23/11/2015

Ασκήσεις 5

1. Θεωρήστε την εξίσωση $u_t = xu_{xx}$, $0 < x < 1/2$, $0 < t < T_f$, με συνοριακές συνθήκες $u(t, 0) = 0$ και $u_x(t, 1/2) = -\frac{1}{2}u(t, 1/2)$, $t \in [0, T_f]$, και αρχική συνθήκη $u(0, x) = x(1-x)$, $0 \le x \le 1/2$. Έστω x_i, $i = 0, 1, \ldots, N_x + 1$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0, 1/2]$ με βήμα $h = \frac{1}{2(N_x+1)}$, και t_n, $n = 0, 1, \ldots, N_t$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0, T_f]$ με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$. Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε όλες τις παραγώγους ως προς x, με κεντρικές διαφορές, τότε η απλούστερη *άμεση* μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης u στο σημείο (t_n, x_i) μπορεί να γραφεί ως
$$U_i^{n+1} = i\mu h U_{i-1}^n + (1 - 2i\mu h)U_i^n + i\mu h U_{i+1}^n, \quad i = 1, \ldots, N_x$$
και
$$U_{N_x+1}^{n+1} = 2(N_x + 1)\mu h U_{N_x}^n + \left[1 - 2(N_x + 1)\mu h - (N_x + 1)\mu h^2\right] U_{N_x+1}^n,$$
για $n = 0, 1, \ldots, N_t$, όπου $\mu := \tau/h^2$.

2. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + au_x = 0$, με $a > 0$ σταθερό, όπου $0 < t < T_f$ και $x \in \mathbb{R}$, με αρχική συνθήκη $u(0, x) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_j = jh$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία στον άξονα των x και t_n, $n = 0, 1, \ldots, N_t$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0, T_f]$ με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$.

   (α΄) Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε τη χρονική παράγωγο με προς τα εμπρός διαφορά και τη χωρική παράγωγο με κεντρική διαφορά με βήμα $2h$, τότε η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης u στο σημείο (t_n, x_j) είναι
   $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\nu}{2}\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$
   όπου $\nu := \frac{\tau}{h}$ είναι ο αριθμός Courant. Χρησιμοποιήστε ανάλυση von Neumann για να αποδείξετε ότι η μέθοδος αυτή είναι ασταθής. Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό;

   (β΄) Αν αντικαταστήσουμε στο παραπάνω σχήμα την τιμή U_j^n με τον μέσο όρο $\frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$, καταλήγουμε στο σχήμα Lax-Friedrichs:
   $$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{a\nu}{2}\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$
   Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό; Μελετήστε την ευστάθεια της μεθόδου.

3. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + \frac{1}{2}u_x = 0$, $0 \le t \le 4$, $0 \le x \le 4$, με αρχική συνθήκη
$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 10x(2-x), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$
και συνοριακή συνθήκη $u(t, 0) = 0$, $0 \le t \le 4$.

(α΄) Σχεδιάστε στιγμιότυπα της ακριβούς λύσης για τις χρονικές στιγμές $t = 0, 2, 4$.

(β΄) Διατυπώστε τη μέθοδο upwind, για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με χρονικό βήμα τ και χωρικό βήμα h, για το πρόβλημα αυτό και υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης στα σημεία $x = 1, 2, 3, 4$ στον τελικό χρόνο $t = 4$, παίρνοντας:
(i) $h = 1$ και $\tau = 1$.
(ii) $h = 1$ και $\tau = 2$.
(iii) $h = 1$ και $\tau = 4$.
Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό;