L^1(B_{R+a})} \|f\|_{L^2(B_R)}$$

ce qui, compte tenu du lemme 2, montre que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_{L^2(B_R)} = 0.$$

(iii) **u est solution de l'équation de Helmholtz.** En effet soit φ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$ nous avons :

$$(2.36) \quad \begin{aligned} & \langle -\Delta u^\varepsilon - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon\right)u^\varepsilon, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ \Leftrightarrow & \langle u^\varepsilon, -\Delta\varphi - \frac{\omega^2}{c^2}\varphi \rangle + i\varepsilon \langle u^\varepsilon, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Or si nous désignons par K le support (compact) de φ nous avons :

$$|\langle u^\varepsilon, \varphi \rangle| \leq \|u^\varepsilon\|_{L^2(K)} \|\varphi\|_{L^2}.$$

Or u^ε converge dans $L^2(K)$ et est donc bornée dans $L^2(K)$, il s'ensuit que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \langle u^\varepsilon, \varphi \rangle = 0.$$

Par ailleurs :

$$|\langle u^\varepsilon - u, -\Delta\varphi - \omega^2\varphi \rangle| \leq \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(K)} \|\Delta\varphi + \omega^2\varphi\|_{L^2}.$$

Comme $\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(K)}$ tend vers 0, nous obtenons par passage à la limite dans (2.36) :

$$\langle u, -\Delta\varphi - \omega^2\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

c'est à dire, ceci étant vrai pour tout φ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$:

$$(2.37) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3).$$

(iv) **Convergence dans $H^2_{loc}(\mathbf{R}^3)$.** Cette fois on ne peut raisonner comme au point (ii) car les dérivées secondes de G et G_ε ne sont pas localement intégrables. Nous allons en fait utiliser les équations satisfaites au sens des distributions par u et u^ε à savoir :

$$(2.38) \quad \begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon\right)u^\varepsilon & = f, \\ -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u & = f. \end{cases}$$

Par différence nous obtenons, après avoir posé $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u$:

$$-\Delta w^\varepsilon - \frac{\omega^2}{c^2}w^\varepsilon = i\varepsilon u^\varepsilon.$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, un rapide calcul montre que :

$$(2.39) \quad -\Delta(\varphi w^\varepsilon) = \psi^\varepsilon,$$

où ψ^ε est donnée par :

$$(2.40) \quad \psi^\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}\varphi w^\varepsilon - \Delta\varphi \cdot w^\varepsilon - 2\nabla\varphi \cdot \nabla w^\varepsilon + i\varepsilon\varphi w^\varepsilon.$$

Des points (i) et (ii) de la démonstration, nous savons que $\psi_\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}^3)$ et que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} = 0.$$

Supposons maintenant que nous ayons choisi φ tel que $\varphi = 1$ dans B_R , nous avons :

$$\int_{B_R} \left| \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \leq \int \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\varphi w^\varepsilon) \right|^2 dx.$$

En utilisant le théorème de Plancherel il vient, en notant $\widehat{\varphi w^\varepsilon}$ la transformée de Fourier de φw^ε :

$$\left| \int_{B_R} \left| \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \right. \leq \int |\xi_i \xi_j|^2 |\widehat{\varphi w^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi \\ \left. \leq \int |\xi|^4 |\widehat{\varphi w^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi. \right.$$

Mais nous avons $|\xi|^2 \widehat{\varphi w^\varepsilon}(\xi) = \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)$ par conséquent :

$$(2.41) \quad \int_{B_R} \left| \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx \leq \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}^2 \rightarrow 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

Exercice 4 Démontrer les formules (2.33) et (2.34) au sens des distributions.

La fonction $G(x) = \frac{e^{i\omega \frac{|x|}{c}}}{4\pi|x|}$ est appelée fonction de Green sortante, ou encore solution élémentaire sortante de l'équation de Helmholtz (2.1). Elle est solution de l'équation :

$$(2.42) \quad -\Delta G - \frac{\omega^2}{c^2} G = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$$

Exercice 5 Donner une démonstration directe de l'égalité (2.42).

De même la solution u de (2.1) que nous avons construite au théorème 4 (qui constitue donc un résultat d'existence) est appelée solution sortante de (2.1). Le label "sortant" va être justifié par le comportement asymptotique à l'infini de la solution. C'est l'étude de ce comportement asymptotique qui va être précisément l'objet de la prochaine section.

2.4 Comportement asymptotique - Notion de solution sortante

Nous allons nous placer en coordonnées sphériques en posant :

$$(2.43) \quad x = r\Theta, \quad r > 0, \quad \Theta \in S^2.$$

où S^2 désigne la sphère unité de \mathbf{R}^3

$$S^2 = \{\Theta \in \mathbf{R}^3 / |\Theta| = 1\}$$

S^2 peut se paramétrer par deux angles "polaires"

$$(2.44) \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

en posant, si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne le repère cartésien canonique de \mathbf{R}^3 :

$$(2.45) \quad \Theta = \sin \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \cos \theta \vec{k}$$

Rappelons alors la formule :

$$(2.46) \quad \int \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{S^2} \varphi(r\Theta) d\sigma(\Theta) \right\} r^2 dr$$

avec en outre, si $\Theta = (\theta, \varphi)$:

$$(2.47) \quad \int_{S^2} \psi(\Theta) d\sigma(\Theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

Dans cette section si u désigne la solution de (2.1) donnée par (2.30), nous nous intéressons au comportement lorsque $r \rightarrow +\infty$ de la fonction $r \rightarrow u(r, \Theta)$, Θ étant fixé. Ce comportement est précisé par le théorème suivant :

Théorème 5 *On a lorsque $r \rightarrow +\infty$:*

$$(2.48) \quad u(r\Theta) = A(\Theta) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

où l'amplitude asymptotique dans la direction Θ , $A(\Theta)$, est donnée par :

$$(2.49) \quad A(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta \cdot y} f(y) dy = \frac{1}{4\pi} \hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\Theta\right)$$

(\hat{f} désignant la transformée de Fourier de f). De plus la fonction $o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ est uniforme en Θ au sens où il existe une constante C indépendante de Θ telle que :

$$(2.50) \quad \left| u(r\Theta) - A(\Theta) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{r} \right| \leq \frac{C}{r^2}.$$

Démonstration : Notons que :

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2, \\ &= |x|^2 \left(1 - \frac{2x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$|x - y| = |x| \left(1 - \frac{2x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quand $|x| \rightarrow +\infty$, nous avons :

$$\left(1 - 2 \frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x \cdot y}{|x|^2} + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

De façon plus précise nous pouvons écrire :

$$\left(1 - 2 \frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x \cdot y}{|x|^2} + \varepsilon(x, y),$$

où la fonction $\varepsilon(x, y)$ vérifie :

$$(2.51) \quad \forall R > 0, \exists C_R > 0 / \forall |y| \leq R \quad |\varepsilon(x, y)| \leq \frac{C_R}{|x|^2}$$

Par conséquent :

$$e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|} = e^{i\omega\frac{|x|}{c}} e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y} e^{i|x|\varepsilon(x,y)}$$

Compte tenu des propriétés de la fonction $\varepsilon(x, y)$, nous pouvons écrire :

$$(2.52) \quad e^{i|x|\varepsilon(x,y)} = 1 + \eta(x, y),$$

où la fonction $\eta(x, y)$ vérifie :

$$(2.53) \quad \forall R > 0, \exists \tilde{C}_R > 0 / \forall |y| \leq R \quad |\eta(x, y)| \leq \frac{\tilde{C}_R}{|x|}.$$

De la même façon nous pouvons écrire :

$$(2.54) \quad \frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|}(1 + \nu(x, y)),$$

où la fonction $\nu(x, y)$ a les mêmes propriétés que la fonction $\eta(x, y)$ (cf (2.53)). Finalement, nous obtenons :

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{i\omega\frac{|x|}{c}}}{|x|} e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y} (1 + \rho(x, y)),$$

où ρ possède la propriété (2.53). Nous tirons alors :

$$u(r\Theta) = \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r} \int \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta\cdot y}}{4\pi} f(y) [1 + \rho(r\Theta, y)] dy,$$

ce que nous pouvons écrire :

$$(2.55) \quad u(r\Theta) = A(\Theta) \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r} + R(r\Theta),$$

où l'amplitude $A(\Theta)$ est donnée par (2.49) et où le reste $R(r\Theta)$ est donné par :

$$(2.56) \quad R(r, \Theta) = \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r} \int \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta\cdot y}}{4\pi} f(y) \rho(r\Theta, y) dy.$$

Le support K de f étant compact, il existe une constante $C_K > 0$ (cf propriété (2.53)) telle que :

$$\forall y \in K \quad |\rho(r\Theta, y)| \leq \frac{C_K}{r}.$$

Il s'ensuit que :

$$(2.57) \quad |R(r, \Theta)| \leq \frac{C_K \|f\|_{L^1}}{4\pi r^2},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Il est intéressant de rapprocher ce comportement asymptotique de la notion d'onde sphérique. Par définition une onde sphérique est une solution de l'équation de Helmholtz homogène qui ne dépend que de $r = |x|$. A l'aide du même changement de fonction que celui utilisé dans la démonstration du théorème 5 on démontre aisément qu'une telle solution est nécessairement de la forme :

$$u(r) = A \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} + B \frac{e^{-i\frac{\omega r}{c}}}{r}$$

et apparait donc comme la somme :

– d'une onde sphérique divergente (ou sortante)

$$u_s = \frac{A}{r} e^{i\frac{\omega r}{c}}$$

(en effet la solution $u(r)e^{i\omega t} = \frac{A}{r} e^{i\frac{\omega}{c}(r-ct)}$ est le produit d'un terme d'amplitude $\frac{A}{r}$ par une fonction de $r-ct$ qui représente bien une onde se propageant dans le sens $r > 0$, c'est à dire une onde divergente ou encore sortante).

– d’une onde sphérique convergente (ou rentrante)

$$u_r = \frac{B}{r} e^{-i\frac{\omega r}{c}}$$

(en effet la fonction $u_r(r)e^{-i\omega t} = \frac{B}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}(r+ct)}$ est le produit d’un terme d’amplitude $\frac{B}{r}$ par une fonction $r + ct$ qui représente une onde se propageant dans le sens $r < 0$, c’est à dire une onde convergente ou encore rentrante).

Le théorème 5 montre donc que la solution u de (2.1) donnée par (2.30) a, lorsque l’on regarde à l’infini, le comportement d’une onde sphérique divergente ou sortante. C’est de qui justifie le nom de “solution sortante” de (2.1). Nous verrons plus loin une caractérisation de la solution sortante qui nous permettra d’établir un résultat d’unicité, que nous n’avons pas pour le moment. En effet si nous avons fait le choix d’approcher $\frac{\omega^2}{c^2}$ par $\frac{\omega^2}{c^2} - i\varepsilon$, nous aurions obtenu par passage à la limite sur la solution de carré sommable, la solution dite “rentrante” de l’équation de Helmholtz donnée par :

$$(2.58) \quad u(x) = \int \overline{G}(x-y)f(y)dy,$$

où $\overline{G}(x)$ est la fonction de Green rentrante, complexe conjuguée de G , et donnée par :

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\omega \frac{|x|}{c}}}{|x|}.$$

Pour comprendre pourquoi on aboutit à ce résultat il suffit de remarquer que, compte tenu du choix de la définition de \sqrt{z} , on a :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - i\varepsilon} = -\frac{\omega}{c},$$

alors que, rappelons le :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon} = \frac{\omega}{c}.$$

L’étude du comportement asymptotique à l’infini de cette solution donnerait :

$$(2.59) \quad u(r\Theta) = B(\Theta) \frac{e^{-i\omega \frac{r}{c}}}{4\pi r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Autrement dit la solution rentrante se comporte comme une onde sphérique convergente dont l’amplitude est modulée en direction. Notons que solutions sortante et entrante ne se distinguent pas par la façon dont elles décroissent à l’infini (à chaque fois c’est en r^{-1}), mais par leurs oscillations, en l’occurrence le signe de leur phase, ce qui se traduit par des sens de propagation opposés. Notons également qu’une fois que l’on a construit deux solutions (qui sont toutes deux des solutions au sens des distributions appartenant à l’espace $H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$) de (2.1), en l’occurrence la solution sortante, notée u_s , et la solution entrante, notée u_r , on peut en construire une infinité en considérant $\alpha u_s + (1 - \alpha)u_r$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Il nous faut donc absolument un critère supplémentaire, une condition à rajouter à (2.1), pour caractériser la solution sortante obtenue par absorption limite. C’est l’objet de la section 2.5.

2.5 Condition de radiation de Sommerfeld

L’idée est de trouver une condition qui caractérise le fait qu’une solution se comporte à l’infini comme $A(\Theta) \frac{e^{i\omega r}}{r}$. Bien entendu la fonction $A(\Theta)$ étant a priori inconnue, il s’agit de trouver une

condition qui soit indépendante de $A(\Theta)$. Indiquons la démarche intuitive qui permet d'aboutir à cette condition. Pour cela il suffit de substituer à la solution sortante u son comportement à l'infini, à savoir :

$$u_\infty(r\Theta) = A(\Theta) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{r}.$$

Notons que :

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial r}(r\Theta) = A(\Theta) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{r} \left(i \frac{\omega}{c} - \frac{1}{r} \right),$$

ce qui nous donne la condition de comportement à l'infini (indépendante de $A(\Theta)$).

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u_\infty = 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad r \rightarrow +\infty,$$

qui n'est autre que la condition de radiation de Sommerfeld ou condition d'onde sortante. Enonçons maintenant notre résultat de façon précise :

Théorème 6 *La solution sortante u de (2.1) vérifie :*

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u = 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad r \rightarrow +\infty.$$

Démonstration : Nous avons déjà vu que :

$$\nabla u(x) = \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \left\{ i \frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x-y|} \right\} (x-y) f(y) dy.$$

En menant des calculs analogues à ceux fait dans la démonstration du théorème 5, on montre aisément que :

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \left\{ i \frac{\omega}{c} - \frac{1}{|x-y|} \right\} (x-y) = i \frac{\omega}{c} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|} e^{-i\frac{\omega}{c} \frac{x}{|x|} \cdot y}}{4\pi|x|^2} \cdot (1 + \tilde{\rho}(x, y)),$$

où la fonction $\tilde{\rho}(x, y)$ a la propriété (2.53). Nous en déduisons que :

$$\nabla u(x) = i \frac{\omega}{c} x \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x|}}{4\pi|x|^2} \int e^{i\frac{\omega}{c} \frac{x}{|x|} \cdot y} (1 + \tilde{\rho}(x, y)) dy,$$

et par suite que :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r\Theta) = i \frac{\omega}{c} A(\theta) \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} + \tilde{R}(r\Theta),$$

où $A(\theta)$ est donné par (2.49) et \tilde{R} par :

$$\tilde{R}(r\Theta) = i \frac{\omega}{c} \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{4\pi r} \int e^{-i\frac{\omega}{c} \frac{x}{|x|} \cdot y} \tilde{\rho}(r\Theta, y) dy.$$

Rappelons que nous avons montré dans la démonstration du théorème 5 que :

$$u(r\Theta) = A(\theta) \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} + R(r\Theta),$$

$$R(r\Theta) = \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{4\pi r} \int e^{-i\frac{\omega}{c} \Theta \cdot y} f(y) \rho(r\Theta, y) dy.$$

On voit donc que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right) (r\Theta) = \tilde{R}(r\Theta) - i \frac{\omega}{c} R(r\Theta).$$

Or de la même façon que nous avons montré que :

$$R(r\Theta) \leq \frac{C_K \|f\|_{L^1}}{4\pi r^2},$$

nous pouvons montrer que :

$$\tilde{R}(r\Theta) \leq \frac{\tilde{C}_K \omega \|f\|_{L^1}}{4\pi c^3 r^2}.$$

Nous en déduisons que :

$$|(\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u)(r\Theta)| \leq \frac{(C_K + \tilde{C}_K)\omega \|f\|_{L^1}}{4\pi c^3 r^2},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Une conséquence du précédent résultat est la condition de radiation au sens faible qui est celle que nous utiliserons dans la suite.

Corollaire 1 *La solution sortante u de (2.1) satisfait :*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 d\sigma = 0,$$

où S_R désigne la sphère de rayon R .

Démonstration : En vertu du théorème précédent nous avons :

$$|\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 \leq \frac{C}{r^4},$$

d'où nous en déduisons :

$$\int_{S_R} |\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u|^2 d\sigma \leq \frac{C}{R^2}. \quad \square$$

Il faut maintenant remarquer que la condition de radiation distingue bien la solution sortante u_s de la solution rentrante u_r . En effet, si u_s vérifie :

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u_s = 0(\frac{1}{r^2}).$$

u_r vérifie par contre la condition de radiation rentrante :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + i\frac{\omega}{c}u_r = 0(\frac{1}{r^2}).$$

Cette dernière solution ne peut donc satisfaire la condition de Sommerfeld sortante puisque :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} + i\frac{\omega}{c}u_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + i\frac{\omega}{c}u_r - 2i\frac{\omega}{c}u_r \\ &= 2i\frac{\omega}{c}u_r + 0(\frac{1}{r^2}) \\ &= 0(\frac{1}{r}) \end{aligned} \right.$$

De la même façon, il est facile de voir que parmi toutes les solutions $\alpha u_s + (1-\alpha)u_r$, seule u_s ($\alpha = 1$) satisfait la condition de radiation sortante. Sur cette simple considération, il apparaît que le simple apport de la condition de Sommerfeld a permis de faire un grand pas vers l'unicité de la solution. Ceci va être confirmé par la prochaine section.

2.6 Résultat d'unicité pour l'équation de Helmholtz

Tout ce qui précède a permis de démontrer que le problème

$$(2.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^3) / \\ -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3) \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right|^2 d\sigma = 0 \end{array} \right.$$

admettait, pour tout f dans $L_c^2(\mathbf{R}^3)$, une solution, à savoir la solution sortante u donnée par la formule explicite (2.33). Nous allons maintenant établir que cette solution est unique.

Théorème 7 *Le problème (2.60) admet au plus une solution.*

Démonstration: Il suffit, compte tenu de la linéarité des équations de montrer que $f = 0 \implies u = 0$. Supposons donc que $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^3)$ et vérifie :

$$-\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0.$$

Nous multiplions cette égalité par \bar{u} et intégrons le résultat sur la boule B_R de rayon R :

$$-\int_{B_R} \Delta u \bar{u} dx + \frac{\omega^2}{c^2} \int_{B_R} |u|^2 dx = 0.$$

Grâce à la formule de Green nous obtenons :

$$\int_{B_R} (|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2) dx - \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma = 0,$$

ce que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{B_R} (|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2) dx - \int_{S_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right) \bar{u} d\sigma \\ - i \frac{\omega}{c} \int_{S_R} |u|^2 d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

En prenant la partie imaginaire de cette égalité nous obtenons :

$$\omega c \int_{S_R} |u|^2 d\sigma = -\text{Im} \int_{S_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right) \bar{u} d\sigma.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$\|u\|_{L^2(S_R)}^2 \leq \frac{c}{\omega} \|u\|_{L^2(S_R)} \left\| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right\|_{L^2(S_R)},$$

c'est à dire :

$$\|u\|_{L^2(S_R)} \leq \frac{c}{\omega} \left\| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u \right\|_{L^2(S_R)}.$$

ce qui, compte tenu de la condition de radiation de Sommerfeld, entraîne :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \|u\|_{L^2(S_R)} = 0.$$

Pour conclure, nous aurons besoin du lemme fondamental suivant :

Lemme 3 (Théorème de Rellich) Soit $u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^N - B_R)$ vérifiant, pour un certain $\lambda > 0$:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \text{pour } |x| > R,$$

alors on a l'alternative

(i) $u \equiv 0$ pour $|x| > R$,

(ii) $\exists C > 0, \exists (R_0, R_1) / R_1 \geq R_0 \geq R$ tels que $\forall r \geq R_1, \int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u|^2 dx \geq Cr$.

Démonstration : Nous admettrons ce résultat. □

Exercice 6 Démontrer le lemme précédent pour $N = 1$.

Supposons alors que u soit non nulle. D'après le théorème de Rellich, il existe donc (C, R_0, R_1) tels que $R_1 \geq R_0$ et :

$$(2.61) \quad \forall r \geq R_1 \quad \int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u|^2 dx \geq Cr \quad (C > 0)$$

Nous appliquons le lemme 3 avec $R = 0$. Or :

$$(2.62) \quad \int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u|^2 dx = \int_{R_0}^r U(\rho) d\rho,$$

où la fonction U est définie par :

$$U(\rho) = \int_{S_\rho} |u|^2 d\rho.$$

D'après la première partie de la démonstration $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} U(\rho) = 0$, par conséquent :

$$\exists R^* > 0 / \rho \geq R^* \implies U(\rho) \leq \frac{C}{2}.$$

Par suite :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{R_0}^r U(\rho) d\rho \leq \frac{C}{2}(r - R_0) \text{ si } R^* < R_0, \\ \int_{R_0}^r U(\rho) d\rho \leq \int_{R_0}^{R^*} U(\rho) d\rho + \frac{C}{2}(r - R^*) \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Dans tous les cas on obtient :

$$(2.63) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{R_0}^r U(\rho) d\rho \leq \frac{C}{2}.$$

Mais de (2.61) et (2.62) on tire :

$$\frac{1}{r} \int_{R_0}^r U(\rho) d\rho \geq C,$$

ce qui est en contradiction avec (2.63). Donc nécessairement $u = 0$. □

Nous avons achevé l'analyse mathématique de base de notre problème en démontrant finalement l'existence et l'unicité de la solution de (2.60), cette solution étant donnée par (2.33).

2.7 Principe d'amplitude limite

Notre but est maintenant d'établir un lien de nature mathématique entre l'équation des ondes et l'équation de Helmholtz et plus exactement entre la solution du problème d'évolution associé à un second membre oscillant de façon périodique en temps à la fréquence ω et la solution sortante de l'équation de Helmholtz. Plus précisément, considérons le problème d'évolution (nous supposons f de carré intégrable à support compact) :

$$(2.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x)e^{-i\omega t}, \quad x \in \mathbf{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3, \end{array} \right.$$

et désignons par $u_\infty(x)$ la solution de l'équation de Helmholtz associée, c'est à dire du problème :

$$(2.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\infty \in H_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^3), \\ -\Delta u_\infty - \frac{\omega^2}{c^2} u_\infty = f, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3), \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u_\infty}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} u_\infty \right|^2 d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Le résultat que nous allons maintenant démontrer exprime que le comportement asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ de $u(x, t)$ est directement lié à u_∞ : c'est le principe d'amplitude limite qui apporte une justification physique supplémentaire au choix de la solution sortante.

Théorème 8 *On suppose $f \in L_c^2(\mathbf{R}^3)$, alors :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^3 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - u_\infty(x)e^{i\omega t}| = 0$$

Démonstration : On sait que la solution u du problème (2.64) est obtenue par convolution du second membre $f(x)e^{i\omega t}$ par la solution fondamentale de l'équation des ondes dans \mathbf{R}^3 (voir partie du cours sur l'équation des ondes en régime transitoire).

En l'occurrence, on a la formule :

$$\left| \begin{array}{l} u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi s} \left\{ \int_{|y|=s} f(x-y) d\sigma(y) \right\} e^{-i\omega(t-s)} ds, \\ = e^{-i\omega t} \int_0^t \frac{e^{i\omega s}}{4\pi s} \left\{ \int_{|y|=s} f(x-y) d\sigma(y) \right\} ds, \\ = e^{-i\omega t} \int_0^t \int_{|y|=cs} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|y|}}{4\pi|y|} f(x-y) d\sigma(y) ds, \\ = e^{-i\omega t} \int_{|y| \leq ct} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|y|}}{4\pi|y|} f(x-y) dy. \end{array} \right.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{|y| \leq ct} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|y|}}{4\pi|y|} f(x-y) dy = \int \frac{e^{i\omega \frac{|y|}}{4\pi|y|}} f(x-y) dy \\ = \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|} = u_\infty(x). \quad \square \end{array} \right.$$

Chapitre 3

Résolution de l'équation de Helmholtz en milieu localement hétérogène

3.1 Présentation du problème

Nous considérons maintenant l'équation des ondes avec une vitesse variable :

$$(3.1) \quad \frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^3, t > 0,$$

où la fonction $c(x)$ est une fonction vérifiant :

$$(3.2) \quad p.p. x \in \mathbf{R}^3, \quad 0 < c_- \leq c(x) \leq c_\infty < +\infty.$$

Nous supposons en outre que le milieu est homogène à l'infini et plus précisément qu'il existe $a > 0$ et $c_\infty > 0$ tels que :

$$(3.3) \quad |x| \geq a \Rightarrow c(x) = c_\infty.$$

c_∞ est la vitesse de propagation à l'infini : comme au chapitre 1 on s'intéressera à des termes sources harmoniques en temps, à fréquence $\omega > 0$:

$$(3.4) \quad f(x, t) = f(x)e^{-i\omega t},$$

auquel cas nous cherchons des solutions de (3.1) qui sont également harmoniques de même fréquence :

$$(3.5) \quad u(x, t) = u(x)e^{-i\omega t},$$

ce qui nous amène à résoudre l'équation de Helmholtz à coefficients variables :

$$(3.6) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f,$$

où nous ferons sur le second membre $f(x)$ la même hypothèse qu'au chapitre 1 :

$$(3.7) \quad f \in L_c^2(\mathbf{R}^3).$$

3.2 Difficultés du problème - Notion de solution sortante

Si on cherche à résoudre (3.6) dans le "cadre L^2 ", on se heurte bien entendu aux mêmes difficultés que dans le cas homogène. Formellement on est même dans une situation identique. En effet si on munit l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R}^3)$ du produit scalaire :

$$(3.8) \quad (u, v) = \int \frac{u(x)\overline{v(x)}}{c(x)^2} dx.$$

Il est facile de voir que l'opérateur non borné A défini par :

$$(3.9) \quad \begin{cases} D(A) = H^2(\mathbf{R}^3), \\ Au = -c^2 \Delta u, \quad \forall u \in D(A), \end{cases}$$

est autoadjoint et positif. Il suffit de remarquer que cet opérateur est l'opérateur associé à la forme bilinéaire $a(u, v)$ définie sur $V \times V, V = H^1(\mathbf{R}^3)$, par

$$(3.10) \quad a(u, v) = \int_{\mathbf{R}^3} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx$$

De plus, par des techniques perturbatives (cf partie "Théorie spectrale" du cours), on montre aisément que le spectre de A est continu et égal à :

$$(3.11) \quad \sigma(A) = \mathbf{R}^+.$$

En quelque sorte résoudre (3.6) équivaut à inverser l'opérateur $(A - \omega^2 I)$ ce qui est impossible puisque ω^2 appartient au spectre de A !

En outre l'exemple de l'équation en milieu homogène nous instruit sur le fait que l'on ne peut espérer un résultat d'unicité pour (3.6) sans prescrire à la solution cherchée un certain comportement à l'infini. Or, à l'infini, le milieu "ne voit" que la vitesse de propagation c_∞ . Par cohérence avec le choix fait dans le cas d'un milieu homogène, il est naturel d'imposer la condition de radiation sortante :

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad r \rightarrow +\infty,$$

ou plutôt son équivalent sous forme faible

$$(3.12) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u \right|^2 d\sigma = 0.$$

Cela nous amène à introduire la notion de solution sortante :

Définition 1 On appelle solution sortante de (3.6) toute fonction u vérifiant :

$$(3.13) \quad \begin{cases} \bullet \quad u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3), \\ \bullet \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = f, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3), \\ \bullet \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u \right|^2 d\sigma = 0. \end{cases}$$

Bien entendu, ce choix de solution a d'autres justifications analogues à celles que nous avons données au chapitre 1 dans le cas d'un milieu homogène à savoir notamment :

$$\begin{cases} - \text{le principe d'amplitude limite} \\ - \text{le principe d'absorption limite} \end{cases}$$

Les démonstrations sont toutefois plus délicates que dans le cas homogène et nous les omettrons ici (voir remarque ci-après).

Il s'agit maintenant d'essayer de démontrer un théorème d'existence et d'unicité pour (3.13). Nous le verrons, la démonstration de l'unicité reposera sur les mêmes arguments que dans le cas du milieu homogène. En revanche, pour ce qui concerne l'existence, il va falloir faire appel à de nouveaux

outils mathématiques car on ne peut espérer obtenir une formule explicite pour la solution comme ce fut le cas au chapitre 1.

De façon plus précise nous allons utiliser un résultat puissant d'analyse fonctionnelle connu sous le nom d'alternative de Fredholm. Au préalable, il va falloir reformuler notre problème sous une forme susceptible de relever de l'application de cette alternative. C'est l'objet de la prochaine section où nous utiliserons de façon essentielle les résultats du chapitre 1.

Remarque 7 *Une autre méthode, que nous avons évitée dans ce chapitre, pour démontrer l'existence d'une solution consisterait à démontrer le principe d'absorption limite. En outre ce dernier a une portée très générale. Il présente toutefois le désavantage d'être peut être plus abstrait que la méthode que nous présenterons au prochain paragraphe. Nous avons fait le choix dans ce cours de réserver la démonstration du principe d'absorption limite au cas du problème de diffraction par un obstacle que nous traiterons au chapitre 4. Le lecteur pourra se convaincre aisément que la preuve qui y sera faite s'adapterait au problème considéré dans ce chapitre.*

3.3 Réduction à un domaine borné - Equation de Lipman-Schwinger

L'idée est de considérer le milieu hétérogène correspondant à $c(x)$ comme une perturbation du milieu homogène de vitesse c_∞ . Supposons que le problème (3.13) ait une solution u . Nous avons alors

$$(3.14) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = f, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),$$

ce que nous pouvons réécrire:

$$(3.15) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}u = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\right)u + f.$$

Posons $q = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2}\right)\omega^2$. q est une fonction mesurable bornée à support dans B_a . L'équation (3.15) s'écrit encore:

$$(3.16) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}u = qu + f.$$

Le second membre $qu + f$ étant de carré intégrable et à support compact nous savons que, si u satisfait la condition de radiation de Sommerfeld sortante (3.13), on a la formule :

$$(3.17) \quad u(x) = \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} (q(y)u(y) + f(y)) dy.$$

Cette équation intégrale satisfaite par u est l'équation de Lipman-Schwinger. Remarquons que cette équation permet de formuler un problème posé en domaine borné. En effet, nous pouvons toujours choisir a tel que $B_a \supset \text{supp} f$. Soit alors $u^* \in H^2(B_a)$ la restriction de u à B_a , nous tirons de (3.17), l'égalité, pour presque tout x dans B_a :

$$(3.18) \quad u^*(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} [q(y)u^*(y) + f(y)] dy.$$

Supposons maintenant que l'équation intégrale (3.18) ait une solution u^* dans $H^2(B_a)$, alors définissons $u(x)$, prolongement de u^* , par :

$$\begin{cases} u(x) = u^*(x), & \text{si } x \in B_a, \\ u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} (q(y)u^*(y) + f(y)) dy, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que la fonction $u(x)$ ainsi construite est solution de l'équation de Lipman-Schwinger et par conséquent est solution sortante de (3.5). Nous avons donc réduit la résolution de l'équation de Helmholtz à celle d'un problème posé dans B_a :

$$(3.19) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u^* \in H^2(B_a) \text{ tel que, p.p. } x \in B_a, \\ u^*(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_a} \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} [q(y)u^*(y) + f(y)] dy. \end{cases}$$

3.4 Résolution de l'équation de Lipman-Schwinger à l'aide de l'alternative de Fredholm

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à la résolution du problème (qui n'est rien d'autre que (3.19), à la régularité $H^2(B_a)$ près) :

$$(3.20) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u^* \in L^2(B_a) \text{ tel que, p.p. } x \in B_a, \\ u^*(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_a} \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} (q(y)u^*(y) + f(y)) dy. \end{cases}$$

Pour reformuler ce problème, introduisons la fonction $h(x)$ défini par :

$$(3.21) \quad \left| \begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_a} \frac{e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy, \\ &= \int_{B_a} G_\infty(x-y) f(y) dy. \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé

$$(3.22) \quad G_\infty(x) = \frac{1}{4\pi} e^{i\frac{\omega}{c_\infty}|x|}.$$

En utilisant les mêmes techniques que pour la démonstration du théorème 4 (Section 1), on peut montrer facilement que $h \in L^2(B_a)$ et que :

$$(3.23) \quad \|h\|_{L^2(B_a)} \leq \|G_\infty\|_{L^1(B_{2a})} \|f\|_{L^2(B_a)}.$$

De la même façon, si pour v dans $L^2(B_a)$, nous définissons :

$$(3.24) \quad Tv(x) = \int G_\infty(x-y) q(y) v(y) dy,$$

nous avons $Tv \in L^2(B_a)$ et en outre :

$$(3.25) \quad \|Tv\|_{L^2(B_a)} \leq \|q\|_{L^\infty} \|G_\infty\|_{L^1(B_{2a})} \|v\|_{L^2(B_a)}.$$

autrement dit, la formule (3.24) définit un opérateur T linéaire continu de $L^2(B_R)$ dans lui même vérifiant :

$$(3.26) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(B_a))} \leq \|q\|_{L^\infty} \|G_\infty\|_{L^1(B_{2a})}.$$

A l'aide de h et de l'opérateur T nous pouvons reformuler le problème (3.20) sous la forme :

$$(3.27) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u^* \in L^2(B_a) \text{ tel que :} \\ (I - T)u^* = h. \end{cases}$$

Autrement dit il s'agit d'inverser l'opérateur $I - T$ dans $L^2(B_a)$. On peut donner une réponse immédiate lorsque :

$$(3.28) \quad \|q\|_{L^\infty} \|G_\infty\|_{L^1(B_{2a})} < 1.$$

Dans ce cas $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2(B_a))} < 1$ et il est bien connu que $I - T$ est un isomorphisme. Ce résultat n'est toutefois pas satisfaisant car (3.28) équivaut à :

$$(3.29) \quad 2\omega^2 R^2 \left\| \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \right\|_{L^\infty} < 1,$$

ce qui correspond :

- Soit à une hypothèse de faible perturbation ($\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2}$ "petit").
- Soit à une hypothèse "basse fréquence" (ω petit).

Pour pouvoir traiter le cas des perturbations et des fréquences quelconques, il va nous falloir utiliser un nouvel outil : l'alternative de Fredholm. De façon précise on a le :

Théorème 9 *Soit X un espace de Banach et T un opérateur compact de X dans lui même, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad I - T \quad \text{est un isomorphisme de } X \text{ dans } X, \\ (ii) \quad I - T \quad \text{est surjectif}, \\ (iii) \quad I - T \quad \text{est injectif}. \end{array} \right.$$

Démonstration : Voir annexe A. □

En pratique ce théorème dit que, si T est un opérateur compact, pour pouvoir affirmer que le problème :

$$(3.30) \quad \text{Trouver } u^* \in X \text{ tel que } u^* - Tu^* = f,$$

admet, pour tout f dans X , une solution unique il suffit de montrer soit l'existence d'une solution (surjectivité), soit l'unicité (injectivité). C'est ce dernier fait que nous tâcherons d'exploiter plus loin. Dans un premier temps il nous faut d'abord vérifier que le problème (3.20) relève bien de l'application de l'alternative de Fredholm. C'est l'objet du :

Lemme 4 *L'opérateur T est compact dans $L^2(B_a)$.*

Démonstration : Il suffit en fait de remarquer que T applique continuellement $L^2(B_a)$ dans $H^1(B_a)$. Pour cela nous remarquons que, pour tout v dans $L^2(B_a)$:

$$\nabla(Tv)(x) = \int_{B_a} \nabla G_\infty(x-y)q(y)dy(y),$$

(compte tenu que $\nabla G_\infty \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^3)$) à partir de quoi nous obtenons :

$$(3.31) \quad \|\nabla(Tv)\|_{L^2(B_a)} \leq \|\nabla(Tv)\|_{L^1(B_{2a})} \cdot \|q\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^2(B_a)}.$$

Ceci joint à l'estimation (3.25) monte que :

$$(3.32) \quad T \in \mathcal{L}(L^2(B_a), H^1(B_a)),$$

et que :

$$(3.33) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(B_a), H^1(B_a))} \leq \|q\|_{L^\infty} \left\{ \|G_\infty\|_{L^1(B_{2a})}^2 + \|\nabla G_\infty\|_{L^1(B_{2a})}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme l'injection $H^1(B_a) \hookrightarrow L^2(B_a)$ est compacte, il s'ensuit que T est compact dans $L^2(B_a)$. \square

Il suffit donc de montrer que $I - T$ est injectif ce qui équivaut, ainsi que nous allons le voir, à démontrer l'unicité pour notre problème initial. En effet, soit $u^* \in \text{Ker}(I - T)$, posons :

$$u(x) = \int_K G_\infty(x-y)u^*(y)dy.$$

D'après la section 1 nous savons que $u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ et vérifie :

$$(3.34) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}u = qu^*.$$

Par ailleurs le fait que u^* appartienne à $\text{Ker}(I - T)$ prouve que

$$u|_{B_a} = u^*,$$

et donc que $qu^* = qu$. Compte tenu de la définition de q , il s'ensuit que :

$$(3.35) \quad -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3),$$

et satisfait en outre (voir section 1) la condition de radiation de Sommerfeld :

$$(3.36) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right|^2 d\sigma = 0.$$

Il nous reste à montrer que les conditions (3.35) et (3.36), jointes à la régularité $u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$, entraînent que $u = 0$, et donc que $u^* = 0$. Ceci correspond bien au résultat annoncé. Démontrons alors le :

Lemme 5 *Le problème (3.13) admet au plus une solution sortante.*

Démonstration : Supposons donc que u satisfasse (3.35) et (3.36). Alors en procédant exactement comme au théorème (7), on montre que :

$$(3.37) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u|^2 d\sigma = 0.$$

(En fait, le lecteur vérifiera que l'on a l'identité :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{B_R} (|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}|u|^2) dx - \int_{S_R} (\frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c_\infty}u)\bar{u} d\sigma \\ - \frac{i\omega}{c_\infty} \int_{S_R} |u|^2 d\sigma = 0 \end{array} \right.$$

pour tout $R > a$. On termine alors comme pour le théorème 7). Le théorème de Rellich permet d'abord de montrer que :

$$(3.38) \quad |x| \geq a \Rightarrow u(x) = 0.$$

Pour conclure il suffit d'invoquer le théorème suivant, théorème dit de "prolongement unique", dont le lecteur trouvera une démonstration dans l'annexe B.

Théorème 10 *Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbf{R}^N et u une fonction de $H_{loc}^2(\mathcal{O})$ vérifiant :*

$$(3.39) \quad p.p. x \in \mathcal{O}, \quad |\Delta u(x)| \leq C(|u(x)| + |\nabla u(x)|),$$

où C est une constante strictement positive. Si on peut trouver une boule $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ telle que :

$$(3.40) \quad u = 0 \quad p.p. \quad \text{dans } B(x_0, \varepsilon),$$

alors u est identiquement nulle dans \mathcal{O} .

Nous pouvons appliquer le théorème à u avec $\mathcal{O} = \mathbf{R}^N$ et $B(x_0, \varepsilon)$ toute boule située dans la région $\{|x| > a\}$. En effet le fait que u soit solution de l'équation de Helmholtz entraîne, si $c^- = \inf_{x \in \mathbf{R}^N} c(x) > 0$:

$$|\Delta u(x)| \leq \frac{\omega^2}{c_-^2} |u(x)| \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N$$

On conclut alors que $u = 0$. □

Finalement, par application de l'alternative de Fredholm, nous pouvons énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 11 *L'équation de Helmholtz en milieu hétérogène (3.5) admet une solution sortante et une seule $u \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$.*

Commentaires :

- L'équation de Helmholtz (3.5) n'est pas l'équation la plus générale que l'on puisse imaginer en milieu hétérogène. En fait, on aimerait pouvoir résoudre

$$(3.41) \quad -\operatorname{div}(\mu \nabla u) - \rho \omega^2 u = f,$$

toujours dans le cas où le milieu de propagation est localement hétérogène :

$$(3.42) \quad |x| \geq 0 \Rightarrow \rho(x) = \rho_\infty, \mu(x) = \mu_\infty,$$

auquel cas on adjoint à (3.41) la condition de radiation

$$(3.43) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u \right|^2 d\sigma = 0,$$

avec $c_\infty = (\mu_\infty / \rho_\infty)^{\frac{1}{2}}$, vitesse de propagation à l'infini. Lorsque $\mu(x)$ présente des discontinuités, la méthode que nous avons utilisée ici ne s'applique plus. En revanche on peut l'adapter (voir exercice ci-après) au cas où $\mu(x)$ est suffisamment régulière :

$$(3.44) \quad \mu(x) \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N).$$

- En fait, lorsque μ est discontinue, on peut toujours résoudre (3.41) à l'aide de l'alternative de Fredholm mais il faut utiliser des techniques différentes pour se ramener à un problème posé en domaine borné (ce qui est essentiel pour pouvoir appliquer des arguments de compacité). Sans entrer dans le détail, citons entre autres :
 - les méthodes de couplage avec formules de représentation intégrales.
 - les méthodes de couplage avec des développements en séries, type séries de Fourier.
- Comme nous l'avons déjà dit l'un des points clés de la démonstration a été la compacité de l'opérateur T . C'est à ce niveau qu'il était nécessaire d'avoir un problème formulé en domaine borné.

Exercice 7 *On considère l'équation de Helmholtz (3.41) où les coefficients $\rho(x)$ et $\mu(x)$ sont supposés satisfaire :*

$$\begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty & p.p. x \in \mathbf{R}^3 \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty & p.p. x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

On suppose en outre que (3.42) a lieu et que la fonction $\mu(x)$ a la régularité (3.44).

1. Montrer que l'opérateur intégral

$$(Tu)(x) = \int_{B_a} G_\infty(x-y)[L\mu(y)\cdot\nabla u(y) + q(y)u(y)]dy$$

où $q = \omega^2(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_\infty^2})$ et $L\mu = \nabla(\text{Log } \mu)$ est un opérateur linéaire continu de $H^1(B_a)$ dans lui même.

2. En utilisant des techniques analogue à celles du théorème 4 (iv), montrer que T applique continuellement $H^1(B_a)$ dans $H^2(B_a)$. En déduire la compacité de T .

3. Adapter la démonstration du théorème 11 pour montrer un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.41), (3.43).

3.5 Application à la diffraction d'une onde plane par une hétérogénéité locale - Notion d'amplitude de diffusion

Considérons d'abord le milieu homogène de vitesse c_∞ . Une onde plane harmonique est une solution particulière de l'équation de Helmholtz homogène :

$$(3.45) \quad \Delta u + \frac{\omega^2}{c_\infty^2}u = 0,$$

de la forme :

$$(3.46) \quad u(x) = e^{ik\cdot x},$$

où k est un vecteur de \mathbf{R}^N appelé vecteur d'onde. Il est immédiat de vérifier que pour que (3.46) soit solution de (3.45) il faut et il suffit que k satisfasse la relation de dispersion :

$$(3.47) \quad |k|^2 = \frac{\omega^2}{c_\infty^2}.$$

Autrement dit k doit appartenir à la sphère centrée à l'origine de rayon ω/c_∞ . Tous les vecteurs d'onde admissibles sont donc de la forme $k = \omega/c_\infty \cdot \phi$ où ϕ est un vecteur unité de \mathbf{R}^3 qui n'est autre que la direction de propagation de l'onde plane.

Remarque 8 L'onde plane définie par (3.46) est une onde d'amplitude 1. Il est évident que tout multiple de cette solution définit également une onde plane.

Si maintenant on introduit une perturbation locale du milieu de propagation en remplaçant par exemple la vitesse uniforme c_∞ par une distribution de vitesse $c(x)$ vérifiant les hypothèses introduites au paragraphe 2.1, il est naturel de se demander ce que "devient" l'onde plane (3.46). Mathématiquement, la bonne façon de poser le problème consiste à rechercher une solution de l'équation de Helmholtz homogène à coefficients variables :

$$(3.48) \quad \Delta u + \frac{\omega^2}{c^2}u = 0,$$

sous la forme d'une perturbation de l'onde plane, à savoir sous la forme :

$$(3.49) \quad u(x) = u_I(x) + u_D(x),$$

où, selon le langage utilisé par les physiciens :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet u_I(x) = e^{ik \cdot x} \text{ est l'onde plane incidente,} \\ \bullet u_D(x) \text{ est le champ diffracté.} \end{array} \right.$$

En d'autres termes u_D est le champ "renvoyé" par l'hétérogénéité " $c(x) - c_\infty$ " (voir figure ci-dessous).

Compte tenu que $\Delta u_I + \omega^2/c_\infty^2 u_I = 0$, il est facile, en injectant (3.49) dans (3.48), de voir que u_D est solution de l'équation avec second membre :

$$(3.50) \quad -\Delta u_D - \frac{\omega^2}{c^2} u_D = \left(\frac{\omega^2}{c_\infty^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) u_I.$$

En outre, c'est au champ diffracté u_D que l'on va demander de satisfaire la condition de radiation sortante

$$(3.51) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u_D}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_\infty} u_D \right|^2 d\sigma = 0.$$

Notons que le problème à résoudre pour u_D ((3.50), (3.51)) est exactement du type de celui considéré dans les sections 2.1 à 2.3 : en effet, le second membre $\left(\frac{\omega^2}{c_\infty^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) u_I$ est bien L^2 à support compact.

Remarque 9 *Les physiciens appellent la solution $u = u_I + u_D$ le champ total. Les mathématiciens disent que la solution u ainsi construite est une fonction propre généralisée de l'opérateur $A = -c^2 \Delta$ associée à la valeur propre ω^2 au même titre que $e^{ik \cdot x}$ est une fonction propre généralisée de $A_\infty = -c_\infty^2 \Delta$: en effet u satisfait bien $Au = \omega^2 u$ au sens des distributions" mais n'est pas une vraie fonction propre de A car elle n'appartient pas à $L^2(\mathbf{R}^3)$ (et donc pas au domaine de A).*

Notons que, outre c et c_∞ , les seules données du problème sont :

- la fréquence $\omega > 0$,
- la direction de propagation de l'onde incidente $\phi \in S^2$.

Bien sûr, l'application du théorème 11, nous permet d'affirmer que pour chaque couple $(\omega, \phi) \in \mathbf{R} \times S^2$, le problème ((3.50), (3.51)) admet une solution unique :

$$(3.52) \quad u_D(\omega, \phi; x) \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3).$$

Nous allons conclure ce paragraphe par la notion d'amplitude de diffusion. Pour cela, nous allons étudier le comportement asymptotique à l'infini du champ diffracté u_D . Pour cela nous fixons une direction d'observation Θ appartenant à S^2 et faisons tendre $r = |x|$ vers $+\infty$. En utilisant les résultats du chapitre 1 (section 1), nous savons que :

$$(3.53) \quad u_D(\omega, \phi; r\Theta) = \frac{A(\omega; \Theta, \phi)}{r} e^{i\frac{\omega}{c_\infty}r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

En effet il suffit de remarquer que :

$$(3.54) \quad -\Delta u_D - \frac{\omega^2}{c_\infty^2} u_D = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\right) u, \quad (u = u_D + u_I)$$

auquel cas nous savons que :

$$(3.55) \quad A(\omega; \Theta, \phi) = \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \int e^{i\frac{\omega}{c_\infty}\Theta \cdot y} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\right)(y) u(y) dy.$$

Par définition la quantité $A(\omega; \Theta, \phi)$ est l'amplitude de diffusion dans la direction Θ associée à une onde plane incidente de fréquence ω et de direction ϕ .

Chapitre 4

Le problème de Dirichlet extérieur - Application à la diffraction d'une onde par un obstacle

4.1 Présentation du problème

Nous retournons maintenant à l'équation des ondes à coefficients constants mais posée dans un ouvert non borné \mathbf{R}^3 , extérieur d'un "obstacle" borné. Plus exactement soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbf{R}^3 d'adhérence compacte $\bar{\mathcal{O}}$, nous posons :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{O}}, \\ \Gamma = \partial\Omega = \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

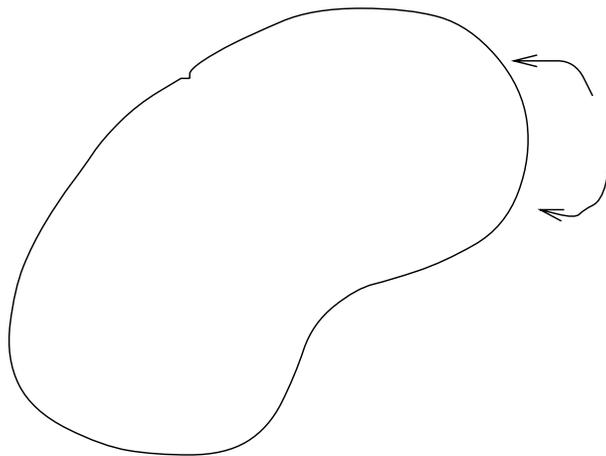


FIG. 4.1 - Les ouverts \mathcal{O} et Ω

Dans ce qui suit, n désignera la normale à Γ , orientée de Ω vers \mathcal{O} et c désigne la vitesse de propagation des ondes, supposée constante. Nous nous intéressons à l'équation sans second membre, le terme source provenant d'une condition de Dirichlet non homogène sur Γ :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \\ u|_{\Gamma} = g. \end{cases}$$

Ici, c'est la fonction g que nous supposons harmonique en temps :

$$(4.3) \quad g(x, t) = g(x)e^{-i\omega t}, \quad x \in \Gamma, t > 0,$$

auquel cas la recherche d'une solution de la forme :

$$(4.4) \quad u(x, t) = u(x)e^{-i\omega t},$$

amène naturellement à résoudre, si on s'intéresse à la solution sortante:

$$(4.5) \quad \begin{cases} -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0, \\ u|_{\Gamma} = g. \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u \right|^2 d\sigma = 0. \end{cases}$$

Remarque 10 *Nous pourrions compliquer quelque peu le modèle (4.5) en rajoutant un second membre f à support compact ou en autorisant la vitesse de propagation c à être localement variable. La plupart des arguments que nous allons développer dans ce chapitre s'appliquent encore, ainsi que le lecteur avisé s'en convaincra aisément.*

Dans la suite nous ferons l'hypothèse $\bar{O} \subset B_a$, où B_a désigne comme toujours la boule ouverte de rayon a .

4.2 Définition de la solution sortante

Une petite remarque préliminaire sur la régularité locale de la solution cherchée. Il serait tentant à la lumière des chapitres 2 et 3 de rechercher la solution dans l'espace $H_{loc}^2(\Omega)$, espace des restrictions à Ω des fonctions de $H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$. En fait on peut s'attendre à une perte de régularité au voisinage du bord Γ :

- soit à cause d'un manque de régularité du terme source g ,
- soit à cause d'un manque de régularité de la frontière Γ .

C'est pourquoi nous nous contenterons d'imposer à u la régularité :

$$(4.6) \quad u \in H_{loc}^1(\Omega)$$

Bien entendu on aura tout de même $\Delta u \in L_{loc}^2(\Omega)$ et pour tout ouvert Ω' tel que $\Omega' \subset K \subset \Omega$, où K est un compact, la solution cherchée u aura automatiquement la régularité C^∞ dans Ω' (voir les commentaires à la fin du chapitre 2).

De même, pour garantir l'unicité de la solution, nous allons demander à u de satisfaire la condition de radiation de Sommerfeld :

$$(4.7) \quad \lim_{R \searrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u \right|^2 d\sigma = 0,$$

et par définition, nous appellerons solution sortante de (4.5) toute fonction u satisfaisant (4.7) et :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \bullet u \in H_{loc}^1(\Omega), \\ \bullet -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \bullet u|_{\Gamma} = g. \end{cases}$$

Bien évidemment, la condition de Dirichlet impose à la fonction g d'avoir la régularité :

$$(4.9) \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

hypothèse que nous ferons dans toute la suite.

Pour résoudre (4.5), nous pourrions utiliser une technique de réduction à un domaine borné telle que celles évoquées au chapitre 3. Nous avons décidé ici de passer par le principe d'absorption limite qui consiste (cf chapitre 1) à étudier la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs positives de la solution u^ε du problème :

$$(4.10) \quad \begin{cases} u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega), \\ -\Delta u^\varepsilon - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon\right)u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon|_\Gamma = g. \end{cases}$$

ce qui nécessite au préalable l'étude du problème :

$$(4.11) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \\ -\Delta u - zu = 0, \\ u|_\Gamma = g, \end{cases}$$

lorsque $z \notin \mathbf{R}^+$. C'est l'objet de la prochaine section.

4.3 Etude de la résolvante du problème

Nous allons d'abord démontrer que pour tout $z \notin \mathbf{R}^+$ le problème (4.11) admet une solution unique. Notons que si nous faisons le changement de variable $u = u_0 + v$ où $u_0 \in H^1(\Omega)$ et satisfait $u_0|_\Gamma = g$, le nouveau problème à résoudre s'écrit :

$$(4.12) \quad \begin{cases} \text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta v - zv = \Delta u_0 + zu_0. \end{cases}$$

problème équivalent au problème variationnel :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega), \\ \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, w) = l(w), \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$(4.14) \quad \begin{cases} a(v, w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \bar{w} dx - z \int_\Omega v \bar{w} dx, \\ l(w) = - \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla \bar{w} dx + z \int_\Omega u_0 \bar{w} dx. \end{cases}$$

Pour pouvoir appliquer Lax-Milgram, le seul point non trivial à vérifier est la coercivité de a . Posons $z = \alpha + i\beta$, nous avons :

$$a(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_\Omega |u|^2 dx + i\beta \int_\Omega |u|^2 dx.$$

Pour $\beta = 0$ et $\alpha < 0$, $\mathcal{R}e(a(u, u))$ est trivialement coercive. Il nous reste à étudier le cas $\beta \neq 0$. Or

$$|a(u, u)|^2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_\Omega |u|^2 dx \right)^2 + \beta^2 \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^2,$$

et, pour $\beta \neq 0$, la forme quadratique :

$$Q(X, Y) = (X - \alpha Y)^2 + \beta^2 Y^2,$$

est définie positive. Il existe donc une constante $C(\alpha, \beta) > 0$ telle que :

$$Q(X, Y) \geq C(\alpha, \beta)[X^2 + Y^2].$$

Or si $\| \cdot \|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$, nous avons :

$$|a(u, u)|^2 = Q(\| \nabla u \|^2, \| u \|^2),$$

et par conséquent :

$$|a(u, u)|^2 \geq C(\alpha, \beta)(\| u \|^4 + \| \nabla u \|^4).$$

En utilisant le fait que $\sqrt{x+y} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, il vient :

$$|a(u, u)| \geq \left(\frac{C(\alpha, \beta)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\| u \|^2 + \| \nabla u \|^2),$$

ce que nous voulions démontrer. En invoquant le théorème de Lax-Milgram, nous déduisons de ce qui précède que le problème (4.13), et par suite le problème (4.11), admet une solution unique. Nous désignerons par $R(z)$ l'application qui à $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ fait correspondre $u \in H^1(\Omega)$, solution de (4.11). Il est facile de montrer que u dépend continument de g , autrement dit que :

$$(4.15) \quad \mathcal{R}(z) \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^1(\Omega)).$$

Exercice 8 *Démontrer (4.15). Indication : on pourra supposer que le relèvement $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow u_0 \in H^1(\Omega)$ est continu.*

Pour la suite, nous utiliserons une propriété de la solution u de (4.11) connue sous le nom de formule de représentation intégrale. Dans ce qui suit, Σ désigne une surface fermée, bornée et assez régulière (de classe C^2 par exemple) de \mathbf{R}^3 , incluse dans $\bar{\Omega}$ et Ω_Σ le domaine (extérieur) inclus dans Ω de frontière Σ .

Lemme 6 *Si on fait l'hypothèse de régularité :*

$$u \in H_{loc}^2(\Omega_\Sigma),$$

en tout point $x \in \Omega_\Sigma$, on a :

$$(4.16) \quad u(x) = \int_\Sigma \left\{ G(z; x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(z, x-y) u(y) \right\} d\sigma(y),$$

où $G(z; x)$ désigne la fonction, de Green donnée par :

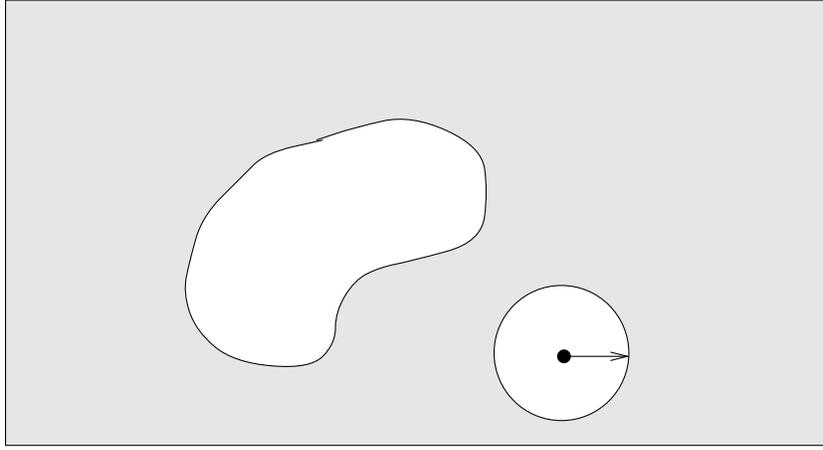
$$(4.17) \quad G(z; x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}x}}{|x|},$$

avec $\operatorname{Re}\sqrt{z} > 0$. En outre, ν_y désigne le vecteur normal unitaire à Σ , orienté vers l'intérieur de Ω_Σ et où :

$$(4.18) \quad \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(z, x-y) = \nabla G(z; x-y) \cdot \nu(y).$$

Démonstration : Soit $x \in \Omega_\Sigma$ et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la boule B_ε de centre x et de rayon ε soit incluse dans Ω_Σ . Nous posons :

$$(4.19) \quad \Omega_\Sigma(x, \varepsilon) = \{y \in \Omega_\Sigma / |y - x| > \varepsilon\}.$$

FIG. 4.2 – L'ouvert $\Omega_\Sigma(x, \varepsilon)$

Il est clair que la fonction $y \rightarrow G(x - y)$ appartient à $H^2(\Omega_\Sigma(x, \varepsilon))$, de même que $u(y)$. De plus, comme

$$\begin{cases} -\Delta G(z; x - \cdot) - zG(z; x - \cdot) = 0, & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_\Sigma(x, \varepsilon)), \\ -\Delta u - zu = 0 & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_\Sigma(x, \varepsilon)). \end{cases}$$

Nous déduisons que :

$$\Delta G(z; x - \cdot) u - \Delta u G(z; x - \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\Sigma(x, \varepsilon).$$

Par conséquent, à l'aide de la formule de Green, il vient :

$$(4.20) \quad \left| \begin{aligned} \int_\Sigma \left[\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(z; x - y)u(y) - G(z; x - y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right] d\sigma(y) = \\ \int_{\partial B_\varepsilon} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(z; x - y)u(y) - G(z; x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y), \end{aligned} \right.$$

où n_y désigne la normale unitaire à la sphère ∂B_ε (au point courant y), sortante par rapport à B_ε . Il reste à passer à la limite dans le terme de droite de (4.20) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous faisons pour cela le changement de variable :

$$y = x + \varepsilon\Theta, \quad \Theta \in S^2.$$

Nous avons alors :

$$\left| \begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial G}{\partial n_y}(z; x - y)u(y) - G(z; x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right\} d\sigma(y) = \\ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}\varepsilon}}{\varepsilon} \left\{ \frac{i\sqrt{z}}{c} - \frac{1}{\varepsilon} \right\} \left[\int_{S^2} u(x + \varepsilon\Theta) d\sigma(\Theta) \right] \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}\varepsilon}}{\varepsilon} \int_{S^2} \nabla u(x + \varepsilon\Theta) \cdot \Theta d\sigma(\Theta). \end{aligned} \right.$$

Compte tenu du fait que u est de classe C^∞ au voisinage de x , il vient :

$$\left| \begin{aligned} \int_{S^2} u(x + \varepsilon\Theta) d\sigma(\Theta) &\sim 4\pi\varepsilon^2 u(x) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \\ \int_{S^2} \nabla u(x + \varepsilon\Theta) \cdot \Theta d\sigma(\Theta) &= O(\varepsilon^2) \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \right.$$

A partir de quoi on obtient, par passage à la limite dans (4.20), la formule de représentation annoncée. \square

Remarque 11 *Il est clair que le résultat de régularité $u \in H_{loc}^2(\Omega_\Sigma)$ est vrai si Σ est incluse dans Ω . Si la frontière Γ de Ω est elle même assez régulière (disons C^2) et si $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, alors on a le droit de faire $\Sigma = \Gamma$ et $\Omega_\Sigma = \Omega$ car, en vertu des résultats de régularité elliptique, $u \in H^2(\Omega)$. Le cas où soit la frontière Γ n'est pas régulière (disons seulement lipschitzienne), soit g n'appartient pas à $H^{3/2}(\Gamma)$, est un peu plus délicat. En effet, il n'est dans ce cas pas sûr que la formule (4.16) (avec $\Sigma = \Gamma$) ait un sens telle qu'elle est écrite car on ne sait même pas a priori si $\partial u / \partial \nu_y$ appartient à $L^2(\Gamma)$. En fait, comme u est néanmoins H^1 à Laplacien L^2 , la trace sur Γ de sa dérivée normale appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Par ailleurs la trace sur Γ de $G(z; x - \cdot)$ est dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La formule de représentation intégrale devient alors vraie si on remplace les intégrales sur Γ par des crochets de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:*

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) G(x-y) d\sigma(y) \text{ doit s'écrire } \langle \frac{\partial u}{\partial \nu_y}, G(x-\cdot) \rangle_{\Gamma}$$

Notons enfin que ces formules de représentation donnent une preuve de la régularité C^∞ de u dans Ω .

Dans la suite nous utiliserons la formule de représentation intégrale avec $\Sigma = S_a$:

$$(4.21) \quad \forall x / |x| > a, \quad u(x) = \int_{S_a} \{G(z; x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(z, x-y) u(y)\} d\sigma(y),$$

ainsi qu'un lemme technique, de démonstration facile (laissée en exercice au lecteur) que nous nous contenterons d'énoncer :

Lemme 7 *Soit $G(x)$ la fonction de Green sortante définie par :*

$$G(x) = \frac{e^{i\omega \frac{|x|}{c}}}{4\pi|x|}, \quad \omega \in \mathbf{R}^+,$$

et z_n une suite de nombres complexes de partie imaginaire strictement positive convergeant vers $\omega^2 > 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $D^\alpha G(z_n; \cdot)$ converge vers $D^\alpha G(\cdot)$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$.

4.4 Le théorème d'existence et d'unicité

Nous commençons par établir le résultat d'unicité.

Lemme 8 *Le problème (4.5) admet au plus une solution sortante, à condition que l'ouvert Ω soit connexe.*

Démonstration : Elle est très similaire à celles données aux chapitres 2 et 3. Soit $R > a$, nous introduisons $\Omega_R = B_R \cap \Omega$. Démontrer l'unicité équivaut à démontrer que la solution de (4.40) est la solution nulle. Or, si u est solution de (4.40), on a :

$$-\int_{\Omega_R} \Delta u \bar{u} dx - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega_R} |u|^2 dx = 0,$$

c'est à dire, compte tenu de la condition de Dirichlet sur Γ :

$$\int_{\Omega_R} (|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2) dx + \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma = 0.$$

On en déduit que $\text{Im}(\int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma) = 0$ ce qui entraîne, en utilisant la condition de radiation de Sommerfield (voir chapitres précédents):

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u|^2 d\sigma = 0.$$

Le théorème de Rellich nous permet d'affirmer que u s'annule dans Ω_R . On conclut alors en invoquant le théorème de prolongement unique (cf Annexe C) et la connexité de l'ouvert Ω . Les détails sont laissés au lecteur. \square

Nous allons maintenant démontrer le résultat d'existence par absorption limite. Nous considérons une suite $\varepsilon_m \rightarrow 0$ et désignons par u_m l'unique solution du problème:

$$(4.22) \quad \begin{cases} u_m \in H^1(\Omega), \\ -\Delta u_m - (\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m)u_m = 0, \\ u_m|_{\Gamma} = g_m. \end{cases}$$

Notre but est d'étudier la limite de u_m lorsque m tend vers $+\infty$ et de construire ainsi la solution sortante recherchée. Indiquons le principe de la démarche avant de nous lancer dans les détails techniques. Dans la suite ρ et ρ^* désigneront deux réels tels que $a < \rho < \rho^*$.

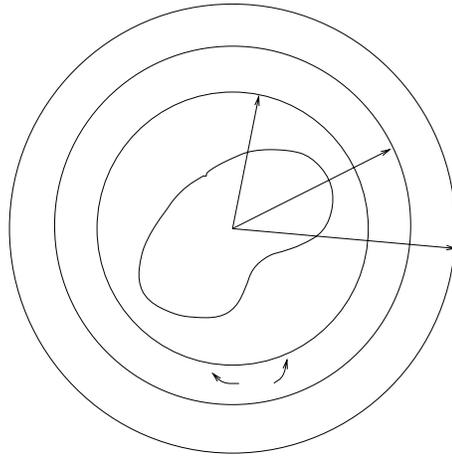
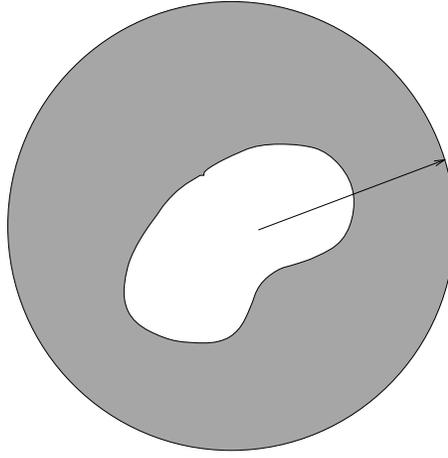


FIG. 4.3 – Les sphères S_a , S_ρ et S_{ρ^*}

Par ailleurs pour $r > a$, on posera:

$$\Omega_r = \{x \in \Omega / |x| < r\}$$

FIG. 4.4 – L'ouvert Ω_r

Les étapes de la démonstration sont les suivantes:

- Par un raisonnement par l'absurde, on montre que la suite u_m est bornée dans $H^1(\Omega_{\rho^*})$. Ce résultat s'appuie notamment sur le résultat d'unicité démontré précédemment.
- En s'appuyant sur l'équation de Helmholtz satisfaite par u_m , on montre qu'on peut extraire de u_m une sous-suite convergeant $H^1(\Omega_\rho)$.
- On montre que la sous-suite en question converge dans $H^1(C)$ où C est une couronne sphérique contenue dans l'ouvert Ω_ρ et contenant la sphère S_a . Par les théorèmes de traces, on en déduit que les traces:

$$u_m|_{S_a} \text{ et } \frac{\partial u_m}{\partial \nu}|_{S_a}$$

convergent dans $L^2(S_a)$.

- En s'appuyant sur la formule de représentation intégrale:

$$u_m(x) = \int_{S_a} \{G(\omega^2 + i\varepsilon_m; x - y) \frac{\partial u_m}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(\omega^2 + i\varepsilon_m; x - y) u_m(y)\} d\sigma(y).$$

on démontre que la suite u_m converge uniformément, ainsi que ses dérivées premières dans tout compact de $\mathbf{R}^3 \setminus B_a$.

- On montre que la limite u ainsi construite est solution sortante de (4.5) en établissant notamment la formule:

$$u(x) = \int_{S_a} \{G(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y) u(y)\} d\sigma(y).$$

Le point de départ de la démonstration est un lemme technique auquel toutes les étapes futures de la démonstration feront référence.

Lemme 9 Soit $\varepsilon_m > 0, \varepsilon_m \searrow 0$ et g_m une suite de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vérifiant :

$$(4.23) \quad g_m \rightarrow g \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Soit \tilde{u}_m l'unique solution du problème

$$(4.24) \quad \begin{cases} \tilde{u}_m \in H^1(\Omega), \\ -\Delta \tilde{u}_m - (\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m) \tilde{u}_m = 0 & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \tilde{u}_m|_{\Gamma} = g. \end{cases}$$

Pour $r > a$, on pose $\Omega_r = \{x \in \Omega / |x| < r\}$. Alors si la suite \tilde{u}_m est bornée dans $H^1(\Omega_{\rho^*})$ on peut en extraire une sous suite convergeant fortement dans $H^1(\Omega_\rho)$.

Démonstration: Introduisons une fonction de troncature ψ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3), \quad 0 \leq \psi \leq 1, \\ (ii) & \text{supp } \psi \subset B_{\rho^*}, \\ (iii) & \psi(x) = 1, \quad \forall x \in B_\rho. \end{array} \right.$$

La suite \tilde{u}_m étant bornée dans $H^1(\Omega_{\rho^*})$ on peut par compacité en extraire une sous suite, toujours notée \tilde{u}_m pour simplifier, telle que :

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_m \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega_{\rho^*}) \text{ fort,} \\ \tilde{u}_m \rightarrow u \quad \text{dans } H^1(\Omega_{\rho^*}) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Pour conclure, il faut montrer que $\nabla \tilde{u}_m$ converge vers ∇u dans $L^2(\Omega_\rho)$ fort. Commençons par introduire un relèvement φ_m dans $H^1(\Omega)$ de g_m et vérifiant :

$$\| \varphi_m \|_{H^1(\Omega)} \leq \| g_m \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

(Un tel relèvement existe en vertu du théorème de traces). La convergence forte de g_m vers g dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ entraîne la convergence forte de φ_m vers φ dans $H^1(\Omega)$ avec $\varphi|_\Gamma = g$. Posons :

$$(4.26) \quad \tilde{u}_m = v_m + \varphi_m.$$

Pour démontrer la convergence de $\nabla \tilde{u}_m$ dans $L^2(\Omega_\rho)$ il suffit de démontrer celle de ∇v_m . Or nous avons :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla v_m \cdot \nabla v \, dx = \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m \right) \int_{\Omega} \tilde{u}_m v \, dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \cdot \nabla v \, dx.$$

En particulier, pour tout (p, q) dans \mathbb{N}^2 :

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla v_p - \nabla v_q) \cdot \nabla v \, dx = \omega^2 \int_{\Omega} (\tilde{u}_p - \tilde{u}_q) v \, dx + i \int_{\Omega} (\varepsilon_p \tilde{u}_p - \varepsilon_q \tilde{u}_q) v \, dx - \int_{\Omega} (\nabla \varphi_p - \nabla \varphi_q) \cdot \nabla v \, dx. \right.$$

Choisissons maintenant $v = \overline{\psi(v_p - v_q)}$. Il vient :

$$\left| \begin{aligned} \int_{\Omega} \psi |\nabla v_p - \nabla v_q|^2 \, dx &= \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla (v_p - v_q) \overline{(v_p - v_q)} \, dx + \omega^2 \int_{\Omega} \psi (\tilde{u}_p - \tilde{u}_q) \overline{(v_p - v_q)} \, dx \\ &+ i \int_{\Omega} \psi (\varepsilon_p \tilde{u}_p - \varepsilon_q \tilde{u}_q) (v_p - v_q) \, dx + \int_{\Omega} \psi (\nabla \varphi_p - \nabla \varphi_q) \cdot \nabla \overline{(v_p - v_q)} \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot (\nabla \varphi_p - \nabla \varphi_q) \overline{(v_p - v_q)} \, dx \end{aligned} \right.$$

Pour voir que le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 quand p et q tendent vers $+\infty$, il faut d'abord remarquer que chaque intégrale est en fait une intégrale sur Ω_{ρ^*} grâce à la fonction de troncature. Ensuite, on constate qu'il s'agit d'intégrales portant sur le produit d'une fonction L^∞ fixe (ψ ou $\nabla \psi$), d'une fonction tendant fortement vers 0 dans $L^2(\Omega_{\rho^*})$ (comme

$\tilde{u}_p - \tilde{u}_q, v_p - v_q, \varepsilon_p \tilde{u}_p - \varepsilon_q \tilde{u}_q$ ou $\nabla \varphi_p - \nabla \varphi_q$) et d'une fonction tendant au moins faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega_{\rho^*})$ (comme $\nabla(v_p - v_q)$). Ceci prouve que :

$$\lim_{p,q \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{\rho^*}} \psi |\nabla v_p - \nabla v_q|^2 dx = 0,$$

ce qui suffit pour conclure puisque :

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla v_p - \nabla v_q|^2 dx \leq \int_{\Omega_{\rho^*}} \psi |\nabla v_p - \nabla v_q|^2 dx. \quad \square$$

Revenons maintenant à notre propos initial et à la suite u_m définie par (4.22). Supposons que nous ayons établi que :

$$(4.27) \quad \bullet \quad u_m \text{ est bornée dans } H^1(\Omega_{\rho^*}),$$

Nous allons alors construire par passage à la limite adéquat localement, puis par un prolongement adéquat à l'aide d'une formule de représentation intégrale, une solution u de notre problème. Il ne restera plus qu'à vérifier que l'hypothèse (4.27) est bien satisfaite. Tout d'abord, en appliquant le lemme à u_m avec $g_m = g$ pour tout m , nous savons que nous pouvons extraire de u_m une suite toujours notée u_m telle que pour $a < \rho < \rho^*$ (nous fixons un tel ρ) :

$$(4.28) \quad u_m \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega_\rho).$$

Pour exploiter la formule de représentation intégrale sur S_a pour u_m , il nous faut des renseignements les traces $u_m|_{S_a}$ et surtout $(\partial u_m / \partial \nu)|_{S_a}$. Ces traces sont définies sans problèmes u_m est de classe C^∞ dans Ω . Par ailleurs de (4.28), nous déduisons la convergence de $u_m|_{S_a}$ vers $u|_{S_a}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(S_a)$. Pour obtenir un résultat analogue pour $(\partial u_m / \partial \nu)|_{S_a}$, il nous faut un résultat de convergence de type H^2 sur u_m , au moins dans un voisinage de S_a . A priori si g est seulement un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, u n'appartient pas à $H^2(\Omega_\rho)$. C'est pourquoi nous allons travailler dans une couronne sphérique strictement intérieure à l'ouvert Ω_ρ et qui est un voisinage de S_a .

Lemme 10 *Pour tout $\eta > 0$ tel que $\mathcal{O} \subset B_{a-\eta}$ et $B_{a+\eta} \subset B_\rho, u_m$ converge vers u dans $H^2(C_\eta)$ où C_η est la couronne définie par :*

$$C_\eta = \{x \in \mathbf{R}^3 / a - \eta < |x| < a + \eta\}$$

Démonstration : Choisissons $\eta' > \eta$ tel que :

$$a + \eta' < \rho' < \rho \text{ et } B_{a-\eta'} \supset \mathcal{O}.$$

et considérons une fonction de troncature ψ analogue à celle utilisée pour la démonstration du lemme :

$$\begin{cases} \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3), & 0 \leq \psi \leq 1, \\ \text{supp } \psi \subset C_{\eta'}, & \psi(x) = 1, \text{ dans } C_\eta. \end{cases}$$

Dans $C_{\eta'}$ nous avons dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$:

$$-\Delta(\psi(u_p - u_q)) + \psi(u_p - u_q) = \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \psi(u_p - u_q) + 2\nabla\psi \cdot \nabla(u_p - u_q).$$

D'où nous déduisons, comme $C_{\eta'} \subset \Omega_\rho$

$$\left| \begin{aligned} \|\psi(u_p - u_q)\|_{H^2(\Omega)} &\leq \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \|\psi\|_{L^\infty} \|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega_\rho)} \\ &\quad + 2 \|\nabla\psi\|_{L^\infty} \|\nabla u_p - \nabla u_q\|_{L^2(\Omega_\rho)}. \end{aligned} \right.$$

Il s'ensuit que $u_p - u_q$ est une suite de Cauchy dans $H^2(C_\eta)$, d'où le résultat annoncé. \square

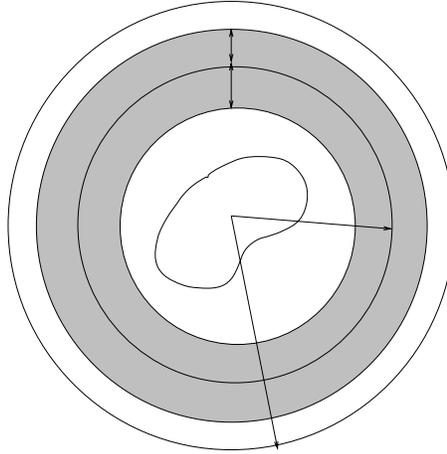


FIG. 4.5 – La couronne C_η

Remarque 12 Le résultat du lemme 10 entraîne en particulier que $u \in H^2(C_\eta)$. En fait on a beaucoup mieux. En passant à la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega_\rho)$ dans l'égalité

$$-\Delta u_m - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m\right)u_m = 0$$

on obtient aisément que

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\rho)$$

ce qui suffit pour affirmer que u est en fait de classe C^∞ dans Ω_ρ .

On déduit immédiatement du lemme 10 le :

Corollaire 2 Lorsque $m \rightarrow +\infty$, on a :

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad u_m|_{S_a} \rightarrow u|_{S_a} \quad \text{dans } H^{\frac{3}{2}}(S_a) \text{ (donc } L^2(S_a)), \\ \bullet \quad \frac{\partial u_m}{\partial \nu}|_{S_a} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{S_a} \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(S_a) \text{ (donc } L^2(S_a)). \end{array} \right.$$

Démonstration : C'est l'application du théorème de traces. \square

La formule de représentation (4.21) établie au paragraphe 4.3 nous suggère d'introduire la fonction $u^* \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}_a)$ définie par :

$$(4.30) \quad u^*(x) = \int_{S_a} \left\{ G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) u(y) \right\} d\sigma(y).$$

Nous avons alors le :

Lemme 11 La fonction u^* définie par (4.29) est de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}_a$ et en outre u_m (respectivement ∇u_m) converge uniformément vers u^* (respectivement ∇u^*) dans tout compact de $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}_a$.

Démonstration : La régularité C^∞ de u^* provient bien entendu de celle de $G(x)$ en dehors de l'origine et des théorèmes de dérivation sous le signe somme. Par ailleurs, grâce à la formule de représentation intégrale (lemme 6) nous avons :

$$u_m(x) = \int_{S_a} \left\{ G(\omega^2 + i\varepsilon_m; x-y) \frac{\partial u_m}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(\omega^2 + i\varepsilon_m; x-y) u_m(y) \right\} d\sigma(y).$$

Soit $R > a$ et $\delta > 0$ tel que $a + \delta < R$, pour montrer que u_m converge uniformément vers u^* sur tout compact notons que, pour tout $R > 0$

$$(4.31) \quad \left| \begin{aligned} & \sup_{a+\delta \leq |x| \leq R} \left| \int_{S_a} \{G(\omega^2 + i\varepsilon_n; x-y) \frac{\partial u_m}{\partial \nu_y}(y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\} d\sigma(y) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{4\pi a} \left\{ \sup_{\delta \leq |x| \leq R+a} |G(\omega^2 + i\varepsilon_m; x)| \cdot \left\| \frac{\partial u_m}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(S_a)} \right. \\ & \quad \left. + \sup_{\delta \leq |x| \leq R+a} |G(\omega^2 + i\varepsilon_m; x) - G(x)| \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(S_a)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Pour établir (4.31), nous utilisons le fait que si $y \in S_a$ et si $a + \delta \leq |x| \leq R$ alors $\delta \leq |x-y| \leq R+a$ faire sortir G des intégrales, puis nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $L^2(S_a)$.

De la même façon nous avons par un raisonnement analogue (et après majoration de $|\frac{\partial G}{\partial \nu}|$ par $|\nabla G|$)

$$(4.32) \quad \left| \begin{aligned} & \sup_{a+\delta \leq |x| \leq R} \left| \int_{S_a} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(\omega^2 + i\varepsilon_m; x-y) u_m(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) u(y) \right\} d\sigma(y) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{4\pi a} \left\{ \sup_{\delta \leq |x| \leq R+a} |\nabla G(\omega^2 + i\varepsilon_m; x)| \cdot \|u_m - u\|_{L^2(S_a)} \right. \\ & \quad \left. + \sup_{\delta \leq |x| \leq R+a} |\nabla G(\omega^2 + i\varepsilon_n; x) - \nabla G(x)| \cdot \|u\|_{L^2(S_a)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

On conclut alors en joignant les estimations (4.31) et (4.32) au résultat de convergence (4.29) et au résultat du lemme 7 relatif à la fonction de Green G . Pour ce qui concerne la convergence uniforme des gradients, il suffit de reprendre le raisonnement en remplaçant G par ∇G . \square

Remarque 13 *Il est clair qu'en fait, toutes les dérivées de u_m convergent uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}_a$.*

Corollaire 3 *La fonction u^* définie par (4.30) est un prolongement C^∞ à Ω de la fonction u construite au lemme 7.*

Démonstration : Choisissons ρ' tel que $a < \rho' < \rho$. Nous savons que :

- u_m^* converge vers u dans $H^1(\Omega_\rho)$,
- u_m^* converge uniformément vers u^* dans la couronne $C_{\rho', \rho} = \{\rho' \leq |x| \leq \rho\} \subset \Omega_\rho$.

Par conséquent u et u^* coïncident sur la couronne en question, ce que nous voulions démontrer. \square

Nous pouvons donc utiliser la seule notation $u(x)$ pour la fonction définie par :

$$(4.33) \quad \begin{cases} u|_{\Omega_\rho} = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m|_{\Omega_\rho} & \text{dans } \Omega_\rho, \\ u(x) = u^*(x) & \text{dans } \mathbf{R}^3 \setminus \Omega_\rho. \end{cases}$$

Dressons le bilan des propriétés de la fonction u :

$$(4.34) \quad \begin{cases} \bullet u \in H_{loc}^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \\ \bullet u_m \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega_\rho) \\ \bullet u_m \rightarrow u \text{ dans } W_{loc}^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \setminus B_{a+\delta}) \quad \forall \delta > 0 \end{cases}$$

Il nous reste à démontrer que la fonction u ainsi construite est une solution sortante de (4.5).

Lemme 12 *La fonction u définie par (4.33) est solution sortante de (4.5).*

Démonstration : Nous n'en donnons que les grandes lignes :

- En passant à la limite au sens des distributions dans l'égalité

$$-\Delta u_m + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m\right)u_m = 0$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on obtient aisément :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Le passage à la limite est complètement justifié dans la mesure où, par exemple, (4.34) entraîne la convergence de u_m vers u dans $H_{loc}^1(\Omega)$.

- En passant à la limite dans $u_m|_\Gamma = g$, ce qui est licite puisque u_m converge vers u dans $H^1(\Omega_\rho)$, on obtient $u|_\Gamma = g$.
- Pour vérifier que u satisfait la condition de radiation de Sommerfeld sortante, il suffit de faire appel à la formule de représentation, pour $|x| > a$:

$$(4.35) \quad u(x) = \int_{S_a} \left\{ G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) u(y) \right\} d\sigma(y),$$

et d'utiliser les propriétés de la fonction de Green sortante $G(x)$. Nous omettons les détails. Les difficultés, purement techniques et calculatoires, sont du même ordre que celles rencontrées au chapitre 1 (Preuve du théorème 6). \square

Exercice 9 *Rédiger les détails manquants de la démonstration du lemme précédent.*

Pour compléter notre argumentation, il faut maintenant vérifier que l'hypothèse de départ est bien satisfaite :

Lemme 13 *La suite u_m définie par (4.1) est bornée dans $H^1(\Omega_{\rho^*})$*

Démonstration : Nous raisonnons par l'absurde et supposons que u_m n'est pas bornée dans $H^1(\Omega_{\rho^*})$. On peut alors extraire une sous suite, toujours notée u_m pour simplifier, telle que :

$$(4.36) \quad \|u_m\|_{H^1(\Omega_{\rho^*})} \rightarrow +\infty.$$

Considérons alors la suite $\tilde{u}_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{H^1(\Omega_{\rho^*})}}$. Elle vérifie, si on pose :

$$(4.37) \quad \tilde{g}_m = \frac{g}{\|u_m\|_{H^1(\Omega_\rho)}},$$

$$(4.38) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u}_m - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m\right)\tilde{u}_m = 0, \\ \tilde{u}_m|_\Gamma = \tilde{g}_m. \end{cases}$$

Comme $\tilde{g}_m \rightarrow 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et que $\|u_m\|_{H^1(\Omega_{\rho^*})} = 1$, le lemme 9 nous dit que l'on peut extraire de \tilde{u}_m (donc de u_m) une autre sous suite également notée \tilde{u}_m telle que :

$$(4.39) \quad \tilde{u}_m \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega_\rho), \quad \forall \rho' < \rho.$$

En reprenant exactement démarche des lemmes 11 à 13, on montre que la fonction u ainsi construite n'est autre que la restriction à Ω_ρ d'une fonction $u \in H_{loc}^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ qui vérifie :

$$(4.40) \quad \begin{cases} -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3), \\ u|_\Gamma = 0, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{i\omega}{c}u \right|^2 d\sigma = 0. \end{cases}$$

En outre \tilde{u}_m converge vers u dans $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \setminus B_{a+\delta})$, pour tout $\delta > 0$. Le théorème d'unicité que nous allons établir juste à la suite de ce lemme entraîne alors que $u = 0$. La contradiction vient alors du fait que la convergence \tilde{u}_m vers u dans $H^1(\Omega_\rho) \cap W_{loc}^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \setminus B_{a+\delta})$, avec $a + \delta < \rho$ entraîne que \tilde{u}_m converge vers u dans $H^1(\Omega_{\rho^*})$ ce qui entraîne $\|u\|_{H^1(\Omega_\rho)} = 1$, résultat en contradiction avec $u = 0$. La preuve est ainsi achevée. \square

Nous avons donc démontré le :

Théorème 12 *Lorsque l'ouvert Ω est connexe, le problème extérieur (4.5) admet une unique solution sortante u dans $H_{loc}^1(\Omega)$.*

Remarque 14 *La connexité de l'ouvert Ω a joué un rôle important dans la démonstration du théorème 12 via le lemme d'unicité. En fait il est clair que l'on peut perdre le résultat d'unicité dans le cas où Ω est non connexe, surtout parce que, dans ce cas, le problème extérieur n'a plus vraiment de sens. En effet si Ω a $N+1$ composantes connexes, N d'entre elles, notées $\{\Omega_j, 1 \leq j \leq N\}$, sont bornées, la dernière, que nous noterons Ω' , étant celle qui "va à l'infini" (voir figure). Le problème à résoudre dans Ω peut s'écrire alors comme la juxtaposition de $N+1$ problèmes totalement découplés :*

- un "vrai" problème extérieur posé dans Ω' ,
- N problèmes en domaine borné, un dans chaque composante connexe bornée Ω_j .

Il est alors clair que le résultat d'existence et d'unicité tombe en défaut dès que $\frac{\omega^2}{c^2}$ coïncide avec l'une des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ dans $L^2(\Omega_j)$, avec condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega_j$.

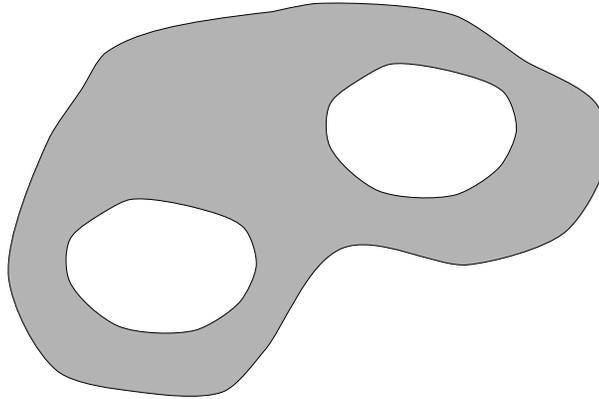


FIG. 4.6 - Cas où Ω n'est pas connexe

Pour terminer ce paragraphe, énonçons un résultat de continuité relatif à l'application $g \rightarrow u$:

Théorème 13 *Pour tout $R > a$, il existe une constante $C_R > 0$ telle que :*

$$(4.41) \quad \|u\|_{1,\Omega_R} \leq C_R |g|_{\frac{1}{2},\Gamma}$$

Démonstration : C'est encore le même principe. Raisonnons par l'absurde. Si le résultat était faux, il existerait une suite g_m tendant vers 0 dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et telle que la solution u_m associée vérifie:

$$(4.42) \quad \|u_m\|_{1,\Omega_R} = 1$$

En raisonnant comme aux lemmes 9 et 10, on établit que, quitte à extraire une sous-suite, u_m converge dans $H^1(\Omega_{R'})$, avec $a < R' < R$, et aussi dans H^2 au voisinage de S_a . En travaillant alors avec la formule de représentation (4.35), on obtient la convergence de la suite u_m dans $H^1_{loc}(\Omega)$ (cf lemme 11), ce qui permet d'établir que la limite u de u_m est solution sortante associée à la donnée $g = 0$ (cf lemme 12). Il s'ensuit que $u = 0$ ce qui aboutit à une contradiction avec (4.42). \square

4.5 Formule de représentation intégrale et comportement à l'infini

Nous commençons par donner les diverses formules de représentation intégrales permettant de représenter la solution sortante u de (4.5) à partir de ses valeurs, ainsi que celles de son gradient, sur une surface bornée.

Théorème 14 *Soit Σ une surface bornée assez régulière (de classe C^2 par exemple) et fermée de \mathbb{R}^3 vérifiant :*

$$\Sigma \subset \bar{\Omega},$$

et telle que :

$$u \in H^2_{loc}(\Omega_\Sigma),$$

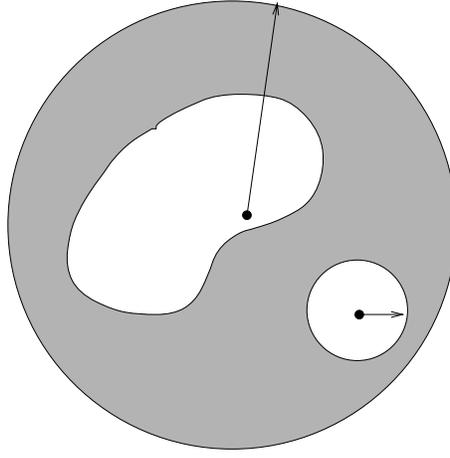
où Ω_Σ est le sous ensemble de Ω de frontière Σ . Alors on a la formule, pour tout x dans Ω_Σ :

$$(4.43) \quad u(x) = \int_{\Sigma} \{G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) u(y)\} d\sigma(y),$$

où G est la fonction de Green sortante, ν_y le vecteur unitaire normal à Ω_Σ , et $d\sigma(y)$ la mesure superficielle sur Σ .

Démonstration Ce théorème a déjà été montré dans la section 4.5 dans le cas où $\Sigma = S_a$ par le principe d'absorption limite. L'extension à une surface Σ "quelconque" peut se faire de la même manière. Donnons toutefois une preuve plus directe s'inspirant de celle du lemme 6. La difficulté à contourner vient du fait que u et G ne sont pas H^2 à l'infini (contrairement à ce qui se passait au lemme 6. Etant donnés $x \in \Omega_\Sigma$ et $R > |x|$, nous choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la boule $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon ε soit incluse dans Ω_Σ et dans la boule B_R . Nous posons alors:

$$(4.44) \quad \Omega_\Sigma^R(x, \varepsilon) = \{y \in \Omega_\Sigma \cap B_R / |y - x| > \varepsilon\}.$$

FIG. 4.7 - L'ouvert $\Omega_{\Sigma}^R(x, \varepsilon)$

Les fonctions $y \rightarrow G(x - y)$ et $y \rightarrow u(y)$ appartiennent à $H^2(\Omega_{\Sigma}^R(x, \varepsilon))$. De plus :

$$\Delta G(x - \cdot) u - \Delta u G(x - \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\Sigma}^R(x, \varepsilon).$$

La formule de Green nous donne:

$$(4.45) \quad \left| \begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right] d\sigma(y) = \\ & \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y) \\ & + \int_{S_R} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y) \end{aligned} \right.$$

Par passage à la limite quand ε tend vers 0, on obtient:

$$(4.46) \quad \left| \begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right] d\sigma(y) = \\ & u(x) + \int_{S_R} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y) \end{aligned} \right.$$

Pour conclure, il reste à montrer que la quantité :

$$u_R(x) = \int_{S_R} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y)$$

est nulle. Il est clair que $u_R(x)$ est indépendante de R pour $R > |x|$. En effet, soit $R' > R$, remarquons que la différence $u_R(x) - u_{R'}(x)$ s'écrit ($C_{R,R'}$ désignant la couronne délimitée par les sphères S_R et $S_{R'}$ et n_y le vecteur unitaire normal en $y \in \partial C_{R,R'}$, sortant par rapport à $C_{R,R'}$):

$$u_R(x) - u_{R'}(x) = \int_{\partial C_{R,R'}} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y)$$

puis d'utiliser la formule de Green et le fait que les deux fonctions u et $G(x - \cdot)$ sont des solutions régulières de l'équation de Helmholtz homogène dans la couronne $C_{R,R'}$.

Remarquons maintenant que u_R est une solution régulière de l'équation de Helmholtz dans B_R . Posons par ailleurs, pour $x > R/2$:

$$\tilde{u}_R(x) \equiv u(x) + \int_{S_{R/2}} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)u(y) - G(x - y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y)$$

Il est clair que \tilde{u}_R est une solution régulière de l'équation de Helmholtz dans $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{B_R}$ et qu'elle vérifie la condition de radiation sortante. Par ailleurs, de la même façon que l'on a démontré que $u_R(x) = u_{R'}(x)$, on établit à l'aide de la formule de Green que, dans la couronne $C_{R/2,R}$ où \tilde{u}_R et u_R sont:

$$\tilde{u}_R = u_R \quad \text{dans } C_{R/2,R}$$

Ceci permet de définir sans ambiguïté la fonction v_R donnée dans \mathbf{R}^3 par :

$$\begin{aligned} v_R(x) &= u_R(x) & \text{si } |x| < R \\ v_R(x) &= \tilde{u}_R(x) & \text{si } |x| > R/2 \end{aligned}$$

Nous notons alors que v_R résout l'équation de Helmholtz homogène dans \mathbf{R}^3 et satisfait la condition de radiation sortante. Elle est donc identiquement nulle, ce qui conclut la preuve. \square

Remarque 15

- La formule (4.43) est l'équivalent de la formule (4.16) du lemme 6 pour $z \notin \mathbf{R}^+$.
- La formule (4.43) est a priori valable pour $x \in \Omega$. Il est tentant de "faire tendre" x vers un point de Γ , et donc d'écrire (4.43) pour $x \in \Gamma$ ce qui, comme $u = g$ sur Γ , donne une équation dont l'inconnue est :

$$(4.47) \quad \varphi(y) = \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \text{ sur } \Gamma.$$

Le passage à la limite est toutefois mathématiquement délicat à cause de la singularité de la fonction de Green. C'est toutefois ce type d'approche qui mène aux équations intégrales bien connues dans la théorie du potentiel. L'intérêt de ce type d'équation, notamment du point de vue numérique, est que l'inconnue φ est seulement définie sur Γ , c'est à dire un ensemble qui possède le double avantage pratique d'être borné et de structure bidimensionnelle. On écrit en quelque sorte un problème en domaine borné "équivalent". De ce point de vue, l'équation intégrale peut être vue comme le pendant de l'équation de Lipman-Schwinger vue au chapitre 3. Nous développerons une méthode analogue au chapitre 5.

Nous nous intéressons maintenant au comportement asymptotique à l'infini de u . Le fait d'avoir imposé la condition de radiation de Sommerfeld nous permet de prévoir que u va avoir le comportement d'une onde sphérique sortante dont l'amplitude est modulée en direction. Pour établir ce résultat nous allons utiliser la formule de représentation intégrale (4.43).

Théorème 15 La solution u de (4.5) vérifie :

$$(4.48) \quad u(r\Theta) = A_\infty(\omega, \Theta) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{\sqrt{r}} + o\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

où l'amplitude asymptotique $A_\infty(\omega; \Theta)$ est donnée par la formule, Σ désignant une surface fermée ayant les propriétés énoncées au théorème 14:

$$(4.49) \quad A_\infty(\omega, \Theta) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - i \frac{\omega}{c} \nu_{y \cdot \Theta} u(y) \right\} e^{-i \frac{\omega}{c} y \cdot \Theta} d\sigma(y),$$

et où le $o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ est uniforme en Θ .

Démonstration : Nous partons de la formule (4.43) qui nous donne :

$$(4.50) \quad \left| \begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{e^{i \frac{\omega}{c} |x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) d\sigma(y) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{e^{i \frac{\omega}{c} |x-y|}}{|x-y|} \right) u(y) d\sigma(y). \end{aligned} \right.$$

Alors en utilisant le fait que, pour $y \in \Sigma$:

$$\begin{cases} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{|x-y|} &= \frac{e^{i\omega|x|}}{|x|} e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y} (1 + o(\frac{1}{|x|})), \\ \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{|x-y|} \right) &= i\frac{\omega}{c} x \cdot \nu_y \frac{e^{i\omega|x|}}{|x|^2} e^{-i\frac{\omega}{c}\frac{x}{|x|}\cdot y} (1 + o(\frac{1}{|x|})), \end{cases}$$

(les $o(\frac{1}{|x|})$) sont uniformes en y), on obtient le résultat annoncé en reportant dans (4.50). \square

Remarque 16 Si \mathcal{O} est de classe C^2 et si $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, alors en choisissant $\Sigma = \Gamma$ on a la formule :

$$A_\infty(\omega, \Theta) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu_y} - i\frac{\omega}{c} \nu_y \cdot \Theta g \right\} (y) e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta \cdot y} d\sigma(y),$$

formule qui peut être étendue au cas général à l'aide de crochets de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

4.6 Application à l'étude de la diffraction d'une onde plane par un obstacle

Nous nous intéressons maintenant à l'équation des ondes dans le domaine extérieur Ω avec condition de Dirichlet homogène sur le bord Γ :

$$(4.51) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, t > 0, \\ u|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

et plus précisément aux solutions harmoniques de fréquence $\omega > 0$, ce qui nous amène à considérer l'équation de Helmholtz :

$$(4.52) \quad \begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Lorsque $\Omega = \mathbf{R}^2$, c'est à dire en l'absence d'obstacle, des solutions particulières privilégiées sont les ondes planes :

$$(4.53) \quad u(x) = \exp ik \cdot x,$$

où le vecteur d'onde k doit satisfaire :

$$(4.54) \quad |k|^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

et peut donc s'écrire sous la forme :

$$(4.55) \quad k = \frac{\omega}{c} \phi, \quad \phi \in S^2.$$

où ϕ donne la direction de propagation de l'onde plane. Comme au chapitre 3, qui concernait les hétérogénéités, s'intéresser à la diffraction des ondes planes par l'obstacle Θ équivaut à rechercher des solutions de (4.52) sous la forme d'une onde plane perturbée :

$$(4.56) \quad u(x) = \exp i\frac{\omega}{c} \phi \cdot x + u_D(\phi; x),$$

où $u_D(\phi; x)$ est le champ diffracté dû à l'obstacle, qui doit être tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet u \text{ satisfait sur } \Gamma \text{ la condition de Dirichlet,} \\ \bullet u_D \text{ vérifie la condition de radiation sortante.} \end{array} \right.$$

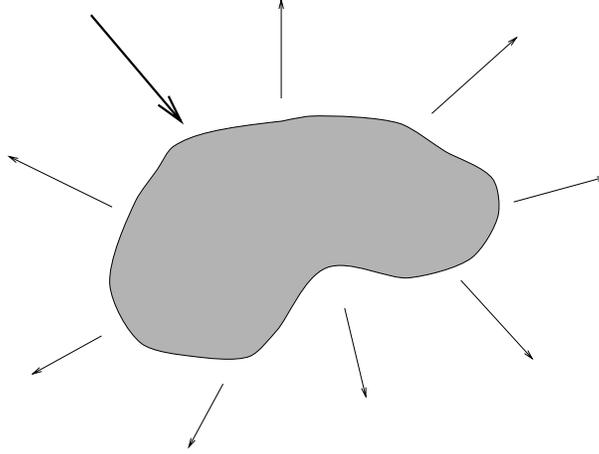


FIG. 4.8 – Diffraction d'une onde plane par un obstacle

En d'autres termes, u_D doit être solution de :

$$(4.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_D - \frac{\omega^2}{c^2} u_D = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_D|_{\Gamma} = -\exp i \frac{\omega}{c} \phi \cdot x \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u_D}{\partial r} + i \frac{\omega}{c} u_D \right|^2 d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Ce problème relève donc de l'application du théorème 12 et nous pouvons affirmer qu'à toute onde plane incidente (4.53) de direction ϕ , on peut associer un unique champ diffracté $u_D(\phi; x)$ solution de (4.57). Nous allons comme dans le cas des milieux hétérogènes définir la notion d'amplitude de diffusion en nous intéressant au comportement asymptotique à l'infini de $u_D(\phi; x)$. Plus précisément, nous savons d'après le paragraphe 4.5 que l'on a :

$$(4.58) \quad u_D(\phi; r\Theta) \sim A(\omega, \Theta, \phi) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{\sqrt{r}} \quad r \rightarrow +\infty$$

où l'amplitude à l'infini $A(\omega; \Theta, \phi)$, qui est par définition l'amplitude de diffusion associée à l'obstacle \mathcal{O} , est donnée par exemple par la formule :

$$(4.59) \quad A(\omega; \Theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_a} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial \nu_y}(\phi; y) - i \frac{\omega}{c} \nu_y \cdot \Theta u_D(\phi; y) \right\} e^{-i \frac{\omega}{c} y \cdot \Theta} d\sigma(y)$$

où ν_y est la normale unitaire à S_a , définie comme dans les paragraphes précédents.

Remarque 17 Bien entendu lorsque l'ouvert \mathcal{O} est assez régulier (cf paragraphe 4.5), on a aussi la formule :

$$(4.60) \quad A(\omega; \Theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_D}{\partial \nu_y}(\phi; y) e^{-i \frac{\omega}{c} y \cdot \Theta} d\sigma(y) + \frac{i\omega}{4\pi c} \int_{\Gamma} e^{-i \frac{\omega}{c} y(\phi - \Theta)} \Theta \cdot \nu_y u_D(\phi; y) d\sigma(y)$$

qui peut se réécrire, dans le cas général, en remplaçant l'intégrale sur Γ par le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

La formule (4.59) montre que la dépendance de A est analytique par rapport à Θ . En outre, la fonction A a une propriété fondamentale, connue sous le nom principe de réciprocité.

Théorème 16 *La fonction $A(\omega; \Theta, \phi)$ vérifie :*

$$\forall(\Theta, \phi) \in S_2 \times S_2 \quad A(\omega; \Theta, \phi) = \overline{A(\omega; -\Theta, -\phi)}.$$

Démonstration : Nous donnons la preuve dans le cas où le bord Γ est régulier au quel cas les champs diffractés sont localement dans H^2 . Toutefois la généralisation de cette démonstration au cas non régulier ne pose pas de difficulté spécifique. Désignons par $u_D(\phi; x)$ et $u_D(-\Theta; x)$ les champs diffractés associés aux ondes planes incidentes de directions respectives ϕ et $-\Theta$. On a en particulier :

$$\begin{cases} -\Delta u_D(\phi; \cdot) - \frac{\omega^2}{c^2} u_D(\phi; \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\Delta u_D(-\Theta; \cdot) - \frac{\omega^2}{c^2} u_D(-\Theta; \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

De la même façon, nous désignons les ondes incidentes :

$$\begin{cases} u_I(\phi, x) = e^{i\frac{\omega}{c}\phi \cdot x}, \\ u_I(-\Theta, x) = e^{-i\frac{\omega}{c}\Theta \cdot x}, \end{cases}$$

qui vérifient l'équation de Helmholtz partout. En particulier $u_I(\phi, x)$ et $u_I(-\Theta, x)$ satisfont l'équation de Helmholtz dans \mathcal{O} . Par conséquent nous avons :

$$\int_{\mathcal{O}} \{ \Delta u_I(\phi; x) u_I(-\Theta; x) - u_I(\phi; x) \Delta u_I(-\Theta; x) \} dx = 0,$$

ce qui, en utilisant la formule de Green, donne :

$$(4.61) \quad \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_I}{\partial n}(\phi; x) u_I(-\Theta, x) - u_I(\phi; x) \frac{\partial u_I}{\partial n}(-\Theta, x) \right\} d\sigma = 0.$$

De la même façon nous avons pour les ondes diffractées, avec $\Omega_R = \Omega \cap B_R$:

$$\int_{\Omega_R} \{ \Delta u_D(\phi; x) u_D(-\Theta, x) - u_D(\phi; x) \Delta u_D(-\Theta, x) \} dx = 0.$$

Soit encore, après utilisation de la formule de Green

$$(4.62) \quad \left| \begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial n}(\phi; x) u_D(-\Theta, x) - u_D(\phi; x) \frac{\partial u_D}{\partial n}(-\Theta, x) \right\} d\sigma \\ & + \int_{S_R} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial r}(\phi; x) u_D(-\Theta, x) - u_D(\phi, x) \frac{\partial u_D}{\partial r}(-\Theta, x) \right\} d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Or nous pouvons écrire :

$$(4.63) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_D}{\partial r}(\phi; x) = i\frac{\omega}{c} u_D(\phi; x) + w_D(\phi; x) \\ \frac{\partial u_D}{\partial r}(-\Theta, x) = i\frac{\omega}{c} u_D(-\Theta; x) + w_D(-\Theta; x). \end{cases}$$

avec :

$$(4.64) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \|w_D(\phi; \cdot)\|_{L^2(S_R)} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \|w_D(-\Theta; \cdot)\|_{L^2(S_R)} = 0.$$

Compte tenu du comportement asymptotique à l'infini (en $\frac{1}{r}$) des champs diffractés, nous avons :

$$(4.65) \quad \|u_D(\phi; \cdot)\|_{L^2(S_R)} + \|u_D(-\Theta; \cdot)\|_{L^2(S_R)} \leq C$$

où C est une constante indépendante de R . A partir de (4.62) et (4.63), nous tirons :

$$\left| \begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial n}(\phi; x) u_D(-\Theta; x) - u_D(\phi; x) \frac{\partial u_D}{\partial n}(-\Theta; x) \right\} d\sigma(x) \\ & + \int_{S_R} \left\{ w_D(\phi; x) u_D(-\Theta; x) - w_D(-\Theta; x) u_D(\phi; x) \right\} d\sigma(x) = 0, \end{aligned} \right.$$

à partir de quoi on obtient, en passant à la limite quand $R \rightarrow +\infty$ (compte tenu de (4.64) et (4.65)) :

$$(4.66) \quad \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial n}(\phi; x) u_D(-\Theta; x) - u_D(\phi; x) \frac{\partial u_D}{\partial n}(-\Theta; x) \right\} d\sigma(x) = 0.$$

Nous remarquons maintenant que la formule (4.59) définissant $A(\omega; \Theta, \phi)$ se réécrit :

$$4\pi A(\omega; \Theta, \phi) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial n}(\phi; x) u_I(-\Theta; x) - u_D(\phi; x) \frac{\partial u_I}{\partial n}(-\Theta; x) \right\} d\sigma(x).$$

Par conséquent :

$$4\pi A(\omega; -\phi, -\Theta) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_D}{\partial n}(-\Theta; x) u_I(\phi; x) - u_D(-\Theta; x) \frac{\partial u_I}{\partial n}(\phi; x) \right\} d\sigma(x).$$

Par différence :

$$(4.67) \quad \left| \begin{aligned} & 4\pi \{ A(\omega; \Theta, \phi) - A(\omega; -\phi, -\Theta) \} = \\ & \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u_D}{\partial n}(\phi; x) u_I(-\Theta; x) + \frac{\partial u_D}{\partial n}(-\Theta; x) u_I(\phi; x) \right] d\sigma(x) \\ & \int_{\Gamma} \left[u_D(\phi; x) \frac{\partial u_I}{\partial n}(-\Theta; x) + u_D(-\Theta; x) \frac{\partial u_I}{\partial n}(\phi; x) \right] d\sigma(x). \end{aligned} \right.$$

Nous ajoutons (4.67) à la somme de (4.61) et (4.66) pour obtenir :

$$(4.68) \quad 4\pi \{ A(\omega; \Theta, \phi) - A(\omega; -\phi, -\Theta) \} = \int_{\Gamma} \left\{ u(\phi; x) \frac{\partial u}{\partial n}(-\Theta; x) - u(-\Theta; x) \frac{\partial u}{\partial n}(\phi; x) \right\} d\sigma(x)$$

où $u(\phi; x)$ et $u(-\Theta; x)$ désignent les champs totaux :

$$\begin{cases} u(\phi; x) = u_I(\phi; x) + u_D(\phi; x), \\ u(-\Theta; x) = u_I(-\Theta; x) + u_D(-\Theta; x). \end{cases}$$

qui satisfont en particulier la condition de Dirichlet homogène sur Γ . Nous en déduisons le résultat. \square

Le théorème de réciprocité montre que $A(\omega, \Theta, \phi)$ dépend analytiquement des deux "angles" Θ et ϕ .

Chapitre 5

Equations intégrales et problèmes de Dirichlet extérieur

Nous nous proposons de présenter maintenant une nouvelle approche du problème de Dirichlet extérieur étudié au chapitre précédent, à savoir:

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2}u = 0, \\ u|_{\Gamma} = g. \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}u \right|^2 d\sigma = 0. \end{cases}$$

Cette méthode consiste à se ramener à un problème équivalent posé sur la frontière Γ de l'obstacle, problème qui se prête dans un deuxième temps à une approximation par éléments finis, comme nous le verrons.

5.1 Notion de potentiel de simple couche

Nous avons vu au chapitre précédent que lorsque le bord Γ est suffisamment régulier et lorsque $g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, alors la solution sortante u de 5.1 appartient à $H_{loc}^2(\Omega)$ et admet la représentation intégrale ($x \in \Omega$):

$$(5.2) \quad u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ G(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y) u(y) \right\} d\sigma(y),$$

où G est la fonction de Green sortante de l'équation de Helmholtz. Rappelons également que cette formule reste valable dans le cas où Γ n'est pas nécessairement régulier et avec seulement $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, à condition de remplacer la seconde intégrale par un crochet de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ce résultat est en fait indépendant de la condition aux limites, la démonstration le prouve. Cela exprime que toute solution sortante d'un problème extérieur s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de deux types de quantités (p et q désignant des fonctions définies sur Γ , raisonnablement régulières, par exemple dans $L^2(\Gamma)$ - mais intégrables suffirait):

$$(5.3) \quad Sp(x) = \int_{\Gamma} \{G(x-y)p(y)d\sigma(y), \quad x \in \Omega$$

$$(5.4) \quad Dp(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y)q(y)d\sigma(y), \quad x \in \Omega$$

Par définition, Sp s'appelle le potentiel de simple couche associé à la densité p alors que Dp est le potentiel de double couche associé à la densité q . Nous nous concentrons dans ce cours sur la notion la plus simple, celle de potentiel de simple couche.

Théorème 17 *Etant donné $p \in L^2(\Gamma)$, la formule:*

$$(5.5) \quad Sp(x) = \int_{\Gamma} G(x-y)p(y)d\sigma(y), \quad x \in \Omega$$

définit une fonction de classe C^∞ dans $\Omega \cup \mathcal{O}$. De plus, $v = Sp$ est l'unique solution du problème de transmission:

$$(5.6) \quad \begin{cases} -\Delta v - \frac{\omega^2}{c^2}v = 0, & \text{dans } \Omega \cup \mathcal{O}, \\ [v]_{|\Gamma} = 0, \\ \left[\frac{\partial v}{\partial n}\right]_{|\Gamma} = p. \end{cases}$$

où $[v]_{|\Gamma}$ désigne le saut de v à travers Γ quand on va de \mathcal{O} vers Ω . En particulier $v \in H_{loc}^1(\mathbf{R}^3)$ et $\Delta v \in L_{loc}^2(\Omega \cup \mathcal{O})$, ce que nous noterons $v \in H_{loc}^1(\mathbf{R}^3) \cap H_{loc}^1(\Delta, \Omega \cup \mathcal{O})$. Par suite l'opérateur $p \rightarrow Sp$, $p \in L^2(\Gamma)$ se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H_{loc}^1(\mathbf{R}^3) \cap H_{loc}^1(\Delta, \Omega \cup \mathcal{O})$.

Démonstration : Nous ne démontrerons pas ici l'existence et l'unicité de la solution v de (5.6). La preuve peut se faire à l'aide du principe d'absorption limite, en suivant la démarche adoptée au chapitre 3. La solution v est construite comme la limite quand $\varepsilon_m \rightarrow 0$ de la solution $v_m \in H^1(\mathbf{R}^3) \cap H^1(\Delta, \Omega \cup \mathcal{O})$ du problème coercif:

$$(5.7) \quad \begin{cases} -\Delta v_m - \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\varepsilon_m\right)v_m = 0, & \text{dans } \Omega \cup \mathcal{O}, \\ [v_m]_{|\Gamma} = 0, \\ \left[\frac{\partial v_m}{\partial n}\right]_{|\Gamma} = p. \end{cases}$$

Nous ne démontrerons pas non plus la continuité de la dépendance $p \rightarrow v$ de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H_{loc}^1(\mathbf{R}^3) \cap H_{loc}^1(\Delta, \Omega \cup \mathcal{O})$. La preuve peut se faire comme au théorème 13.

Concentrons nous sur l'obtention de la formule (5.5), v étant a priori définie comme la solution de (5.5). Formellement, il est facile d'obtenir (5.5). En effet, si on raisonne au sens des distributions dans \mathbf{R}^3 , on voit que v satisfait:

$$-\Delta v - \frac{\omega^2}{c^2}v = p \delta_{\Gamma} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3).$$

où δ_{Γ} est la distribution de Dirac portée par la surface Γ :

$$\langle \delta_{\Gamma}, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$$

Si on applique formellement la formule vue au chapitre 1 pour l'équation de Helmholtz avec second membre, on écrit, δ_{Γ} étant assimilée à une fonction:

$$v(x) = \int G(x-y)\delta_{\Gamma}(y)p(y)dy$$

ce qui redonne formellement (5.5).

De façon plus rigoureuse, nous allons poser:

$$v_i = v_{|\mathcal{O}} \text{ et } v_e = v_{|\Omega}$$

- Considérons tout d'abord $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la boule $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon ε soit incluse dans \mathcal{O} . Nous posons:

$$(5.8) \quad \mathcal{O}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathcal{O} / |y - x| > \varepsilon\}.$$

et nous reprenons la démarche de la démonstration du lemme 6. La fonction $y \rightarrow G(x - y)$ appartient à $H^2(\mathcal{O}(x, \varepsilon))$ et :

$$\Delta G(x - \cdot) v_i - \Delta v_i G(x - \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}(x, \varepsilon).$$

Nous intégrons cette égalité sur $\mathcal{O}(x, \varepsilon)$ et utilisons la formule de Green. Par convention, sur $\partial B_\varepsilon(x)$, n_y désigne la normale au point y , sortante par rapport à $\mathcal{O}(x, \varepsilon)$. Il vient:

$$(5.9) \quad \left| \begin{array}{l} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_i(y) d\sigma(y) + \langle G(x - \cdot), \frac{\partial v_i}{\partial n} \rangle_{\Gamma} = \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(z; x - y) v_i(y) - G(z; x - y) \frac{\partial v_i}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y), \end{array} \right.$$

soit, après passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(5.10) \quad v_i(x) = - \langle G(x - \cdot), \frac{\partial v_i}{\partial n_y} \rangle_{\Gamma} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_i(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathcal{O}$$

Si $x \in \Omega$, alors cette fois, $y \rightarrow G(x - y)$ appartient à $H^2(\mathcal{O})$ et on a l'égalité:

$$\Delta G(x - \cdot) v_i - \Delta v_i G(x - \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

Si on intègre cette fois sur \mathcal{O} , on obtient:

$$(5.11) \quad 0 = - \langle G(x - \cdot), \frac{\partial v_i}{\partial n_y} \rangle_{\Gamma} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_i(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega$$

- Toujours pour $x \in \Omega$, choisissons $R > |x|$, $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la boule $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon ε soit incluse dans l'ouvert Ω_R . Posons

$$(5.12) \quad \Omega^R(x, \varepsilon) = \{y \in \Omega_R / |y - x| > \varepsilon\}.$$

La fonction $y \rightarrow G(x - y)$ appartient à $H^2(\Omega^R(x, \varepsilon))$ et :

$$\Delta G(x - \cdot) v_e - \Delta v_e G(x - \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega^R(x, \varepsilon)$$

Après intégration sur $\Omega^R(x, \varepsilon)$ et utilisation de la formule de Green, il vient, en tenant compte du changement d'orientation sur Γ de la normale sortante par rapport à $\Omega^R(x, \varepsilon)$, qui est cette fois $-n_y$ (Sur $\partial B_\varepsilon(x)$ et S_R , n_y continue à désigner par convention la normale unitaire sortante par rapport à $\Omega^R(x, \varepsilon)$):

$$(5.13) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_e(y) d\sigma(y) - \langle G(x - \cdot), \frac{\partial v_e}{\partial n} \rangle_{\Gamma} = \right. \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_e(y) - G(x - y) \frac{\partial v_e}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y) \\ \left. + \int_{S_R} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_e(y) - G(x - y) \frac{\partial v_e}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y) \right.$$

Mais nous avons vu dans la démonstration du théorème (14) que

$$\int_{S_R} \left[\frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) v_e(y) - G(x - y) \frac{\partial v_e}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma(y) = 0$$

Par suite, après passage à la limite quand ε tend vers zéro, nous obtenons.

$$(5.14) \quad v_\varepsilon(x) = \langle G(x - \cdot), \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n_y} \rangle_\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)v_\varepsilon(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega$$

Si nous considérons maintenant $x \in \mathcal{O}$, il est clair que nous obtiendrons:

$$(5.15) \quad 0 = \langle G(x - \cdot), \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n_y} \rangle_\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y)v_\varepsilon(y) d\sigma(y), \quad x \in \mathcal{O}$$

– Pour $x \in \mathcal{O}$, nous pouvons ajouter (5.10) et (5.15). Compte tenu de:

$$v_\varepsilon|_\Gamma = v_e|_\Gamma \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n}|_\Gamma - \frac{\partial v_e}{\partial n}|_\Gamma = p,$$

nous obtenons:

$$(5.16) \quad \forall x \in \mathcal{O}, \quad v_i(x) = \langle G(x - \cdot), p \rangle_\Gamma$$

ce que l'on peut réécrire comme une intégrale lorsque $p \in L^2(\Gamma)$. De même, en ajoutant (5.11) et (5.14), nous obtenons:

$$(5.17) \quad \forall x \in \Omega, \quad v_e(x) = \langle G(x - \cdot), p \rangle_\Gamma$$

Le théorème découle de (5.16) et (5.17). \square

5.2 L'équation intégrale

5.2.1 Construction de l'opérateur S_Γ

Grâce au théorème de trace, nous pouvons définir l'opérateur:

$$(5.18) \quad S_\Gamma \in \mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

par:

$$(5.19) \quad \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad S_\Gamma p = (Sp)|_\Gamma$$

Si on cherche à résoudre un problème de Helmholtz extérieur, on peut donc toujours chercher la solution sortante sous la forme d'un potentiel de simple couche associé à une densité p à déterminer de façon à satisfaire la condition aux limites. En l'occurrence, pour le problème de Dirichlet cela ramène au problème:

$$(5.20) \quad \text{Trouver } p \in V = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que } S_\Gamma p = g.$$

On dit que (5.20) est une équation intégrale dans la mesure où (5.20) se réécrit formellement:

$$(5.21) \quad \text{Trouver } p \text{ tel que } \int_\Gamma G(x - y)p(y)d\sigma(y) = g(x), \quad x \in \Omega = g.$$

En toute rigueur il faut faire un peu attention et préciser pour quels p , $S_\Gamma p$ est effectivement donné par l'intégrale figurant dans le terme de gauche de (5.21):

$$(5.22) \quad \int_\Gamma G(x - y)p(y)d\sigma(y)$$

On dit que S_Γ est l'opérateur intégral de noyau:

$$G(x - y) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

La première question que l'on doit se poser est du reste l'existence de cette intégrale. L'analyse de la singularité à l'origine de $G(x)$ montre que, pour $x \in \Gamma$:

$$y \rightarrow G(x-y) \in L^1(\Gamma) \quad \text{mais} \quad y \rightarrow G(x-y) \notin L^2(\Gamma)$$

Il s'ensuit que l'intégrale (5.22) n'a a priori pas de sens pour $p \in L^2(\Gamma)$ mais qu'elle est bien définie pour :

$$p \in L^\infty(\Gamma)$$

Le théorème qui suit exprime le fait que $S_\Gamma p$ est effectivement défini par (5.22) pour un tel p .

Théorème 18 *Si $p \in L^\infty(\Gamma)$, alors $S p|_\Omega$ (respectivement $S p|_O$) appartient à $C^0(\overline{\Omega})$ (respectivement $C^0(\overline{O})$) et :*

$$\forall x \in \Gamma, \quad S_\Gamma p(x) = \int_\Gamma G(x-y)p(y)d\sigma(y)$$

Démonstration: Nous devons montrer que si $p \in L^\infty(\Gamma)$ et si x_m désigne une suite de points de Ω convergeant vers $x \in \Gamma$, alors:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_\Gamma G(x_m - y)p(y)d\sigma(y) = \int_\Gamma G(x - y)p(y)d\sigma(y)$$

La preuve est purement technique. Quitte à effectuer un changement d'origine, nous pouvons supposer que $x = 0$ et donc que :

$$x_m \rightarrow 0$$

Nous supposons également (quitte à effectuer une rotation des axes) que, localement au voisinage de 0, Γ coïncide avec la variété (surface) d'équation:

$$y_3 = f(\bar{y}), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2, \quad f \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2), f(0) = 0.$$

L'ouvert Ω coïncidant localement avec le demi-espace:

$$\{y = (\bar{y}, y_3) / y_3 > f(\bar{y})\}$$

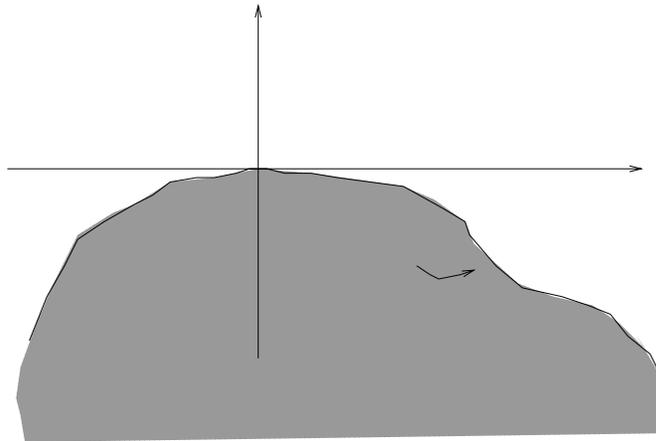


FIG. 5.1 – Représentation paramétrique locale de Γ

Nous introduisons, $\varepsilon > 0$ étant choisi suffisamment petit, une fonction de troncature $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ satisfaisant:

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, & \varphi(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq \varepsilon \\ \varphi(x) = 1 \text{ pour } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Mous réécrivons:

$$\int_{\Gamma} G(x_m - y)p(y)d\sigma(y) = \int_{\Gamma} G(x_m - y) (1 - \varphi(y)) p(y)d\sigma(y) + \int_{\Gamma} G(x_m - y) \varphi(y) p(y)d\sigma(y)$$

Il est clair que la suite des fonctions $y \rightarrow G(x_m - y)(1 - \varphi(y))p(y)$ converge uniformément vers $G(y)(1 - \varphi(y))p(y)$ et donc que:

$$(5.23) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} G(x_m - y) (1 - \varphi(y)) p(y)d\sigma(y) = \int_{\Gamma} G(y) (1 - \varphi(y)) p(y)d\sigma(y)$$

Pour le deuxième morceau de l'intégrale, nous utilisons la carte locale $f(x)$, ce qui est licite si $\varepsilon > 0$ est choisi suffisamment petit. Si $x_m = (\bar{x}_m, x_{3,m})$, nous avons:

$$\int_{\Gamma} G(x_m - y)\varphi(y)p(y)d\sigma(y) = \int_{\mathbf{R}^2} G(\bar{x}_m - \bar{y}, x_{3,m} - f(\bar{y}))\{1 - \varphi(\bar{y}, f(\bar{y}))\}p(\bar{y}, f(\bar{y}))\{1 + \nabla f(\bar{y})^2\}^{\frac{1}{2}}\}d\bar{y}$$

Nous effectuons alors le changement de variable $\bar{z} = \bar{y} - \bar{x}_m$, et obtenons:

$$(5.24) \quad \int_{\Gamma} G(x_m - y)\varphi(y)p(y)d\sigma(y) = \int_{\mathbf{R}^2} \{G(\bar{z}, x_{3,m} - f(\bar{z} + \bar{x}_m)) \varphi(\bar{z} + \bar{x}_m, f(\bar{z} + \bar{x}_m)) \times \\ \times p(\bar{z} + \bar{x}_m, f(\bar{z} + \bar{x}_m)) (1 + \nabla f(\bar{z} + \bar{x}_m)^2)^{\frac{1}{2}}\} d\bar{z}$$

Nous remarquons alors que:

$$|G(\bar{z}, x_{3,m} - f(\bar{z} + \bar{x}_m))| = (|\bar{z}|^2 + |x_{3,m} - f(\bar{z} + \bar{x}_m)|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq |\bar{z}|^{-1}$$

Par ailleurs, pour m assez grand, le support de la fonction $z \rightarrow \varphi(\bar{z} + \bar{x}_m, f(\bar{z} + \bar{x}_m))$ est surement inclus dans la boule de \mathbf{R}^2 de centre 0 et de rayon 2ε . Par conséquent, si nous désignons par $\chi_\varepsilon(\bar{z})$ la fonction caractéristique de cette boule, nous pouvons écrire:

$$\varphi(\bar{z} + \bar{x}_m, f(\bar{z} + \bar{x}_m)) p(\bar{z} + \bar{x}_m, f(\bar{z} + \bar{x}_m))(1 + \nabla f(\bar{z} + \bar{x}_m)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \chi_\varepsilon(\bar{z}) |p|_{\infty, \Gamma} (1 + |\nabla f|_{\infty, \Gamma})$$

Par suite, l'intégrande de l'intégrale figurant au second membre de (5.24) est majoré pour tout m par la fonction fixe de $L^1(\mathbf{R}^2)$:

$$\bar{z} \rightarrow \frac{\chi_\varepsilon(\bar{z})}{|\bar{z}|} |p|_{\infty, \Gamma} (1 + |\nabla f|_{\infty, \Gamma})$$

Comme cet intégrande converge ponctuellement presque partout vers la fonction:

$$\bar{z} \rightarrow G(\bar{z}, f(\bar{z})) p(\bar{z}, f(\bar{z})) (1 + |\nabla f(\bar{z})|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mathbf{R}^2)$$

Nous pouvons invoquer le théorème de Lebesgue pour passer à la limite dans (5.24). Nous obtenons ainsi:

$$(5.25) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} G(x_m - y) \varphi(y) p(y)d\sigma(y) = \int_{\Gamma} G(y) \varphi(y) p(y)d\sigma(y)$$

Nous obtenons le résultat final en recollant (5.23) et (5.25). \square

Remarque 18 *Le lecteur avisé constatera qu'il n'est pas évident d'appliquer directement le théorème de Lebesgue.*

Notons que (5.21) peut se réécrire de façon variationnelle, ce qui est particulièrement utile pour une approximation par éléments finis, en introduisant la forme bilinéaire continue sur $V \times V$ associée à S_Γ :

$$(5.26) \quad \forall (p, q) \in V \times V, \quad b_\Gamma(p, q) = \langle S_\Gamma p, q \rangle_\Gamma$$

sous la forme:

$$(5.27) \quad \text{Trouver } p \in V = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que } b_\Gamma(p, q) = \langle q, g \rangle_\Gamma .$$

5.2.2 Equivalence entre le problème initial et l'équation intégrale

Etablissons maintenant le résultat d'équivalence fondamental entre le problème et le problème initial:

Théorème 19 *On a le résultat suivant:*

- (i) Si $p \in V$ est solution de (5.27), alors $u = Sp_{|\Omega}$ est la solution de (5.1).
- (ii) Réciproquement, si ω^2/c^2 n'est pas une des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ dans \mathcal{O} avec condition de Dirichlet homogène sur Γ , alors si u est la solution de (5.1), il existe $p \in V$ tel que p soit solution de (5.27) et u donné par $u = Sp_{|\Omega}$.

Démonstration: Le point (i) est évident par construction même de l'opérateur S_Γ . Pour la réciproque, notons que comme ω^2/c^2 n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur associé à $-\Delta$, nous pouvons introduire l'unique solution u_i du problème:

$$(5.28) \quad \begin{cases} -\Delta u_i - \frac{\omega^2}{c^2} u_i = 0, & \text{dans } \mathcal{O} \\ u_i|_\Gamma = g. \end{cases}$$

Nous posons alors:

$$(5.29) \quad p = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_\Gamma - \left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\right)|_\Gamma \in V$$

et introduisons la fonction v définie par:

$$(5.30) \quad \begin{aligned} v &= u & \text{dans } \Omega, \\ v &= u_i & \text{dans } \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Il est alors clair que par construction de S et S_Γ , $v = Sp$ et $S_\Gamma p = g$, ce qui achève la preuve. \square

Remarque 19 *Il y a donc équivalence entre les problèmes sauf pour une infinité dénombrable de fréquences. Ces fréquences sont traditionnellement appelées fréquences irrégulières. Notons que pour une telle fréquence, l'opérateur S_Γ n'est évidemment pas un isomorphisme. En effet soit w_i une fonction propre de Dirichlet pour $-\Delta$ dans \mathcal{O} , alors d'après le théorème de prolongement unique, $p_i = \left(\frac{\partial w_i}{\partial n}\right)|_\Gamma \in V$ est non nul et $S_\Gamma p_i = 0$. (Il suffit se remarquer que Sp_i n'est autre que le prolongement de w_i par 0.)*

Le principal avantage du nouveau problème, notamment d'un point de vue numérique, est qu'il est posé sur un domaine borné, en l'occurrence la surface Γ . D'un point de vue mathématique, il convient d'étudier les propriétés de l'opérateur S_Γ .

5.2.3 Propriétés de S_Γ . Théorème d'existence et d'unicité

Nous avons tout d'abord le:

Lemme 14 *Si ω n'est pas une fréquence irrégulière, l'opérateur S_Γ est injectif.*

Démonstration: En effet, soit $p \in \text{Ker}(S_\Gamma)$, d'après le théorème 19, $u = v_{|\Omega}$ où $v = Sp$ et u est solution de 5.1) avec $g = 0$. Il s'ensuit que $u = 0$ et donc que $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_\Gamma = 0$. $S_\Gamma p = 0$ signifie également, en posant $u_i = v_{|\mathcal{O}}$, que:

$$(u_i)_\Gamma = 0$$

Comme ω n'est pas une fréquence irrégulière, ω^2/c^2 n'est pas valeur propre de $-\Delta$ dans \mathcal{O} avec condition de Dirichlet. u_i est donc nul et par suite $\left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\right)|_\Gamma = 0$. Finalement:

$$p = \left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\right)|_\Gamma - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_\Gamma = 0$$

ce que nous voulions démontrer. \square

Nous allons maintenant voir que S_Γ est un opérateur de type Fredholm, ou plus précisément, une perturbation compacte d'un opérateur coercif dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Tout d'abord nous notons que, par simple application du théorème de Lax-Milgram, le problème:

$$(5.31) \quad \begin{cases} -\Delta w + w = 0, & \text{dans } \Omega \cup \mathcal{O}, \\ [w]_\Gamma = 0, \\ \left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_\Gamma = p. \end{cases}$$

admet une unique solution w dans $H^1(\mathbf{R}^3) \cap H^1(\Delta, \Omega \cup \mathcal{O})$. De plus l'application $S^0 : g \rightarrow w$ est linéaire continue de V dans $H^1(\mathbf{R}^3) \cap H^1(\Delta, \Omega \cup \mathcal{O})$. Nous pouvons alors définir:

$$(5.32) \quad S_\Gamma^0 \in \mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

par:

$$(5.33) \quad \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad S_\Gamma^0 p = (S^0 p)|_\Gamma$$

et la forme bilinéaire associée:

$$(5.34) \quad \forall (p, q) \in V \times V, \quad b_\Gamma^0(p, q) = \langle S_\Gamma^0 p, q \rangle_\Gamma$$

Lemme 15 *L'opérateur S_Γ^0 est coercif dans V :*

$$(5.35) \quad \forall p \in V, \quad b_\Gamma^0(p, p) \geq \beta \|p\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2, \quad \beta > 0.$$

Démonstration : Soit w la solution de (5.31). Par la formule de Green, utilisée dans Ω et dans \mathcal{O} , on établit l'identité:

$$(5.36) \quad b_\Gamma^0(p, p) = \|w\|_{1, \mathbf{R}^3}^2$$

mais, d'après le théorème de trace dans $H^1(\Delta, \Omega)$, nous avons, si w_e désigne la restriction de w à Ω :

$$(5.37) \quad \left|\frac{\partial w_e}{\partial n}\right|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq C_e (\|w_e\|_{1, \Omega}^2 + \|\Delta w_e\|_{0, \Omega}^2) \leq C_e \|w_e\|_{1, \Omega}^2$$

alors que, w_i désignant la restriction de w à \mathcal{O}

$$(5.38) \quad \left|\frac{\partial w_i}{\partial n}\right|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq C_i (\|w_i\|_{1, \Omega}^2 + \|\Delta w_i\|_{0, \Omega}^2) \leq C_i \|w_i\|_{1, \Omega}^2$$

Il s'ensuit bien sur que:

$$(5.39) \quad |S_\Gamma^0 p|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 = \left|\left(\frac{\partial w_e}{\partial n}\right)_\Gamma - \left(\frac{\partial w_i}{\partial n}\right)_\Gamma\right|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq C \|w\|_{1, \mathbf{R}^3}^2$$

On conclut alors aisément. \square

Remarque 20 *Le résultat précédent permet de donner une caractérisation intrinsèque de la norme $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En effet, il est facile de voir que l'on a la formule (on utilise la fonction de Green associée à l'opérateur $u \rightarrow -\Delta u + u$ et on invoque l'équivalent du théorème 18):*

$$(5.40) \quad \forall p \in L^\infty(\Gamma), \quad b_\Gamma^0(p, p) = \int_\Gamma \int_\Gamma e^{-|x-y|} \frac{p(x)p(y)}{4\pi|x-y|} d\sigma(x)d\sigma(y)$$

Or $p \rightarrow b_\Gamma^0(p, p)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente à la norme $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. De la même façon en raisonnant avec l'équation $-\Delta u = 0$ au lieu de $-\Delta u + u = 0$ (attention, dans ce cas, on peut toujours

appliquer Lax-Milgram mais il faut sortir du cadre $H^1(\Omega)$ on démontrerait que, modulo le passage à une norme équivalente, nous pouvons écrire:

$$\forall p \in L^\infty(\Gamma), \quad |p|_{-\frac{1}{2},\Gamma} = \left(\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{p(x)p(y)}{|x-y|} d\sigma(x)d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Il est clair qu'une démonstration directe d'un tel résultat est loin d'être évidente. Il n'est même pas facile de voir que l'intégrale:

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{p(x)p(y)}{|x-y|} d\sigma(x)d\sigma(y)$$

est positive.

Une conséquence (par Lax-Milgram) du lemme 15 est bien évidemment le:

Corollaire 4 *L'opérateur S_Γ^0 est un isomorphisme de V dans V' .*

Nous introduisons l'opérateur "différence":

$$(5.41) \quad C_\Gamma = S_\Gamma - S_\Gamma^0 \in \mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

Lemme 16 *L'opérateur C_Γ est continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Par suite, l'opérateur $C_\Gamma(S_\Gamma^0)^{-1}$ est compact dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Démonstration: Soit $p \in V$, nous désignons par v et w les solutions respectives des problèmes (5.31) et (5.31) et nous posons:

$$v = w + d$$

Il est facile de voir que $d \in H_{loc}^2(\mathbf{R}^3)$ et est solution de:

$$(5.42) \quad -\Delta d + d = (1 + \omega^2)v, \quad \text{dans } \mathbf{R}^3$$

Par régularité elliptique, nous avons:

$$v \in H_{loc}^1(\mathbf{R}^3) \implies d \in H_{loc}^3(\mathbf{R}^3)$$

et, en utilisant une fonction de troncature convenable (nous laissons les détails au lecteur), on démontre que si $R' > R > 0$, il existe une constante strictement positive $C_{R,R'}$ telle que:

$$\|d\|_{3,\Omega_R} \leq C_{R,R'} \|v\|_{1,\Omega'_R}$$

Mais nous savons que (cf théorème 17):

$$\|v\|_{1,\Omega'_R} \leq C_{R'} |p|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Par suite, par le théorème de traces:

$$\frac{\partial d}{\partial n}|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma),$$

et on a l'estimation, avec une constante C convenable:

$$\left| \frac{\partial d}{\partial n} \right|_{\frac{3}{2},\Gamma} \leq C |p|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Ceci permet de conclure à la continuité de C_Γ de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ puisque:

$$\frac{\partial d}{\partial n}|_\Gamma = C_\Gamma p$$

Pour terminer on remarque que :

$$(S_\Gamma^0)^{-1}C_\Gamma \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

et on invoque la compacité de l'injection de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. \square

Remarque 21 *Le caractère "compact" de C_Γ est dû à son effet régularisant. Ceci peut se comprendre intuitivement de la manière suivante. Le noyau de l'opérateur S_Γ^0 :*

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

est singulier en $x = y$ de même que celui de l'opérateur S_Γ^0 :

$$\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

Or la singularité, en l'occurrence $4\pi|x-y|^{-1}$ est la même, de sorte que le noyau de C_Γ :

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|} - \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

est plus régulier.

En conséquence, il est clair que la résolution du problème (5.27) relève de l'alternative de Fredholm. En effet, si nous introduisons la nouvelle inconnue :

$$q = S_\Gamma^0 p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

le problème (5.27) (ou (5.20) se réécrit :

$$(5.43) \quad \text{Trouver } q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) / q - (S_\Gamma^0)^{-1}C_\Gamma q = g$$

où $(S_\Gamma^0)^{-1}C_\Gamma$ est compact. Une conséquence directe de l'alternative de Fredholm, du théorème 19 et du lemme 14 est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 20 *Si ω n'est pas une fréquence irrégulière, le problème (5.27) admet une unique solution p et la solution u de 5.1 est donnée par :*

$$u = Sp$$

5.3 Approximation par éléments finis

5.3.1 Construction du problème discret

Rappelons que le problème qui nous concerne s'écrit variationnellement :

$$(5.44) \quad \text{Trouver } p \in V = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que } b_\Gamma(p, q) = \langle q, g \rangle_\Gamma .$$

Pour en réaliser une approximation par éléments finis, on introduit de façon standard une famille $\{V_h, h > 0\}$ de sous-espaces de V de dimension finie :

$$(5.45) \quad \forall h > 0, V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < +\infty$$

Rappelons que h est un paramètre destiné à tendre vers 0 (en pratique, ce sera le pas d'un maillage de la surface Γ) et que l'on fait l'hypothèse d'approximation usuelle :

$$(5.46) \quad \forall p \in V, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h \in V_h} |p - q_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} = 0$$

Le problème approché s'écrit:

$$(5.47) \quad \text{Trouver } p_h \in V_h \text{ tel que } b_\Gamma(p_h, q_h) = \langle q, g_h \rangle_\Gamma.$$

Bien évidemment, ce problème se ramène en pratique à la résolution d'un système linéaire dans \mathbf{R}^{N_h} . En effet, si on se donne une base $\{w_j, 1 \leq j \leq N_h\}$ de V_h et si on décompose l'inconnue p_h sur cette base:

$$(5.48) \quad p_h = \sum_{j=1}^{N_h} p_j w_j,$$

l'inconnue du problème devient le vecteur:

$$(5.49) \quad P_h = (p_j)_{1 \leq j \leq N_h} \in \mathbf{R}^{N_h}$$

Ce vecteur est solution du système linéaire:

$$(5.50) \quad B_h^\Gamma P_h = F_h$$

où la matrice B_h^Γ est donnée par:

$$(5.51) \quad B_h^\Gamma = ((B_{ij}^\Gamma))_{1 \leq i, j \leq N_h} \quad \text{où } B_{ij}^\Gamma = b_\Gamma(w_i, w_j)$$

et le second membre F_h défini par:

$$(5.52) \quad F_h = (F_j)_{1 \leq j \leq N_h} \quad \text{où } F_j = \langle w_j, g \rangle_\Gamma$$

Plusieurs questions se posent. Sur le plan pratique:

- Comment choisir l'espace V_h ?
- Comment choisir la base $\{w_j, 1 \leq j \leq N_h\}$?
- Comment calculer la matrice B_h^Γ ?
- Comment résoudre le système linéaire (5.50)?

Nous reviendrons sur ces questions dans la section 5.3.3. Sur le plan théorique les questions qui se posent sont:

- Le problème approché (5.47) est-il bien posé?
- La solution p_h de (5.47) converge-t-elle vers p ?

Nous reviendrons sur ces questions dans la section 5.3.2.

5.3.2 Analyse de la convergence

Le problème (5.44) n'étant pas coercif, on ne peut pas lui appliquer la théorie variationnelle habituelle. En fait il faut généraliser la théorie d'approximation habituelle aux problèmes qui apparaissent comme des perturbations compactes de problèmes coercifs. Nous allons nous appuyer de façon essentielle sur la décomposition:

$$(5.53) \quad b_\Gamma(p, q) = b_\Gamma^0(p, q) + c_\Gamma(p, q)$$

où $b_\Gamma^0(p, q)$ a la propriété d'ellipticité:

$$(5.54) \quad \forall p \in V, \quad b_\Gamma^0(p, p) \geq \beta |p|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2, \quad \beta > 0.$$

et où $c_\Gamma(p, q)$ a la propriété de compacité:

$$(5.55) \quad p_n \text{ converge faiblement vers } p \text{ dans } V \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} c_\Gamma(p_n, p_n) = c_\Gamma(p, p)$$

Notre premier résultat énonce que le problème approché (5.47) est effectivement bien posé, à condition toutefois que h soit choisi suffisamment petit:

Théorème 21 *Il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h < h_0$, le problème (5.47) admet une solution u_h et une seule.*

Démonstration: Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que, pour $h < h_0$, la seule solution correspondant à $g = 0$ est p_h . Si tel n'était pas le cas on pourrait trouver une suite h_k tendant vers 0 telle que :

$$(5.56) \quad \begin{cases} \forall k \geq 0, \exists p_{h_k} \in V_{h_k} \text{ tel que } |p_{h_k}|_{-\frac{1}{2},\Gamma} = 1 \text{ et} \\ b_\Gamma(p_{h_k}, q_{h_k}) \equiv b_\Gamma^0(p_{h_k}, q_{h_k}) + c_\Gamma(p_{h_k}, q_{h_k}) = 0, \forall q_{h_k} \in V_{h_k}. \end{cases}$$

La suite p_{h_k} étant bornée dans V , on peut toujours supposer, quitte à en extraire une sous-suite, que l'on a:

$$(5.57) \quad p_{h_k} \rightarrow p \in V, \text{ faiblement dans } V.$$

Désignons par Π_h l'opérateur de projection orthogonale de V sur V_h . D'après (5.46), nous savons que:

$$\forall q \in V, \quad \lim_{h \rightarrow 0} |q - \Pi_h q|_{-\frac{1}{2},\Gamma} = 0.$$

Choisissons $q_{h_k} = \Pi_{h_k} q$ dans (5.56):

$$b_\Gamma^0(p_{h_k}, \Pi_{h_k} q) + c_\Gamma(p_{h_k}, \Pi_{h_k} q) = 0$$

Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ nous obtenons:

$$b_\Gamma^0(p, q) + c_\Gamma(p, q) = 0 \quad \forall q \in V.$$

d'où nous déduisons, grâce au résultat d'unicité relatif au problème (5.44), que:

$$(5.58) \quad p = 0.$$

Par ailleurs, grâce à (5.54) et (5.56) (prendre $q_{h_k} = p_{h_k}$), nous avons:

$$(5.59) \quad \beta |p_{h_k}|_{-\frac{1}{2},\Gamma}^2 \leq b_\Gamma^0(p_{h_k}, p_{h_k}) = -c_\Gamma(p_{h_k}, p_{h_k})$$

Mais, grâce à (5.55), nous savons que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c_\Gamma(p_{h_k}, p_{h_k}) = 0$$

(5.59) montre que p_{h_k} converge fortement vers 0 dans V , ce qui contredit $|p_{h_k}|_{-\frac{1}{2},\Gamma} = 1$ et achève la démonstration. \square

Nous pouvons maintenant passer au résultat de convergence:

Théorème 22 *La solution p_h de (5.47) converge fortement dans V vers p solution de (5.44); Plus précisément, il existe $C > 0$ telle que pour tout $h < h_0$, le problème $h < h_0$:*

$$(5.60) \quad |p - p_h|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq C \inf_{q_h \in V_h} |p - q_h|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Démonstration: Elle comprend plusieurs étapes:

(i) D'après la coercivité de b_Γ , il vient:

$$(5.61) \quad \begin{aligned} \beta |p - p_h|_{-\frac{1}{2},\Gamma}^2 &\leq b_\Gamma^0(p - p_h, p - p_h) \\ &= b_\Gamma(p - p_h, p - p_h) - c_\Gamma(p - p_h, p - p_h) \end{aligned}$$

Or, par différence entre (5.44) et (5.47):

$$b_\Gamma(p - p_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in V_h.$$

Par suite, en utilisant cette propriété avec $q_h = p_h - \Pi_h p$, nous obtenons:

$$(5.62) \quad \beta |p - p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq b_\Gamma(p - p_h, p - \Pi_h p) - c_\Gamma(p - p_h, p - p_h)$$

(ii) Montrons maintenant que:

$$(5.63) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c_\Gamma(p - p_h, p - p_h)}{|p - p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2} = 0.$$

En effet, posons:

$$d_h = \frac{p - p_h}{|p - p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}}$$

La suite d_h étant bornée dans V , on peut en extraire de une sous-suite, toujours notée d_h pour ne pas alourdir les notations, telle que:

$$d_h \rightarrow d, \text{ faiblement dans } V$$

Comme $b_\Gamma(d_h, q_h) = 0$ pour tout q_h dans V_h , en particulier:

$$b_\Gamma(d_h, \Pi_h q) = 0, \quad \forall q \in V.$$

Par passage à la limite quand $h \rightarrow 0$, il vient:

$$b_\Gamma(d, q) = 0, \quad \forall q \in V.$$

ce qui entraîne $d = 0$. Par conséquent, en utilisant la propriété de compacité de $c_\Gamma(p, q)$, nous en déduisons (5.63).

(iii) De (5.63), nous déduisons que, au moins pour h assez petit:

$$(5.64) \quad c_\Gamma(p - p_h, p - p_h) \leq \frac{\beta}{2} |p - p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2$$

En reportant (5.64) dans (5.63), nous obtenons:

$$(5.65) \quad \frac{\beta}{2} |p - p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq b_\Gamma(p - \Pi_h p, p - p_h)$$

Ainsi, en utilisant la continuité de b_Γ , nous déduisons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que:

$$|p - p_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C |p - \Pi_h p|_{-\frac{1}{2}, \Gamma}$$

ce que nous voulions démontrer.

5.3.3 Choix de l'espace V_h et mise en oeuvre numérique

Le choix le plus simple de construction d'un espace V_h repose avant tout sur un maillage de la surface Γ , noté \mathcal{T}_h :

$$(5.66) \quad \mathcal{T}_h = \{K / K \in \mathcal{T}_h, K \text{ fermé } \subset \Gamma\}$$

tel que ($\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K pour la topologie de Γ):

$$(5.67) \quad K_1 \neq K_2 \implies \overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$$

$$\Gamma = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

En pratique, si la frontière Γ est polyédrique on fera un maillage en triangles. Si elle n'est pas polyédrique, on en réalisera une approximation polyédrique. Dans ce dernier cas de figure, il faudrait compléter notre analyse d'erreur du paragraphe précédent par une analyse de l'erreur introduite par l'approximation de la géométrie. Ce point dépasse le cadre de ce cours. Dans la suite, nous supposons donc que les éléments K sont des triangles.

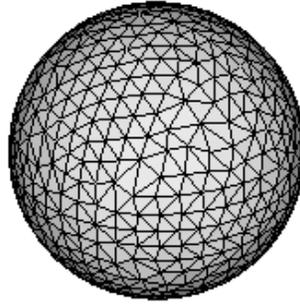


FIG. 5.2 – Maillage surfacique d'une sphère

On désigne par $\text{diam}K$ le diamètre de K et h désigne le pas du maillage:

$$(5.68) \quad h = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}K$$

On définit ainsi une famille de maillages. Pour construire V_h , bien que $V = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ contienne des distributions qui ne sont pas dans $L^2(\Gamma)$, on va considérer un sous-espace de $L^2(\Gamma)$, ceci se justifiant a priori par le fait que $L^2(\Gamma)$ est dense dans V . Le plus simple consiste à considérer un espace de fonctions constantes par morceaux:

$$(5.69) \quad V_h = \{q_h \in L^2(\Gamma) / \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in P^0(K)\}$$

On peut démontrer, mais la présentation de la preuve dépasse le cadre du cours, que la propriété (5.46) est satisfaite. De façon plus précise, on peut démontrer les estimations suivantes:

$$(5.70) \quad \begin{cases} \forall p \in L^2(\Gamma), & \inf_{q_h \in V_h} |p - q_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h^{\frac{1}{2}} |p|_{0, \Gamma} \\ \forall p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), & \inf_{q_h \in V_h} |p - q_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h |p|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \end{cases}$$

ce qui entraîne (5.46) puisque $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est dense dans V .

Remarque 22 On peut en fait démontrer que si p est encore plus régulière que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, par exemple dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, on peut obtenir une estimation légèrement meilleure:

$$\forall p \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \quad \inf_{q_h \in V_h} |p - q_h|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h^{\frac{3}{2}} |p|_{\frac{3}{2}, \Gamma}$$

Par contre, quelle que soit la régularité de p , on ne peut faire mieux que $O(h^{\frac{3}{2}})$.

Pour ce qui est des calculs effectifs, on commencera par remarquer que:

$$V_h \subset L^\infty(\Gamma)$$

de telle sorte que, en invoquant le théorème 18, nous avons:

$$\begin{aligned} \forall (p_h, q_h) \in V_h \times V_h, \quad b_\Gamma(p_h, q_h) &= \int_\Gamma \int_\Gamma G(x-y) p_h(x) q_h(y) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ (5.71) \qquad \qquad \qquad &= \int_\Gamma \int_\Gamma e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|} \frac{p_h(x) q_h(y)}{4\pi|x-y|} d\sigma(x) d\sigma(y) \end{aligned}$$

Si nous indexons les éléments K de \mathcal{T}_h par un indice j variant de 1 à N_h (le nombre d'éléments de \mathcal{T}_h), la base la plus naturelle de V_h est $\{w_j ; 1 \leq j \leq N_h\}$ où:

$$(5.72) \qquad \qquad w_j \text{ est la fonction caractéristique de } K_j.$$

Les éléments de la matrice B_h^Γ sont alors donnés par:

$$(5.73) \qquad \qquad B_{ij}^\Gamma = \int_{K_i} \int_{K_j} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|} d\sigma(x) d\sigma(y)$$

On remarquera que, contrairement aux matrices d'éléments finis correspondant à l'approximation d'équations aux dérivées partielles:

$$(5.74) \qquad \qquad \text{La matrice } B_h^\Gamma \text{ est pleine.}$$

D'un point de vue pratique, les principales difficultés consistent à :

- Calculer les B_{ij}^Γ .
- Inverser B_h^Γ .

L'inversion de la matrice B_h ressort de l'utilisation d'algorithmes d'algèbre linéaire standard. La matrice étant pleine, on privilégiera toutefois la méthode de Gauss (décomposition LU). Le calcul des coefficients B_{ij}^Γ pose des difficultés plus spécifiques aux équations intégrales. Il est relativement clair que ce calcul ne peut être fait exactement et qu'il faut faire appel à des méthodes d'intégration numérique. Bien sûr, ce calcul approché devra néanmoins être suffisamment précis. A priori, le calcul de l'intégrale (5.73) présente deux difficultés:

- L'intégrande est une fonction oscillante.
- L'intégrande est une fonction singulière.

La première difficulté n'en est pas réellement une: en effet, on se rend compte que, pour des raisons de précision, si $\lambda = 2\pi c/\omega$ désigne la longueur d'onde:

$$(5.75) \qquad \qquad \text{Le rapport } \frac{h}{\lambda} \text{ doit être suffisamment petit.}$$

Plus précisément, ce rapport doit être très inférieur à 1 (au moins inférieur à 0.2). De ce fait, l'intégrande n'est plus oscillante à l'échelle des triangles K_i et K_j .

En ce qui concerne la singularité on constate que le problème ne se pose que si les triangles K_i et K_j sont voisins au sens où:

$$K_i \cap K_j \neq \emptyset$$

De ce fait, le calcul de B_{ij}^Γ se fera de deux manières différentes:

- Si K_i et K_j sont disjoints, on appliquera directement une formule d'intégration numérique au calcul de l'intégrale (5.73)

- Si K_i et K_j sont voisins, on écrira une décomposition de B_{ij}^Γ en parties “régulière” et “singulière”, par exemple :

$$(5.76) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{ij}^\Gamma = B_{ij,reg}^\Gamma + B_{ij,sing}^\Gamma \\ B_{ij,sing}^\Gamma = \int_{K_i} \int_{K_j} \frac{d\sigma(x)d\sigma(y)}{4\pi|x-y|} \\ B_{ij,reg}^\Gamma = \int_{K_i} \int_{K_j} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}|x-y|} - 1}{4\pi|x-y|} d\sigma(x)d\sigma(y) \end{array} \right.$$

auquel cas le calcul de $B_{ij,reg}^\Gamma$ est approché numériquement, alors que le calcul de $B_{ij,sing}^\Gamma$ est effectué semi-analytiquement, semi-numériquement.

On utilisera dans chaque cas le théorème de Fubini pour calculer les intégrales (5.76):

$$\int_{K_i} \int_{K_j} f(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y) = \int_{K_i} \left(\int_{K_j} f(x,y)d\sigma(y) \right) d\sigma(x)$$

Pour le calcul de B_{ij}^Γ lorsque K_i et K_j sont disjoints, ou de $B_{ij,reg}^\Gamma$ lorsqu'ils sont voisins, il suffit donc de savoir faire le calcul numérique approché de l'intégrale d'une fonction sur un triangle (nous nous plaçons maintenant dans les coordonnées du plan du triangle):

$$\int_K f(x)dx$$

On utilise alors une méthode de quadrature qui consiste à approcher l'intégrale par une combinaison linéaire de valeurs de la fonction f en des points bien choisis dans le triangle:

$$(5.77) \quad \int_K f(x)dx = mes(K) \sum_l^L \omega_l f(M_l)$$

Dans (5.77), $mes(K)$ désigne la surface du triangle K , les points $M_l \in K$ (en nombre fini) sont les noeuds de quadrature et les coefficients ω_l sont les poids de quadrature. En pratique, ces poids et ces noeuds sont choisis de façon à ce que la formule d'approximation (5.77) devienne exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k , entier donné. Ainsi, pour une fonction f régulière quelconque, on intègre exactement son développement de Taylor (pris au voisinage d'un point de référence dans le triangle) et on fait donc une erreur en $O(h^{k+1})$. On dit alors que l'on a une formule de quadrature d'ordre k . Evidemment, ce procédé n'est licite que si la fonction à intégrer est suffisamment régulière, au moins continue.

Nous donnons ci-après quelques exemples de formules de quadrature dans le triangle (le lecteur pourra vérifier, à titre d'exercice, qu'elles ont bien l'ordre annoncé). Dans ce qui suit, $M(\alpha, \beta, \gamma)$, où (α, β, γ) désignent trois réels positifs de somme 1, représente le point de K dont les coordonnées barycentriques sont (α, β, γ) (i.e. M est le barycentre des sommets de k affectés des poids (α, β, γ)).

- Formule d'ordre 1.

$$L = 1 \quad M_1(1/3, 1/3, 1/3) \quad \omega_1 = 1$$

- Formule d'ordre 2.

$$L = 3 \quad M_1(0, 1/2, 1/2) \quad \omega_1 = 1/3$$

$$M_2(1/2, 0, 1/2) \quad \omega_2 = 1/3$$

$$M_3(1/2, 1/2, 0) \quad \omega_3 = 1/3$$

– Formule d’ordre 3.

$$L = 4 \quad M_1(1/3, 1/3, 1/3) \quad \omega_1 = -27/48$$

$$M_2(3/5, 1/5, 1/5) \quad \omega_2 = 25/48$$

$$M_3(1/5, 3/5, 1/5) \quad \omega_3 = 25/48$$

$$M_4(1/5, 1/5, 3/5) \quad \omega_4 = 25/48$$

Pour calculer B_{ij}^Γ dans le cas des triangles disjoints, il n’y a aucun problème car on veut intégrer des fonctions C^∞ . Pour des triangles voisins, la décomposition (5.76) apparaît indispensable. Le calcul de $B_{ij, \text{sing}}^\Gamma$ se fait alors de la manière suivante:

– L’intégrale intérieure

$$(5.78) \quad \int_{K_j} \frac{d\sigma(x)}{4\pi|x-y|}$$

est calculée analytiquement.

– La fonction :

$$F_j(y) = \int_{K_j} \frac{d\sigma(x)}{4\pi|x-y|}$$

étant alors suffisamment régulière dans le triangle K , l’intégrale extérieure:

$$(5.79) \quad \int_{K_i} F_j(y) d\sigma(y)$$

est évaluée numériquement.

Remarque 23 *Nous n’expliquerons pas ici comment calculer analytiquement l’intégrale (5.78). On notera que l’on aura seulement à calculer cette intégrale pour les points x qui seront choisis comme noeuds de quadrature dans la deuxième étape. Ces points peuvent appartenir ou ne pas appartenir au triangle K_i . C’est en fait assez complexe. Une méthode astucieuse consiste à découper l’intégrale en somme (ou différence) d’intégrales sur des sous triangles dont la projection du point x sur le plan du triangle est l’un des sommets. On utilise alors les coordonnées polaires avec x comme pôle pour calculer les intégrales. Le lecteur est cordialement invité à effectuer cet exercice délicat.*

Annexe A

Alternative de Fredholm

Rappelons tout d'abord le résultat qui nous intéresse :

Théorème 23 *Soit X un espace de Banach et T un opérateur compact de X dans lui-même alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $I - T$ est un isomorphisme,
- (ii) $I - T$ est surjectif,
- (iii) $I - T$ est injectif.

Nous allons donner une preuve de ce théorème dans le cas où X est un espace de Hilbert, ce qui est suffisant pour le propos de ce cours et permet de raccourcir quelque peu les démonstrations. Nous commençons par un lemme :

Lemme 17 *Si T est compact dans X alors $\text{Im}(I - T)$ est fermée et donc $\text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$, où T^* désigne l'adjoint de T .*

Démonstration : Soit $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - Tu_n)$. Si nous savions que la suite u_n était bornée, ce serait terminé. Or nous remarquons que l'on peut remplacer u_n par $u_n + w$ où w désigne n'importe quel élément de $\text{Ker}(I - T)$. L'idée est donc de démontrer que la quantité $\inf_{w \in \text{Ker}(I - T)} \|u_n - w\|$ reste bornée. Notons tout d'abord que si nous désignons par P la projection orthogonale sur $\text{Ker}(I - T)$, le vecteur w qui réalise l'infimum de $\|u_n - w\|$ pour w décrivant $\text{Ker}(I - T)$ n'est autre que Pu_n . Il s'agit donc de montrer que la suite $u_n - Pu_n$ reste bornée. Si telle n'était pas le cas on pourrait extraire de u_n une sous suite u_{n_k} telle que :

$$\|u_{n_k}\| \rightarrow +\infty.$$

Posons alors :

$$w_k = \frac{u_{n_k} - Pu_{n_k}}{\|u_{n_k} - Pu_{n_k}\|}.$$

Nous avons :

$$\begin{cases} \|w_k\| = 1, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} (w_k - Tw_k) = 0. \end{cases}$$

Par compacité de T , on peut extraire une sous suite, toujours notée w_k pour simplifier, telle que :

$$\begin{cases} w_k \rightarrow w \quad \text{dans } X, \\ w - Tw = 0. \end{cases}$$

Bien entendu, $\|w\| = 1$ et $w \in \text{Ker}(I - T)$. Mais, par construction même, $w_k \in \text{Ker}(I - T)^\perp$ et passage à la limite $w \in \text{Ker}(I - T)^\perp$ ce qui, joint à $w \in \text{Ker}(I - T)$, entraîne $w = 0$, ce qui est impossible puisque $\|w\| = 1$. La suite $u_n - Pu_n = \tilde{u}_n$ est donc bien bornée et $w = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\tilde{u}_n - T\tilde{u}_n)$. Par compacité de T , on peut extraire de \tilde{u}_n une sous suite toujours notée \tilde{u}_n pour simplifier, telle que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_n \rightharpoonup u & \text{dans } X \text{ faible,} \\ T\tilde{u}_n \rightarrow Tu & \text{dans } X \text{ fort.} \end{cases}$$

bien entendu par passage à la limite $v = Tu$ ce qui prouve que $\overline{\text{Im}(I - T)} \subset \text{Im}(I - T)$ et donc que $\text{Im}(I - T)$ est fermée. L'égalité $\text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$ vient alors de la propriété générale :

$$\forall A \in \mathcal{L}(X) \quad (\text{Ker}A^*)^\perp = \overline{\text{Im}(I - T)},$$

ce qui achève la preuve. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

Etape 1 $(I - T)$ injectif $\implies (I - T)$ surjectif

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $X_1 = \text{Im}(I - T) \neq X$. Alors X_1 est un espace de Hilbert et la restriction de T à X_1, T_1 , est un nouvel opérateur compact dans X_1 qui vérifie à nouveau la propriété $\text{Im}(I - T_1) \neq X_1$. En effet, soit $v \in X, v \neq 0$, tel que $v \notin X_1$ (ceci est possible puisque $X_1 \neq X$), on a $v - Tv \in X_1 = \text{Im}(I - T)$. Si $I - T_1$ était surjectif, on pourrait trouver v_1 dans X_1 tel que $v_1 - Tv_1 = v - Tv$. $I - T$ étant par hypothèse injectif ceci entraînerait $v = v_1$ ce qui est impossible puisque $v \notin X_1$. Par conséquent en réitérant le raisonnement précédent $X_2 = \text{Im}(I - T_1)$ est un espace de Hilbert strictement inclus dans X_1 et la restriction de T (ou T_1) à X_2 , soit T_2 , est un opérateur compact dans X_2 vérifiant $\text{Im}(I - T_2) \neq X_2$. De proche en proche on construit ainsi une famille X_n d'espaces de Hilbert et une suite d'opérateurs compacts dans X_n, T_n , vérifiant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = \text{Im}(I - T_n) \subset X_n \text{ strictement} \\ T_{n+1} = T_n|_{X_{n+1}} = T|_{X_{n+1}} \end{cases}$$

Comme $X_{n+1} \subset X_n$ strictement, on peut trouver un vecteur unitaire dans X_n , soit u_n , qui est orthogonal à X_{n+1} . On construit ainsi une suite de vecteurs u_n qui est orthonormée car si $m > n$, le fait que $u_m \in X_m$ entraîne $u_m \in X_{n+1}$ ($X_m \subset X_{n+1}$) et donc $(u_m, u_n) = 0$. Pour arriver à une contradiction, nous allons montrer que la suite Tu_m ne peut avoir de sous suite convergente, ce qui contredit le fait que T est compact.

Soit alors $m \neq n$, par exemple $m > n$, nous avons :

$$Tu_m - Tu_n = (I - T)u_n - (I - T)u_m + u_m - u_n$$

Or $(I - T)u_n \in X_{n+1}$ et $(I - T)u_m \in X_{m+1} \subset X_{n+1}$. Par ailleurs $u_m \in X_m \subset X_{n+1}$ et donc le vecteur $(I - T)u_n - (I - T)u_m + u_m$ est dans X_{n+1} et donc orthogonal à u_n . Il s'ensuit que :

$$\|Tu_m - Tu_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \|(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_m\|^2 \geq 1$$

ce qui montre que Tu_n ne peut avoir de sous suite convergente, ce que l'on voulait démontrer.

Remarque 24 Dans la récurrence, c'est l'injectivité de $(I - T)$ qui entraîne la décroissance stricte de la suite X_n .

Etape 2 Si $Im(I - T) = X, Ker(I - T^*) = 0$. Or si T est compact, T^* l'est également et d'après ce que l'on vient de voir $Im(I - T^*) = X$. Par conséquent, $Ker(I - T) = 0$. Donc :

$$(I - T) \text{ surjectif} \implies (I - T) \text{ injectif}$$

Annexe B

Théorème de prolongement unique

Cette annexe est consacré à la démonstration du théorème de prolongement unique qui permet de montrer que si une fonction assez régulière (en l'occurrence H_{loc}^2) satisfait dans un ouvert connexe \mathcal{O} une inégalité du type:

$$|\Delta u| \leq C (|u| + |\text{grad } u|)$$

(ce qui en particulier est le cas si u est solution d'une équation du type $\Delta u + b.\text{grad } u + a u = 0$ avec a et b bornés) et s'annule au voisinage d'un point x_o de cet ouvert \mathcal{O} , alors u s'annule identiquement dans \mathcal{O} . L'idée de la preuve est fondée sur le résultat suivant: si u satisfait l'inégalité précédente et s'annule sur une boule de centre x_o et de rayon $\epsilon < 1/2$, alors u s'annule dans une boule de rayon un peu plus grand (voir la démonstration du lemme 3); puis, il suffit d'utiliser un argument de connexité et de relier n'importe quel point x de \mathcal{O} à x_o par une suite finie de boules ouvertes B_j telle que B_j et B_{j+1} ont une intersection non vide (c'est ce dernier argument qui est développé dans la rédaction du théorème 1). Rappelons qu'une des conséquences des théorèmes de prolongement unique est l'unicité pour les problèmes de Cauchy pour les opérateurs elliptiques (ce qui généralise le théorème de Holmgren dans le cas des coefficients constants et le théorème de Cauchy-Kowalevska dans le cas des coefficients analytiques).

La partie la plus technique de la démonstration est l'obtention des estimations *a priori* qui servent à établir le résultat préliminaire (lemme 3). Ces estimations de u et $\text{grad } u$ dans des normes L^2 à poids (le poids dépendant d'un paramètre β autorisé à varier dans un intervalle du type $[\beta_o, +\infty[$) en fonction de Δu sont l'objet des lemmes 4 et 5. Les constantes intervenant dans ces inégalités tendent vers 0 lorsque β tend vers l'infini et obligent de ce fait la fonction à s'annuler au voisinage de x_o . Pour simplifier la rédaction, on choisit $x_o = 0$.

Lemme 1 : Soit $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ ($N \geq 2$) satisfaisant:

$$\text{supp } u \subset \bar{D}_{\epsilon, r_o} = \{x \in \mathbb{R}^N; \epsilon \leq |x| \leq r_o\}$$

avec $0 < \epsilon < r_o \leq 1$. Alors il existe une constante $\beta_o > 0$ et il existe C_o , ne dépendant que de β_o , tels que pour tout $\beta > \beta_o$:

$$(B.1) \quad \int_{D_{\epsilon, r_o}} |u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} \leq \frac{C_o}{\beta^4} \int_{D_{\epsilon, r_o}} |\Delta u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx$$

Démonstration : Posons $\psi_\beta(x) = \exp\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ et $\phi_\beta(x) = \exp\left(-\frac{1}{|x|^\beta}\right)$, puis introduisons la fonction $w = \psi_\beta u$ (soit $u = \phi_\beta w$). Notons que:

$$\Delta u = \phi_\beta \Delta w + 2 \text{grad } \phi_\beta . \text{grad } w + \Delta \phi_\beta w$$

avec $\text{grad } \phi_\beta = \frac{\beta x}{|x|^{\beta+2}} \phi_\beta$ et $\Delta \phi_\beta = \frac{\beta}{|x|^{\beta+2}} (N - 2 - \beta + \frac{\beta}{|x|^\beta}) \phi_\beta$. On évalue alors:

$$\begin{aligned} |\Delta u|^2 &= \phi_\beta^2 |\Delta w|^2 + 4 |\text{grad } \phi_\beta . \text{grad } w|^2 + (\Delta \phi_\beta)^2 |w|^2 + 2 \phi_\beta \Delta \phi_\beta \mathcal{R}e(\Delta w \bar{w}) \\ &\quad + 4 \phi_\beta \text{grad } \phi_\beta . \mathcal{R}e(\Delta w \text{grad } \bar{w}) + 4 \Delta \phi_\beta \text{grad } \phi_\beta . \mathcal{R}e(w \text{grad } \bar{w}) \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$|\Delta u|^2 \geq 4 \frac{\beta \phi_\beta^2}{|x|^{\beta+2}} x \cdot \text{Re}(\Delta w \text{ grad } \bar{w}) + 4 \frac{\beta^2 \phi_\beta^2}{|x|^{2\beta+4}} (N-2-\beta + \frac{\beta}{|x|^\beta}) x \cdot \text{Re}(w \text{ grad } \bar{w})$$

Supposons maintenant, quitte à conclure par densité, que $u \in \mathcal{D}(D_{\epsilon, r_0})$; par construction $w \in \mathcal{D}(D_{\epsilon, r_0})$. Après multiplication par ψ_β^2 et intégration de l'inégalité précédente, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\Delta u|^2 \psi_\beta^2 |x|^{\beta+2} dx &\geq 4\beta \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(\Delta w \text{ grad } \bar{w}) dx + \\ &+ 4\beta^2(N-2-\beta) \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(w \text{ grad } \bar{w}) \frac{dx}{|x|^{\beta+2}} + 4\beta^3 \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(w \text{ grad } \bar{w}) \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} \end{aligned}$$

Nous allons évaluer les trois termes à gauche de l'inégalité. Par la formule de Green, on établit les identités suivantes (voir exercice ci-après) :

$$\begin{aligned} \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(\Delta w \text{ grad } \bar{w}) dx &= \left(\frac{N}{2} - 1\right) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } w|^2 dx \\ \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(w \text{ grad } \bar{w}) \frac{dx}{|x|^\gamma} &= \frac{\gamma - N}{2} \int_{D_{\epsilon, r_0}} |w|^2 \frac{dx}{|x|^\gamma} \end{aligned}$$

On en déduit, compte tenu de $w = \psi_\beta u$:

$$\begin{aligned} \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\Delta u|^2 \psi_\beta^2 |x|^{\beta+2} dx &\geq 2\beta(N-2) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad}(\psi_\beta^2 u)|^2 dx + \\ &+ 2\beta^3(2\beta+2-N) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} - 2\beta^2(N-2-\beta)^2 \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{\beta+2}} \end{aligned}$$

Le premier terme à gauche de l'inégalité est positif dès que $N > 2$ et nul lorsque $N = 2$. De plus, comme $\text{supp } u \subset \bar{D}_{\epsilon, r_0}$, il vient :

$$\int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{\beta+2}} \leq r_0^\beta \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}$$

Par conséquent on obtient :

$$\int_{D_{\epsilon, r_0}} |\Delta u|^2 \psi_\beta^2 |x|^{\beta+2} dx \geq \beta^4 F(\beta) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}}$$

où nous avons posé :

$$F(\beta) = \frac{4\beta^4 - 2\beta^3(N-2) - 2r_0^\beta \beta^2(N-2-\beta)^2}{\beta^4}$$

Remarquons que, pour $r_0 < 1$, $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) = 4$. On établit donc l'inégalité (B.1) pour β assez grand, i.e. pour tout $\beta > \beta_0$ avec $F(\beta_0) \geq 1/C_0$. ■

Exercice 10 Démontrer que pour tout $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, ($N \geq 2$) satisfaisant :

$$\text{supp } u \subset \bar{D}_{\epsilon, r_0} = \{x \in \mathbb{R}^N; \epsilon \leq |x| \leq r_0\}$$

on a les deux identités :

$$\begin{aligned} \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(\Delta w \text{ grad } \bar{w}) dx &= \left(\frac{N}{2} - 1\right) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } w|^2 dx \\ \int_{D_{\epsilon, r_0}} x \cdot \text{Re}(w \text{ grad } \bar{w}) \frac{dx}{|x|^\gamma} &= \frac{\gamma - N}{2} \int_{D_{\epsilon, r_0}} |w|^2 \frac{dx}{|x|^\gamma} \end{aligned}$$

Lemme 2 : Soit $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ ($N \geq 2$) satisfaisant:

$$\text{supp } u \subset \bar{D}_{\epsilon, r_0} = \{x \in \mathbb{R}^N; \epsilon \leq |x| \leq r_0\}$$

avec $0 < \epsilon < r_0 \leq 1$. Alors il existe $\beta_0 > 0$ et il existe une constante C_1 , ne dépendant que de r_0 et de β_0 , tels que, pour tout $\beta > \beta_0$, l'inégalité (10) est satisfaite et:

$$(B.2) \quad \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) dx \leq \frac{C_1}{\beta^2} \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\Delta u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx$$

Démonstration : De même qu'au lemme précédent nous démontrons l'inégalité pour $u \in \mathcal{D}(D_{\epsilon, r_0})$, puis on conclut par densité. On remarque que l'on a par la formule de Green:

$$- \int_{D_{\epsilon, r_0}} (\Delta u \bar{u} + \Delta \bar{u} u) \psi_\beta^2 dx = 2 \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \psi_\beta^2 dx + \int_{D_{\epsilon, r_0}} (\bar{u} \text{grad } u + u \text{grad } \bar{u}) \cdot \text{grad}(\psi_\beta^2) dx$$

soit:

$$- \int_{D_{\epsilon, r_0}} (\Delta u \bar{u} + \Delta \bar{u} u) \psi_\beta^2 dx = 2 \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \psi_\beta^2 dx + \int_{D_{\epsilon, r_0}} \text{grad}(|u|^2) \cdot \text{grad}(\psi_\beta^2) dx$$

et en utilisant une seconde fois la formule de Green:

$$- \int_{D_{\epsilon, r_0}} (\Delta u \bar{u} + \Delta \bar{u} u) \psi_\beta^2 dx = 2 \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \psi_\beta^2 dx - \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \Delta(\psi_\beta^2) dx$$

Par ailleurs, on calcule:

$$\Delta(\psi_\beta^2) = \frac{4\beta^2}{|x|^{2\beta+2}} \left(1 - \frac{N + \beta + 2}{2\beta} |x|^\beta\right) \psi_\beta^2$$

et il existe β_0 (assez grand) et C'_1 tels que pour tout $|x| < r_0 < 1$ et pour tout $\beta > \beta_0$:

$$\Delta(\psi_\beta^2) \leq C'_1 \frac{\beta^2}{|x|^{2\beta+2}} \psi_\beta^2$$

(en particulier β_0 est choisi de sorte que $1 - r_0^\beta (N + \beta + 2)/(2\beta) > 0$). Ainsi on obtient l'inégalité:

$$\int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \psi_\beta^2 dx \leq \frac{C'_1}{2} \beta^2 \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} + \int_{D_{\epsilon, r_0}} \frac{|\Delta u \bar{u} + u \Delta \bar{u}|}{2} \psi_\beta^2 dx$$

Enfin, on montre par l'inégalité de Young que:

$$|\Delta u \bar{u} + u \Delta \bar{u}| \leq \frac{|u|^2}{|x|^{2\beta+2}} + |x|^{2\beta+2} |\Delta u|^2$$

et donc:

$$\int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \psi_\beta^2 dx \leq \frac{1}{2} (C'_1 \beta^2 + 1) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |u|^2 \psi_\beta^2 \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} + \frac{1}{2} \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\Delta u|^2 \psi_\beta^2 |x|^{2\beta+2} dx$$

Ainsi, en utilisant l'estimation du lemme 1 et le fait que $\text{supp } u \subset \bar{D}_{\epsilon, r_0}$, nous avons pour tout $\beta > \beta_0$ (avec $\beta_0 > N + 2$):

$$\int_{D_{\epsilon, r_0}} |\text{grad } u|^2 \psi_\beta^2 dx \leq \frac{1}{2\beta^4} (r_0^\beta \beta^4 + C_0 C'_1 \beta^2 + C_0) \int_{D_{\epsilon, r_0}} |\Delta u|^2 \psi_\beta^2 |x|^{\beta+2} dx$$

L'inégalité (B.2) s'obtient en choisissant C_1 tel que $C_1 > (1/2)(C_0 C'_1 + C_0/\beta_0^2 + C'_2)$ où la constante C'_2 est déterminée de façon à majorer $\beta^2 \exp(-\beta |\ln r_0|)$ pour tout $\beta > \beta_0$.

Lemme 3 : Soit $B(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r . Soit $\epsilon < r_0/2 < 1/2$ et soit u une fonction de $H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ s'annulant dans la boule $B(0, \epsilon)$. On suppose qu'il existe une constante C telle que l'on ait presque partout dans $B(0, r_0)$:

$$(B.3) \quad |\Delta u| \leq C (|u| + |\text{grad } u|)$$

Alors $u \equiv 0$ presque partout dans $B(0, r_0/2)$.

Démonstration : Soit φ une fonction *cut-off* satisfaisant $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp } \varphi \subset B(0, r_0)$, $\varphi(x) = 1$ dans $B(0, r_0/2)$. En appliquant les estimations des lemmes 1 et 2 à la fonction φu , il existe une constante positive C_2 telle que (pour tout $\beta > \beta_0$):

$$\int_{B(0, r_0)} \left(\frac{|\varphi|^2 |u|^2}{|x|^{2\beta+2}} + |\text{grad}(\varphi u)|^2 \right) \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) dx \leq \frac{C_2}{\beta^2} \int_{B(0, r_0)} |\Delta(\varphi u)|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx$$

En particulier:

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r_0/2)} \left(\frac{|u|^2}{|x|^{2\beta+2}} + |\text{grad } u|^2 \right) \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) dx &\leq \frac{C_2}{\beta^2} \int_{B(0, r_0/2)} |\Delta u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx + \\ &+ \frac{C_2}{\beta^2} \int_{D_{r_0/2, r_0}} |\Delta(\varphi u)|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (B.3), on a:

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r_0/2)} \left(\frac{|u|^2}{|x|^{2\beta+2}} + |\text{grad } u|^2 \right) \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) dx &\leq \frac{2C^2 C_2}{\beta^2} \int_{B(0, r_0/2)} (|u|^2 + |\text{grad } u|^2) \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx \\ &+ \frac{C_2}{\beta^2} \int_{D_{r_0/2, r_0}} |\Delta(\varphi u)|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) |x|^{\beta+2} dx \end{aligned}$$

En choisissant β assez grand pour que $2C^2 C_2 (r_0/2)^{\beta+2} / \beta^2 < 1$, il vient notamment:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2C^2 C_2}{\beta^2} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{3\beta+4}\right) \int_{B(0, r_0/2)} |u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} &\leq \\ &\leq \frac{C_2}{\beta^2} r_0^{3\beta+4} \int_{D_{r_0/2, r_0}} |\Delta(\varphi u)|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} \end{aligned}$$

Or, la fonction $|x| \rightarrow \exp(2/|x|^\beta)/|x|^{2\beta+2}$ étant décroissante, on voit facilement que:

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r_0/2)} |u|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} &\geq C_3 \int_{B(0, r_0/2)} |u|^2 dx \\ \int_{D_{r_0/2, r_0}} |\Delta(\varphi u)|^2 \exp\left(\frac{2}{|x|^\beta}\right) \frac{dx}{|x|^{2\beta+2}} &\leq C_3 \int_{D_{r_0/2, r_0}} |\Delta(\varphi u)|^2 dx \end{aligned}$$

où $C_3 = \exp(2\beta+1/r_0^\beta)(2/r_0)^{2\beta+2}$. On en déduit alors:

$$\int_{B(0, r_0/2)} |u|^2 dx \leq \frac{C_2 r_0^{3\beta+4}}{\beta^2 - 2C^2 C_2 (r_0/2)^{3\beta+4}} \int_{D_{r_0/2, r_0}} |\Delta(\varphi u)|^2 dx$$

On établit le lemme en faisant tendre β vers $+\infty$, i.e.

$$\int_{B(0, r_0/2)} |u|^2 dx = 0$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de prolongement unique:

Théorème 1 : Soit \mathcal{O} un ouvert connexe de \mathbb{R}^N et soit u une fonction de $H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant:

$$i. \exists x_0 \in \mathcal{O}, \exists \epsilon > 0, \quad |x - x_0| < \epsilon \implies u(x) = 0$$

$$ii. \exists C > 0, \quad \text{pour presque tout } x \in \mathcal{O}, |\Delta u(x)| \leq C (|u(x)| + |\text{grad } u(x)|)$$

alors $u(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}$.

Démonstration : Soit x un point de \mathcal{O} . Par connexité, on peut toujours trouver $r_0 < 1$ et une suite de n points $x_0, x_1, \dots, x_n = x$ tels que: pour tout $j \leq n$, $B(x_j, r_0) \subset \mathcal{O}$, et, de plus, pour tout $j \leq (n-1)$, $|x_{j+1} - x_j| < r_0/2$. Sachant que u s'annule dans un voisinage de x_0 , d'après le lemme 3, u s'annule donc dans la boule de centre x_0 et de rayon $r_0/2$ et en particulier dans un voisinage de x_1 . Par récurrence, on montre ainsi que, si u s'annule dans un voisinage de x_j , alors u s'annule dans un voisinage de x_{j+1} . L'opération peut être menée jusqu'à x ce qui achève la démonstration. ■

Comme application du théorème 1, nous allons démontrer un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy associé à l'équation:

$$\Delta u + b.\text{grad } u + a u = f$$

Théorème 2 : Soit \mathcal{O} un ouvert connexe de \mathbb{R}^N . On suppose qu'il existe x_0 de $\partial\mathcal{O}$ et $\epsilon > 0$ tel que $\Gamma_\epsilon(x_0) = \partial\mathcal{O} \cap B(x_0, \epsilon)$ soit suffisamment régulière (au moins Lipschitz-continue). Soit alors $u \in H_{loc}^2(\mathcal{O})$ solution au sens des distributions de

$$\Delta u + b.\text{grad } u + a u = 0$$

où les coefficients a et b sont mesurables bornés dans \mathcal{O} , satisfaisant à:

$$u|_{\Gamma_\epsilon(x_0)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_\epsilon(x_0)} = 0$$

Alors $u \equiv 0$ dans \mathcal{O} .

Démonstration : Soit $\mathcal{O}_\epsilon = \mathcal{O} \cup B(x_0, \epsilon)$, et soit u_ϵ la fonction définie par: $u_\epsilon|_{\mathcal{O}} = u$ et $u_\epsilon = 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon - \mathcal{O}$. Il est facile de vérifier que $u_\epsilon \in H_{loc}^2(\mathcal{O}_\epsilon)$. De plus: $\text{grad } u_\epsilon|_{\mathcal{O}} = \text{grad } u$ et $\text{grad } u_\epsilon = 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon - \mathcal{O}$; $\Delta u_\epsilon|_{\mathcal{O}} = \Delta u$ et $\Delta u_\epsilon = 0$ dans $\mathcal{O}_\epsilon - \mathcal{O}$. En prolongeant les coefficients par 0, on a même

$$\Delta u_\epsilon + b.\text{grad } u_\epsilon + a u_\epsilon = 0 \quad \text{dans } L_{loc}^2(\mathcal{O}_\epsilon)$$

Le théorème de prolongement unique nous permet alors de conclure que $u_\epsilon \equiv 0$ dans \mathcal{O}_ϵ . ■